

**HEC MONTRÉAL**  
École affiliée à l'Université de Montréal

**Risque opérationnel des institutions bancaires :  
modélisation et validation**

**par  
Samir Saissi Hassani**

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Ph. D. en administration  
(option Finance)

Octobre 2015

© Samir Saissi Hassani, 2015



**HEC MONTRÉAL**  
École affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :

**Risque opérationnel des institutions bancaires :  
modélisation et validation**

Présentée par :

**Samir Saissi Hassani**

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Simon Lalancette  
HEC Montréal  
Président-rapporteur

Georges Dionne  
HEC Montréal  
Directeur de recherche

Bruno Rémillard  
HEC Montréal  
Membre du jury

Van Son Lai  
Université Laval  
Examineur externe

Nicolas Sahuguet  
HEC Montréal  
Représentant du directeur de HEC Montréal



## Résumé

En 2004, la réglementation Bâle II institutionnalise le risque opérationnel. Les banques peuvent concevoir leurs propres modèles internes pour calculer le capital de réserve par l'approche *AMA* (*Advanced Measurement Approach*). Très vite, les chercheurs et les praticiens se rendent compte qu'il faut soulever un défi triple. Relativement aux risques conventionnels de crédit et de marché, les données de pertes opérationnelles sont plus rares et de moins bonne qualité. Leur distribution exhibe une queue définitivement plus épaisse. Enfin, pour déterminer le capital réglementaire, Bâle II exige un calcul de la valeur à risque (VaR) à 99,9%. De ce fait, les estimations du capital semblent trop fragiles et instables, les calculs donnent souvent des montants très différents, voire irréalistes, selon les modèles et techniques employés. Des petites variations dans les estimations peuvent engendrer un impact drastique sur le calcul du capital. (Dutta et Perry, 2008; Ames *et al.*, 2014).

Pour une même banque et les mêmes données de pertes opérationnelles, le capital calculé peut varier de quelque 1,5% jusqu'à plus de 1 000% du total des actifs de la banque ! De plus, les techniques statistiques de *backtesting* qui servent habituellement à valider les modèles ne sont pas efficaces à cause de la rareté des données. L'hétérogénéité de toute nature dans les données, l'existence de biais, les hypothèses de travail, les méthodes d'estimation, bref, toutes les pistes sont explorées pour diagnostiquer la situation et apporter une contribution. Beaucoup d'efforts sont nécessaires pour réaliser un certain avancement dans la recherche du risque opérationnel, et beaucoup restent encore à venir afin de mieux maîtriser ce risque (Cope, 2011; Embrechts et Hofert, 2011; Moosa, 2007; Dahan et Dionne, 2010; Dutta et Perry, 2008; Opdyke et Cavallo, 2012; Zhou *et al.*, 2014).

C'est dans ce contexte que s'inscrit le travail dans cette thèse. Nous commençons par un premier chapitre *introduction*, nous y ferons à la fois un état des lieux combiné avec une revue de littérature succincte du risque opérationnel. Au chapitre 2, nous prouvons

l'existence d'un régime endogène dans les données des pertes opérationnelles. C'est une hétérogénéité temporelle induisant un biais. Si elle est ignorée dans le calcul du capital réglementaire, ce dernier serait sous-estimé en période de pertes extrêmes et surestimé ailleurs. Le régime est détecté avec le concept de *Hidden Markov Modeling*, et est injecté dans le modèle de Dahen et Dionne (2010) pour en faire une première extension. Appliquée aux données de la période de 2001 à 2010, la correction du biais serait de l'ordre de 30%.

Au chapitre 3, nous révélons la présence d'une dépendance entre les distributions des fréquences et des sévérités, concernant la période de 1994 à 2000. Ceci viole une hypothèse fondamentale de la modélisation *AMA*. L'utilisation des données de perte de cette période telles quelles ne serait pas recommandée. Cela expliquerait, en partie, les calculs de capital réglementaire trouvés incohérents dans la littérature. Par ailleurs, nous construisons une mesure de l'exposition au risque opérationnel des banquiers et l'appelons *IOP*. Cette mesure *IOP* s'avère intéressante à plusieurs égards. À l'aide de cette mesure, nous établissons une relation directe et originale entre le risque opérationnel et les risques conventionnels de crédit, de marché et de liquidité. Outre la taille des banques, douze ratios de gestion sont identifiés comme déterminants. Nous introduisons *IOP* comme une deuxième extension des modèles de Dahen et Dionne (2010). Des estimations montrent alors que deux banques de même taille, mais dont les ratios de gestion sont différents, peuvent aboutir à des calculs de capital réglementaire différents. Ceci est conforme à l'esprit de la réglementation et à l'intuition financière. Autrement dit, il y a un biais si le capital des banques est calculé sans tenir compte de la spécificité de leur gestion des risques. Ce biais peut atteindre 20 à 30% du capital de trop. Des applications concrètes concernant la méthode des scénarios et le *stress testing* sont également proposées.

Dans le chapitre 4, nous nous concentrons sur la procédure de validation des modèles, le *backtesting*, afin d'en concevoir un nouvel outil simple, mais concluant dans nos tests. Il permet d'évaluer et de comparer les performances entre des modèles concurrents de calcul de capital. Cela inclut une démarche pour quantifier l'impact des scénarios et opi-

nions des experts que demande Bâle II. De plus, nous présentons une nouvelle méthodologie permettant de mesurer l'amplitude des périodes de *stress*. Comme application, nous obtenons une mesure d'une magnitude de 5,3 comme choc stochastique multiplicatif de la période des grandes pertes de juillet 2007 à mars 2009 par rapport à la période de janvier 2001 à juin 2007. Enfin, dans le dernier chapitre, nous ferons une conclusion de l'ensemble de nos résultats et contributions.

**Mots clés :** Risque opérationnel, Bâle II et III, modèle des sévérités et des fréquences, valeur à risque, capital réglementaire des banques, mise à l'échelle (*scaling*), approche *AMA*, méthode des scénarios, validation des modèles (*backtesting*), *stress testing*, régime caché de Markov, classification des distributions à queue épaisse.

**Méthodes de recherche :** Modélisation mathématique, économétrie, tests statistiques.

## Abstract

In June 2004, the Basel II settlements institutionalize the operational risk. Banks can design internal models to calculate their own regulatory capital, using AMA (Advanced Measurement Approach). Very soon, researchers and practitioners faced threefold challenges. Compared to conventional credit and market risks, operational loss data are rarer and of poorer quality. Their distribution exhibits definitely a heavier tail. Finally, to determine the regulatory capital, Basel II requires to compute a value at risk at 99.9% level of confidence. Therefore, capital estimates seem too fragile and unstable, calculations give very different amounts, even unrealistic, depending on the models and techniques used. Also, small changes in estimations could generate very big impacts on the computed capital (Dutta and Perry, 2008; Ames *et al.*, 2014).

Depending on the models used for the same bank and the same operational loss data, the capital calculated can vary in a range from 1.5% up to more than 1000% of the bank total assets ! Furthermore, the *backtesting*, conventional statistical tools to validate models, are not efficient enough. Subsequently, all avenues are regularly explored to diagnose the situation and suggest solutions : the heterogeneity and contamination in the data, the possible bias, the working assumptions, the estimation methods, etc. A lot of work has been done to make some advances, and a lot is still to come (see Cope, 2011; Embrechts and Hofert, 2011; Moosa, 2007; Dahlen and Dionne, 2010; Dutta and Perry, 2008; Opdyke and Cavallo, 2012; Zhou, Durfee and Fabozzi, 2014).

In this context of work, we start with a first chapter *introduction* where we give a mixture of literature review, practices and issues regarding operational risk developments. In chapter 2, we prove the existence of an endogenous regime in the operational loss data. This is a temporal heterogeneity inducing a bias. If it is ignored in the calculation of regulatory capital, the latter would be underestimated for high loss cycles and overestimated elsewhere. The regime change is detected using the Hidden Markov Modeling concept (HMM), and is injected into Dahlen and Dionne (2010) model as an extension.

Applied to data from the period 2001 to 2010, the bias correction would be about 30% of the capital, according to our estimations.

In chapter 3, we make an extension of HMM which reveals a concern about the independence assumption of frequency and severity distributions. This violates a main AMA assumption regarding the period 1994-2000. The capital calculations could lead to very inconsistent results. Thus, the carelessly use of data from this period would not be recommended.

Moreover, we construct a measure of the operational risk exposure of bankers, called *IOP*. This measure is interesting in several respects. Using it, we establish a direct and new way to link operational risk with conventional credit, market and liquidity risks. Besides the bank size, twelve management ratios are identified as determinants explaining *IOP* at a power of 85%. We introduce *IOP* as a second extension of Dahen and Dionne (2010) model. Our estimates show that two banks of the same size but whose risk management ratios are different can lead to different regulatory capital calculations, in accordance with financial intuition. In other words, there is a bias if the capital of the two banks is calculated without taking into account the specificity of bank risk management. This bias can reach 20 to 30% of the capital! Applications concerning the scenario method and the stress testing are offered.

In chapter 4, we focus on backtesting, being very difficult for operational risk. We offer a new simple tool that seems to behave well in our tests, including impact evaluation of scenarios. We construct by extension of this tool a methodology for measuring the magnitude of a stress testing period. As an application, this measure delivers a magnitude of 5.3 multiplicative stochastic shock regarding the period from July 2007 to March 2009 compared to the period from January 2001 to June 2007. We also measure the marginal impact on the stress capital calculation. Finally, we summarize our results and contributions and conclude in the last chapter.

**Keywords:** Operational risk, Basel II and III, severity and frequency modeling, value

at risk, banks regulatory capital, scaling, Advanced Measurement Approach, scenario analysis, backtesting validation, stress testing, Hidden Markov Modeling, heavy-tailed distributions.

**Research methods:** Mathematical modeling, econometrics, statistical tests.

# Table des matières

<b>Résumé</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>Abstract</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>Table des matières</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>Liste des tableaux</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>Liste des figures</b> . . . . .	<b>xvi</b>
<b>Abréviations</b> . . . . .	<b>xvii</b>
<b>Notation</b> . . . . .	<b>xviii</b>
<b>Dédicace</b> . . . . .	<b>xix</b>
<b>Remerciements</b> . . . . .	<b>xx</b>
<b>Chapitre 1 : Introduction générale</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Le contexte historique . . . . .	1
1.2 La nature du risque opérationnel . . . . .	3
1.3 La réglementation Bâle II . . . . .	5
1.4 Les modèles de l'approche <i>AMA-LDA</i> . . . . .	8
1.4.1 Le <i>scaling</i> des données externes . . . . .	9
1.4.2 Les scénarios et opinions des experts . . . . .	10
1.5 L'instabilité des calculs du capital réglementaire . . . . .	11
1.5.1 La problématique de l'estimation par maximum de vraisemblance	12
1.5.2 La troncature du seuil de collecte des données externes . . . . .	13
1.5.3 Les hypothèses d'indépendance . . . . .	13
1.5.4 Les méthodes bayésiennes . . . . .	14
1.6 La validation <i>backtesting</i> . . . . .	14
1.7 Le <i>stress testing</i> . . . . .	15
1.8 Conclusion . . . . .	16

<b>Chapitre 2 :</b>	<b>Régime temporel endogène dans les données . . . . .</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	19
2.2	Les données . . . . .	20
2.3	L'identification du régime . . . . .	24
2.3.1	La spécification <i>Hidden Markov Modeling (HMM)</i> . . . . .	26
2.3.1.1	Une revue de littérature succincte . . . . .	26
2.3.1.2	Le modèle <i>HMM</i> . . . . .	27
2.3.1.3	L'estimation du modèle <i>HMM</i> avec Baum-Welch . . . . .	27
2.3.1.4	Les résultats et discussions . . . . .	34
2.3.1.5	Le test de spécification du modèle <i>Hidden Markov</i> . . . . .	41
2.4	La mesure de l'effet du régime détecté . . . . .	44
2.5	La validation <i>backtesting</i> . . . . .	48
2.6	Conclusion . . . . .	56
	Appendice A : La distribution <i>Skew t de type 4</i> . . . . .	58
	Appendice B : Le modèle de Heckman . . . . .	59
<b>Chapitre 3 :</b>	<b>Mesure de l'exposition au risque opérationnel . . . . .</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Les données . . . . .	64
3.3	Une extension du modèle <i>HMM</i> . . . . .	65
3.3.1	Les résultats et discussions . . . . .	68
3.4	Une mesure d'exposition au risque opérationnel . . . . .	79
3.5	Des déterminants de la mesure de l'exposition au risque opérationnel . . . . .	87
3.6	Des applications . . . . .	102
3.7	Conclusion . . . . .	113
<b>Chapitre 4 :</b>	<b>Validation des modèles du risque opérationnel . . . . .</b>	<b>117</b>
4.1	Introduction . . . . .	117
4.2	La procédure <i>de bootstrapping</i> de Dowd (2002) . . . . .	120
4.3	Le développement théorique . . . . .	123
4.4	Des applications . . . . .	135
4.4.1	Un exemple . . . . .	135
4.4.2	Les pertes opérationnelles de Merrill Lynch . . . . .	138

4.4.3	Une application aux scénarios et opinions des experts . . . . .	145
4.5	Une extension au <i>stress testing</i> . . . . .	148
4.6	Conclusion . . . . .	154
<b>Chapitre 5 :</b>	<b>Conclusion générale . . . . .</b>	<b>157</b>
<b>Bibliographie . . . . .</b>		<b>161</b>

## Liste des tableaux

2.1	Tailles des banques BHC américaines par année (2001-2010) . . .	21
2.2	Pertes opérationnelles des banques BHC par décile des tailles (2001-2010) . . . . .	21
2.3	Nomenclature des codes des types de perte et des lignes d'affaires	22
2.4	Statistiques croisées : types de perte $\times$ lignes d'affaires (2001-2010) . . . . .	23
2.5	Estimation du modèle <i>HMM</i> (2001-2010) . . . . .	34
2.6	Résumé des pertes opérationnelles : juillet 2008 à novembre 2008	41
2.7	Résumé des pertes opérationnelles : août 2009 à février 2010 . . .	41
2.8	Tests statistiques de validation du modèle <i>HMM</i> . . . . .	42
2.9	Effet du régime détecté sur la distribution des sévérités . . . . .	45
2.10	Effet du régime détecté sur la distribution des fréquences . . . . .	49
2.11	Validation <i>backtesting</i> de la banque U.S. Bancorp . . . . .	53
2.12	Validation <i>backtesting</i> de la banque Fifth Third Bancorp . . . . .	54
2.13	Tests statistiques de validation des modèles concurrents . . . . .	55
2.14	Procédure de Heckman étage 1 . . . . .	59
2.15	Procédure de Heckman étage 2 . . . . .	60
3.1	Tailles des banques BHC par année (1994-2010) . . . . .	65
3.2	Pertes opérationnelles des banques BHC par décile des tailles (1994-2010) . . . . .	66
3.3	Statistiques croisées : types de perte $\times$ lignes d'affaires (1994-2010) . . . . .	66
3.4	Estimation du modèle <i>HMM</i> (1994-2010) . . . . .	68
3.5	Tests de validation du modèle <i>HMM</i> (1994-2010) . . . . .	69
3.6	Tests empiriques de la relation entre <i>lc123</i> et l'état RH . . . . .	74
3.7	Résumé des pertes opérationnelles : janvier 1996 à juin 2000 . . .	75
3.8	Occurrences de mots clés reliés au crédit, à la fraude ou jugement	79
3.9	Évaluation des mesures d'exposition au risque opérationnel sur la période 2001-2010 . . . . .	82
3.10	Effet de l'indice <i>IOP</i> sur la distribution des fréquences . . . . .	85
3.11	Liste des groupes de banques BHC et leurs indices respectifs . . .	88

3.12	Liste des variables construites à partir de la base BHC . . . . .	92
3.13	Corrélations entre les variables BHC . . . . .	94
3.14	Statistiques descriptives des variables BHC choisies . . . . .	95
3.15	Estimation du modèle Logit ordonné . . . . .	97
3.16	Tests de validation de l'hypothèse de proportionnalité (Brant, 1990) . . . . .	101
3.17	Validations <i>backtesting</i> U.S. Bancorp . . . . .	110
4.1	Statistiques descriptives des pertes de Merrill Lynch de janvier 1994 à juin 2011 . . . . .	118
4.2	Calculs de <i>bootstrapping</i> pour les modèles de Merrill Lynch . . .	123
4.3	Validation d'un exemple . . . . .	138
4.4	Validation des modèles de VaR de Merrill Lynch . . . . .	144
4.5	Évaluation des scénarios de Merrill Lynch . . . . .	148
4.6	Validation de l'amplitude de la période de stress . . . . .	151

## Liste des figures

2.1	Évolution des moyennes mensuelles des pertes opérationnelles . . .	25
2.2	Évolution des variances mensuelles des pertes opérationnelles . . .	25
2.3	Évolution du nombre de pertes opérationnelles . . . . .	25
2.4	Principe de base de la modélisation <i>HMM</i> . . . . .	27
2.5	Probabilités de transition de Markov . . . . .	35
2.6	Niveaux du régime Markov détectés pour 2001-2010 . . . . .	35
2.7	Histogrammes des pertes mensuelles et des pseudo-résidus . . . .	43
3.1	Niveaux du régime Markov détectés pour 1994-2010 . . . . .	69
3.2	Probabilités de transition de Markov pour 1994-2000 . . . . .	72
3.3	Probabilités de transition de Markov pour 2001-2010 . . . . .	72
3.4	Évolution du nombre d’annonces de pertes opérationnelles . . . . .	74
3.5	Évolution de coefficient de <i>IOP</i> dans le temps : janvier 1996 à décembre 2010 . . . . .	86
3.6	Tracés de contrôle de l’hypothèse de proportionnalité (Harrell, 2015) . . . . .	103
3.7	Tracé de contrôle de convergence de l’estimation du logit ordonné (partie 1/3) . . . . .	104
3.8	Tracé de contrôle de convergence de l’estimation du logit ordonné (partie 2/3) . . . . .	105
3.9	Tracé de contrôle de convergence de l’estimation du logit ordonné (partie 3/3) . . . . .	106
4.1	Pertes de Merrill Lynch de janvier 1994 à juin 2011 . . . . .	119
4.2	Évaluation empirique de distributions <i>GPareto</i> selon le paramètre <i>shape</i> $\xi$ . . . . .	131
4.3	Évaluation empirique de distributions lognormales selon le para- mètre <i>scale</i> $\sigma$ . . . . .	136
4.4	Tracés d’un exemple . . . . .	139
4.5	Estimateur de Hill des pertes de Merrill Lynch et QQ-plot . . . . .	141
4.6	Tracé chronologique des pertes de Merrill Lynch avec les VaRs à 95%, 99% et 99,9% . . . . .	142
4.7	Tracé de la mesure du choc de stress . . . . .	152

# Abréviations

Code	Désignation
<i>ET</i>	<i>Event Type</i> (type de perte) : <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>CliPBP</i> <i>Clients, products and business practices</i> (Clients, produits et pratiques commerciales)</li> <li>• <i>BusDSF</i> <i>Business disruption and system failures</i> (Dysfonctionnement des activités et des systèmes)</li> <li>• <i>DamPA</i> <i>Damage to physical assets</i> (Dommages aux actifs physiques)</li> <li>• <i>EmpWS</i> <i>Employment practices and workplace safety</i> (Pratiques en matière d'emploi et sécurité au travail)</li> <li>• <i>EF</i> <i>External fraud</i> (Fraude externe)</li> <li>• <i>IF</i> <i>Internal fraud</i> (Fraude interne)</li> <li>• <i>ExeDPM</i> <i>Execution delivery and process management</i> (Exécution, livraison et gestion des processus)</li> </ul>
<i>BL</i>	<i>Business Lines</i> (ligne de métier ou d'affaire bancaire) : <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>RBr</i> <i>Retail brokerage</i> (Courtage de détail)</li> <li>• <i>PayS</i> <i>Payment and settlement</i> (Paiements et règlements)</li> <li>• <i>TraS</i> <i>Trading and sales</i> (Négociation et vente)</li> <li>• <i>ComB</i> <i>Commercial banking</i> (Banque commerciale)</li> <li>• <i>RBn</i> <i>Retail banking</i> (Banque de détail)</li> <li>• <i>AgnS</i> <i>Agency services</i> (prestations d'agent, services de fiducie aux entreprises)</li> <li>• <i>CorF</i> <i>Corporate finance</i> (Financement des entreprises)</li> <li>• <i>AssM</i> <i>Asset management</i> (Gestion d'actifs)</li> </ul>
<i>Scaling</i>	Mise à l'échelle des données externes par rapport aux caractéristiques d'une banque donnée
<i>Backtesting</i>	Procédure statistique de validation de modèle
<i>Stress testing</i>	Méthodologie de mesure de la réaction d'un modèle à une simulation de conditions extrêmes mais plausibles
<i>Bootstrapping</i>	Procédure statistique d'échantillonnage ou ré-échantillonnage d'observations afin d'en inférer les propriétés statistiques, comme la moyenne ou la variance, et ce d'une façon non paramétrique
Sévérités des pertes	Magnitude des montants des pertes opérationnelles enregistrées
Fréquences des pertes	Comptage des événements des pertes opérationnelles
<i>BIS</i>	<i>Bank for International Settlements</i>
<i>BCBS</i>	<i>Basel Committee on Banking Supervision</i>
<i>NBER</i>	<i>National Bureau of Economic Research</i>
<i>SEC</i>	<i>U.S. Securities and Exchange Commission</i>

## Notation

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels
<i>GPareto</i>	La distribution Pareto généralisée ( <i>Generalized Pareto</i> )
$\sigma$	Le paramètre <i>Scale</i> de la distribution
$\xi$	Le paramètre <i>Shape</i> de la distribution
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lambda$	$\lambda$ est la limite de la fonction $f$ quand $x$ tend vers l'infini.
$\lim_{x \downarrow c} g(x) = a$	$a$ est la limite à droite de la fonction $g$ quand $x$ tend vers $c$ , $x \geq c$ .
$\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$	$y$ est la limite inférieure de la fonction $f$ quand $x$ tend vers l'infini.
$\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = z$	$z$ est la limite supérieure de la fonction $f$ quand $x$ tend vers l'infini.
$Pr(X Y)$	La probabilité d'observer $X$ , conditionnellement à observer $Y$
$E(X Y)$	L'espérance mathématique de $X$ , conditionnelle à $Y$
VaR	Valeur à risque ( <i>Value at Risk</i> )
CAPM	<i>Capital Asset Pricing Model</i>

*À toi maman et à toi papa, à ta mémoire, dans mon cœur pour toujours*

*À vous cinq*

*Myriam*

*Mia*

*Idris*

*Samy,*

*(toujours dans mon cœur)*

*et Salim*

## **Remerciements**

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Georges Dionne, ce grand monsieur au sens professionnel et humain.

Mes remerciements vont également à chacun des membres de mon jury pour leurs commentaires.

À ma famille, un grand merci pour vos prières et votre soutien !

Je ne vous oublie pas, Claire Boisvert et Mohamed Jabir, merci infiniment !

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Le contexte historique

Le risque opérationnel prend une place de plus en plus importante parmi les risques des institutions financières. Bâle II le définit comme « le risque résultant d'une inadéquation ou défaillance des procédures, du personnel et des systèmes ou des événements externes » (*the risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events*, BCBS 2004). Cette définition inclut le risque juridique, mais exclut le risque de réputation et celui stratégique.

Le risque opérationnel est souvent au coeur d'évènements, voire des scandales financiers très médiatisés. Les pertes opérationnelles peuvent être gigantesques. Des exemples anciens et d'autres très récents montrent son ampleur au point de faire défaut. Nous citons Bankhaus Herstatt qui est liquidée à cause d'une défaillance opérationnelle en 1975. Les répercussions de cette liquidation sur d'autres banques font réagir les superviseurs de Bâle pour prendre conscience progressivement du risque opérationnel en tant que composante à part entière des risques des institutions financières. Barings Bank perd 1,6 milliard de dollars (1995), Daiwa Bank 1,1 milliards (septembre 1995), Orange County 1,6 milliards de dollars (décembre 1994). En 2005, la banque canadienne CIBC verse à Enron 2,4 milliards de dollars, après une poursuite judiciaire. Le dossier Enron-CIBC éclate en 2003 quand CIBC est accusée d'aider Enron à camoufler ses dettes. En 2008, la Société Générale perd l'équivalent de 7,3 milliards de dollars pour transactions non autorisées.

En juillet et en octobre 2008, deux pertes de 8,4 milliards de dollars chacune, un record de tous les temps des pertes opérationnelles des banques américaines. La première perte est signée Wachovia Bank, un recours collectif déposé en cour fédérale en Cali-

fornie portant allégation que la banque aurait déformé ses normes de souscription quant aux garanties habituelles de paiements. La deuxième perte, concerne CFC de Bank of America, pratiques illégales concernant des produits reliés aux prêts bancaires, 400 mille acheteurs touchés. Enfin, dernièrement, le LIBOR se retrouve au coeur d'une manipulation. Plusieurs grandes banques internationales seraient concernées dont Bank of America, Barclays, Citibank, Crédit Suisse, Deutsche Bank, HSBC, JP Morgan, Royal Bank of Scotland, UBS. Froot (2003) fait observer que le risque opérationnel peut provoquer une illiquidité et un risque systémique dans tout le système financier. Il prévient, également, que « *Hopefully we do not need a large operational risk event as a wake up call* ».

En fait, durant les années 90, le système américain vit des cycles de réglementation-déréglementation et en subit les effets. La décennie connaît une série de crises de dette successives. Les difficultés du système bancaire au Japon durent depuis 1986. En parallèle, suite à des problèmes économiques en Amérique latine, dont la crise du Mexique en 1994, cela va précipiter un départ massif de l'industrie de sous-traitance vers l'Asie du Sud-Est. Les banquiers américains fournissent massivement les capitaux à petits prix. Cela crée une bulle qui ne tarde pas à éclater, à partir de 1996, dans toute la région pour atteindre la Thaïlande (juillet 1997), la Malaisie, l'Indonésie et Hong Kong (octobre 1997), la Corée du Sud (décembre 1997). Et pendant ces moments déjà extrêmement difficiles, la Russie fait défaut en août 1998. Les banques américaines étant les principaux créiteurs de ces pays, le problème devient vite national aux U.S.A., puis l'Europe et le reste du monde.

D'autre part, l'acte Gramm-Leach-Bliley (GLBA), en 1999, est suivi de fusions et acquisitions énormes, des structures bancaires colossales voient le jour comme Citigroup et Bank of America. Les banques vont attirer de plus en plus les meilleurs gestionnaires de risque, en les dotant de moyens de plus en plus performants, dont l'informatique qui connaît une expansion et une puissance sans précédent. La crise du défaut de la Russie aura également aiguïté la vigilance et l'efficacité des différents joueurs, les hauts dirigeants deviennent très sensibilisés, les gestionnaires de risque acquièrent de hauts ni-

veaux professionnels et deviennent très influents auprès des hauts dirigeants comme dans l'ensemble du système financier au complet. Enfin, l'avènement de la réglementation de Bâle qui reconnaît et surtout institutionnalise le risque opérationnel. Power (2005) nous dit que « .. *Basel 2 banking regulation reforms have successfully institutionalised the category of operational risk as a site of regulatory knowledge production...[...]... The power of the operational risk category lies in its capacity to unite apparently disparate concerns with fraud, processing error, business discontinuity, human resource management, legal liability ...* ». L'acte de naissance du risque opérationnel est définitivement signé.

Une gestion des risques forte est nécessaire pour identifier correctement les risques et prévenir une prise de risque excessive (Kashyap, Rajan, et Stein ,2008 ; Stulz 2008). En 1996, Bâle pousse les banques à révéler leur « vrai » risque de marché en leur donnant un choix allé-simple du calcul interne de leur capital de réserve. Dans ce sens, Power (2005) argumente que c'est une situation de risque moral ex post. C'est aussi ex ante puisque les banques seraient incitées à maximiser leur effort pour garder en réserve le moins d'argent possible. Le fameux Shadow Banking viendrait de cela. D'autre part, les grandes structures bancaires peuvent se permettre de calculer, et donc baisser plus par rapport au calcul standard leur capital de réserve. À l'opposé, les banques relativement moins grandes, obligées de garder le calcul standard, sont plus incitées à prendre plus de risque (Hakenes et Schnabel 2011).

## **1.2 La nature du risque opérationnel**

Bâle II semble considérer le risque opérationnel essentiellement idiosyncrasique. Lewis et Lantsman (2005) sont convaincus de cela parce que les pertes opérationnelles « tendent à ne pas être corrélées avec les forces du marché ». De plus en plus de chercheurs défendent la thèse contraire. Danielsson *et al.* (2001) portent une critique sérieuse à Bâle II, avec l'argument que si le risque opérationnel était idiosyncrasique alors il n'y aurait pas besoin de le réglementer. Moosa (2007) dit que le risque opérationnel ne peut

pas être idiosyncrasique puisque ses pertes peuvent affecter d'autres banques. Nous rajouterions que si ce risque était vraiment idiosyncrasique alors l'utilisation des pertes externes pour améliorer la précision des modèles internes n'aurait pas de sens puisque les banques n'auraient rien à voir les unes avec les autres par hypothèse.

Les travaux de Dahen et Dionne (2010), Chernobai *et al.* (2012), Cope *et al.* (2012), et Moosa (2011) apportent des preuves empiriques de l'effet de l'économie sur le risque opérationnel, cependant, en deux courants opposés :

Procyclicité :

- Les fraudes externes sont plus importantes en périodes fortes d'économie (exemple les cartes de crédit). En ces périodes fortes, les banques sont moins méfiantes, avec des pratiques plus agressives, et indulgentes envers les transactions non autorisées. En périodes difficiles, les décideurs sont plus vigilants dans le respect des règlements et quant à la sélection des clients. En période forte, les grandes banques à grande capitalisation peuvent prendre plus de risque parce qu'elles seraient couvertes (risque moral), et donc peuvent perdre plus. On peut aussi argumenter que pendant les mauvaises périodes, les activités des banques peuvent être réduites et les banques pourraient subir moins de pertes extrêmes.

Contrecyclicité :

- Les actions en justice associées à la cessation d'emploi, les faillites de contreparties sont plus répandues dans une économie faible. Les firmes peuvent réduire les dépenses sur les contrôles internes, ce qui rend plus difficiles à détecter les fraudes et les erreurs. Les fraudes externes sont plus fréquentes lorsque le chômage est élevé. L'inquiétude ou l'anticipation des pertes d'emplois favorise la fraude et/ou la négligence dans le travail ou dans le contrôle interne des employés. D'un autre côté, les grandes structures peuvent garder plus longtemps voir se doter de plus de compétences humaines et matérielles en termes de contrôle interne et système

de qualité et d'audit. Elles peuvent alors enregistrer des pertes relatives moins importantes même en périodes difficiles. Les pertes opérationnelles peuvent être plus fréquentes pendant les ralentissements économiques.

Les fondements théoriques et empiriques des travaux cités sont basés sur Kaufmann *et al.* (2009), Gompers *et al.* (2003) dont le fameux *G-index*, une mesure de l'efficacité du contrôle interne de Ashbaugh-Skaife *et al.* (2007), Doyle *et al.* (2007), El-bannan (2009), Bavishi (1993), La Porta *et al.* (2004) et La Porta *et al.* (2006), entre autres.

### **1.3 La réglementation Bâle II**

La réglementation Bâle commence par demander aux banques de modéliser un capital de réserve pour le risque opérationnel par calcul sur 20%, puis diminué à 12%, du capital constitué pour couvrir le risque de crédit et de marché (Power, 2005). En juin 2004, Bâle II considère le risque opérationnel comme étant le troisième type de risque à part entière pour les institutions financières. Bâle II se base sur trois piliers. Le pilier I consiste en le calcul et la mise en réserve d'un capital suffisant pour couvrir l'institution financière advenant tout incident des trois sources de risques. Le pilier II recommande aux superviseurs des institutions de revoir régulièrement les capitaux constitués afin de s'assurer qu'ils sont à jour, et de mettre en place des outils pour le suivi et la gestion des risques. Le pilier III concerne la transparence dans la publication des informations aux parties tierces afin de donner une vue claire de l'adéquation de leurs capitaux de réserve par rapport à leurs expositions aux trois types de risque. Bâle II structure le risque opérationnel selon deux dimensions. La première est constituée de sept types de pertes, la deuxième subdivise les métiers des banques en huit lignes d'affaires. Ce découpage donne une matrice de  $7 \times 8 = 56$  cellules.

Bâle II propose deux approches de base. La première, *BIA (Basic Indicator Approach)*, s'applique à des structures relativement modestes ne nécessitant pas un découpage en lignes de métier différentes. Le capital se base sur la moyenne des trois dernières années

dont les revenus bruts sont strictement positifs. L'équation s'écrit

$$C^{BIA} = \frac{\alpha}{N} \sum_{k=1}^3 \max(\text{Revenu Brut}, 0)$$

où  $\alpha = 15\%$  et  $N = \sum_{k=1}^3 1_{(\text{revenu brut} > 0)}$ . La deuxième approche, *SA (Standardized Approach)*, s'adresse aux structures bancaires importantes. Le capital de réserve s'écrit

$$C^{SA} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \max \left\{ \sum_{bl=1}^8 \beta_{bl} \text{Revenu Brut}, 0 \right\}$$

où  $\beta_{bl}$  est un vecteur des poids fixés par Bâle II, variant de 12%, 15%, ou 18% selon les lignes d'affaires de la banque (BCBS, 2006a, p.147). Les huit poids de *SA* ont une somme de 1,2, ce qui est égal à  $15\% \times 8$  lignes de métiers de *BIA*. Les conditions requises pour le modèle *SA* sont définies dans les documents de Bâle II (BCBS, 2006a, p.148).

Par ailleurs, les banques qui trouvent que 15% du revenu brut, en moyenne, est trop cher comme capital, sont encouragées à se doter de modèles internes dits *AMA (Advanced Measurement Approach)* avec certaines conditions (BCBS, 2006a, p. 150), dont la validation de leur modèle afin de s'assurer qu'il reflète le plus possible leur exposition au risque, et la mise en place d'une procédure de *stress testing*. Nous en apporterons quelques détails plus loin dans cette introduction.

L'approche *AMA* exige deux sources de données et deux sources d'information à combiner. D'abord, (i) les données internes, étant les pertes opérationnelles historiques de la banque, collectées sur les cinq dernières années. Ensuite, (ii) les données externes, qui sont les pertes réelles enregistrées dans d'autres banques. Nous parlons de *scaling* quand ces pertes externes sont redimensionnées ou mises à l'échelle par rapport aux caractéristiques de la banque. Comme sources d'information, Bâle II requiert alors la prise en compte de l'avis d'experts en envisageant des (iii) scénarios de pertes plausibles. Enfin, la banque définit et raffine son exposition au risque avec (iv) ses propres facteurs de risque internes et environnementaux.

Toute une industrie voit alors le jour afin de trouver « le meilleur modèle *AMA* ». Les académiciens comme les professionnels s'orientent vite pour explorer et s'approprier le savoir-faire développé depuis très longtemps par les assureurs et les actuaires. À cet enthousiasme des explorateurs en risque opérationnel s'oppose vite un désaccord de certains chercheurs qui ne croient pas en l'adéquation de l'approche *AMA* pour bien capturer ce risque. Citons par exemple Altman *et al.* (2002), Herring (2002) et Rebonato (2010). Frachot et Roncalli (2002) avertissent déjà que combiner les données externes avec celles internes serait « une mission impossible », les processus générateurs des pertes opérationnelles n'étant pas connus.

Dans la littérature, il existe trois classes de modèles compatibles avec *AMA*. La première est l'approche processus. Elle est basée sur les techniques développées pour la maîtrise statistique des processus industriels. Il s'agit d'évaluer les performances d'un processus en termes de probabilités historiques qualifiant la fiabilité des produits et des équipements. La deuxième classe s'inspire du modèle CAPM. Les pertes opérationnelles sont considérées comme une fonction linéaire de facteurs de risque pertinents à identifier. Une régression linéaire permet d'évaluer les poids des facteurs. Un travail récent de cette classe de développement est publié par Zhang *et al.* (2012). La troisième classe est une approche actuarielle, connue sous l'acronyme *LDA* (*Loss Distribution Approach*).

L'approche *LDA* est de loin la modélisation la plus répandue de *AMA* sous Bâle II. En utilisant les données de pertes historiques, le concepteur estime deux distributions séparées : les *fréquences* (comptage des événements), et les *sévérités* (magnitude des montants des pertes enregistrées). Ces deux distributions, recombinaées en convolution, donnent une troisième distribution des pertes probables au futur. Dans tous les cas, Bâle met la barre haute pour calculer le capital opérationnel relativement à une VaR (Valeur à Risque) de 99,9%. Notons  $L_{ij}$  la distribution des sévérités, et  $N_i$  la distribution des fréquences, alors la distribution des pertes agrégées s'écrit

$$S_{i=} \sum_{j=1}^{N_i} L_{ij} \quad (1)$$

Les distributions  $L_{ij}$  et  $N_i$  sont supposées indépendantes l'une de l'autre. Vu que  $L_{ij}$  et  $N_i$  sont aléatoires,  $S_i$  est obtenue par convolution de la sévérité avec les fréquences. La transformée de Fourier et celle de Laplace peuvent faire ces calculs comme dans Klugman *et al.* (2012). La simulation Monte Carlo est aussi utile dans certains cas. Böcker et Kluppelberg (2005) proposent une approximation analytique qui donne directement la VaR à un quantile donné sous certaines hypothèses. Cette approximation est appelée *Single-Loss Approximation* et s'écrit

$$VaR_\alpha \approx F^{-1}\left(1 - \frac{1 - \alpha}{\lambda}\right) \quad (2)$$

où  $F^{-1}$  est l'inverse de la fonction cumulative des sévérités,  $\alpha$  =quantile annuel exigé pour le capital (99,9%),  $\lambda$  =nombre des pertes annuelles en moyenne (provient de l'estimation des fréquences). Cette approximation est intéressante, car elle montre que la modélisation de la sévérité joue le rôle central. Hernández *et al.* (2014) font une revue des approximations du calcul de capital et en proposent d'autres performantes.

#### 1.4 Les modèles de l'approche AMA-LDA

Nous nous basons sur la synthèse de Embrechts et Hofert (2011) afin de donner une vue globale sur les modèles AMA qui existent dans l'industrie. La grande majorité des institutions utilise l'approche LDA. Les distributions des fréquences sont modélisées essentiellement par Poisson (78%), la binomiale négative étant encore relativement minoritaire (16%) malgré la surdispersion montrée dans Dahen et Dionne (2010). Quant à distribution de la sévérité des pertes, 31% des modèles la représentent en une distribution paramétrique unique (un seul morceau), avec une lognormale (33%) ou une Weibull (17%). 29% des modèles utilisent des hybrides de deux distributions collées en un point séparant le corps de la queue de la distribution de sévérité. Dans ces cas, 26% utilisent pour le corps une distribution non paramétrique et 19% une lognormale. La partie queue est modélisée par une Pareto généralisée (31%) ou une lognormale (14%). Enfin, 19% des modèles utilisent des mixtures de distributions.

### 1.4.1 Le *scaling* des données externes

Pour disposer de données externes de pertes, les banques se mettent généralement en consortium privé, comme la base *ORX* (*Operational Riskdata eXchange*) gérée par *ORX Association*. Sauf les bases de données privées, il n'existe pas beaucoup de bases publiques. Une première base de données est la *LDCE* (*Loss Data Collection Exercise*), gérée par le *BCBS* avec une version actuelle de 2013. Une deuxième base de données est *OpData Quantitative Database* de Fitch. C'est ce que nous utilisons dans la présente recherche, dans sa version de juin 2011. Elle représente des pertes opérationnelles classées par industrie. Les pertes sont collectées de plusieurs sources, dont les annonces d'affaires publiques, des rapports de consultants, des documents juridiques et légaux, des publications des régulateurs, etc. Les pertes des banques sont au nombre de 4800 environ, provenant de 2100 banques internationales, 120 pays, totalisant un montant de 487 milliards de dollars, de janvier 1994 à juin 2011. Il existe un seuil de reporting pour cette base de données qui est de un million de dollars américains.

Shih *et al.* (2000) proposent les premiers une étude succincte pour évaluer l'effet de la taille des banques sur les pertes opérationnelles. Une régression linéaire simple du  $\log(\text{Perte})$  sur  $\log(\text{Actifs})$  donne un coefficient très significatif, mais le pouvoir explicatif,  $R^2$ , est très petit, de l'ordre de 5%. Na *et al.* (2006) présentent des résultats a priori spectaculaires. Leur  $R^2$  serait de l'ordre de 80% à 90%. Cependant, il n'est pas clair comment les données sont obtenues, comme le soulignent à juste titre Cope et Labbi (2008). En fait, ce serait une régression des pertes opérationnelles agrégées au niveau annuel. Ce n'est donc pas une étude empirique sur les pertes opérationnelles individuelles, comme dans Shih *et al.* et Dahan et Dionne (2010). C'est ce dernier article qui devient la référence dans la littérature, généralisant le modèle de base de Shih *et al.* en ajoutant des variables indicatrices pour mesurer l'effet des lignes de métiers et des types de pertes tels que définis par Bâle II, ce qui semble porter le  $R^2$  à plus que 28%. Notons aussi que ce papier propose un *scaling* des fréquences par rapport à la taille des banques et d'autres variables.

D'autres tentatives de généralisation de ce papier proposent des constructions qui modélisent la variance des pertes opérationnelles comme pour les modèles de la moyenne seule (voir par exemple Ganegoda et Evans, 2013). Cependant, le *backtesting* ne serait pas concluant. En effet, le capital calculé serait trop cher, à en juger par les graphiques de ce travail. D'autre part, Cope et Labbi (2008) explorent la possibilité de *scaling* par quantile. Certaines banques réalisent le *scaling* des données externes en utilisant la technique du changement de mesure de Dutta et Babel (2014).

#### **1.4.2 Les scénarios et opinions des experts**

Bâle II exige la prise en compte des scénarios de pertes hypothétiques, probablement rares, mais à impact financier important. Les recommandations disent que les pertes externes seules peuvent ne pas suffire pour identifier correctement l'épaisseur de la queue des distributions de sévérité. Cependant, Bâle ne donne pratiquement pas d'indication pour ce faire. Dutta et Babel (2014) passent en revue les pratiques de la prise en compte des scénarios et soulèvent plusieurs problèmes dus à une confusion dans le concept. En fait, s'ils sont mal utilisés, les scénarios augmenteraient l'incertitude sur les queues de distribution plutôt. Sous la pression des praticiens et des chercheurs qui n'aboutissent pas à des montants cohérents comme capital, Bâle II suggère alors de mieux se reconcentrer sur les données externes. La conséquence est directe, très peu de recherches s'intéressent aux méthodologies de mise en oeuvre des scénarios. En 2006, La *Bank of Japan* abrite un séminaire sur le risque opérationnel et l'utilisation des scénarios. Nagafuji (2006), Oyama (2006), et Rosengren (2006) résument l'essentiel des problèmes. Dutta et Babel pensent que huit ans plus tard, les problèmes restent essentiellement les mêmes.

D'autre part, ces auteurs construisent le concept de changement de mesure pour passer de la probabilité historique (des faits historiques qui suggèrent les scénarios) à la probabilité future (qui va s'ajuster aux caractéristiques de la banque concernée). Ce concept de changement de mesure connaît progressivement du succès, des banques commencent à l'utiliser en le combinant avec les données externes afin d'en assurer le *scaling*, ce qui

est une façon de faire par rapport à Dahen et Dionne (2010).

Ergashev (2011) et Abdymomunov *et al.* (2011) étudient autrement l'incorporation des scénarios. Ces derniers proposent une méthodologie afin d'éliminer de scénarios dits dominés. Les scénarios dominants gardés, plus il en reste qui soient bien répartis le long de la queue de la distribution meilleure sera l'estimation finale de la sévérité.

### **1.5 L'instabilité des calculs du capital réglementaire**

Comme dit plus haut, l'intérêt majeur des banques à développer leurs propres modèles est de réduire leur capital de réserve. La grande surprise est que ce n'est pas toujours le cas. Les chercheurs utilisent des distributions plus ou moins adéquates et surtout sensibles aux valeurs extrêmes. Les données de pertes opérationnelles sont définitivement connues à queue de distribution épaisse. Dutta et Perry (2008) font un diagnostic. Ils avertissent qu'aller trop vite pour « essayer » des distributions pour ajuster ses données peut conduire à des conclusions désastreuses. Ils rappellent que les tests d'ajustement (*goodness-of-fit*) de type Kolmogorov-Smirnov et Anderson-Darling sont nécessaires, mais pas insuffisants pour conclure, car le calcul de la VaR (Valeur à risque) est fondamentalement une question de pouvoir de prédiction des modèles.

Ces auteurs travaillent sur les données de pertes de sept banques. Ils considèrent aberrant un capital calculé dépassant 3% du total des actifs d'une banque. Leurs résultats montrent clairement que les modèles basés sur les distributions de type *EVT* (théorie des valeurs extrêmes) génèrent des capitaux de réserve aberrants dans 75% des cas. Il y a même un cas où le capital calculé dépasse 1000% du total des actifs ! La distribution *GB2* (Beta généralisée de type 2) donne un calcul de capital aberrant à hauteur de 60% des cas. À l'opposé, les auteurs recommandent la distribution *G&H* de Tukey en montrant qu'elle n'aboutit à aucune aberration du capital réglementaire calculé. La distribution lognormale semble aussi bien se comporter pour les 7 banques étudiées. Cela est en rapport direct avec ce que nous allons voir au chapitre 4 concernant la validation *backtesting* des modèles du risque opérationnel.

### 1.5.1 La problématique de l'estimation par maximum de vraisemblance

L'estimation par maximum de vraisemblance est la plus répandue dans la pratique. Les autorités de régulation l'acceptent également pour sa qualité théorique de convergence asymptotique. Trois articles se posent des questions sérieuses quant à sa fiabilité pour modéliser les données de pertes opérationnelles. Ergashev (2008) trouve des écarts de l'estimation MV par rapport à des méthodes d'estimation basées sur la minimisation de statistiques comme Cramer-Von-Mises ou Anderson-Darling. Cope (2011) réalise que la prise en compte de la troncature des données de pertes collectées au-delà d'un certain seuil introduit une distorsion dans la fonction de vraisemblance. Opdyke et Cavallo (2012) redéfinissent clairement les hypothèses nécessaires et surtout rappelle à très juste titre l'impact du non-respect de celles-ci sur la qualité de l'estimateur MV. Il est efficace et consistant si et seulement si les données étudiées sont (i) indépendantes (ii) identiquement distribuées et (iii) que le modèle soit bien spécifié.

Opdyke et Cavallo (2012) démontrent que la fonction d'influence pour l'estimateur MV n'est pas bornée quand la variable aléatoire tend vers l'infini, ce qui démontre le caractère instable de l'estimateur MV. Par conséquent, cela explique la grande variabilité des résultats que trouvent les chercheurs, en passant d'un modèle à un autre, ou d'une période à une autre où pourtant seulement quelques données sont nouvelles, mais le nouveau capital calculé est si différent que cela n'a aucun sens. Opdyke et Cavallo (2012) calculent analytiquement la distorsion qu'introduit la prise en compte de la troncature des données dans la fonction MV. Ils déterminent également par calcul analytique l'existence d'un biais vers le haut dans l'estimateur MV qui apparaît systématiquement quand la densité est très asymétrique avec une queue épaisse. En d'autres termes, plus la fonction cumulative est convexe plus grand est ce biais. L'existence de ce biais systématique est liée à l'inégalité de Jensen (1906). Une revue récente de Zhou *et al.* (2014) donnent plus de détails et proposent des solutions.

### 1.5.2 La troncature du seuil de collecte des données externes

L'un des faits discutés dans la littérature est la possibilité d'un biais de sélection dû à la troncature à gauche des données externes à cause du seuil de collecte de ses données. Ce biais pourrait possiblement aggraver les problèmes d'estimation vus plus haut. De Fontnouvelle *et al.* (2006) étudient l'effet de la troncature des pertes opérationnelles collectées dans les bases de données externes. Ils confirment l'existence de ce biais. Par contre, son impact serait moindre pour les banques de grande taille. L'étude de Dahlen et Dionne (2010) confirme cela concernant les banques BHC américaines (*Bank Holding Company*) de taille de plus d'un milliard de dollars. Au chapitre 2, nous vérifierons l'existence de ce biais dans nos données en utilisant la procédure de Heckman (1979).

### 1.5.3 Les hypothèses d'indépendance

Bâle II suppose que les données de pertes ne sont pas autocorrélées, que la distribution des fréquences et celle de la sévérité sont indépendantes l'une de l'autre. Cette hypothèse est essentielle pour l'approche *LDA*. Avec les résultats plutôt inquiétants concernant les calculs du capital, certains travaux remettent en question cette indépendance. Leurs résultats semblent affirmer que leurs modèles aboutissent à un calcul du capital réglementaire plus cohérent. Nous suggérons Chavez-Demoulin *et al.* (2005), Chernobai et Yildirim (2008), Sakalo (2011) et Chavez-Demoulin *et al.* (2013). D'autre part, Brechmann *et al.* (2014) proposent de modéliser la dépendance des pertes de la queue de distribution des sévérités par des copules. Ces auteurs parviennent à un capital réaliste et inférieur, de 38%, à ce que le calcul de la méthode standard de Bâle aurait donné pour les exemples de banques qu'ils ont pris. Cette piste de dépendance semble prometteuse. La réglementation et les développements futurs devraient probablement suivre. En ce qui nous concerne, au chapitre 3, nous documentons le fait que les fréquences et les sévérités des données de pertes de la base de données *Algo OpData* ne seraient pas indépendantes pour la période de 1994 à 2000.

#### 1.5.4 Les méthodes bayésiennes

Un deuxième type de développement se basant sur les méthodes bayésiennes prend départ sur le travail de Frachot et Roncalli (2002) et gagne une certaine ampleur avec Shevchenko et Wüthrich (2006), Lambrigger *et al.* (2007) et Cruz *et al.* (2015). Sans entrer dans les détails, la démarche part des pertes internes historiques comme distribution *a priori*. La distribution *a posteriori* est alors obtenue en injectant les données externes ou les scénarios d'experts. Encore une fois, la rareté des données internes de départ fait que l'échantillon n'est pas suffisant pour garantir la représentativité de la distribution réelle des pertes internes. La convergence de la distribution en est affectée. Aujourd'hui, cette technique ne semble pas avoir permis un avancement concret afin d'apporter des solutions par rapport aux méthodes classiques.

#### 1.6 La validation *backtesting*

Le *backtesting* est l'un des aspects les plus déterminants de la conception des modèles de gestion du risque. Cette validation est très difficile en risque opérationnel pour 3 raisons. Il y a peu d'observations de pertes et encore moins dans les hauts quantiles, même avec les données externes. La réglementation Bâle II/III exige une VaR à 99,9%. En plus, la queue de distribution est connue épaisse (Dutta et Perry, 2008 ; Embrechts *et al.*, 2006).

Pour une VaR 99,9%, il faut 1000 observations pour espérer trouver un dépassement de la VaR. Même avec 1000 observations, avec un seul dépassement les tests statistiques pourraient ne pas être efficaces avec si peu d'information. Malgré cela, la validation des modèles reste pleinement la responsabilité des banques comme précisé dans la réglementation (BCBS 2003, principe 2 de BCBS 2005 et BCBS 2006b). Dans l'absence d'un outil *backtesting* convenable, les concepteurs se départagent en deux écoles. Les adeptes des modèles basés sur les distributions de valeurs extrêmes croient fortement que les modèles classiquement bâtis sur la lognormale sous-estimerait le capital de réserve (voir Chavez-Demoulin, Embrechts et Hofert 2013, en autres). À l'opposé, les

critiques sont de plus en plus importantes quant à l'adéquation des modèles valeurs extrêmes qui aboutissent souvent à un calcul de capital exagérément surestimé (voir par exemple Jobst et Gregoriou, 2009).

Pour donner un repère à la discussion, supposons que nous ayons 2000 observations de pertes agrégées (obtenues par convolution compatible à l'approche *LDA*). Admettons également que le niveau de la VaR calculée à 99,9% ne soit jamais atteint par aucune des 2000 observations générées. La question qui se pose alors, serait-ce une preuve de l'adéquation du capital calculé, puisque jamais atteint, donc la couverture semble bien fonctionner ? Serait-ce, plutôt, un signe que le capital est trop cher, que le modèle surestimerait le capital ? Faut-il faire plus de tirages *LDA* ? Générer un million, deux millions d'observations ? Qu'en conclure s'il n'y a toujours pas de dépassement du niveau de la VaR ? Sachant qu'il n'est pas rare, dans les calculs du capital du risque opérationnel, que le niveau de la VaR à 99,9% ne soit pas atteint, justement. Or, Bâle II précise bien que le *backtesting* reste pleinement de la responsabilité des banques. Beaucoup d'auteurs soulignent la difficulté du *backtesting* dans le contexte du risque opérationnel, d'autres n'en parlent pas même s'ils proposent des modèles qu'ils croient performants. Nous sommes en plein dans la critique de Dutta et Perry (2008) qui soulignent fortement que le pouvoir de prédiction est l'élément fondamental de tout modèle de calcul du capital. Précisément, nous allons dédier le chapitre 4 au développement d'un nouvel outil de *backtesting*.

## 1.7 Le *stress testing*

Le *stress testing* acquiert beaucoup de notoriété suite à la crise financière récente. Bâle II définit le concept et l'objectif de la mise en place de cette procédure dans BCBS (2004) et (2009) où certains détails sont fournis. Nous apprenons de Quell et Meyer (2011) qu'il existe 15 principes à respecter dans la conception d'une démarche *stress testing* convenable, dont quatre sont fondamentaux. (i) Le *stress testing* doit être un complément aux autres outils de gestion des risques en focalisant sur des situations extrêmes afin de mieux connaître les différents risques de la banque. (ii) Il doit couvrir les activités de la

banque au niveau local et permettre une intégration afin de donner une vue globale du risque de la banque. (iii) Il doit être orienté dans le sens de la détection d'évènements ou de situations dont le concours peut mettre en danger la banque (*reverse stress testing*). (iv) Il doit permettre la remise en question des outils mis en place pour gérer les risques afin d'en détecter les faiblesses et anticiper son amélioration d'une façon continue.

Il est probable que la recherche soit en état d'attente d'une modélisation plus fiable avant d'envisager sérieusement des procédures *stress testing*. Naturellement, tous les efforts sont actuellement mobilisés pour trouver « Le Modèle » du risque opérationnel qui convient. Avec les dernières publications telles que Cope *et al.* (2012), nous comprenons que c'est tout récemment que les chercheurs arrivent peu à peu à déchiffrer le comportement des pertes opérationnelles relativement aux forces économiques et environnementales. Jusqu'à récemment, Embrechts et Hofert (2011) se plaignent dans la conclusion de leur papier qu'il y a encore plus de points de désaccord que d'accord entre les chercheurs en risque opérationnel. Nous allons voir, dans le chapitre 3, une façon novatrice pour établir un lien fort entre le risque opérationnel et les autres risques conventionnels des banques. Nous pensons que cela permettra d'ouvrir une voie pertinente dans la modélisation du *stress testing* du risque opérationnel.

## **1.8 Conclusion**

Nous pourrions dire qu'en quelque sorte, la modélisation du risque opérationnel ressemble étrangement à la nature du risque opérationnel lui-même, dans le sens de l'imprévisibilité des événements, la difficulté de le gérer, la spécificité de chaque événement qui est toujours comparable à d'autres, mais ce n'est pratiquement jamais la même chose exactement qui arrive. Comme nous venons de voir dans cette revue, beaucoup d'efforts ont été déployés pour construire des modèles qui ont du sens. Beaucoup d'énergie est nécessaire pour tenter d'expliquer les mauvaises surprises comme les calculs de capital déraisonnables et incohérents. Même la notoriété de l'estimation par le maximum de vraisemblance n'est pas épargnée. Bref, la modélisation du risque opérationnel consti-

tuerait un véritable système de *stress testing* aux méthodes et outils statistiques que les concepteurs ont toujours utilisés avec confiance. Avec le risque opérationnel, nous devons réapprendre à mieux prêter la plus grande attention aux hypothèses de travail de chacune des méthodes statistiques.

C'est dans ce contexte que s'inscrit le travail dans cette thèse. Dans la suite, au chapitre 2, nous prouvons l'existence d'un régime endogène dans les données des pertes opérationnelles. Cela implique une hétérogénéité temporelle qui induit un biais à prendre en compte. Le régime est détecté avec le concept de *Hidden Markov Modeling (HMM)*, connu aussi sous le nom de *Markov Switching*, et est injecté dans le modèle Dahen et Dionne (2010) pour l'améliorer.

Au chapitre 3, nous révélons un problème de dépendance entre les sévérités et les fréquences touchant les données de perte de la période 1994-2000. Cela viole une hypothèse fondamentale de *AMA*. D'autre part, nous construisons une mesure de l'exposition au risque opérationnel des banquiers. Cette mesure permet une deuxième extension en l'introduisant dans le modèle de Dahen et Dionne (2010). Cela corrige un deuxième biais dans le calcul du capital. En effet, deux banques de même taille, mais avec des ratios de gestion des risques différents ne devraient pas avoir le même capital réglementaire, sinon, ce serait contraire aux objectifs et aux incitatifs mêmes de la réglementation. Par ailleurs, grâce au pont établi entre les différents risques dans ce chapitre, des applications concrètes concernant la méthode des scénarios et le *stress testing* sont également proposées, en conformité avec les attentes de Bâle.

Dans le chapitre 4, nous nous concentrons sur le *backtesting*. Nous construisons un nouvel outil simple et concluant dans nos tests. Nous en réalisons une extension pour bâtir une nouvelle méthodologie permettant de mesurer l'amplitude des périodes de *stress* (périodes de pertes extrêmes). Enfin, dans le dernier chapitre, nous ferons une conclusion de l'ensemble des nos résultats et contributions.



## Chapitre 2

### Régime temporel endogène dans les données

Nous montrons l'existence d'un régime endogène temporel à deux niveaux dans les données des pertes opérationnelles entre 2001 et 2010. Quand un premier niveau représente les pertes opérationnelles considérées normales, un deuxième niveau distinct est détecté par la présence des valeurs de pertes extrêmes enregistrées durant la crise financière récente. Il y a donc une hétérogénéité temporelle dans les données. Le message général de la contribution de ce chapitre est que si cette hétérogénéité n'est pas prise en compte dans les modèles d'estimation, le capital réglementaire admettra un biais. Les niveaux de ce dernier seront surestimés dans les périodes de pertes normales et sous-estimés dans les périodes relatives au régime élevé.

#### 2.1 Introduction

Depuis le début de la modélisation du risque opérationnel, des contributions attirent régulièrement l'attention sur le fait que le capital de réserve calculé serait trop fragile, voire instable. Ames, Schuermann et Scott (2014) mettent en évidence ce fait surtout avec les pertes opérationnelles gigantesques relatives à la récente crise financière. Déjà Nešlehová, Embrechts et Chavez-Demoulin (2006) montrent clairement le danger de travailler avec des distributions de type valeurs extrêmes, avec un nombre faible d'observations, et quand les estimations préliminaires de la distribution de sévérité tendent à exhiber une moyenne ou une variance infinie (voir aussi Dahan, Dionne et Zajdenweber, 2010). Le message de ces différentes contributions conduit à se reconcentrer sur des modèles de base plus conventionnels pour mieux les estimer lorsque le nombre de pertes extrêmes est faible. Cette recherche s'inscrit dans ce cadre. Nous reprenons les travaux de Dahan et Dionne (2010) sur le *scaling* des pertes opérationnelles afin de les enrichir avec la détection et l'incorporation du régime temporel endogène.

Nous utilisons une spécification *Hidden Markov Modeling (HMM)* appliquée aux données mensuelles des pertes opérationnelles des banques américaines. Nous montrons l'existence d'un régime endogène à deux niveaux distincts. Le premier niveau, relatif aux périodes considérées normales, est modélisé avec une distribution normale. Le deuxième niveau, représentant les pertes extrêmes, est modélisé avec une distribution *Skew t-Student type 4 (ST4)*. L'idée de l'emploi de cette dernière est liée à l'asymétrie et l'épaisseur de queue de distribution prononcée des pertes mensuelles. Différents tests statistiques ne permettent pas de rejeter ces faits. L'introduction du régime détecté dans l'estimation des modèles de Dahen et Dionne (2010) affecte significativement la distribution des sévérités et des fréquences d'une façon générale. Ces résultats sont particulièrement importants pour certains types de pertes opérationnelles, dont celui relié à des erreurs de tarification des produits financiers pour lesquelles plusieurs grandes banques ont été poursuivies. Finalement, nous présentons des résultats de *backtesting* du modèle pour deux banques.

Dans la section 2.2, nous présentons la base de données utilisée. La section 2.3 discute des modèles d'identification de régime utilisés et présente leur estimation. La section 2.4 mesure l'effet des niveaux du régime détecté sur l'estimation de la distribution des pertes opérationnelles, alors que la section 2.5 propose un *backtesting* des valeurs à risque (VaR) déterminant le capital réglementaire estimé. Une courte conclusion termine le chapitre.

## **2.2 Les données**

Nous utilisons la base de données *Algo OpData Quantitative Database* pour les pertes opérationnelles de plus d'un million de dollars des banques américaines. La période de l'étude est de janvier 2001 à décembre 2010. Par ailleurs, nous nous intéressons aux *Bank Holding Companies (BHC)* dont la taille est de plus d'un milliard de dollars d'actifs. La source de cette seconde base de données est la Réserve fédérale de Chicago. Des statistiques descriptives sur l'échantillon construit des deux bases de données sont

Total des actifs (en milliards de dollars)					
Année	Médiane	Moyenne	Maximum	Écart-type	Nombre
2001	2,1	19,7	944,3	82,3	356
2002	2,1	19,5	1097,2	84,9	378
2003	2,0	20,3	1264,0	93,0	408
2004	2,0	25,4	1484,1	122,1	421
2005	2,0	24,4	1547,8	121,9	445
2006	2,1	26,0	1884,3	140,5	461
2007	2,1	28,9	2358,3	168,1	460
2008	2,0	28,5	2251,5	182,5	470
2009	2,1	33,8	2323,4	190,6	472
2010	2,1	34,7	2370,6	198,3	458
2001-2010	2,1	26,5	2370,6	147,7	

Tableau 2.1 – Tailles des banques BHC américaines par année (2001-2010)

Décile de tailles (en milliards \$)	Perte (en millions de dollars)						Nombre
	Minimum	Maximum	Médiane	Moyenne	Somme	Écart-type	
(2022,7 à 2370,6]	1,0	8045,3	26,3	265,9	13558,6	1129,5	51
(1509,6 à 2022,7]	1,0	8400,0	14,0	268,3	13147,9	1207,5	49
(1228,3 à 1509,6]	1,0	2580,0	7,5	94,5	5008,5	357,8	53
(799,3 à 1228,3]	1,0	3782,3	24,0	199,8	9589,5	610,7	48
(521,9 à 799,3]	1,0	8400,0	7,4	218,9	11602,0	1156,4	53
(247,1 à 521,9]	1,1	210,2	7,2	17,0	849,0	31,1	50
(98,1 à 247,1]	1,0	663,0	6,0	45,3	2311,1	115,4	51
(33,7 à 98,1]	1,0	775,0	10,2	55,2	2816,8	152,8	51
(8,31 à 33,7]	1,1	691,2	8,6	32,2	1644,1	98,6	51
[0,96 à 8,31]	1,0	65,0	4,3	9,9	506,7	14,5	51
total	1,0	8400,0	8,6	120,1	61034,3	680,7	508

Tableau 2.2 – Pertes opérationnelles des banques BHC par décile des tailles (2001-2010)

résumées dans les tableaux : 2.1, 2.2 et 2.4.

Le tableau 2.1 décrit la distribution des tailles des banques, ayant eu des pertes opérationnelles de un million ou plus, durant la période de notre étude. Nous remarquons une augmentation soutenue de la taille moyenne des banques d'année en année. Les tailles maximales ont aussi progressé de façon très significative. Le tableau 2.2 indique que ce sont les plus grandes banques qui cumulent les plus grandes pertes. Pour une question de pratique, le tableau 2.3 reprend les mêmes abréviations listées au début de la thèse concernant les codes des types de perte (*Event Types*), désormais notés *ET*, et ceux relatifs aux lignes d'affaires (*Business Lines*), notées *BL* dans la suite. La classi-

Code	Désignation
<i>ET</i>	<i>Event Type</i> (type de perte) :
• <i>ClPB</i>	<i>Clients, products and business practices</i> (Clients, produits et pratiques commerciales)
• <i>BusDSF</i>	<i>Business disruption and system failures</i> (Dysfonctionnement des activités et des systèmes)
• <i>DamPA</i>	<i>Damage to physical assets</i> (Dommages aux actifs physiques)
• <i>EmpWS</i>	<i>Employment practices and workplace safety</i> (Pratiques en matière d'emploi et sécurité au travail)
• <i>EF</i>	<i>External fraud</i> (Fraude externe)
• <i>IF</i>	<i>Internal fraud</i> (Fraude interne)
• <i>ExeDPM</i>	<i>Execution delivery and process management</i> (Exécution, livraison et gestion des processus)
<i>BL</i>	<i>Business Lines</i> (ligne de métier ou d'affaire bancaire) :
• <i>RBr</i>	<i>Retail brokerage</i> (Courtage de détail)
• <i>PayS</i>	<i>Payment and settlement</i> (Paiements et règlements)
• <i>TraS</i>	<i>Trading and sales</i> (Négociation et vente)
• <i>ComB</i>	<i>Commercial banking</i> (Banque commerciale)
• <i>RBn</i>	<i>Retail banking</i> (Banque de détail)
• <i>AgnS</i>	<i>Agency services</i> (prestations d'agent, services de fiducie aux entreprises)
• <i>CorF</i>	<i>Corporate finance</i> (Financement des entreprises)
• <i>AssM</i>	<i>Asset management</i> (Gestion d'actifs)

Tableau 2.3 – Nomenclature des codes des types de perte et des lignes d'affaires

Ligne d'affaire	Type de perte (les montants des pertes sont en millions de dollars)										total
	CliBPB	BusDSF	DamPA	EmpPWS	EF	IF	ExeDPM	total			
RBr	Moyenne	28,6			18,7	78,8	8,0	2,8	22,8		
	Écart-type	89,7			33,8		8,3	1,9	71,1		
	somme	1030,3	0,0	0,0	149,7	78,8	103,5	5,7	1367,9		
Pays	Nombre	36	0	0	8	1	13	2	60		
	Moyenne	62,4	19,2	743,0		23,9	18,7	11,1	67,5		
	Écart-type	85,7	24,2			4,6	16,6	8,8	150,0		
	somme	873,7	57,6	743,0	0,0	47,8	56,1	44,6	1822,7		
	Nombre	14	3	1	0	2	3	4	27		
TraS	Moyenne	91,6		55,0	6,9	18,0	130,7	139,1	95,7		
	Écart-type	195,8			8,5		228,9	286,6	202,6		
	somme	3756,1	0,0	55,0	34,7	18,0	1437,5	1113,0	6414,4		
ComB	Nombre	41	0	1	5	1	11	8	67		
	Moyenne	45,4		1,0	16,0	18,6	22,1	36,7	26,8		
	Écart-type	65,5			18,1	28,5	26,8	29,0	42,2		
	somme	1045,3	0,0	1,0	80,1	725,7	309,4	147,0	2308,5		
	Nombre	23	0	1	5	39	14	4	86		
RBn	Moyenne	369,8	2,0	1,0	7,3	17,8	11,0	29,4	147,2		
	Écart-type	1531,0			9,9	49,9	20,9	30,9	946,8		
	somme	21819,8	2,0	1,0	58,8	604,6	505,4	264,3	23255,9		
	Nombre	59	1	1	8	34	46	9	158		
	Moyenne	85,2				5,5	3,6		58,5		
AgnS	Écart-type	138,2				6,5			117,2		
	somme	681,7	0,0	0,0	0,0	16,5	3,6	0,0	701,9		
	Nombre	8	0	0	0	3	1	0	12		
	Moyenne	556,5					56,2	9,6	441,4		
	Écart-type	1473,2					77,0	13,4	1311,7		
CorF	somme	21148,3	0,0	0,0	0,0	0,0	449,5	28,7	21626,5		
	Nombre	38	0	0	0	0	8	3	49		
	Moyenne	75,3				95,0	61,6	37,4	72,2		
	Écart-type	153,3				128,7	94,1	50,0	141,8		
	somme	3012,2	0,0	0,0	0,0	189,9	184,9	149,4	3536,5		
AssM	Nombre	40	0	0	0	2	3	4	49		
	Moyenne	206,1	14,9	200,0	12,4	20,5	30,8	51,6	120,1		
	Écart-type	941,9	21,5	362,9	21,0	42,3	88,0	143,2	680,7		
	somme	53367,3	59,6	800,0	323,3	1681,4	3049,9	1752,8	61034,3		
	Nombre	259	4	4	26	82	99	34	508		

Tableau 2.4 – Statistiques croisées : types de perte × lignes d'affaires (2001-2010)

figuration des *ET* et *BL* est telle que définie par Bâle II. Le tableau croisé 2.4 décrit les couples  $ET \times BL$ , appelés parfois cellules de perte. Notons que les plus grandes pertes moyennes sont de type *CorF* (*Corporate Finance*), *RBr* (*Retail Brokerage*) et *TraS* (*Trading and Sales*). Concernant les *BL*, les plus grandes pertes moyennes sont enregistrées par *CliPBP* (*Clients, Products and Business Practice*), et *DamPA* (*Damage to Physical Asset*) et *ExeDPM* (*Execution Delivery and Process Management*).

### 2.3 L'identification du régime

Il y a des raisons de croire qu'il existe un régime à différents niveaux dans les données de pertes opérationnelles. Pour nous en convaincre, voici trois graphiques intéressants présentés dans les figures 2.1, 2.2 et 2.3. La zone hachurée représente les repères des récessions dot-com en 2001 et de la récente crise financière qui a débuté en 2007.

Nous voyons de la figure 2.1 que les moyennes des pertes opérationnelles ont beaucoup augmenté durant et après la dernière crise financière. À l'opposé, la récession de 2001 ne les aurait pas vraiment affectées. D'autre part, les pertes ont beaucoup augmenté en 2010, soit un an après la récession. Une interprétation possible est que ces pertes de 2010 soient expliquées par des délais dus à des décisions de cour, car plusieurs banques ont été poursuivies après la crise financière pour avoir mis sur le marché des produits financiers complexes ou mal structurés, avec des prix erronés et des notations douteuses. La figure 2.2 confirme les mêmes variations pour la volatilité des pertes. Finalement, la figure 2.3 montre que la tendance pour les nombres de pertes (de plus d'un million de dollars) est en dents de scie, mais sans exhiber une augmentation notable durant et après la crise financière. C'est plutôt l'année 2003 qui représente les plus grandes fréquences.

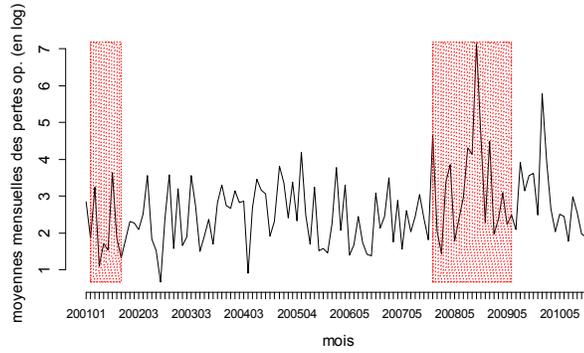


Figure 2.1 – Évolution des moyennes mensuelles des pertes opérationnelles

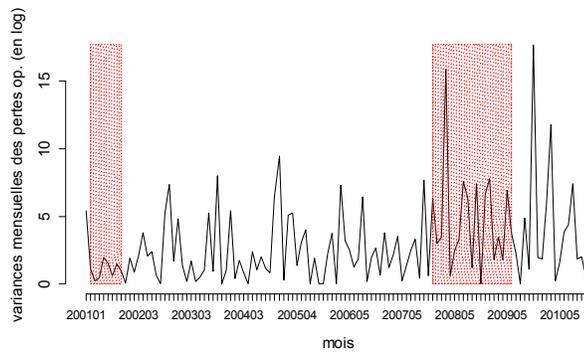


Figure 2.2 – Évolution des variances mensuelles des pertes opérationnelles

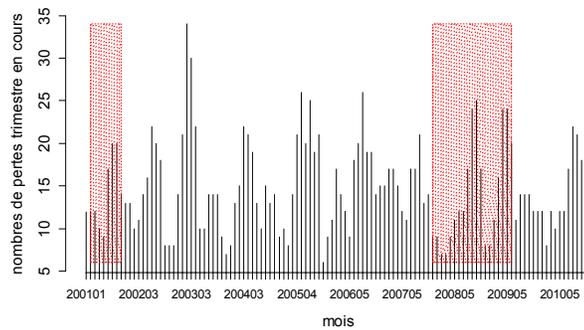


Figure 2.3 – Évolution du nombre de pertes opérationnelles

### 2.3.1 La spécification *Hidden Markov Modeling* (HMM)

#### 2.3.1.1 Une revue de littérature succincte

Plusieurs chercheurs proposent de détecter la présence de régimes inobservables suivant un processus de Markov (Hamilton (1989), Rabiner (1989)). Depuis ces articles précurseurs, des développements de plus en plus riches du modèle ont vu le jour dans tous les domaines de la recherche. Siu (2007) montre l'avantage de l'application de cette méthodologie en finance et sciences actuarielles pour mieux tarifer les produits d'assurance. Korolkiewicz et Elliott (2007) proposent un modèle de notation de crédit basé sur le concept de Markov Switching. Siu et Yang (2007) arrivent à modéliser la CVaR (valeur à risque conditionnelle) avantageusement autour de modèles de risque de marché et de crédit, en offrant une procédure complète. Un autre exemple d'utilisation est explicité dans Liechty (2013). En fait, les origines de la modélisation *HMM* (*Hidden Markov Modeling*) remontent à la fin des années soixante avec Baum et Petrie (1966) et Baum et al. (1970). L'apport de Hamilton (1989) est double. Il ouvre la voie à l'utilisation de *HMM* en économie et en finance, et développe sa propre méthode d'estimation appelée *filtre d'Hamilton*. Cette méthode est très prisée dans le cas où tous les régimes sont modélisés avec des distributions normales.

En fait, le filtre d'Hamilton suppose implicitement que les observations proviennent de distributions avec un nombre de tirages suffisant. Il considère, entre autres, que les conditions initiales décrivant le système au moment du départ  $t = 1$  perdent vite leur influence à mesure que le système avance dans le temps. Cette hypothèse est étudiée en profondeur par Psaradakis et Sola (1998) qui montrent qu'il serait recommandé de disposer d'un échantillon d'au moins 400 observations pour garantir que l'estimation fonctionne bien, surtout quand nous sommes en présence de données connues à queue épaisse. Pour cette raison, nous nous basons sur l'algorithme Baum-Welch que nous exposerons dans la suite pour estimer notre modèle. Cet algorithme n'utilise aucune hypothèse sur les distributions, comme soutenu dans Mitra et Date (2010) et Bulla (2011).

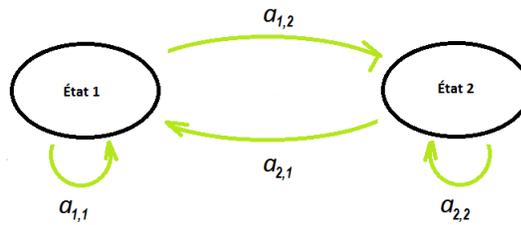


Figure 2.4 – Principe de base de la modélisation *HMM*

### 2.3.1.2 Le modèle *HMM*

L'idée de base de cette modélisation est très simple. Nous supposons que les données à étudier représentent un système qui possède deux états possibles distincts. Ce système peut être à un moment donné dans l'un ou l'autre état. Pour un état donné, le système peut se déplacer vers l'autre état ou rester sur place. La figure 2.4 schématise ce concept. Le système est caractérisé par quatre probabilités, notées  $a_{i,j}$ , où les probabilités  $a_{1,2}$  et  $a_{2,1}$  sont les probabilités de changer d'état et celles  $a_{1,1}$  et  $a_{2,2}$  sont les probabilités de ne pas changer. Vu que les états 1 et 2 ne sont pas observables, le modèle est dit Markov caché, d'où le nom *Hidden Markov Modeling (HMM)*. D'autre part, il y a deux probabilités qui vont décrire les transitions du système. Pour nos données, l'objectif est d'identifier les périodes de hautes pertes opérationnelles, mettons état 2, et de les séparer des périodes de pertes normales, état 1. D'une façon endogène, nous injectons de l'information qui vient uniquement des données des pertes elles-mêmes, en sévérité et en fréquences, de sorte que l'estimation du modèle va révéler la dynamique inobservable sous-jacente.

### 2.3.1.3 L'estimation du modèle *HMM* avec Baum-Welch

Pour développer l'estimation, nous suivons Zucchini et MacDonald (2009), Mitra et Date (2010) et Visser et Speekenbrink (2010). Nous définissons les notations nécessaires. Les variables sont indexées par le temps  $t \in \{1, 2, \dots, T-1, T\}$ . Les observations sont notées  $x_t$ . La séquence d'observations de  $t = a$  à  $b$  est notée  $x_{a:b} = x_a, x_{a+1}, \dots, x_{b-1}, x_b$  ( $a, b = 1$  à  $T$ ). La variable  $s_t$  représente l'état où se trouve le système au moment  $t$ ,

$s_t \in \{1, \dots, n\}$ . Nous supposons l'existence de  $n$  niveaux de régime. De même,  $s_{a:b} = s_a, s_{a+1}, \dots, s_{b-1}, s_b$  est la séquence des états du système dans l'intervalle de temps  $a$  à  $b$ . L'estimation donnera un vecteur des paramètres  $\theta$ . Le modèle est supposé dépendre de covariables notées  $z_t$ .

Selon la proposition 2 de Mitra et Date (2010), un modèle *HMM* est bien défini quand les paramètres  $\{A, B, \pi\}$  sont connus,  $A$  étant la matrice de transition  $n \times n$  dont les éléments s'écrivent  $a_{ij} = Pr(s_{t+1} = j | s_t = i, z_t, \theta)$ ,  $B$  est une matrice diagonale, dont les éléments  $b_i(x_t) = Pr(x_t | s_t, z_t, \theta)$  s'écrivent en fonction des densités qui vont décrire  $x_t$  quand le système est dans l'état  $i = 1$  à  $n$ , et enfin  $\pi$  est un vecteur ligne ( $1 \times n$ ) des probabilités relatives à chacun des états à  $t = 1$ ,  $\pi_i = Pr(s_1 = i | z_1, \theta)$ ,  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_i, \dots, \pi_n)$ . Pour fixer les idées, prenons le cas d'un exemple de deux niveaux ( $n = 2$ ),  $f_1$  étant la fonction de densité d'une loi normale pour le régime relativement bas des pertes (état 1),  $f_2$  étant la fonction de densité de la distribution *Skew t de type 4* représentant le régime haut des pertes (état 2). Le choix de cette mixture de distributions sera justifié à la fin de cette section. Le choix de deux niveaux de régime sera également testé à la fin du chapitre.

Pour le moment, retenons que  $B_t = \begin{bmatrix} f_1(x_t) & 0 \\ 0 & f_2(x_t) \end{bmatrix}$  tel que :

$$f_1(x_t | \mu_1, \sigma_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] \quad (3)$$

où  $\sigma_1 > 0$  et  $\mu_1 \in \mathbb{R}$ .

La distribution *Skew t type 4*, notée *ST4*, est définie dans Rigby *et al.* (2014) telle que

$$\frac{c}{\sigma_2} \left\{ \left[ 1 + \frac{(x_t - \mu_2)^2}{v\sigma_2^2} \right]^{-(v+1)/2} I(x < \mu_2) + \left[ 1 + \frac{(x_t - \mu_2)^2}{\tau\sigma_2^2} \right]^{-(\tau+1)/2} I(x_t \geq \mu_2) \right\} \quad (4)$$

où  $\sigma_2, v, \tau > 0$ ,  $\mu_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c = 2 \left[ v^{1/2} B(\frac{1}{2}, \frac{v}{2}) + \tau^{1/2} B(\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}) \right]^{-1}$ ,  $B$  est la fonction beta définie par  $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$  où  $\Gamma$  est la fonction gamma conventionnelle.

L'idée d'utiliser cette distribution est intuitive. L'équation (4) montre la *ST4* est, en fait, la jonction de deux demies densités *t* de Student. Ces deux moitiés se rejoignent au point  $x_t = \mu_2$ , la moitié de gauche (vers les valeurs relativement petites) aura le paramètre  $\nu$  comme degré de liberté, celle de droite (vers les grandes valeurs) aura  $\tau$  comme degré de liberté. Les deux paramètres peuvent être estimés d'une façon indépendante. Si  $\nu = \tau$ , la densité de *ST4* se réduit à une *t* de Student classique. Si  $\nu$  et  $\tau$  sont grands, nous revenons à une loi normale ( $\nu > 30$ ,  $\tau > 30$ , comme considéré dans la littérature des estimations économétriques). Voir l'appendice A pour plus de détails.

Concernant la matrice  $A_t = \begin{bmatrix} (1 - a_{12}) & a_{12} \\ (1 - a_{22}) & a_{22} \end{bmatrix}$ , les éléments  $a_{ij}$  seront modélisés en fonction des  $m$  covariables indépendantes  $z_t = (z_t^1, \dots, z_t^m)$ . Nous posons :

$$a_{ij} = \text{logistique}(\eta_{ij}z_t) \quad (5)$$

où la fonction  $\text{logistique}(\cdot) = \frac{\exp(\cdot)}{1 + \exp(\cdot)}$ ,  $\eta_{ij} = (\eta_{ij,0} + \dots + \eta_{ij,k} \dots + \eta_{ij,m})$ ,  $\eta_{ij,0}$  est une constante et  $\eta_{ij,k}$  est le coefficient à estimer pour la  $k$ ème covariable  $z_t^k$  relativement à la probabilité conditionnelle  $a_{ij}$ . Quant à la distribution initiale  $\pi$ , a priori, elle peut dépendre de  $z_{t=1} = z_1$ . Cependant, dans la suite nous allons estimer  $\pi$  comme un vecteur de constantes. Nous pouvons séparer les paramètres  $\theta$  en trois parties indépendantes. En effet, réécrivons  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$  où  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont, respectivement, les paramètres à estimer pour la distribution initiale  $\pi$ , les paramètres relatifs à la matrice  $A$  et ceux concernant la matrice  $B$  représentant les densités conditionnelles  $f_i$ . Écrivons maintenant la vraisemblance d'observer conjointement la séquence des observations  $x_{1:T}$  et celle des états du système  $s_{1:T}$ .

$$\begin{aligned} & Pr(x_{1:T}, s_{1:T} | z_{1:T}, \theta) = \\ & Pr(s_1 | z_1, \theta_0) \prod_{t=2}^T Pr(s_t | s_{t-1}, z_{t-1}, \theta_1) \prod_{t=1}^T Pr(x_t | s_t, z_t, \theta_2) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \log Pr(x_{1:T}, s_{1:T} | z_{1:T}, \theta) = \\ \log Pr(s_1 | z_1, \theta_0) + \sum_{t=1}^{T-1} \log Pr(s_{t+1} | s_t, z_t, \theta_1) + \\ \sum_{t=1}^T \log Pr(x_t | s_t, z_t, \theta_2) \end{aligned} \quad (7)$$

L'équation (7) étant formée d'une somme de trois quantités indépendantes, la recherche du maximum de vraisemblance peut être faite pour chacun des vecteurs de paramètres  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  séparément. De plus, si nous considérons que la distribution initiale est indépendante de  $z_1$ , nous pouvons estimer les  $n$  probabilités du vecteur  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  en tant que constantes ( $\theta_0 = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ ).

Notons que la fonction de vraisemblance à maximiser dépend de la séquence  $s_{1:T}$  qui n'est pas observable. Notre objectif est de l'extraire de la séquence  $x_{1:T}$ . Une solution technique est d'utiliser le concept EM (Expectation Maximisation) qui est plus connu sous le nom d'algorithme de Baum-Welch dans le contexte *HMM*. Nous partons d'un vecteur de valeurs initiales arbitraires  $\theta^{(0)}$ . EM est un processus itératif. Chaque boucle est composée de deux étapes E et M. Pour chaque boucle ( $k$ ), l'étape E est de calculer une fonction  $Q$  définie comme l'espérance mathématique du log de vraisemblance, connaissant la séquence  $x_{1:T}$  et en utilisant la valeur des paramètres  $\theta^{(k)}$  de sorte que :

$$Q(\theta, \theta^{(k)}) = E_{\theta^{(k)}} \left[ \log Pr(x_{1:T}, s_{1:T} | z_{1:T}, \theta) | x_{1:T}, \theta^{(k)} \right] \quad (8)$$

Ensuite, dans l'étape M, nous cherchons la valeur du vecteur  $\theta$  qui maximise  $Q(\theta, \theta^{(k)})$ . Cela nous donne un nouvel ensemble des paramètres recherchés, à savoir :

$$\theta^{(k+1)} = \underset{\theta}{\operatorname{arg\,max}} Q(\theta, \theta^{(k)}), \quad (9)$$

$\theta^{(k+1)}$  sera comparée à  $\theta^{(k)}$  pour vérifier les critères de convergence. En absence de convergence,  $\theta^{(k+1)}$  servira d'entrée pour la boucle suivante  $k + 1$ , et ainsi de suite. Il est montré que l'algorithme Baum-Welch converge toujours (Rabiner, 1989).

La quantité  $Q$ , étant une espérance mathématique, revient à faire une somme pondérée sur toutes les probabilités possibles pour chacun des trois membres à droite de l'équation (7). Ceci nous donne

$$Q(\theta, \theta^{(k)}) = \sum_{j=1}^n \gamma_1(j) \log Pr(s_1 = j | z_1, \theta_0) + \\ \sum_{t=2}^T \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_t(j, k) \log Pr(s_t = k | s_{t-1} = j, z_{t-1}, \theta_1) + \\ \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \gamma_t(j) \log Pr(x_t | s_t = j, z_t, \theta_2)$$

où les fonctions  $\gamma_t$  et  $\delta_t$  représentent les poids pour calculer les différentes espérances mathématiques. En utilisant la notation  $M = \{z_{1:T}, \theta^{(k)}\}$  afin de simplifier les expressions, ces poids  $\delta_t$  et  $\gamma_t$  s'écrivent :

$$\delta_t(j, k) = Pr(s_{t+1} = k, s_t = j | x_{1:T}, M) \quad (10)$$

$$\gamma_t(j) = Pr(s_t = j | x_{1:T}, M) \quad (11)$$

Comment calculer les probabilités  $\delta_t$  et  $\gamma_t$  ? Pour y arriver, définissons deux probabilités  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  telles que pour tout  $i = 1$  à  $n$  ( $n$  niveaux de régime) :

$$\alpha_t(i) = Pr(x_{1:t}, s_t = i | M) \quad (12)$$

$$\beta_t(i) = Pr(x_{t+1:T} | s_t = i, M) \quad (13)$$

Dans la littérature  $\alpha_t$  est appelée probabilité *forward*. Ceci est dû à l'existence de la relation de récurrence  $\alpha_t(j) = [\sum_i \alpha_{t-1}(i) a_{ij}] f_j(x_t)$ . D'une façon analogue,  $\beta_t$  est appelée probabilité *backward* vu la relation :

$$\beta_t(i) = [\sum_j \beta_{t+1}(j) a_{ij}] f_j(x_{t+1}) \text{ avec } \beta_T(i) = 1 \forall i.$$

La dérivation de ces relations est presque immédiate avec la notation vectorielle comme dans Zucchini et MacDonald (2009) en écrivant la fonction de vraisemblance :

$$L_T = Pr(x_{1:T} | M) = \pi B_1 A_2 B_2 \cdots A_t B_t \cdots A_T B_T 1' \quad (14)$$

où  $1'$  est la transposée du vecteur colonne  $1 = (1, \dots, 1)$ . En coupant le produit vectoriel de l'égalité (14) à un moment  $t$ , nous avons

$$\alpha_t = \pi B_1 A_2 B_2 \dots A_t B_t, \text{ et } \beta_t = A_{t+1} B_{t+1} \dots A_T B_T 1', \quad (\text{avec } \beta_T' = 1')$$

D'où  $\alpha_t = \alpha_{t-1} \times A_t B_t$  et  $\beta_t = A_{t+1} B_{t+1} \times \beta_{t+1}$  ce qui est l'équivalent, en notation matricielle des relations de récurrence forward et backward précédentes. Maintenant que nos vecteurs  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  sont calculés, nous sommes en mesure de calculer les poids  $\delta_t$  vu que  $\delta_t(j, k) = \alpha_t(j) \times f_k(x_{t+1}) \times \beta_{t+1}(k) \times a_{jk} / \alpha_T 1'$  comme démontré ici :

$$\begin{aligned} \delta_t(j, k) &= Pr(s_{t+1} = k, s_t = j | x_{1:T}, M) \\ &= Pr(s_{t+1} = k, s_t = j, x_{1:T} | M) / Pr(x_{1:T} | M) \end{aligned} \quad (15)$$

$$= Pr(x_{1:t}, x_{t+1}, x_{t+2:T}, s_{t+1} = k, s_t = j | M) / L_T \quad (16)$$

$$= Pr(x_{1:t}, s_t = j | M) Pr(x_{t+1}, x_{t+2:T}, s_{t+1} = k | x_{1:t}, s_t = j, M) / L_T \quad (17)$$

$$= Pr(x_{1:t}, s_t = j | M) \quad (18)$$

$$\times Pr(x_{t+1} | x_{t+2:T}, s_{t+1} = k, x_{1:t}, s_t = j, M) \quad (19)$$

$$\times Pr(x_{t+2:T} | s_{t+1} = k, x_{1:t}, s_t = j, M) \quad (20)$$

$$\times Pr(s_{t+1} = k | x_{1:t}, s_t = j, M) / L_T \quad (21)$$

$$= \alpha_t(j) \times f_k(x_{t+1}) \times \beta_{t+1}(k) \times a_{jk} / \alpha_T 1' \quad (22)$$

L'égalité (15) est obtenue par simple application du théorème de Bayes. Dans (16), la séquence  $x_{1:T}$  est coupée en trois morceaux : de  $x_{1:t}$ ,  $x_{t+1:t+1}$  et  $x_{t+2:T}$  et nous utilisons  $L_T = Pr(x_{1:T} | M)$  défini en (14). L'égalité (17) ainsi que les équations (18) à (21) utilisent également le modèle de Bayes. La quantité (18) est la définition directe de  $\alpha_t(j)$ . La ligne (19) se simplifie à  $Pr(x_{t+1} | s_{t+1})$  puisque  $x_{t+1} | s_{t+1}$  est connu indépendamment de  $x_{t+2:T}$  et de  $s_t$  (par construction même du modèle *HMM*). Dans la quantité (20), la séquence  $x_{t+2:T} | s_{t+1}$  est indépendante de  $x_{1:t}$  et de  $s_t$ . Enfin, dans la ligne (21),  $s_{t+1} | s_t$  ne dépend pas de  $x_{1:t}$ , l'expression se réduit à  $Pr(s_{t+1} = k | s_t = j, M)$  qui est égale à  $a_{jk}$  dans (22). Il nous reste à montrer que  $L_T = \sum_j \alpha_T(j) = \alpha_T 1'$ . En effet, à partir de la définition (12) appliquée à  $t = T$ ,  $\alpha_T(i) = Pr(x_{1:T}, s_T = i | M)$ , la somme des  $\alpha_T(i)$  sur tous les

états  $i$  possibles doit donner la probabilité  $Pr(x_{1:T}|M)$ , car le système est forcément et exclusivement dans l'un ou l'autre des états  $i$ . Ce même raisonnement nous permet de trouver  $\gamma_t$  en fonction de  $\delta_t$  en remarquant que  $Pr(s_t = j|x_{1:T}, M) = \sum_k Pr(s_{t+1} = k, s_t = j|x_{1:T}, M)$ . Finalement :

$$\gamma_t(j) = \sum_k \delta_t(j, k) \quad (23)$$

En résumé, la construction des probabilités  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  permet de calculer  $\delta_t$ . Cette dernière donne à son tour  $\gamma_t$ . À partir de ce moment, nous pouvons calculer la fonction  $Q(\theta, \theta^{(k)})$  pour chercher  $\theta^{(k+1)} = \theta$  qui maximise  $Q$ . Ce qui fera tourner le processus EM jusqu'à convergence et obtenir le vecteur  $\theta$  des paramètres de l'estimation finale du modèle *HMM*. Pour notre estimation, nous avons utilisé des fonctions disponibles dans le paquet *depmixS4*, de Visser et Speekenbrink (2010), avec les fonctions de la distribution *ST4* du paquet *gamlss* de Rigby *et al.* (2014). L'ensemble fonctionne sous le langage R de *r-project.org*.

Concrètement, nous construisons la séquence  $x_{1:T}$  à partir des moyennes mensuelles des pertes (en log). Déjà, nous savons que la distribution des moyennes est loin de suivre une loi normale. Nous utilisons une mixture où le premier état normal sera modélisé par une loi normale et le deuxième état de régime haut (RH en abrégé) sera représenté par une loi *ST4* capturant l'asymétrie et l'épaisseur de la queue de la distribution pendant cet état. Nous utilisons également le nombre de pertes par trimestre. Nous créons pour ce faire une variable appelée *lc123* comme logarithme naturel du nombre de pertes annoncées durant les 3 mois en cours. L'idée est de capturer si le nombre de pertes affecte l'intensité des transitions du régime d'un niveau à un autre. Puisque la matrice de transition n'est pas constante, notre modèle est dit non homogène. En somme, nous emploierons quatre

	Variable/ Paramètre	Coefficient
Probabilité de transition vers le régime haut :		
	constante	0,9772
	$lc123$	-1,7371***
Probabilité de rester en régime haut :		
	constante	-25,7285***
	$lc123$	11,7434***
Estimation distribution normale (régime normal)		
	$\mu_1$	2,4172***
	$\sigma_1$	0,7653***
Estimation distribution ST4 (régime haut)		
	$\mu_2$	3,7872***
	$\log(\sigma_2)$	-0,0415
	$\log(shape\ v)$	2,7734*
	$\log(shape\ \tau)$	0,9492
	Log max. vraisemblance	-148,838
	Critère AIC	319,677
	Nombre d'observations	120

\*\*\*  $p < 0,01$ , \*\*  $p < 0,05$ , \*  $p < 0,1$

Tableau 2.5 – Estimation du modèle *HMM* (2001-2010)

distributions comme suit.

$$\begin{aligned}
x_t | s_t = 1 &\sim N(\mu_1, \sigma_1) \\
x_t | s_t = 2 &\sim ST4(\mu_2, \sigma_2, v, \tau) \\
a_{12} &= \text{logistique}(\eta_{12,0} + \eta_{12,1}lc123) \\
a_{22} &= \text{logistique}(\eta_{22,0} + \eta_{22,1}lc123)
\end{aligned} \tag{24}$$

Et finalement,  $\theta_0 = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ ,  $\theta_1 = (\eta_{12,0}, \eta_{12,1}, \eta_{22,0}, \eta_{22,1})$  et  $\theta_2 = (\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, v, \tau)$ .

### 2.3.1.4 Les résultats et discussions

Les résultats de l'estimation du modèle sont présentés au tableau 2.5. Nous commençons par les paramètres des deux distributions que nous utilisons. La distribution normale modélisant les phases des pertes relativement faibles a une moyenne de 2,4172 et

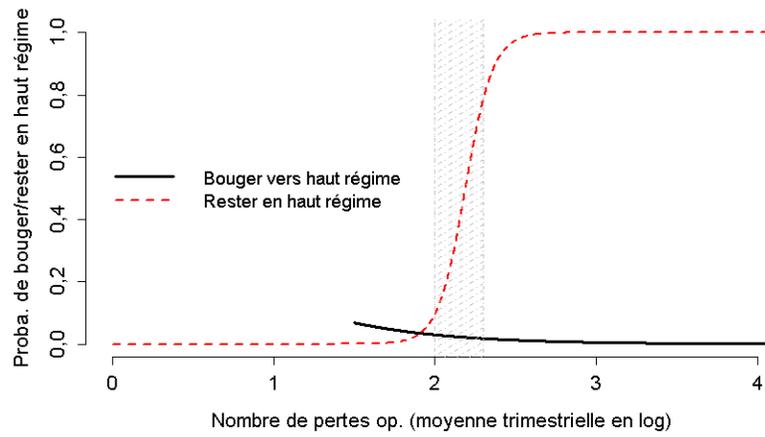


Figure 2.5 – Probabilités de transition de Markov

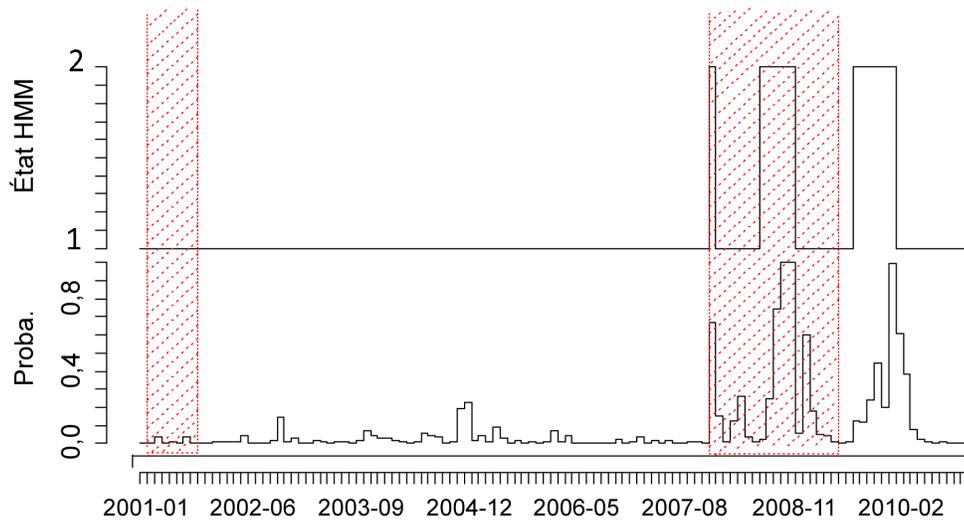


Figure 2.6 – Niveaux du régime Markov détectés pour 2001-2010

un écart-type de 0,7653. Les deux coefficients correspondants sont très significatifs à tous les degrés de confiance choisis. Quant à la  $ST4$ , sa moyenne est estimée à 3,7872 alors que son écart-type peut être considéré égal à 1 (son log peut statistiquement être considéré nul car non significatif). En haut régime, nous avons donc une augmentation significative et simultanée de la moyenne et de l'écart-type. En plus, l'asymétrie de la  $ST4$  est confirmée par le coefficient de  $\log(Shape, v_2)$  significatif à 10%. Nous reviendrons sur la validation de ces résultats plus loin en réalisant une analyse de robustesse de nos tests statistiques.

L'estimation du tableau 2.5 donne la valeur des paramètres degrés de liberté de la  $ST4$ ,  $v = \exp(2,7734) = 16,012$  et  $\tau = \exp(0,9492) = 2,584$ . Ceci mesure une épaisseur très importante des queues de distribution  $ST4$ , surtout celle de la queue droite relative aux grandes pertes. D'autre part, vu que l'estimation du  $\log(\tau)$  dans le tableau 2.5 n'est pas significative,  $\log(\tau)$  peut être considéré nul, donc  $\tau = 1$ . La queue droite de la distribution serait, dans ce sens, encore plus épaisse. Cela illustre bien l'asymétrie des données de pertes. En plus, vu ces deux degrés de liberté estimés nettement inférieurs à 30, c'est une confirmation supplémentaire que nous sommes bien loin d'une loi normale (auquel cas nous aurions eu  $v > 30$  et  $\tau > 30$ ).

Nous discutons maintenant des étages de la probabilité de transition du tableau 2.5. Le coefficient de la variable  $lc123$  est très significativement négatif. Cela veut dire que plus le nombre de pertes est grand, plus petite est la probabilité de partir en régime haut, ce qui serait un peu étrange. Pour comprendre ce qui se passe, nous traçons, dans la figure 2.5, les courbes des deux fonctions de transition : quitter ou rester en régime haut. Précisons que le nombre de pertes est historiquement limité entre 7 et 20 par trimestre (où  $lc123$  est inclus entre 2 et 3). Dans ce cas, dans la figure 2.5, la partie à gauche du point  $lc123 = 2$  n'aurait pas de sens, et donc a été coupée du graphique.

La partie à droite de ce point présente une courbe à peine décroissante, pratiquement parallèle à l'axe des abscisses, avec une valeur d'environ 5% comme probabilité de partir en régime haut (RH). Nous pouvons considérer très raisonnablement que le nombre d'an-

nonces de pertes ne joue pas de rôle pour prédire le passage au RH, ni donc l'augmentation ou non des montants des pertes opérationnelles. Par conséquent, en reformulant ce qui précède en termes statistiques, nous venons de retrouver une évidence appuyant l'hypothèse de l'indépendance des distributions des fréquences et des sévérités, ce qui est un résultat important pour cette recherche. D'autre part, pour continuer avec la probabilité de rester en régime haut, si le nombre d'annonces de pertes se situe entre 7 et 12 par trimestre, la probabilité moyenne est d'environ 50% d'y rester si nous y sommes. Entre 12 et 24 pertes moyennes trimestrielles, nous avons pratiquement 99% d'y rester conditionnellement à y être.

Passons au graphique 2.6 qui montre les états Markov switching détectés. Visiblement, trois faits en ressortent. D'abord, presque aucune réaction pour la récession de 2001 (03-2001 à 11-2001), avec seulement quelques fluctuations de la probabilité de transition autour de 2003-2005. Par contre, il y a bien un régime haut détecté pendant la récession de 2007 (12-2007 à 06-2009), avec une première impulsion d'un mois en décembre 2007, suivie par deux autres variations. La première dure cinq mois, de juillet à novembre 2007 inclus, la seconde restera six mois, d'août 2009 jusqu'à janvier 2010 inclus. Cette dernière arrive après la fin de la récession de 2007.

Il est intéressant de documenter ce fait en analysant ce qui s'est passé pour les deux variations. Pour ce faire nous prendrons les pertes individuelles aux plus grands montants qui représentent au moins 80% du total perdu pendant chaque période analysée. Nous aurons de l'information sur ce qui s'est passé pour ces pertes grâce aux commentaires insérés dans la base de données des pertes comme nous utiliserons également les sites de Bloomberg et de la SEC (*U.S. Securities and Exchange Commission*). Comme reporté au tableau 2.6, il y a eu deux pertes de 8,4 milliards chacune pour la première variation. Ce montant est un record de tous les temps des pertes opérationnelles des banques BHC.

La première perte est signée Wachovia Bank, juillet 2008, elle constitue une série de dépréciations (*writedown*) définitives liées à des hypothèques. Le recours collectif déposé en cour fédérale en Californie le 6 Juin 2008, porte allégation que la banque a déformé

ses normes pour la souscription de l'option-hypothèque à taux variable (*ARM*) des prêts, avec des structures de paiement dépourvues de garanties habituelles dont pourtant les contrats stipulent le contraire. C'est une perte de type *CliPBP*. La deuxième perte, du même montant, 8,4 milliards, concerne CFC de Bank of America, en octobre 2008, pour des pratiques illégales concernant des produits reliés aux prêts bancaires, 400 000 acheteurs touchés. CFC de Bank of America a dû accepter de régler les poursuites intentées contre elle par un groupe de procureurs généraux dans onze états, dont la Californie, la Floride, l'Illinois, le Connecticut, et Washington. Les deux pertes représentent plus de 81% des 20,6 milliards perdus durant cette première variation de juillet à novembre 2008. Dans les deux cas ce sont des problèmes reliés à des prêts subprimes. D'un autre côté, les deux banques ont accepté de régler les recours collectifs sans attendre le jugement des tribunaux. De ce fait, il n'y a pas de décalage dans le temps entre les problèmes constatés et les dates de déclarations des pertes. Nous allons voir que ce n'est pas le cas pour la plupart des grandes pertes de la période de la deuxième variation d'août 2009 à janvier 2010.

En effet, le tableau 2.7 fait état de six pertes majeures qui totalisent à elles seules plus de 80% du total des pertes. Nous commençons par Citigroup qui annonce une perte de 840 millions de dollars en janvier 2010. Cela résulterait d'une erreur comptable reliée à la façon dont la banque calcule son *CVA* (*Credit Value Adjustment*). La banque affirme que cette correction doit réduire les bénéfices annoncés durant les trimestres antérieurs, sans préciser lesquels. Ceci porte à croire que cette affaire serait reliée aux problèmes de crédit apparus pendant la crise 2008. La deuxième perte concerne Discover Financial Services qui annonce le 12 février 2010 qu'il va payer à son ancienne société mère Morgan Stanley 775 millions de dollars pour résoudre une violation d'accord contractuel. Cela remonte à octobre 2008 où Morgan Stanley déposa une plainte contre Discover concernant la répartition des recettes de la résolution d'un litige antitrust contre des émetteurs rivaux de cartes de crédit Visa et MasterCard.

La perte numéro trois est de 722 millions de dollars. Le 4 novembre 2009, la SEC annonce un règlement en vertu duquel JP Morgan Securities paie une amende de 25 mil-

lions de dollars à la SEC, 50 millions au comté de Jefferson, et enfin renonce à 647 millions en frais de résiliation liés à des obligations et des contrats de swap de taux d'intérêt. Ce dossier suit une condamnation pénale d'un ancien fonctionnaire pour avoir accepté des pots-de-vin. À l'origine, le comté de Jefferson risquait de faire faillite depuis février 2008. Le refinancement de son système d'égout de 3 milliards s'étant effondré pendant la crise du crédit. JPMorgan était le chef de file des transactions bancaires. Par ailleurs, en février 2010, la SEC et les autorités du Massachusetts annoncent que la banque State Street Bank et Trust accepte de payer des dédommagements et amendes après le jugement statuant sur les allégations que la banque aurait induit en erreur certains investisseurs quant aux obligations de type *Limited Duration Bond Fund* en 2007. La SEC accuse également la banque d'avoir fourni de l'information sur ces fonds en interne, ce qui aurait permis à certains investisseurs d'encaisser au début au détriment d'autres qui n'auraient pas eu cette même information. Selon la SEC, cette banque commence en 2002 à commercialiser son produit en le décrivant comme liquide (*enhanced cash*). Beaucoup d'investisseurs le prennent comme une alternative intéressante au marché monétaire. Le problème est qu'en 2007, ces fonds sont presque entièrement investis dans des titres beaucoup plus risqués que ce que la banque laisse entendre dans ses communications.

Pour la cinquième perte, selon la SEC, Bank of America aurait omis de divulguer aux actionnaires une vue suffisamment précise des pertes de Merrill Lynch avant le vote de ratification définitive de l'acquisition de Merrill Lynch. La banque doit alors payer 150 millions. Nous arrivons enfin à la sixième et dernière perte, en septembre 2009, un homme d'affaires plaide coupable et est jugé à 12 ans de prison pour avoir fraudé Bank of America (142 millions), Citigroup (75 millions) et HSBC (75 millions), un cas de fraude externe pour un total dépassant 292 millions de dollars. Sauf ce dernier cas, les pertes citées sont reliées à des problèmes d'information diffusée ou à des erreurs de gestion du risque de produits financiers, dont leur tarification durant la crise financière. Toutes ces pertes ont eu des délais plus ou moins importants dus aux poursuites judiciaires. Par conséquent, ce deuxième pic est au fond une suite des problèmes ayant apparu pendant la

crise financière. Le décalage dans le temps des deux variations semble venir uniquement des procédures légales.

D'autre part, comme le risque de crédit revient presque toujours, des fausses déclarations et les transactions impropres reliées au Shadow Banking qui est aussi en grande partie sur les portefeuilles de crédit. D'ailleurs, plus de 500 milliards de dollars en crédit quittent le bilan des banques et trouvent le moyen de se transformer en sortes de titres *Asset-Backed Commercial Papers* entre 2004 et 2007 . Cette nouvelle façon de contourner la réglementation sur le capital, trop coûteuse au goût des banquiers, aura atteint un total de 1,3 trilliard en juillet 2007 (Kroszner et Strahan 2013 ; Acharya , Schnabl et Suarez 2013). Kindelberger et Aliber (2005) argumentent que « *...as the monetary system gets stretched, institutions lose liquidity and unsuccessful swindles are about to be revealed, the temptation to take the money and run becomes virtually irresistible.* ».

Nous continuons l'examen des pertes de la crise 2008. Citigroup paie un total de 8,045 milliards en mars 2008 pour l'affaire Enron. Avant cela, en octobre 2007, CFC perd 1,2 milliard suite aux premières vagues de défaut dans le marché des subprimes. Bank of America intervient et finit par racheter CFC par la suite. Poursuivons cette revue dans l'historique, Goldman Sachs cumule une perte de 768 millions, en août 2008, concernant des titres *ARS (auction rate securities)*. Cette banque se voit contrainte de racheter 1,5 milliard de ces titres du marché et paie des pénalités. Encore un cas de *CliPBP*, Bank of America vit la même expérience en plus grande et rachète 4,5 milliards en *ARS*, et perd un total de 720,7 millions en janvier 2009. La base de données *Algo OpData* classe ces deux dernières pertes dans la ligne métier *Trading et Sales*, ce qui représente la majorité des cas *CliPBP* avec la ligne métier *Corporate Finance*.

En conclusion, dans 90% des cas de pertes opérationnelles, le crédit est au coeur d'une histoire de transactions impropres, avec le Corporate Finance, *Trading et Sales* et/ou *Retail Banking*. 80% des montants en question sont réalisés par deux (tableau 2.6) à six (tableau 2.7) cas. En plus, ce sont souvent les mêmes banques qui reviennent. Rappelons que, ces zooms historiques, nous les avons faits en suivant les périodes spéciales mises

	Banque	Montant de perte	Type de perte	Ligne d'affaire	Date	% de pertes
1	Wachovia Bank	8400,00	CliPBP	RBn	21-07-2008	40,73
2	Countrywide Financial Cor	8400,00	CliPBP	RBn	06-10-2008	40,73
	autres (< 80 %)	3824,90	30 pertes			
	totaux	20624,90	32 pertes			

Tableau 2.6 – Résumé des pertes opérationnelles : juillet 2008 à novembre 2008

	Banque	Montant de perte	Type de perte	Ligne d'affaire	Date	% de pertes
1	Citibank N.A.	840,00	ExeDPM	TraS	19-01-2010	20,77
2	Discover Financial Servic	775,00	CliPBP	RBn	12-02-2010	19,16
3	JP Morgan Securities Inc.	722,00	CliPBP	CorF	04-11-2009	17,85
4	State Street Global Advis	663,00	CliPBP	AssM	04-02-2010	16,39
5	Merrill Lynch and Company	150,00	CliPBP	CorF	22-02-2010	3,71
6	Bank of America Corporati	142,00	EF	ComB	21-09-2009	3,51
	autres (< 80 %)	753	21 pertes			
	totaux	4045	27 pertes			

Tableau 2.7 – Résumé des pertes opérationnelles : août 2009 à février 2010

en exergue par le régime détecté. Autrement dit, le régime détecté semble plus concerner un ensemble de banques en particulier. Nous venons de documenter 80% de la sévérité des pertes opérationnelles par quelque vingt cas seulement concernant quelque cinq ou six banques.

### 2.3.1.5 Le test de spécification du modèle *Hidden Markov*

Nous voulons maintenant tester statistiquement la validité de la spécification *HMM* pour nos données. Pour cela, nous suivons Zucchini et MacDonald (2009). En général, si une variable aléatoire  $y$  suit une loi  $\mathcal{F}$  dont la fonction cumulative est  $F$ , la variable aléatoire définie par  $u = F(y)$  doit suivre une loi uniforme  $U(0, 1)$ . En notant  $\Phi$  la fonction cumulative de la loi normale, nous devons alors avoir

$$y \sim \mathcal{F} \Rightarrow u = F(y) \sim U(0, 1) \Rightarrow \Phi^{-1}(u) = \Phi^{-1}(F(y)) \sim N(0, 1)$$

La variable obtenue par  $z = \Phi^{-1}(F(y))$  est appelée pseudo-résidu. Si la spécification

Test	Pertes mensuelles (log)		Pseudo-résidus	
	statistique	p-value	statistique	p-value (bootstrap)
1 Kolmogorov-Smirnov	0,1035	0,0039	0,0718	0,1491
2 Anderson-Darling	1,3101	0,0020	0,6940	0,0651
3 Shapiro-Wilk	0,9331	0,0000	0,9831	0,1501

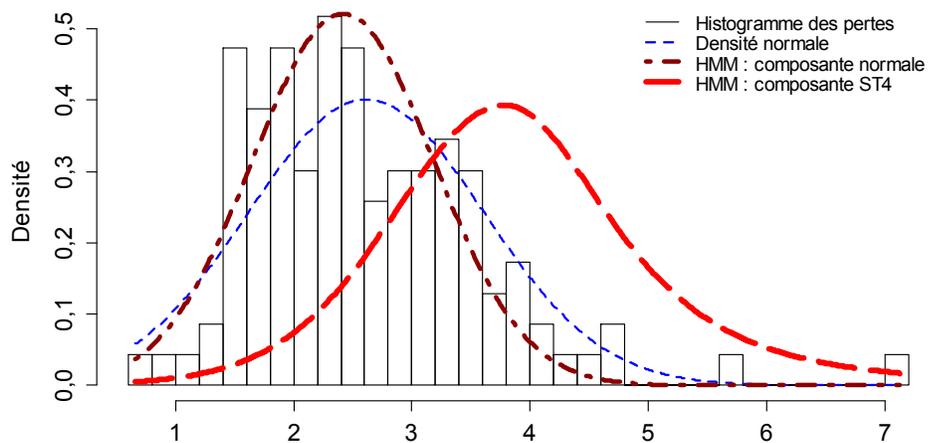
Tableau 2.8 – Tests statistiques de validation du modèle *HMM*

$\mathcal{F}$  convient aux données, ces pseudo-résidus doivent suivre une loi normale.

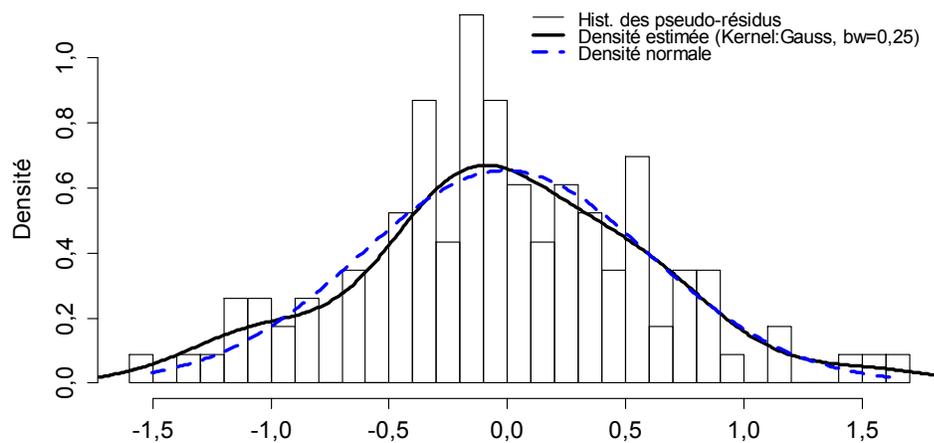
Dans notre cas, en conditionnel, le vecteur des pseudo-résidus du modèle *HMM* peut se calculer avec  $z_t = \Phi^{-1} [Pr(y \leq y_t | y_{t-1})] \Rightarrow z_t \sim N(0, 1)$ . Pour les détails, nous référons à Zucchini et MacDonald (2009).

La figure 2.7a montre un histogramme de la distribution des pertes mensuelles (en log). Elle est clairement asymétrique. La composante *ST4* se place vers la droite de la moyenne pour tenir compte de cette asymétrie. La distribution des pseudo-résidus dans la figure 2.7b semble visuellement assez proche d'une loi normale. Cela devra être confirmé par les tests statistiques Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling et Shapiro-Wilk dont les résultats sont exposés au tableau 2.8. À titre de comparaison, nous effectuons également ces tests de normalité sur la série des moyennes mensuelles des pertes. D'autre part, nous calculons les *p-values* des tests relatifs aux pseudo-résidus par *bootstrap* paramétrique vu que ce sont des tests sur une distribution conditionnelle (voir Bai, 2003). Nous prenons 10000 tirages pour conduire la procédure *bootstrap* dans la suite.

Comme attendu à cause de l'asymétrie prononcée, les trois tests rejettent la normalité à 5% pour la série de pertes. Quant aux pseudo-résidus, les tests Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling et Shapiro-Wilk ne permettent pas de rejeter la normalité à 5% avec des *p-values* de 0,1491, 0,0651 et 0,1501 respectivement. Cela semble indiquer que malgré une certaine épaisseur de la queue de distribution (Anderson-Darling), nous pouvons valider notre spécification *HMM*.



(a) Pertes mensuelles (en log)



(b) Pseudo-résidus

Figure 2.7 – Histogrammes des pertes mensuelles et des pseudo-résidus

## 2.4 La mesure de l'effet du régime détecté

Nous prenons comme départ la modélisation d'estimation des pertes de Dahen et Dionne (2010) :

$$\log(Loss) = \alpha + \beta \log(Assets) + \gamma BL + \delta ET + \varepsilon \quad (25)$$

La variable dépendante sera  $\log(Loss)$  (montant de perte individuelle, en log) . Les variables explicatives sont  $\log(Assets)$  (total des actifs de la banque concernée, en log), les variables catégorielles  $BL$  (lignes d'affaires) et  $ET$  (types de perte). Les effets fixes du panel temporel concernant les années sont notés  $yearFE$ . Nous en tenons compte dans l'estimation, mais nous n'affichons pas les résultats afin d'alléger la présentation, n'étant pas vraiment utiles dans la discussion. Tous les écarts-types et  $p-values$  seront robustes à la présence d'hétéroscédasticité et de clustering au sens de White (1980). Nous discutons maintenant les régressions exposées dans le tableau 2.9. Le modèle (1a) est celui de référence. *RégimeHMM* représente la variable indicatrice quand le régime *HMM* est à 2 (hautes pertes). Nous ajoutons cette variable seule dans le modèle (2a), ensuite, nous l'injectons et ses interactions avec  $BL$  et  $ET$  dans (3a).<sup>1</sup>

La variable  $\log(Assets)$  est très significative comme généralement trouvé dans ce type de modèles. Le coefficient garde sensiblement sa magnitude dans toutes les régressions. Le coefficient des deux niveaux étant très significatif à 1% dans le modèle (2a), mais moins significatif pour le modèle (3a), où il est significatif à 10%. Trois variables d'interaction sont par contre significatives à 1%. La présence des effets fixes des années n'empêche pas le régime d'être aussi significatif. Cela suggère que le régime détecté ne peut pas être expliqué par le temps. La comparaison des  $R^2$  ajustés des modèles montre un certain avantage à injecter la variable du régime, seule en (2a) ou croisée en (3a). Cela dit, nous devons réaliser un *backtesting* sur ces modèles afin d'en évaluer la validité pour calculer

---

<sup>1</sup>Le modèle a également été estimé en utilisant la procédure de Heckman (1979) afin de tenir compte d'un biais potentiel de sélection des entreprises ayant subi des pertes supérieures à un million de dollars, comme dans Dahen et Dionne (2010). Les résultats sont présentés dans l'appendice B. Ils indiquent que l'inverse du ratio de Mills n'est pas significatif dans la seconde étape et que les autres résultats demeurent stables.

	(1a)	(2a)	(3a)
	Modèle de référence	(1a) + Régime HMM	(2a) + interactions
(Constante)	-0,297 (0,433)	-0,260 (0,446)	-0,160 (0,436)
log(Assets)	0,139*** (0,037)	0,139*** (0,038)	0,126*** (0,036)
Régime HMM		0,977*** (0,331)	1,538* (0,791)
PayS (Paymt and Settlmnt)	1,261*** (0,438)	1,199*** (0,438)	1,196** (0,466)
TraS (Trading and Sales)	1,104*** (0,290)	1,026*** (0,304)	0,906** (0,372)
ComB (Comm. Banking)	1,182*** (0,167)	1,117*** (0,164)	1,159*** (0,172)
RBn (Retail Banking)	0,930*** (0,207)	0,867*** (0,207)	0,827*** (0,171)
AgnS (Agency Services)	1,223*** (0,413)	1,161*** (0,435)	1,532*** (0,443)
CorF (Corp. Finance)	2,056*** (0,237)	2,063*** (0,250)	1,999*** (0,294)
AssM (Asset Mngmt)	1,358*** (0,274)	1,321*** (0,254)	1,307*** (0,283)
BusDSF (Bus.Disrup. Syst.Fail.)	-1,080 (0,687)	-0,926 (0,569)	-0,878 (0,630)
DamPA (Damage Phy.Assets)	-0,086 (1,925)	-0,044 (1,923)	0,047 (1,953)
EmpWS (Employ.Prac.Wrkplac.Saf.)	-0,676*** (0,252)	-0,622** (0,254)	-0,476** (0,224)
EF (External Fraud)	-0,502*** (0,157)	-0,489*** (0,161)	-0,433** (0,170)
IF (Internal Fraud)	-0,593*** (0,227)	-0,524** (0,226)	-0,304 (0,211)
ExeDPM (Exec. Deliv. Proc Mnmt)	-0,214 (0,228)	-0,217 (0,230)	-0,130 (0,256)
Régime × EmpWS			-2,321*** (0,513)
Régime × EF			0,120 (1,088)
Régime × IF			-3,314*** (0,547)
Régime × ExeDPM			0,115 (1,228)
Régime × PayS			-0,561 (1,584)
Régime × TraS			0,317 (1,248)
Régime × ComB			-1,511 (1,266)
Régime × RBn			0,401 (1,075)
Régime × AgnS			-4,491*** (1,114)
Régime × CorF			0,645 (1,565)
Régime × AssM			-0,249 (0,963)
Year FE	<i>oui</i>	<i>oui</i>	<i>oui</i>
Adj. R <sup>2</sup>	0,170	0,186	0,223
Nombre obs.	508	508	508

\*\*\*  $p < 0,01$ , \*\*  $p < 0,05$ , \*  $p < 0,1$

Tableau 2.9 – Effet du régime détecté sur la distribution des sévérités

le capital de réserve. Signalons que dans la base des pertes il n'y a pas d'observations concernant *BusDSF* ni *DamPA* où le régime Markov est à 2. C'est pour cela que les coefficients correspondant aux croisements ne sont pas présentés dans la colonne (3a).

Il nous faut maintenant mesurer l'effet des niveaux du régime sur les fréquences des pertes. Nous construisons le modèle autour de la distribution binomiale négative à inflation de zéros (*Zero-Inflated Negative Binomial*), comme dans Dahen et Dionne (2010). Soit  $Y$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale négative de moyenne  $\lambda$  et de paramètre de dispersion  $\theta$ . Si  $f_{NB}$  est la fonction de masse de cette loi, la probabilité que  $Y$  soit égale à une valeur  $k$  s'écrit

$$Pr(Y = k | \lambda, \theta) = f_{NB}(k, \lambda, \theta) = \frac{\Gamma(k + 1/\theta)}{k! \Gamma(1/\theta)} \left[ \frac{1}{1 + \theta \lambda} \right]^{\frac{1}{\theta}} \left[ \frac{\theta \lambda}{1 + \theta \lambda} \right]^k$$

où  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\Gamma(\cdot)$  désigne la fonction gamma conventionnelle. Notons que  $\theta > 0$  et que la binomiale négative converge vers une loi de Poisson quand  $\theta \rightarrow 0$ . Quand il y a des raisons de penser qu'il y a trop de valeurs 0 relativement à une binomiale négative, il convient d'envisager un modèle avec une loi binomiale négative à inflation de zéros. Soit  $Y_{ij}$  une variable représentant le nombre de perte de la banque  $i$  pour l'année  $j$ . Si  $Y_{ij}$  suit une loi binomiale négative à inflation de zéros, nous pouvons écrire

$$Pr(Y_{ij} = k | \lambda_{ij}, \theta) = \begin{cases} q_{ij} + (1 - q_{ij})f_{NB}(0, \lambda_{ij}, \theta) & k = 0 \\ (1 - q_{ij})f_{NB}(k, \lambda_{ij}, \theta) & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

où  $\lambda_{ij}$  est la moyenne et  $\theta$  est le paramètre de dispersion de la loi binomiale négative de base. La quantité  $q_{ij}$  représente la proportion des zéros qui seraient de trop par rapport à une loi binomiale négative. Conditionnellement aux variables explicatives choisies, la moyenne  $\lambda_{ij}$  et la probabilité  $q_{ij}$  s'écrivent

$$\begin{aligned} \log(\lambda_{ij}) &= \zeta_0 + \zeta_1 \log(Assets) + \zeta_2 RégimeHMM + \zeta_3 gGDP \\ &+ \zeta_4 Bank\_Cap + \zeta_5 Mean\_Salary \\ \log\left(\frac{q_{ij}}{1 - q_{ij}}\right) &= \xi_0 + \xi_1 \log(Assets) + \xi_2 RégimeHMM + \xi_3 gGDP + \xi_4 Mean\_Salary \end{aligned}$$

La dernière écriture est équivalente à la modélisation de  $q_{ij}$  à l'aide d'une distribution logistique. La variable  $\log(Assets)$  est le total des actifs de la banque (en log). *Régime HMM* représente la variable indicatrice quand le régime *HMM* est à 0. La variable  $gGDP$  est la première différence du produit national brut de l'année considérée. *Bank\_Cap* est le ratio de capitalisation de la banque ( $= BHCK3210/BHCK2170/1000$ , les variables *BHCK* viennent de la base de données BHC). *Mean\_Salary* est le ratio moyen des salaires et avantages assimilés du trimestre en question sur l'équivalent du nombre d'employés à temps plein ( $= BHCK4135/BHCK4150/1000$ ). Le choix de ces dernières variables est comme discuté dans Dahan et Dionne (2010).

Les estimations sont présentées dans le tableau 2.10. En (1b), nous montrons le modèle de référence afin de comparer l'effet de l'ajout du régime. Il y a 4329 observations de janvier 2001 à décembre 2010. Nous voulons mesurer l'effet du régime *HMM* à la fois dans l'étage de comptage (*count model*) et dans celui de la correction des zéros (*zero model*). L'idée est de dire que pendant les régimes hauts, nous voulons voir si les faux zéros (ceux qui ne proviennent pas de la binomiale négative) sont plus ou moins nombreux. Le modèle (2b) ajoute cette dimension dans les deux étages. Son coefficient est négatif et significatif à 10% au comptage, positif très significatif pour les zéros corrigés. L'interprétation semble être que pendant les hauts niveaux du régime Markov les pertes seraient moins nombreuses alors que les zéros proviennent plus de l'inflation des zéros (hors la binomiale négative).

La variable  $gGDP$  est aussi très significative pour expliquer les zéros en trop. Nous désirons mesurer si la déflation des zéros apporte statistiquement de la valeur. Pour ce faire, nous devons le comparer au modèle de base (1b). Sachant qu'il sont imbriqués, nous pourrions le tester avec le ratio de vraisemblance dont les résultats figurent en bas du même tableau. Le test de ratio de vraisemblance du modèle (2b) versus (1b) est concluant avec une statistique de 46,530 et une *p-value* pratiquement nulle. Le modèle (2b) utilisant le régime Markov semble apporter de l'information par rapport au modèle de référence vu la diminution importante du critère AIC et le résultat du test de ratio de vraisemblance. Une dernière remarque concerne les valeurs du paramètre de dispersion

thêta (en log) de la binomiale négative déflatée. Nous partons d'une valeur de 2,097 dans le modèle (1b), et atteignons 1,085 pour (2b) ce qui est encore une amélioration claire de la spécification, dans le sens qu'il y a moins d'hétérogénéité non observée dans (2b). Passons maintenant au *backtesting* !

## 2.5 La validation *backtesting*

Dans cette section l'objectif est double. D'abord, nous voulons construire une procédure *backtesting* pour nos modèles avec régimes afin de statuer sur leur validité. Nous souhaitons aussi mesurer à quel point ignorer l'existence des régimes dans nos données de pertes opérationnelles peut biaiser le calcul du capital de réserve si cette réalité n'est pas prise en compte formellement. La période choisie pour calculer la couverture est de janvier 2010 à décembre 2010. Cette période sera désignée par *Couv0*. Le régime y est haut pour le mois de janvier et est bas pour les onze autres mois. Nous rappelons la numérotation des trois modèles : (1a) est le modèle de base ; (2a) inclut le régime Markov ; enfin (3a) inclut le régime Markov et les croisements du régime avec les *BL* et les *ET*. Nous suivons l'esprit de l'article de Dahen et Dionne (2010) pour construire notre *backtesting* tout en tenant compte des niveaux du régime détecté. Il y aura un calcul *backtesting* en échantillon (*In-Sample*), dans le sens que l'historique va inclure la période *Couv* : de janvier 2001 à décembre 2010 (nommée *Hist1*). Ensuite, le *backtesting* hors échantillon (*Out-of-Sample*), par construction, n'inclut pas la période à couvrir dans l'historique, et va durer de janvier 2001 à décembre 2009 (désignée par *Hist2*). Pour chaque modèle, les données des périodes *Hist1*, *Hist2* et *Couv* vont être redimensionnées par *scaling* selon les coefficients estimés comme vu dans le tableau 2.9.

Pour une banque donnée, le *scaling* se basera sur les valeurs des régressions du tableau 2.9 et sur la valeur moyenne de  $\log(\text{Assets})$  de la banque pendant la période *Couv*. Une fois redimensionnées pour une banque donnée, les pertes de l'historique (*Hist1* ou *Hist2*) peuvent être considérées suivre une loi lognormale. Prenons la banque U.S. Bancorp, le test K-S donne une statistique de  $D = 0,1328$  et  $p\text{-value} = 0,1979$ . La loi lognormale

	(1b) Modèle de référence	(2b) Ajout Régime HMM
Étage de comptage ( <i>Count model</i> ) :		
(Constante)	-10,969*** (0,741)	-11,370*** (0,424)
log(Assets)	0,885*** (0,053)	0,916*** (0,034)
Régime HMM		-0,531* (0,291)
gGDP	0,018 (0,034)	0,011 (0,039)
Bank_Cap	4,428*** (0,933)	4,103*** (0,705)
Mean_Salary	-0,751 (0,913)	-1,642* (0,841)
Log(thêta)	2,097*** (0,634)	1,085*** (0,417)
Étage de correction des zéros ( <i>Zero model</i> ) :		
(Constante)	1,176 (1,681)	-4,580* (2,712)
log(Assets)	-0,176 (0,120)	-0,149 (0,202)
Régime HMM		7,888*** (2,502)
gGDP	0,001 (0,109)	2,734*** (0,787)
Mean_Salary	1,466 (2,569)	-48,468** (23,625)
AIC	1640,089	1597,558
Log MV (log Likelihood)	-810,044	-786,779
Test ratio de MV		
- statistique		46,530
- p.value		0,000
Nombre d'obs.	4329	4329

\*\*\*  $p < 0,01$ , \*\*  $p < 0,05$ , \*  $p < 0,1$

Tableau 2.10 – Effet du régime détecté sur la distribution des fréquences

étant l'hypothèse nulle, le test ne permet pas de la rejeter. Vu la linéarité en  $\log(Assets)$  des trois modèles, cela nous permet de conclure quant à la validité de la lognormale pour toutes les banques de notre échantillon BHC. Nous estimons la fréquence selon le tableau 2.10. Nous effectuons 200 000 tirages de la lognormale en question dont nous calculons la convolution pour 2000 nombres tirés de la binomiale négative du modèle des fréquences correspondant. Cela nous donne une distribution dont nous calculons le capital de couverture pour quatre degrés de confiance : 95%, 99%, 99,5% et 99,9%. Le degré de confiance 99,5% nous permettra d'apprécier l'épaisseur de la queue de la distribution, et aussi d'avoir une idée de ce qui se passe dans le cas où la VaR à 99,9% n'est pas dépassée.

Concernant les tests statistiques que nous employons, ce sont le test de Kupiec (1995) évaluant les fréquences des dépassements, ensuite le test  $DQ$  de Engle et Manganelli (2004) pour mesurer l'indépendance des dépassements, et enfin le test de Christoffersen (1998) qui nous aidera à statuer sur la couverture conditionnelle simultanée de la fréquence et de l'indépendance des dépassements. Cela nous permettra d'avoir une vue complète et robuste de la validité de notre *backtesting*. Pour donner des chiffres, nous avons 445 pertes enregistrées pour la période *Hist1* et 63 pour la période *Couv*, ce qui nous donne  $508 = 445 + 63$  pertes pour *Hist2*. Il nous faut calculer les pertes probables que peut subir une banque donnée durant la période *Couv*. Pour ce faire, les 63 pertes de *Couv* vont être redimensionnées à la taille de la banque, ensuite chaque perte va être multipliée avec le *scaling* des modèles 56 fois pour simuler tous les huit *BL* et les sept *ET* possibles selon la nomenclature de Bâle (voir le tableau 2.3). Cela nous permettra de gérer le risque opérationnel advenant tous les cas possibles. Les 63 pertes généreront donc 3528 pertes possibles. Les tests statistiques du *backtesting* vont s'opérer sur ces 3528 observations ainsi générées. Il est important de bien souligner que le *scaling* va porter sur toutes les pertes historiques de *Hist1* (en échantillon) ou *Hist2* (*out-of-sample*) et aussi sur les pertes possibles de la période *Couv*. Par conséquent, le modèle qui passera le *backtesting* est automatiquement celui qui réussira, simultanément, le *scaling* de toutes les observations de pertes en question.

Nous effectuons les calculs pour deux banques. La première est U.S. Bancorp (la même que dans l'article de Dahen et Dionne, 2010). Analysons le tableau 2.11. Le test Kupiec rejette la VaR à 95% en échantillon pour le modèle de base (1a). La raison est que les dépassements observés sont trop peu nombreux avec 3,4% versus 5% théorique. Pour le reste des degrés de confiance du modèle (1a) en échantillon et hors échantillon, tout semble bien fonctionner. Nous pouvons dire la même chose quant à l'indépendance des dépassements sauf pour la VaR à 99,5% en hors échantillon où le test  $DQ$  rejette la validité à 5%, tandis que le test Christoffersen ne permet pas de la rejeter à 5% toujours. Le capital à 99,9% est 2957,4 millions de dollars. L'actif total de cette banque s'élève à 290,6 milliards, le capital de réserve en représente 1,02%. Le modèle (2a) accuse une faiblesse quant à la fréquence des dépassements de la VaR 95% et 99,5% en échantillon, et la VaR 95% hors échantillon. Nous observons les mêmes faiblesses pour le modèle (3a) concernant les VaR 95%, 99,5% en échantillon, et 99% en hors échantillon. Pour l'indépendance des sorties, le test  $DQ$  est rejeté à 5% pour la VaR 99,5% en échantillon, sinon cela semble bien fonctionner par ailleurs à 5%. Le test Christoffersen montre la même faiblesse en échantillon pour la VaR à 5% et aussi celle à 99,5%, sinon c'est correct pour le reste à 5%. Nous arrivons aux capitaux calculés pour la couverture, ils sont moins grands que pour le modèle de référence (1a), avec 2480,5 millions et 2060,7 millions pour la VaR 99,9% du modèle (2a) et celui (3a) respectivement.

Nous faisons deux remarques importantes pour conclure. La première est que tous les capitaux calculés par les modèles (2a) et (3a) sont inférieurs à celui calculé par le modèle (1a) qui ne tient pas compte de l'existence des régimes. Ceci soutient l'existence du biais temporel discuté au début du chapitre. En utilisant le calcul du modèle (3a), ce biais pour la banque U.S. Bancorp est de  $(2957,4 - 2060,7)/2957,4 = 30,3\%$  de trop ! La deuxième remarque est que les différentes faiblesses mises en évidence par les tests plus haut semblent essentiellement porter sur la VaR à 95% et c'est toujours pour une couverture à l'excès (trop de couverture). De ce fait, nous considérons les deux modèles (2a) et (3a) convenablement validés par le *backtesting*. De plus, c'est le modèle (3a) qui se distingue des autres, en permettant une économie importante en capital.

Pour nous en convaincre plus, nous faisons la même démarche pour une deuxième banque BHC : Fifth Third Bancorp. Sa taille est de 111,5 milliards. Nous obtenons essentiellement le même pattern en analysant le tableau 2.12. Le modèle (3a) est toujours le moins cher en capital. Notons cette fois que les modèles (2a) et (3a) ne réussissent pas le test de Kupiec en hors échantillon à 99,9%. Même remarque pour les tests  $DQ$  et Christoffersen. Pourtant, la VaR au niveau intermédiaire 99,5% semble bien se comporter dans les mêmes tests. Le modèle (1a) est aussi à la limite du rejet à 5% quant à cette même VaR 99,9% en hors échantillon avec une  $p$ -value de 0,0506. Maintenant, si nous considérons valide le modèle (3a), l'économie en capital de couverture à 99,9% serait de  $(1722,6 - 1291,5)/1722,6 = 25\%$ . Par ailleurs, le croisement de la variable régime  $HMM$  avec  $BL$  et  $ET$  semble capturer le fait que ces variables n'ont pas les mêmes effets pendant les différentes phases des régimes. La prise en compte du régime Markov semble apporter une amélioration indiscutable.

Comme autocritique à cette recherche, nous soulevons deux questions. La première serait de justifier statistiquement qu'une mixture de deux normales, au lieu d'une normale (notée  $N$ ) et une  $ST4$ , n'aurait pas suffi. La deuxième question est de nous demander s'il existe un régime à trois niveaux plutôt que deux. Dans ce cas, ce serait une mixture de deux normales plus une  $ST4$ . En somme, nous voulons comparer notre modèle  $N+ST4$  à deux autres modèles :  $2N$  (deux niveaux :  $N+N$ ) et  $2N+ST4$  (trois niveaux :  $N+N+ST4$ ). Les estimations nous permettent de croire que nous n'aurions pas une meilleure spécification que le  $N+ST4$ . Nous effectuons les tests de la normalité des pseudo-résidus des trois modèles concurrents dans le tableau 2.13. Comme fait plus haut, les  $p$ -values sont déterminées par *bootstrap* paramétrique de 10000 tirages. D'abord, concernant le modèle  $2N$ , toutes les  $p$ -values sont inférieures à 10%. Les données disent clairement qu'il ne convient pas. Quant au modèle  $2N+ST4$  (trois niveaux), nous avons des  $p$ -values de 0,0500, 0,0647 et 0,1792 pour Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling et Shapiro-Wilk respectivement. Si nous raisonnons à 10%, nous avons deux tests qui rejettent la normalité alors que seul Anderson-Darling montrait un problème pour le  $N+ST4$  à deux niveaux, comme vu plus haut. De plus, la valeur du critère AIC du modèle  $2N+ST4$  est

Backtesting	Modèle	$\alpha$ (Fréquence)		VaR		Test Kupiec		DQ de E-M		Christoffersen	
		théorique	observ.	stat.	p.value	stat.	p.value	stat.	p.value	stat.	p.value
(1a) Modèle de référence											
En échantillon ( <i>In-Sample</i> )		1	0,050	0,034	269,7	11,039	0,0009	10,246	0,0365	11,797	0,0027
		1	0,010	0,009	842,3	0,233	0,6292	5,129	0,2744	0,233	0,8899
		1	0,005	0,004	1289,7	0,116	0,7334	0,208	0,9949	0,116	0,9436
Hors échantillon ( <i>Out-of-Sample</i> )		1	0,001	0,002	2957,4	1,991	0,1583	2,751	0,6003	1,991	0,3696
		1	0,050	0,043	269,7	1,760	0,1846	2,359	0,6701	2,550	0,2795
		1	0,010	0,012	842,3	0,479	0,4887	1,404	0,8434	0,479	0,7869
		1	0,005	0,008	1289,7	2,385	0,1225	14,792	0,0052	5,027	0,0810
		1	0,001	0,002	2957,4	1,991	0,1583	2,751	0,6003	1,991	0,3696
(2a) Régime HMM											
En échantillon		2	0,050	0,036	230,1	8,755	0,0031	9,183	0,0567	8,812	0,0122
		2	0,010	0,010	712,1	0,000	1,0000	4,229	0,3759	1,775	0,4118
		2	0,005	0,009	1067,3	5,659	0,0174	8,089	0,0884	5,659	0,0590
Hors échantillon		2	0,001	0,002	2480,5	0,666	0,4145	0,826	0,9349	0,666	0,7169
		2	0,050	0,039	230,1	4,538	0,0332	5,253	0,2623	4,541	0,1033
		2	0,010	0,012	712,1	0,479	0,4887	3,802	0,4334	0,479	0,7869
		2	0,005	0,004	1067,3	0,484	0,4867	0,511	0,9724	0,484	0,7851
		2	0,001	0,002	2480,5	1,991	0,1583	2,751	0,6003	1,991	0,3696
(3a) Régime HMM + interactions											
En échantillon		3	0,050	0,035	209,0	9,483	0,0021	8,768	0,0672	9,520	0,0086
		3	0,010	0,011	619,3	0,217	0,6416	6,884	0,1421	1,653	0,4376
		3	0,005	0,010	913,6	6,999	0,0082	10,165	0,0377	6,999	0,0302
Hors échantillon		3	0,001	0,001	2060,7	0,425	0,5146	0,357	0,9859	0,425	0,8086
		3	0,050	0,043	209,0	1,760	0,1846	3,430	0,4886	1,844	0,3977
		3	0,010	0,016	619,3	5,730	0,0167	9,258	0,0550	5,730	0,0570
		3	0,005	0,004	913,6	0,116	0,7334	0,208	0,9949	0,116	0,9436
		3	0,001	0,002	2060,7	0,666	0,4145	0,826	0,9349	0,666	0,7169

Tableau 2.11 – Validation *backtesting* de la banque U.S. Bancorp

Backtesting	Modèle	$\alpha$ (Fréquence)		VaR		Test Kupiec		DQ de E-M		Christoffersen	
		théorique	observ.	stat.	p.value	stat.	p.value	stat.	p.value	stat.	p.value
(1a) Modèle de référence											
En échantillon ( <i>In-Sample</i> )	1	0,050	0,028	115,0	20,948	0,0000	18,955	0,0008	21,130	0,0000	
	1	0,010	0,008	430,7	0,972	0,3241	1,161	0,8844	0,972	0,6150	
	1	0,005	0,007	689,8	0,909	0,3403	1,334	0,8556	0,909	0,6346	
	1	0,001	0,002	1722,6	1,991	0,1583	2,751	0,6003	1,991	0,3696	
Hors échantillon ( <i>Out-of-Sample</i> )	1	0,050	0,038	115,0	5,590	0,0181	7,547	0,1097	5,816	0,0546	
	1	0,010	0,007	430,7	1,553	0,2127	1,614	0,8063	1,553	0,4600	
	1	0,005	0,004	689,8	0,484	0,4867	0,511	0,9724	0,484	0,7851	
	1	0,001	0,003	1722,6	3,822	0,0506	5,812	0,2137	3,822	0,1479	
(2a) Régime HMM											
En échantillon	2	0,050	0,032	100,4	13,629	0,0002	17,235	0,0017	17,030	0,0002	
	2	0,010	0,008	377,0	0,972	0,3241	1,161	0,8844	0,972	0,6150	
	2	0,005	0,004	592,2	0,484	0,4867	0,511	0,9724	0,484	0,7851	
	2	0,001	0,002	1522,9	0,666	0,4145	0,826	0,9349	0,666	0,7169	
Hors échantillon	2	0,050	0,042	100,4	2,415	0,1202	4,089	0,3941	2,536	0,2814	
	2	0,010	0,010	377,0	0,000	1,0000	0,564	0,9670	0,000	1,0000	
	2	0,005	0,009	592,2	4,439	0,0351	6,256	0,1808	4,439	0,1087	
	2	0,001	0,005	1522,9	14,599	0,0001	29,515	0,0000	14,599	0,0007	
(3a) Régime HMM + interactions											
En échantillon	3	0,050	0,031	94,4	15,532	0,0001	16,867	0,0021	17,537	0,0002	
	3	0,010	0,008	338,1	0,972	0,3241	1,161	0,8844	0,972	0,6150	
	3	0,005	0,004	522,6	0,484	0,4867	0,511	0,9724	0,484	0,7851	
	3	0,001	0,002	1291,5	0,666	0,4145	0,826	0,9349	0,666	0,7169	
Hors échantillon	3	0,050	0,042	94,4	2,783	0,0953	4,984	0,2889	2,804	0,2461	
	3	0,010	0,013	338,1	1,829	0,1762	3,369	0,4980	1,829	0,4007	
	3	0,005	0,007	522,6	1,570	0,2102	2,205	0,6981	1,570	0,4562	
	3	0,001	0,003	1291,5	6,057	0,0138	10,012	0,0402	6,057	0,0484	

Tableau 2.12 – Validation *backtesting* de la banque Fifth Third Bancorp

		Régime à 3 niveaux 2 Normales + 1 <i>ST4</i>		Régime à 2 niveaux 1 Normale + 1 <i>ST4</i>		Régime à 2 niveaux 2 Normales	
		stat.	p-value (bootstrap)	stat.	p-value (bootstrap)	stat.	p-value (bootstrap)
1	Kolmogorov-Smirnov	0,0819	0,0500	0,0718	0,1491	0,0849	0,0369
2	Anderson-Darling	0,6950	0,0647	0,6940	0,0651	0,7873	0,0372
3	Shapiro-Wilk	0,9839	0,1792	0,9831	0,1501	0,9790	0,0630

Tableau 2.13 – Tests statistiques de validation des modèles concurrents

de 325,59 contre 321,93 pour notre modèle  $N+ST4$ , ce qui est une dégradation des performances. Cette détérioration est plus évidente en utilisant le critère BIC qui devient 380,66 pour le modèle à trois niveaux alors qu'il valait 352,22 pour le modèle  $N+ST4$ . Nous rejetons donc le modèle  $2N+ST4$  au niveau de confiance de 10%. Par conséquent, nous retenons définitivement la spécification à deux niveaux de régime construite avec une loi normale et une *Skew t type 4* pour nos observations extrêmes.

Une remarque s'impose ici. En effet, a priori, si les données le permettent en nombre d'observations et en qualité, nous devrions avoir un meilleur ajustement (*goodness-of-fit*) si nous augmentons les degrés de liberté d'un modèle donné. Dans notre cas, vu la figure 2.6, il y a 18 observations représentant le niveau de régime des hautes pertes. L'ajout d'un troisième niveau aurait juste départagé ces 18 observations en deux niveaux. Les trois niveaux résultants deviennent *pertes normales*, *grandes pertes* et enfin *très grandes pertes*. Or, les 18 observations sont peu nombreuses pour modéliser deux niveaux distincts. En plus, très peu de périodes sont parties au niveau *ST4*, ce qui rend ce niveau peu significatif. Finalement, tout se passe comme si nous avions un premier niveau représenté avec une normale, ensuite un deuxième avec une deuxième normale. Ce modèle à trois niveaux se réduit alors pratiquement à deux niveaux avec deux normales seulement, le niveau *ST4* n'étant pas représentatif. D'où des *p-values* du modèle à trois niveaux qui permettent de le rejeter, tout comme le modèle à deux niveaux construit avec deux lois normales.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous analysons l'effet des cycles dans les données de pertes opérationnelles sur le capital optimal des banques. Nous montrons que la crise financière récente a affecté les données des pertes opérationnelles au point d'y engendrer un changement de régime. En effet, un niveau haut distinct caractérise les pertes extrêmes de cette période, par rapport à un niveau bas relatif aux périodes de pertes considérées normales. La prise en compte des niveaux du régime corrige un biais temporel dans les données. Cela permet de réduire le capital pour le risque opérationnel, en le redistribuant entre les deux niveaux du régime. Les exemples que nous avons pris suggèrent une réduction importante du capital de 25% à 30%. Cela montre l'amplitude du biais temporel dû au changement de régime et la nécessité d'en tenir compte dans les calculs du capital. Nous montrons également que les règlements de cour affectent de façon significative la distribution temporelle des pertes. Plusieurs grandes pertes sont enregistrées après la crise financière de 2007-2009 à cause de ces délais. Ce phénomène n'est pas nouveau, puisqu'il est également observé pour les pertes importantes des compagnies d'assurance dont les règlements de paiement sont fixés par la cour.

Plusieurs extensions à notre étude sont possibles. La plus prometteuse serait de vérifier la stabilité des résultats en utilisant des méthodes différentes de détection de régimes Maalaoui Chun *et al.* (2014). Une approche de détection de régime en temps réel permettrait-elle, probablement, d'améliorer les résultats et, en particulier, mieux tenir compte de l'asymétrie et l'épaisseur des queues de distribution détectées dans ce chapitre. Un autre intérêt de cette approche est qu'elle permet d'analyser les changements de régime dans la moyenne et ceux dans la volatilité, et ce séparément.

Une autre extension possible serait d'utiliser une approche différente pour le *scaling* des données, pour engendrer un plus grand nombre d'observations au niveau de chaque banque. Certaines banques utilisent l'approche de changement de mesure proposée par Dutta et Babbel (2014), en combinant l'analyse de scénarios avec les données historiques. Ce genre l'approche, en y introduisant le changement de régime que nous avons

défecté, permettrait de vérifier la stabilité des résultats de ce chapitre. Une extension des analyses au *stress testing* des modèles serait également souhaitable.

## Appendice A : la distribution *Skew t de type 4*

Pour référence, nous écrivons la fonction de densité d'une t-Student standard, pour tout réel  $x$

$$f(x|\mu, \sigma, \nu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\nu}B(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})} \left[ 1 + \frac{(x-\mu)^2}{\nu\sigma^2} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (26)$$

où  $\mu \in \mathbf{R}$ ,  $\sigma, \nu > 0$ ,  $B(\cdot)$  est la fonction beta,  $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ ,  $\Gamma(\cdot)$  étant la fonction gamma conventionnelle.

L'espérance mathématique est  $E(X) = \mu$ .

La variance est  $Var(X) = \sigma^2 \frac{\nu}{\nu-2}$  lorsque  $\nu > 2$ , et est indéfinie sinon.

Selon Rigby *et al.* (2014), la fonction de densité d'une *Skew t-Student de type 4 (ST4)* s'écrit pour tout réel  $x$

$$f_2(x|\mu, \sigma, \nu, \tau) = \frac{c}{\sigma} \left\{ \left[ 1 + \frac{(x-\mu)^2}{\nu\sigma^2} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} I(x < \mu) + \left[ 1 + \frac{(x-\mu)^2}{\tau\sigma^2} \right]^{-\frac{\tau+1}{2}} I(x \geq \mu) \right\} \quad (27)$$

où  $c = \frac{2}{\sqrt{\nu}B(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}) + \sqrt{\tau}B(\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2})}$ ,  $\mu \in \mathbf{R}$ ,  $\sigma, \nu, \tau > 0$

L'espérance mathématique est  $E(X) = \mu + \sigma E(Z)$  où  $E(Z) = c \left[ \frac{1}{\tau-1} - \frac{1}{\nu-1} \right]$  quand  $\tau > 1$  et  $\nu > 1$ ,  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ .

La variance est  $Var(X) = \sigma^2 Var(Z)$  où  $Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$  et

$$E(Z^2) = \frac{c}{2} \left\{ \left[ \frac{\tau^{3/2}B(1/2, \tau/2)}{\tau-2} \right] + \left[ \frac{\nu^{3/2}B(1/2, \nu/2)}{\nu-2} \right] \right\} \text{ quand } \tau > 2 \text{ et } \nu > 2.$$

- La *skew t type 4* est par construction la jointure de deux demies *t* de Student dont les paramètres  $\nu$  et  $\tau$  sont, respectivement, le degré de liberté de la queue gauche (vers les petites pertes) et  $\tau$  pour la queue droite (vers les grandes pertes). Les deux moitiés se rejoignent au point  $x = \mu$ . Chaque moitié *t* de Student va ajuster son paramètre de sorte à capturer l'épaisseur de la queue indépendamment l'une de l'autre.

- Dans le cas où  $\nu = \tau$ , nous revenons à une t-Student simple.
- Si  $\nu > 30$  et  $\tau > 30$ , nous revenons à une loi normale comme généralement discuté dans la littérature économétrique.

## Appendice B : le modèle de Heckman

Heckman étage 1 : probit	
(Intercept)	-2,025*** (0,075)
Bank Cap	0,490 (0,455)
Mean Salary	9,949*** (0,767)
gGDP	0,006 (0,012)
AIC	2954,169
BIC	2979,928
log MV (log Likelihood)	-1473,085
Déviante	2946,169
Nombre obs.	4627

\*\*\*  $p < 0,01$ , \*\*  $p < 0,05$ , \*  $p < 0,1$

Tableau 2.14 – Procédure de Heckman étage 1

	(1h) Modèle de référence + inv.Mills ratio	(2h) (1h)+régime HMM + inv.Mills ratio	(3h) (1h)+régime HMM+interactions + inv.Mills ratio
(constante)	-0,131 (0,681)	-0,008 (0,678)	0,089 (0,729)
log(Assets)	0,137*** (0,038)	0,136*** (0,039)	0,124*** (0,038)
Régime HMM		0,983*** (0,335)	1,543** (0,784)
inv. ratio de Mills	-0,081 (0,249)	-0,124 (0,249)	-0,123 (0,253)
PayS (Paymt and Settlmnt)	1,249*** (0,434)	1,179*** (0,433)	1,177** (0,463)
TraS (Trading and Sales)	1,091*** (0,287)	1,006*** (0,306)	0,886** (0,384)
ComB (Comm. Banking)	1,178*** (0,166)	1,110*** (0,163)	1,153*** (0,171)
RBn (Retail Banking)	0,931*** (0,209)	0,870*** (0,209)	0,830*** (0,172)
AgnS (Agency Services)	1,218*** (0,412)	1,153*** (0,433)	1,521*** (0,445)
CorF (Corp. Finance)	2,039*** (0,249)	2,037*** (0,255)	1,972*** (0,309)
AssM (Asset Mngmt)	1,354*** (0,278)	1,314*** (0,257)	1,299*** (0,286)
BusDSF (Bus.Disrup. Syst.Fail.)	-1,095 (0,688)	-0,947* (0,569)	-0,899 (0,629)
DamPA (Damage Phy.Assets)	-0,080 (1,937)	-0,034 (1,936)	0,056 (1,968)
EmpWS (Employ.Prac.Wrkplac.Saf.)	-0,670*** (0,254)	-0,611** (0,255)	-0,467** (0,226)
EF (External Fraud)	-0,499*** (0,158)	-0,484*** (0,162)	-0,429** (0,171)
IF (Internal Fraud)	-0,592*** (0,228)	-0,522** (0,227)	-0,302 (0,212)
ExeDPM (Exec. Deliv. Proc Mnmt)	-0,211 (0,230)	-0,213 (0,232)	-0,126 (0,259)
Régime x EmpWS			-2,308*** (0,510)
Régime x EF			0,132 (1,088)
Régime x IF			-3,315*** (0,548)
Régime x ExeDPM			0,114 (1,245)
Régime x PayS			-0,559 (1,614)
Régime x TraS			0,318 (1,254)
Régime x ComB			-1,521 (1,262)
Régime x RBn			0,393 (1,065)
Régime x AgnS			-4,458*** (1,151)
Régime x CorF			0,663 (1,585)
Régime x AssM			-0,243 (0,967)
Year FE	<i>oui</i>	<i>oui</i>	<i>oui</i>
Adj. R <sup>2</sup>	0,170	0,186	0,223
Nombre obs.	508	508	508

\*\*\* $p < 0,01$ , \*\* $p < 0,05$ , \* $p < 0,1$

Tableau 2.15 – Procédure de Heckman étage 2

## Chapitre 3

### Mesure de l'exposition au risque opérationnel

Soit deux banques  $A$  et  $B$ , d'une même taille. Supposons que  $A$  ait une meilleure gestion du risque opérationnel par rapport à  $B$ . Si la taille est la seule caractéristique individuelle prise en compte pour calculer le capital réglementaire, ce dernier serait le même pour  $A$  et  $B$ . Cela pénaliserait  $A$  en surestimant son capital réglementaire malgré sa bonne gestion des risques. Le capital réglementaire de  $B$  serait sous-estimé pour les raisons inverses. Il y a donc un biais à corriger, car cela va à l'encontre des objectifs et des incitatifs mêmes de la réglementation. L'un des objectifs principaux de ce chapitre est d'y remédier.

Pour ce faire, nous construisons une mesure de l'exposition au risque opérationnel. Cette mesure s'avère intimement liée à douze ratios clés de gestion des risques des banques. Ceci établit un pont conducteur entre le risque opérationnel et les risques conventionnels de crédit, de marché et de liquidité des banques. L'ensemble va nous permettre de réaliser une deuxième amélioration du modèle de Dahan et Dionne (2010). Des estimations montrent que la correction du biais serait de l'ordre de 30% du capital réglementaire calculé. Voyons cela et d'autres résultats dans ce chapitre !

#### 3.1 Introduction

L'article de Ellul et Yerramilli (2013), nommé *RMI* désormais, donne une preuve empirique de l'existence d'une amélioration radicale de l'efficacité de la gestion des risques des banques américaines, à partir de l'année 2001. Il prouve que les canaux de *hedging* traditionnels n'auraient pas changé au point d'expliquer cette amélioration. Cela concerne tous les risques auxquels font face les banques. Nous souhaitons vérifier si cela est vrai pour le risque opérationnel en particulier. Nous faisons appel à la spécification *Hidden Markov Modeling (HMM)* exposée dans le chapitre précédent, à laquelle nous apportons une extension.

D'autre part, dans le cadre des études sur les périodes difficiles du système économique et financier, Fahlenbrach, Prilmeier et Stulz (2012) proposent une idée intéressante. Ils testent empiriquement deux hypothèses contradictoires. Les banques apprennent-elles des crises ou, plutôt, gardent-elles une certaine culture de risque de sorte qu'elles se retrouvent à (contre-) performer d'une façon comparable d'une crise à une autre. Ce papier, désigné par *STLZ* dans la suite, utilise une mesure de risque basée sur les rendements quotidiens des actions des banques. Cette mesure calculée pour la période 1998 explique positivement et très significativement celle calculée pour la période de la crise récente de 2007-2008. De ce fait, la conclusion serait que les banquiers gardent leur culture de risque.

Si nous connaissons les rouages et l'ampleur de la crise financière récente, il convient ici de donner une idée de ce qui s'est passé en 1998. C'est la crise de dette déclenchée par le défaut de la Russie, en août 1998. Déjà les observateurs la décrivaient comme « *the worst financial crisis in the last 50 years* »<sup>1</sup> ; « *the entire global economic system as we know it almost went into meltdown, beginning with Russia's default* »<sup>2</sup>. Cela engloutit le légendaire LTCM et d'autres dans une descente aux enfers qui ne manque pas de rappeler la crise récente. La bourse perd environ 20% de sa valeur en octobre 98. Le phénomène du *flight to safety* fait que les *spreads* du crédit atteignent leur plus haut niveau historique à l'époque.

Ce genre de récit et les résultats de *STLZ* nous convainquent de voir s'il existe une culture de risque opérationnel que les banques garderaient dans le temps. Si cette culture existe, cela revient à caractériser l'exposition au risque opérationnel des banques. Nous avons trois raisons de le croire. D'abord, une bonne partie des baisses de rendements des actions des banques à la bourse est directement reliée à des annonces de pertes opérationnelles auxquelles le marché réagit, comme montré dans Biell et Muller (2013). La deuxième raison est un lien intime entre le risque opérationnel et le risque de crédit, dont nous reparlerons plus loin. En effet, les deux crises étant essentiellement de dette, nous

---

<sup>1</sup>Rubin, Robert, l'ancien secrétaire américain au Trésor

<sup>2</sup>Friedman, Thomas L., *The Lexus and the Olive Tree*, 1999, p. 212

pouvons nous attendre à un certain degré de similitudes aussi du côté du risque opérationnel. Le troisième argument est que Bâle commence, en 1999, à pousser pour mieux prendre en compte le risque opérationnel pour aboutir, en 2004, à une réglementation unifiée des trois risques ensemble. Ce sont les mêmes gestionnaires de risque, devenus de plus en plus performants après 2001, qui vont mettre de l'ordre dans la gestion du risque opérationnel comme pour les autres risques conventionnels. Dans ce sens, Kashyap, Rajan, et Stein (2008) et Stulz (2008) nous rappellent qu'une gestion des risques forte est nécessaire pour identifier correctement les risques et prévenir une prise de risque excessive.

Nos premiers résultats, exposés dans la section 3.3, semblent être en accord avec *RMI*, et mettent en exergue que les banques continuent à s'exposer au risque opérationnel d'une façon similaire avant et après l'année 2001. En plus, à l'opposé, il y aurait eu une amélioration drastique de la gestion du risque opérationnel, à partir de 2001. D'autre part, du côté de *STLZ*, nous identifions une mesure de l'exposition au risque opérationnel, que nous nommons *IOP*, et l'extrayons exclusivement des données de pertes de la période 1994-1999. Dans la section 3.4, en nous appuyant sur le modèle de Dahlen et Dionne (2010), cette mesure s'avère très significative positivement pour expliquer aussi bien le modèle des sévérités que celui des fréquences, pour la période 2001-2010. De plus, notre variable améliore clairement le pouvoir explicatif de ces modèles. Cela semble confirmer les résultats de *STLZ* quant au risque opérationnel. Vu ces résultats, nous inscrivons l'inclusion de la mesure *IOP* comme une extension du modèle de Dahlen et Dionne (2010).

Dans la section 3.5, nous identifions douze variables de gestion des risques qui déterminent la mesure *IOP* avec un pouvoir de prédiction de 85% environ. Cela établit un pont direct entre le risque opérationnel et les risques conventionnels de crédit, de marché et de liquidité. La section 3.6 expose cinq applications, dont des schémas de *stress testing* plus riches. D'autre part, en introduisant les ratios de gestion des risques dans les calculs du capital, des estimations montrent que la correction du biais peut atteindre 30% du capital réglementaire. Nous concluons ce chapitre à la section 3.7. Présentons d'abord les données que nous utiliserons, dans la section suivante !

### 3.2 Les données

Nous utilisons la base de données *Algo OpData Quantitative Database* de Fitch. La période de l'étude est de janvier 1994 à décembre 2010. Cette base est une sorte de compilation collectée de sources diverses, annonces légales et juridiques, autorités de réglementation, commentaires d'analystes, maisons de consulting, publications, informations des industries documentées dans cette base. Il y a un seuil minimum des pertes est d'un million de dollars. La base fournit également un classement des annonces des pertes par ligne d'affaires (*business lines*) et par type de perte (*event types*), en principe conforme à Bâle II. Par ailleurs, nous nous intéressons aux banques BHC (*Bank Holding Company*) à plus d'un milliard de dollars de taille, la source est la base de données publiée par Réserve fédérale de Chicago.

Voici maintenant en chiffres l'échantillon construit des deux bases de données. Le nombre de banques BHC du tableau (3.1) à la dernière colonne est à lire avec précaution. En effet, c'est le nombre de dénominations de banques américaines soumises à la réglementation BHC et ayant atteint une taille de plus d'un milliard de dollars en actifs à l'année indiquée dans chaque ligne du tableau. Il y a donc des naissances de banques, des départs, des fusions et aussi des changements de noms suite aux fusions-acquisitions des années 90 après la déréglementation. C'est dû également aux séries de crises de dettes des années 90, et enfin à la crise récente de 2007-2008. Notons que le nombre de dénominations de banques est croissant dans le temps (sauf pour 2009-2010). Justement, nous finissons avec 458 banques BHC d'un milliard de taille ou plus, en 2010, alors que l'ensemble des noms de banques différents, ayant apparu dans les registres du reporting BHC depuis 1994 à 2010, est autour de 1025. Le tableau (3.2) résume la répartition des pertes, en sévérité et fréquences par taille des banques groupées en déciles.

Notons qu'il y a à la fois plus de pertes en nombre et en montants dans les hauts déciles. Notons également que dans tous les déciles des tailles la distribution est à queue épaisse qui l'est d'autant plus dans les hauts déciles, à en juger par l'écart croissant des médianes par rapport aux moyennes des montants des pertes. Le dernier tableau (3.3)

Total des actifs des banques (en milliards \$)					
Année	Médiane	Moyenne	Maximum	Écart-type	Nombre
1994	2,0	11,4	253,1	28,9	301
1995	2,1	12,2	256,9	31,4	307
1996	1,9	12,4	336,1	36,3	325
1997	1,9	13,5	365,5	40,7	328
1998	2,1	18,1	668,6	65,6	332
1999	2,0	18,0	716,9	71,0	350
2000	2,0	18,8	902,2	78,8	355
2001	2,1	19,7	944,3	82,3	356
2002	2,1	19,5	1097,2	84,9	378
2003	2,0	20,3	1264,0	93,0	408
2004	2,0	25,4	1484,1	122,1	421
2005	2,0	24,4	1547,8	121,9	445
2006	2,1	26,0	1884,3	140,5	461
2007	2,1	28,9	2358,3	168,1	460
2008	2,0	28,5	2251,5	182,5	470
2009	2,1	33,8	2323,4	190,6	472
2010	2,1	34,7	2370,6	198,3	458
1994-2010	2,1	22,5	2370,6	123,8	1025

Tableau 3.1 – Tailles des banques BHC par année (1994-2010)

montre des statistiques sur les pertes par croisement *BL* et *ET*. Les pertes de type désastre ou dommages des actifs physiques sont relativement très rares. Les pertes de type CliPBP (*Clients, Products & Business Practices*) sont de loin majoritaires avec plus de 49% des pertes que compte notre échantillon. En tout, 66,53 milliards de dollars en 832 pertes enregistrées durant 1994-2010 .

### 3.3 Une extension du modèle *HMM*

Nous voulons montrer, d’abord, qu’il existe une similitude entre la période avant l’année 2001 (1994-2000) et après 2001 (2001-2010) et ce au niveau des moyennes mensuelles des pertes opérationnelles. Nous faisons appel à la technique *HMM* (*Hidden Markov Modeling*), documentée au chapitre 2, avec une extension intéressante. En fait, nous savons que les données de pertes avant 2001 correspondent à une période où le risque opérationnel n’était pas encore réglementé. De plus, *RMI* donne une preuve empirique de l’existence d’une amélioration radicale de l’efficacité de la gestion des risques des

Décile de perte	Perte opérationnelle (montants en millions de dollars)					Nombre
	Moyenne	Médiane	Minimum	Maximum	Écart-type	
(1720 à 2370]	300,6	20,5	1,0	8400,0	1283,2	81
(1180 à 1720]	106,3	12,1	1,0	2580,0	321,6	84
(669 à 1180]	109,0	17,1	1,0	3782,3	465,5	84
(394 à 669]	141,2	5,8	1,0	8400,0	921,4	84
(265 à 394]	19,0	6,9	1,0	210,2	34,3	83
(166 à 265]	28,7	5,5	1,0	462,0	73,8	82
(71,5 à 166]	29,4	7,0	1,0	663,0	79,0	84
(30,3 à 71,5]	47,4	6,6	1,0	775,0	142,7	83
(8,19 à 30,3]	15,1	4,5	1,0	130,0	26,3	83
[0,842 à 8,19]	7,9	4,1	1,0	65,0	12,1	84
total	80,0	6,8	1,0	8400,0	534,7	832

Tableau 3.2 – Pertes opérationnelles des banques BHC par décile des tailles (1994-2010)

Ligne d'affaires		Type de perte opérationnelle (moyennes en millions de dollars)							total
		ClIPBP	BusDSF	DamPA	EmpPWS	EF	IF	ExeDPM	
RBr	moyenne	23,9			10,5	28,8	5,8	2,1	17,0
	nombre	55	0	0	16	3	22	4	100
PayS	moyenne	70,7	51,9	743,0		16,9	11,9	16,9	58,4
	nombre	15	4	1	0	3	11	5	39
TraS	moyenne	74,0	303,0	55,0	6,5	18,0	101,1	109,0	78,8
	nombre	63	1	1	7	1	15	11	99
ComB	moyenne	28,0		1,0	17,0	17,0	17,3	19,7	20,2
	nombre	47	0	1	10	75	26	9	168
RBn	moyenne	232,9	2,0	1,0	7,1	14,1	9,6	15,7	89,9
	nombre	97	1	1	17	56	78	24	274
AgnS	moyenne	47,5				12,0	39,8	11,0	37,3
	nombre	17	0	0	0	6	2	1	26
CorF	moyenne	453,7				13,2	49,2	8,4	352,6
	nombre	47	0	0	0	1	10	4	62
AssM	moyenne	63,8				95,0	48,6	30,6	61,0
	nombre	52	0	0	0	2	5	5	64
total	moyenne	143,5	85,4	200,0	10,1	17,0	22,4	32,4	80,0
	nombre	393	6	4	50	147	169	63	832

Tableau 3.3 – Statistiques croisées : types de perte × lignes d'affaires (1994-2010)

banques BHC après l'année 2001. Justement, il argumente que ce serait suite au passage de GLBA et les pertes astronomiques subies lors de la crise de défaut de la Russie en 1998. *RMI* ajoute également que les canaux de *hedging* traditionnels, n'auraient pas changé au point d'expliquer l'amélioration drastique de la gestion des risques des banques.

Pour contrôler cela, nous injectons une variable binaire,  $B2$ , qui prendra la valeur 1 de janvier 1994 à décembre 2000, et la valeur 0 de janvier 2001 à décembre 2010. Cette variable sera mise seule et aussi croisée avec la variable  $lc123$ <sup>3</sup> pour estimer la matrice de transition. L'état du système à l'instant  $i$  est noté  $s_i$  est.  $a_{k,l}$  est la probabilité que le système passe de l'état  $k$  à l'état  $l$  ( $k$  et  $l \in \{1, 2\}$ ). Nous choisissons, comme au chapitre 2, de représenter l'état 2 des hautes pertes par une distribution *Skew t de type 4* (*ST4*). Les pertes de l'état 1 seront représentées par une distribution normale. Notre modèle s'écrit alors

$$Pr_{k,l} = Pr(s_{i+1} = l | s_i = k) \quad k, l \in \{1, 2\}$$

$$Pr(x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_n) = Pr(s_1) \prod_{i=2}^n Pr(s_i | s_{i-1}) \prod_{i=1}^n Pr(x_i | s_i)$$

$$x_1 | s_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1) \quad (28)$$

$$x_2 | s_2 \sim ST4(\mu_2, \sigma_2, \nu_2, \tau_2) \quad (29)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 - a_{1,2} & a_{1,2} \\ 1 - a_{2,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$a_{1,2} = \text{logistique}(\gamma_{0,1} + \gamma_{1,1}B2 + \gamma_{2,1}lc123 + \gamma_{3,1}B2 \times lc123) \quad (31)$$

$$a_{2,2} = \text{logistique}(\gamma_{0,2} + \gamma_{1,2}B2 + \gamma_{2,2}lc123 + \gamma_{3,2}B2 \times lc123) \quad (32)$$

---

<sup>3</sup>La variable  $lc123$  est égale au nombre d'annonces de pertes enregistrées dans le trimestre en cours (en log).

	Variable/ Paramètre	Coefficient
Probabilité de transition vers le régime haut :		
	constante	1,7045***
	$B2$	-11,2790***
	$lc123$	-1,8996***
	$B2 \times lc123$	4,5020***
Probabilité de rester en régime haut :		
	constante	-25,9045***
	$B2$	3,6105**
	$lc123$	11,8835***
	$B2 \times lc123$	0,7825
Estimation distribution normale (régime normal)		
	$\mu_1$	2,3336***
	$\sigma_1$	0,7935***
Estimation distribution ST4 (régime haut)		
	$\mu_2$	3,0477***
	$\log(\sigma_2)$	0,3438***
	$\log(shape \nu_2)$	2,7811***
	$\log(shape \tau_2)$	2,5320***
	Log max. vraisemblance	-255,455
	Critère AIC	540,911
	Nombre d'observations	204

\*\*\*  $p < 0,01$ , \*\*  $p < 0,05$ , \*  $p < 0,1$

Tableau 3.4 – Estimation du modèle *HMM* (1994-2010)

### 3.3.1 Les résultats et discussions

L'estimation du modèle est présentée au tableau 3.4. Regardons, d'abord, les résultats des tests de validation du modèle *HMM* dans le tableau 3.5. Les pseudo-résidus sont construits de la même manière exposée au chapitre précédent. Sans surprise, les trois tests Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling et Shapiro-Wilk rejettent la normalité de la série initiale des pertes mensuelles à 5%. Quant aux pseudo-résidus, les tests Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling et Shapiro-Wilk ne rejettent pas la normalité et délivrent une *p-value* respective de 0,0676, 0,1531 et 0,0521. Vu ces résultats, nous allons considérer que le modèle *HMM* est valide.

Regardons, maintenant, la figure 3.1 qui trace les régimes détectés. En plus des deux

Test	Pertes mensuelles (log)		Pseudo-résidus	
	statistique	p-value	statistique	p-value (bootstrap n=10000)
1 Kolmogorov-Smirnov	0,1219	0,0092	0,0559	0,0676
2 Anderson-Darling	1,4220	0,0011	0,5554	0,1531
3 Shapiro-Wilk	0,9625	0,0001	0,9850	0,0521

Tableau 3.5 – Tests de validation du modèle *HMM* (1994-2010)

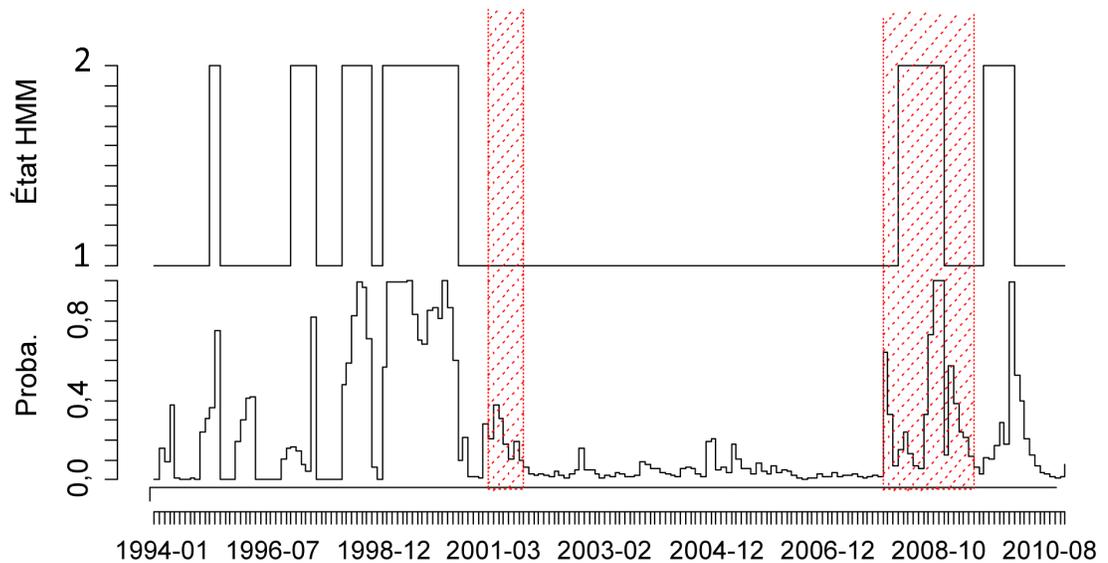


Figure 3.1 – Niveaux du régime Markov détectés pour 1994-2010

tours pratiquement les mêmes qu'identifiées au chapitre 2, nous avons maintenant une suite de quatre espèces de montagnes. À ce niveau, nous avons bien une similitude du comportement du risque opérationnel, en moyennes mensuelles, entre les crises de dette de la décennie 90 et la crise financière de 2008. Nous reviendrons plus tard à ces montagnes au niveau des pertes individuelles pour tenter de comprendre ce qui s'est passé pendant ce temps. La table d'estimation de notre modèle *HMM* 3.4 montre que les coefficients de la variable binaire *B2* sont tous très significatifs sauf celui de  $B2 \times Ic123$  de la probabilité de rester en régime haut (désormais RH). D'autre part, nous voyons que la moyenne de la distribution normale est bien inférieure à celle de la *ST4* ( $2,333 < 3,047$ ), en plus, l'écart-type de la normale est pratiquement le double de celui de la *ST4* ( $0,793 \times 2 \approx \exp(0,344) = 1,410$ ), ce qui est conforme à l'intuition.

Passons à l'estimation des deux degrés de liberté de la distribution *ST4*. Du côté gauche (pertes relativement petites),  $v_2 = \exp(2,7811) = 16,13$ . À la queue droite (vers les grandes pertes),  $\tau_2 = \exp(2,5320) = 12,57$ . Ces deux degrés de liberté, étant bien inférieurs à 30, l'épaisseur des deux queues est confirmée. D'autre part,  $v_2$  et  $\tau_2$  étant assez proches l'une de l'autre, nous effectuons un test de ratio de vraisemblance de l'hypothèse  $H_0 : v_2 = \tau_2$  pour nous en assurer. Ce test délivre un ratio de vraisemblance de 0,8608, avec une contrainte, la *p-value* est de  $0,3535 > 5\%$ . Les deux épaisseurs des queues gauche et droite sont statistiquement égales. Une *t* de Student simple aurait vraisemblablement suffi. Malgré cela, nous gardons la *ST4* pour la suite de ce chapitre, et ce pour une raison importante. En effet, l'estimation du modèle avec une *t* de Student ne réussit pas les tests de validation des pseudo-résidus correspondants. Le test de Kolmogorov-Smirnov ne rejette pas la normalité (*p-value* = 0,1287). Par contre, celui d'Anderson-Darling la rejette à 5% (*p-value* = 0,0228) ainsi que Shapiro-Wilk (*p-value* = 0,0082). Avec la différence des moyennes des deux distributions, la normale et la *ST4*, la différence de l'épaisseur des queues de la *ST4* constitue une preuve supplémentaire de l'asymétrie accrue de nos données. Nous gardons notre modèle *HMM* basé sur la *ST4* tel qu'estimé dans le tableau 3.4, et avançons.

Quant à l'estimation de la matrice de transition, nous allons tracer l'évolution des pro-

babilités selon la variable  $lc123$  séparément pour la période avant 2001 (figure 3.2) et celle après 2001 (figure 3.3). Ce qui est à préciser est que nous retrouvons pratiquement le même graphique comme au chapitre 2 concernant la période 2001- 2010. Par contre, la surprise est que, dans le graphique d'avant 2001, la probabilité de partir en RH (trait continu) est croissante avec  $lc123$ . Or la variable  $lc123$  représente les fréquences des pertes, tandis que si la probabilité de partir en RH augmente la chance de subir plus de pertes plus lourdes augmente. Autrement dit, la probabilité de partir en RH représente la sévérité des pertes.

Par conséquent, les distributions des fréquences et des sévérités seraient dépendantes l'une de l'autre. Pour tirer cela au clair, nous devons tester cela statistiquement. Une façon de le faire est de diviser les observations en deux « moitiés » selon la médiane de la variable  $lc123$ . Pour chaque moitié nous calculons la probabilité historique de l'état RH. Si cette probabilité n'est pas différente statistiquement pour les deux moitiés alors  $lc123$  n'affecte pas la probabilité de partir en RH. La probabilité d'être ou non en RH suit une binomiale, d'où un test de binomiale exact que nous faisons avec un niveau de confiance de 10%. Le tableau 3.6 montre les calculs et les *p-values* des tests aussi bien pour la période 1994-2000 (panel A) que celle de 2001-2010 (panel B). Nous voyons clairement qu'avant 2001 les *p-values* rejettent l'hypothèse de l'égalité des probabilités des deux moitiés à celle d'un tirage binomial de l'ensemble des observations. À l'opposé, concernant la période après 2001, les tests ne permettent pas le rejet à 10%. Par conséquent, l'hypothèse d'indépendance entre les fréquences et les sévérités semble être sérieusement remise en question pour les données des pertes avant 2001. C'est clairement en contradiction avec les principes de modélisation avancée *AMA* endossée par Bâle II. Cette problématique d'indépendance des distributions avant et après 2001, peut-être, serait-ce l'un des effets de la gestion des risques et la réglementation du risque opérationnel précisément. Au passage, juste une petite parenthèse pour ligner qu'après tout, les banquiers disposent d'une certaine liberté de déclarer leurs pertes dans l'espace de quelques mois, à la limite annoncer les pertes en deux ou trois morceaux plutôt que de risquer une baisse trop lourde du titre à la bourse. Un dilemme existe : déclarer plus

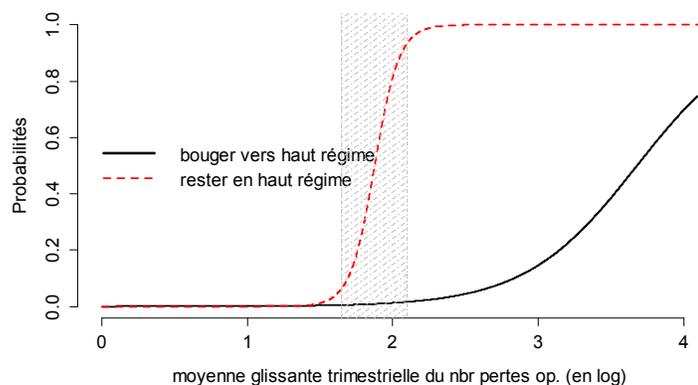


Figure 3.2 – Probabilités de transition de Markov pour 1994-2000

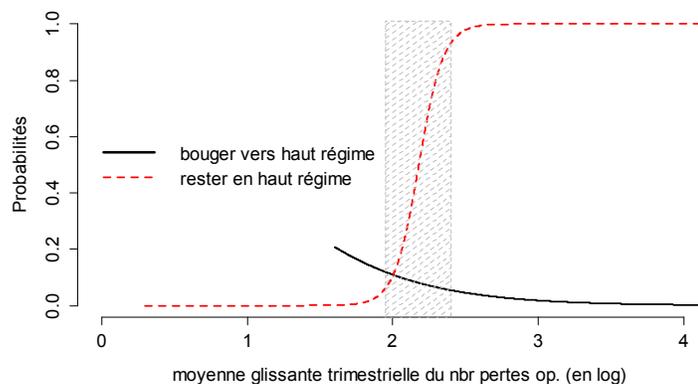


Figure 3.3 – Probabilités de transition de Markov pour 2001-2010

souvent des montants moindres, versus déclarer rarement des pertes plus importantes.

Chernobai et Yildirim (2008) documentent l'existence d'autocorrélations dans la sévérité possiblement dues à des pertes détectées ou annoncées au fur et à mesure, mais que ces pertes concernent les mêmes affaires. Un article récent de Biell et Muller (2013) explique que pendant les tendances haussières, le marché réagit plus vif et profond surtout quand c'est un cas de fraude ou perçu comme telle. L'article ajoute que plus la réaction dure longtemps plus la perte en valeur de la banque semble plus grande. Une lecture de cela serait que la fréquence semble faire plus mal que la sévérité quand le marché est haussier

ou quand c'est un cas de fraude, et vice-versa pour les autres cas. Il y aurait peut-être matière à creuser dans ce sens, moyennant les outils de la théorie des jeux et les concepts du risque moral.

Après cette discussion sur les probabilités de partir en RH, parlons maintenant des probabilités de rester en RH. Les graphiques 3.2 et 3.3 montrent (en trait pointillé) pratiquement la même courbe avant et après 2001. Nous avançons que la probabilité de rester en RH représente l'exposition au risque opérationnel d'une certaine manière. En effet, par analogie avec le risque de crédit où nous parlons de trois composantes *PD* (probabilité de défaut), *EAD* (exposition au risque au moment du défaut) et *LGD* (pourcentage de perte advenant le défaut), pour le risque opérationnel la fréquence et la sévérité des pertes opérationnelles seraient la résultante d'une certaine exposition au risque avec l'ensemble des actions entreprises par les gestionnaires des risques. En moyenne, l'exposition au risque opérationnel (représentée par la probabilité de rester en RH) serait restée pratiquement la même durant toute la période 1994-2010. Dans ce sens, nous serons compatibles avec la conclusion de *STLZ*, à savoir que les banquiers gardent leur culture de risque dans le temps.

D'un autre côté, la discussion plus haut quant aux courbes de probabilité de partir en RH dans nos graphiques 3.2 et 3.3 est également directement en phase avec la conclusion de *RMI* (concernant le changement radical de l'efficacité de la gestion des risques des banques BHC après 2000). Un dernier graphique afin de nous convaincre plus de cette efficacité, nous voyons bien dans la figure 3.4 que la fréquence des pertes était très dispersée avant 2001, et dès 2001, la fréquence est beaucoup moins turbulente. En somme, en moyenne, la probabilité de partir en RH semble avoir été maintenue à environ 5% depuis 2001, alors qu'elle pouvait osciller en permanence entre 13% et 38% selon les périodes où les déclarations collectives des pertes étaient plus ou moins nombreuses.

Pour avancer, nous voulons documenter les fameuses « montagnes russes » du graphique 3.1. Nous listons les pertes ayant totalisé environ 75% de la somme totale des montants perdus pendant la période janvier-1996 à juin-2000 dans le tableau 3.7. Le premier cas

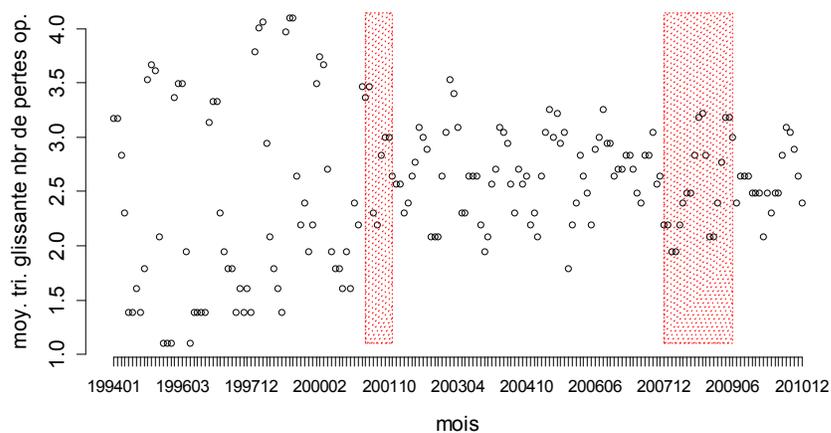


Figure 3.4 – Évolution du nombre d’annonces de pertes opérationnelles

Panel A : période 1994-2000

Quantile		Nombre d’observations		Probabilité		
<i>du</i>	<i>au</i>	toutes	en haut régime	hyp.nulle	observée	p-value
1,10	2,08	29	8	0,467	0,276	0,042
2,08	4,09	31	20	0,467	0,645	0,049

Panel B : période 2001-2010

Quantile		Nombre d’observations		Probabilité		
<i>du</i>	<i>au</i>	toutes	en haut régime	hyp.nulle	observée	p-value
1,61	2,64	55	8	0,124	0,145	0,544
2,64	3,53	66	7	0,124	0,106	0,851

Tableau 3.6 – Tests empiriques de la relation entre *lc123* et l’état RH

	Banque	Perte	ET	BL	Date	% de perte
1	Providian Financial Corpo	305,50	CliPBP	RBn	28-06-2000	9,30
2	Bank of America Corporati	187,50	CliPBP	PayS	01-01-1998	5,71
3	Wells Fargo & Company - N	150,00	BusDSF	PayS	28-07-1997	4,57
4	Credicard	100,00	IF	RBn	01-01-1998	3,05
5	Piper Jaffray & Co.	100,00	CliPBP	AssM	24-06-1996	3,05
6	Zions Bancorporation-No F	100,00	CliPBP	CorF	30-03-2000	3,05
7	LaSalle National Bank	90,00	EF	ComB	31-12-1997	2,74
8	Nationsbank Corporation	86,88	CliPBP	RBr	31-05-1998	2,65
9	JP Morgan Chase & Co.	85,00	CliPBP	TraS	01-10-1999	2,59
10	Signet Banking Corporatio	81,00	EF	ComB	01-01-1996	2,47
11	BankBoston Corp.	73,00	IF	ComB	31-12-1998	2,22
12	Nationsbank Corporation	64,00	EF	ComB	31-12-1996	1,95
13	Salomon Smith Barney Hold	61,02	CliPBP	RBr	31-12-1997	1,86
14	Mid-State Bank & Trust Co	51,00	IF	AssM	31-12-1999	1,55
15	Citicorp	49,00	EF	RBn	31-12-1998	1,49
16	Bank One Wisconsin	42,50	ExeDPM	RBn	31-12-1998	1,29
17	Chemical Bank	42,00	EF	ComB	31-12-1996	1,28
18	Citicorp	41,80	CliPBP	ComB	02-06-2000	1,27
19	Bank One Corporation	40,00	ExeDPM	PayS	01-01-2000	1,22
20	Smith Barney	40,00	IF	CorF	01-01-1998	1,22
21	Norwest Mortgage Inc.	40,00	EF	RBn	31-12-1998	1,22
22	Bear Stearns & Co. Inc.	39,00	CliPBP	TraS	24-11-1999	1,19
23	Bear Stearns & Co. Inc.	38,50	IF	PayS	05-08-1999	1,17
24	Citicorp	37,00	CliPBP	ComB	31-12-1996	1,13
25	Herzog, Heine, Geduld Inc	30,60	CliPBP	TraS	31-12-1997	0,93
26	Bear Stearns Securities C	30,00	CliPBP	CorF	01-01-2000	0,91
27	Citibank N.A.	30,00	EF	RBn	01-01-1999	0,91
28	Citigroup Inc.-No Firm Av	30,00	EmpPWS	ComB	31-12-1999	0,91
29	Devon Capital Management	30,00	CliPBP	AssM	31-12-1999	0,91
30	Boston Safe Deposit and T	30,00	EF	ComB	31-12-1998	0,91
31	Wachovia Bank	30,00	CliPBP	AgnS	01-04-2000	0,91
32	Bank United Corp.	29,00	CliPBP	RBn	31-12-1998	0,88
33	NationsSecurities	29,00	CliPBP	RBr	31-12-1997	0,88
34	Banc of America	26,50	EmpPWS	ComB	31-12-1999	0,81
35	First Union National Bank	26,10	CliPBP	RBn	31-12-1996	0,79
36	PNC Bank Corporation	26,00	EF	ComB	01-01-2000	0,79
37	Citicorp	25,00	IF	RBn	31-12-1998	0,76
38	JP Morgan Chase & Co.	22,20	ExeDPM	RBn	01-01-2000	0,68
39	BankBoston Corp.	21,00	IF	PayS	20-08-1997	0,64
40	Hambrecht and Quist Group	20,00	CliPBP	TraS	24-12-1997	0,61

Tableau 3.7 – Résumé des pertes opérationnelles : janvier 1996 à juin 2000

est signé Providian Financial Corporation, l'ancien leader en cartes de crédit<sup>4</sup>. Cette banque perd 305,5 millions de dollars pour violation de conditions de vente. Ce cas est considéré comme un point de changement de la réglementation qui commence à se pencher plus sur les problèmes liés aux cartes de crédit. Une deuxième perte importante est signée Bank of América (ou une filiale non précisée dans la base de données *Algo OpData*) de 187,50 millions en janvier 1998. C'est un procès accusant la banque d'avoir gardé l'argent, car d'après elle non réclamé au lieu de le remettre aux émetteurs d'obligations municipales. Ensuite c'est Wells Fargo avec 150 millions, en juillet 1997. Il s'agit d'une perte due à une radiation de 150 millions pour couvrir les dépôts perdus ou égarés, conduisant à une baisse de 37% du bénéfice au cours du trimestre précédent. Le cas ajoute que c'est relié à tentative de fusion de la banque avec First Interstate Bank en 1996. Un montant de 100 millions cette fois perdu par Piper Jaffray & Co, juin 1996. Le litige serait associé à un procès intenté par des investisseurs concernant des fonds *closed – end* qui ont subi des pertes. Les plaignants ont allégué qu'ils n'étaient pas suffisamment informés du risque. Maintenant la banque Credicard en janvier 1998, 100 millions également. Cette filiale de Citibank a perdu cette somme à cause de fraudes internes perpétrées par des employés. Ensuite, Zion Bancorp, en mars 2000, un projet de fusion qui tourne au désastre avec First Security Corp. Cette dernière aurait caché ou modifié l'état réel concernant son portefeuille des prêts. Une perte de 100 millions, une chute des prix de l'action Zion Bancorp de 27% en mars.

Le septième cas arrive à LaSalle National Bank, 90 millions, décembre 1997. C'est un cas la fraude concernant des prêts, fausses factures soumises à une ligne de crédit. Maintenant c'est Nationsbank Corporation qui va fusionner après avec la BofA, 86,88 millions en mai 1998. Cette banque aurait brouillé les pistes afin de laisser croire que ses produits de type *term trusts* seraient comparables à des obligations garanties par le gouvernement. Le cas numéro 8 est signé JP Morgan Chase, accusée d'avoir violé son obligation de dénaturer les risques contenus dans des swaps. Entre autres, cela concerne des entreprises sud-coréennes pour des swaps sur taux de change attachés à la roupie

---

<sup>4</sup>Providian Financial Corporation passe sous la coupole de Washington Mutual en 2005, puis JPMorgan Chase en 2008.

indonésienne et au baht thaïlandais. Le cas suivant est subi par Signet Banking Corp, 81 millions, janvier 1996. À l'époque c'était un cas d'école. Cette banque a découvert qu'elle avait été victime d'une fraude externe majeure, en se retrouvant financer un projet « secret » pour le compte de Philip Morris Cos, lequel projet, en fait, n'existait pas. Le fraudeur aurait aussi réussi à duper d'autres banques avec sa même technique audacieuse, dont NationsBank, CoreStates et la Banque de Montréal en 1996.

La liste de la table 3.7 étant plutôt longue, nous allons regarder un dernier cas. BankBoston Corp a perdu 73 millions en décembre 1998. Son ancien dirigeant, Ricardo Carrasco, a été accusé d'avoir fraudé la banque de ce montant. En février 1998 il a disparu dans la nature, la Réserve fédérale a déclaré que Carrasco aurait ouvert au moins 26 comptes personnels à l'étranger. Pour résumer, Kindelberger et Aliber (2005) argumentent que « *...as the monetary system gets stretched, institutions lose liquidity and unsuccessful swindles are about to be revealed, the temptation to take the money and run becomes virtually irresistible.* ». Les auteurs de ce livre, cité plus de 4500 fois d'après Google Scholar, plein de cas documentés, décrivent en langage simple comment se forment les bulles, les crises, la contagion, les cas d'école, en fait, la dimension « humaine » dans les affaires avec ce que cela suppose en matière d'erreurs, d'asymétrie de l'information, de risque moral et autres. Dans beaucoup des cas revus, il est question de crédit (obligations, prêts, etc..) et beaucoup de cas où c'est de la fraude interne ou externe, plus ou moins masquée qui reviennent souvent. Il est souvent question également de procès ou jugement. Une revue des pertes importantes relatives à la période de la crise récente montre plus encore la relation entre le crédit, la fraude au sens large du terme avec le risque opérationnel (voir chapitre 2).

Pour visualiser en quelque sorte cette relation, voici un tableau où nous mettons sous forme de pourcentage le recensement de certains mots clés ou partie de mots que peut contenir la description de chaque cas dans la base de données *Algo OpData*. Nous y proposons trois regroupements. Les mots clés concernant le crédit : *loan, credit, bond, debt, subprime, mortgage, asset – backed – securities, auction – rate – securities*. Les mots clés signant de la fraude : *fraud, manipul,improper, illegal, conspir, violat,*

*unauthoriz, accus, undisclos, misrepresent, falsif, disput* et *misappropriat*. Et enfin les mots clés soulignant un jugement : *juge, lawsuit, alleg, guilt, court, suit against* et *Exchange Commission*. Les chiffres sont parlants. En effet, à la première colonne de cette table, nous voyons que pendant toute la période (1994-2010), il y a eu 43,9% d'observations reportant au moins l'un des mots clés du crédit. Ensuite, le montant total perdu dans ces observations représente 82,1% du montant total perdu durant cette période, ce qui est énorme (et mérite probablement un zoom plus précis). Nous désignons cette proportion des montants perdus par sévérité relative.

La deuxième colonne raisonne d'une façon similaire concernant la fraude. Cette fois la fréquence d'occurrence est de 43,6% avec une sévérité relative (proportion des montants perdus) de 52,5%. C'est moins grand que le poids du crédit, mais élevé également. Le troisième compteur dénombre la fréquence et la sévérité dans le cas d'un jugement. Là, nous avons 56,1% en fréquence et 80,8% de l'argent perdu. Nous faisons le même calcul pour les périodes 1994-2000, 2001-2010, et 2007-2009 pour avoir les chiffres pendant la crise récente. Justement, comme attendu, il y a une augmentation de tous nos ratios. Ce qui est frappant est que presque 95% de l'argent perdu est en liaison avec du crédit, plus que 90% des montants perdus dans des cas où il y a mention de jugement. En termes de fréquence, 75% des cas de pertes opérationnelles enregistrées pendant la crise récente sont liés à des jugements !

Avec les détails des cas reportés au chapitre 2, plus les proportions de la table 3.7, il est clair que le risque opérationnel possède une base d'exposition intimement reliée aux conditions du crédit dans l'économie. Cela étant, ce serait la fraude dans le sens très large du terme qui serait le vecteur qui conduit du risque de crédit à se transformer en risque opérationnel. Pour étayer nos dires, le *Shadow Banking* en serait l'une des principales preuves. Plus de 500 milliards de dollars en crédit « quittent » le bilan des banques et trouvent le moyen de se transformer en une sorte d' *Asset-Backed Commercial Papers* entre 2004 et 2007. Cette forme de contourner la réglementation, trop coûteuse au goût des banquiers, aurait atteint un total de 1,3 trilliard en juillet 2007, selon Kroszner et Strahan (2013), et Acharya , Schnabl et Suarez (2013). La fraude ici est double puisque

	1994-2010			1994-2000			2001-2010			2007-2009		
	Crédit	Fraude	Juge									
Fréquence %	43,9	43,6	56,1	46,6	42,6	44,1	42,1	44,3	63,8	53,8	49,4	75,3
Sévérité %	82,1	52,5	80,8	57,5	48,0	42,7	84,3	52,9	84,3	94,3	59,6	91,4

Tableau 3.8 – Occurrences de mots clés reliés au crédit, à la fraude ou jugement

cela contourne la réglementation, mais aussi trompe l’investisseur qui ne comprend plus comment évaluer le risque.

### 3.4 Une mesure d’exposition au risque opérationnel

Pour chaque banque, nous voulons construire un indice pour mesurer son exposition au risque opérationnel pendant une période donnée. L’objectif est d’estimer cet indice pour chacune des banques pendant la période de crises de dette, que nous fixons de 1994 à 1999, ensuite de vérifier si cet indice explique les pertes enregistrées pendant la période 2001-2010. Dans ce cas, cet indice sera une mesure de l’exposition au risque opérationnel. Pour déterminer cette mesure, nous excluons les données relatives à l’année 2000 considérée comme une période de transition, comme argumenté plus haut. Maintenant, l’idée la plus simple pour construire une mesure est de compter le nombre de pertes ou prendre le montant total des pertes subies par une banque donnée. Avec cela nous pourrions ramasser beaucoup de bruit à cause des nombreuses petites pertes. L’alternative serait alors de compter les pertes dépassant la médiane des pertes de la période en question. Une autre façon de faire est d’utiliser un décile donné au lieu de la médiane. Cependant, une difficulté s’impose. Avec les innombrables fusions-acquisitions, changements de noms, les départs, les nouvelles banques, qu’a connus cette industrie, comment procéder ?

C’est ici que nous utilisons la conclusion de Filson et Olfati (2014). En effet, d’après ce papier, les décisions de fusions-acquisitions semblent essentiellement motivées par un besoin de diversification du risque, systématique ou idiosyncratique, auquel fait face la banque acquéreuse. L’idée est que les banques choisissent leurs cibles pour une raison

de renforcement de culture de risque. Autrement dit, la culture de risque devrait se préserver donc lors des fusions-acquisitions. Cette remarque est fondamentale pour la suite. En effet, nous allons prendre la configuration des maisons mères de toutes nos banques comme vues en décembre 2010 (à la date fin de notre échantillon BHC). La base de données *Algo OpData* offre la variable *Organization* qui contient le nom de la maison mère. Il nous reste donc à postuler que toutes les banques ayant fini par être absorbées dans l'une ou l'autre des maisons mères c'est qu'elles ont une culture de risque comparable à celle de l'acquéreuse finale. Nous venons de justifier un regroupement "naturel" des banques (qui est le nom de la maison mère à titre postérieur en décembre 2010). À partir de maintenant, toutes les banques appartenant à un même groupe auraient une même mesure d'exposition au risque opérationnel (une fois que cette mesure sera bien identifiée). Avec les banques regroupées par la variable *Organization*, nous pouvons avancer, les variables candidates pour être la mesure que nous cherchons sont :

- $o98q5$  : somme des montants des pertes enregistrées dépassant la médiane.
- $o98q9$  : somme des montants des pertes enregistrées dépassant le décile 9.
- $o98x5$  : nombre de pertes dépassant le décile 5 (à la médiane)
- $o98x9$  : nombre de pertes dépassant le décile 9 (les derniers 9 et 10)

Ces variables, ainsi construites, sont continues. Nous pouvons mesurer directement leur effet sur la sévérité de la période 2001-2010 en nous basant sur le modèle de Dahen et Dionne (2010) que nous écrivons

$$\log(Loss) = \alpha + \beta_1 \log(Assets) + \beta_2 o98 \dots + \gamma BL + \delta ET + \varepsilon \quad (33)$$

Tous les écarts-types et *p-values* seront robustes à la présence d'hétéroscédasticité et de *clustering* au sens de White (1980).

En fait, nous cherchons une mesure basée sur le nombre ou sur les montants des pertes,

car nous savons que les fréquences peuvent prédire les sévérités, à cause de la non-dépendance de ces distributions durant la période 1994-2000. Si la mesure bâtie sur les montants fonctionne bien, alors il y a des chances sérieuses qu'elle fonctionne aussi bien si elle est bâtie sur les nombres et vice-versa. Analysons les résultats des modèles du tableau 3.9.

La régression (1*b*) du tableau 3.9 est celle de base où nous n'avons pas encore injecté aucune de nos quatre variables candidates. Nous mettons ces variables, une à la fois, dans les modèles (2*b*) à (5*b*). La première constatation est qu'elles sont toutes significatives avec la surprise que le coefficient de la variable  $\log(Assets)$  n'est plus significatif quand l'une de nos variables indices est injectée en parallèle. En plus, la variable  $\log(Assets)$  perd beaucoup de sa magnitude par rapport à (1*b*). Ce résultat est très intéressant. En effet, beaucoup de chercheurs en risque opérationnel débattent la question de la pertinence de la taille des banques dans la modélisation du risque opérationnel. À aujourd'hui, il n'y a pas consensus sur le *scaling*. Jobst (2007), Moosa et Silvapulle (2012), et d'autres pensent que la taille des banques n'est pas pertinente pour modéliser le risque opérationnel. À l'opposé, de plus en plus de travaux montrent le contraire. Nous citons Dahlen et Dionne (2010), Chernobai, Jorion et Yu (2012), Ganegoda et Evans (2013), Chavez-Demoulin, Embrechts et Hofert (2013).

Nous venons, donc, de mettre la main ici sur quelque chose qui mérite un approfondissement. D'abord à en juger par la baisse de la magnitude de  $\log(Assets)$ , et secondairement par la variation des  $R^2$  des modèles (2*b*) à (5*b*), nos nouvelles variables semblent contenir l'information que représente  $\log(Assets)$  dans les régressions. Pour nous en convaincre, la variable  $o98x9$  est mise seule dans le modèle (6*b*) sans que cela n'impacte sensiblement ni les coefficients des autres variables dont les binaires, ni le  $R^2$ . En d'autres termes, l'inclusion des variables indices au modèle de Dahlen et Dionne (2010) s'inscrit comme une extension de celui-ci, la taille des banques reste pertinente dans le modèle, l'effet de  $\log(Assets)$  étant inclus dans les indices.

Quant à la distribution des fréquences, nous évaluons l'effet de la mesure *IOP* en utilisant

	(1b) (Modèle de référence)	(2b) (1b)+o98q5	(3b) (1b)+o98q9	(4b) (1b)+o98x5	(5b) (1b)+o98x9	(6b) (1b)+o98x9 -log(Assets)
(Constante)	-0,297 (0,433)	0,509 (0,533)	0,435 (0,513)	0,607 (0,599)	0,568 (0,585)	1,056*** (0,203)
log(Assets)	0,139*** (0,037)	0,051 (0,041)	0,059 (0,040)	0,044 (0,046)	0,047 (0,046)	
o98q5		0,359** (0,140)				
o98q9			0,378** (0,151)			
o98x5				0,018** (0,008)		
o98x9					0,037** (0,017)	0,049*** (0,012)
PayS (Paymt and Settlmnt)	1,261*** (0,438)	1,352*** (0,446)	1,361*** (0,448)	1,272*** (0,432)	1,309*** (0,438)	1,309*** (0,436)
TraS (Trading and Sales)	1,104*** (0,290)	1,139*** (0,269)	1,146*** (0,269)	1,090*** (0,283)	1,107*** (0,281)	1,104*** (0,278)
ComB (Comm. Banking)	1,182*** (0,167)	1,229*** (0,174)	1,238*** (0,175)	1,163*** (0,170)	1,187*** (0,170)	1,174*** (0,171)
RBn (Retail Banking)	0,930*** (0,207)	0,959*** (0,191)	0,966*** (0,190)	0,909*** (0,203)	0,926*** (0,202)	0,904*** (0,198)
AgnS (Agency Services)	1,223*** (0,413)	1,303*** (0,422)	1,310*** (0,423)	1,232*** (0,409)	1,255*** (0,409)	1,266*** (0,409)
CorF (Corp. Finance)	2,056*** (0,237)	2,129*** (0,253)	2,139*** (0,249)	2,047*** (0,255)	2,075*** (0,258)	2,082*** (0,264)
AssM (Asset Mngmt)	1,358*** (0,274)	1,413*** (0,284)	1,419*** (0,283)	1,356*** (0,280)	1,378*** (0,283)	1,371*** (0,280)
BusDSF (Bus.Disrup. Syst.Fail.)	-1,080 (0,687)	-1,156 (0,713)	-1,151 (0,716)	-1,152* (0,681)	-1,162* (0,690)	-1,161* (0,691)
DamPA (Damage Phy.Assets)	-0,086 (1,925)	-0,125 (1,933)	-0,118 (1,927)	-0,133 (1,962)	-0,103 (1,945)	-0,095 (1,943)
EmpWS (Employ.Prac.Wrkplac.Saf.)	-0,676*** (0,252)	-0,697*** (0,260)	-0,698*** (0,260)	-0,681*** (0,259)	-0,685*** (0,257)	-0,676*** (0,260)
EF (External Fraud)	-0,502*** (0,157)	-0,497*** (0,157)	-0,498*** (0,157)	-0,496*** (0,158)	-0,497*** (0,158)	-0,510*** (0,155)
IF (Internal Fraud)	-0,593*** (0,227)	-0,610*** (0,235)	-0,605*** (0,233)	-0,630*** (0,240)	-0,618*** (0,235)	-0,635*** (0,227)
ExeDPM (Exec. Deliv. Proc Mnmt)	-0,214 (0,228)	-0,214 (0,227)	-0,216 (0,227)	-0,202 (0,227)	-0,210 (0,227)	-0,204 (0,229)
year FE	oui	oui	oui	oui	oui	oui
R <sup>2</sup>	0,179	0,186	0,185	0,185	0,184	0,183
Adj. R <sup>2</sup>	0,170	0,176	0,176	0,175	0,175	0,175
Nom. obs.	508	508	508	508	508	508

\*\*\*  $p < 0,01$ , \*\*  $p < 0,05$ , \*  $p < 0,1$

Tableau 3.9 – Évaluation des mesures d'exposition au risque opérationnel sur la période 2001-2010

une loi binomiale négative à inflation des zéros (*Zero Inflated Negative Binomial*), de la même manière montrée au chapitre précédent. Soit  $Y$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale négative de moyenne  $\lambda$  et de paramètre de dispersion  $\theta$ . Si  $f_{NB}$  est la fonction de masse de cette loi, la probabilité que  $Y = k$  s'écrit

$$Pr(Y = k | \lambda, \theta) = f_{NB}(k, \lambda, \theta) = \frac{\Gamma(k + 1/\theta)}{k! \Gamma(1/\theta)} \left[ \frac{1}{1 + \theta\lambda} \right]^{\frac{1}{\theta}} \left[ \frac{\theta\lambda}{1 + \theta\lambda} \right]^k$$

où  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\Gamma(\cdot)$  désigne la fonction gamma conventionnelle. Notons que  $\theta > 0$  et que la binomiale négative converge vers une loi de Poisson quand  $\theta \rightarrow 0$ . Quand il y a des raisons de penser qu'il y a trop de valeurs 0 relativement à une binomiale négative, il convient d'envisager cette modélisation. Soit  $Y_{ij}$  une variable représentant le nombre de pertes de la banque  $i$  pour l'année  $j$ . Si  $Y_{ij}$  suit une loi binomiale négative à inflation de zéros, nous écrivons

$$Pr(Y_{ij} = k) = \begin{cases} q_{ij} + (1 - q_{ij})f_{NB}(0, \lambda_{ij}, \theta) & (k = 0) \\ (1 - q_{ij})f_{NB}(k, \lambda_{ij}, \theta) & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

où  $\lambda_{ij}$  est la moyenne et  $\theta$  est le paramètre de dispersion de la loi binomiale négative de base. La quantité  $q_{ij}$  représente la proportion des zéros qui seraient de trop par rapport à une loi binomiale négative. Conditionnellement aux variables explicatives choisies, la moyenne  $\lambda_{ij}$  et la probabilité  $q_{ij}$  s'écrivent

$$\begin{aligned} \log(\lambda_{ij}) &= \zeta_0 + \zeta_1 \log(Assets) + \zeta_2 IOP + \zeta_3 gGDP \\ &+ \zeta_4 Bank\_Cap + \zeta_5 Mean\_Salary \\ \log\left(\frac{q_{ij}}{1 - q_{ij}}\right) &= \xi_0 + \xi_1 \log(Assets) + \xi_2 Mean\_Salary + \xi_3 gGDP \end{aligned}$$

La dernière équation revient à modéliser  $q_{ij}$  avec une distribution logistique. La variable explicative  $gGDP$  est la première différence du produit national brut de l'année considérée.  $Bank\_Cap$  est le ratio de capitalisation de la banque (construit avec  $BHCK3210/BHCK2170/1000$  à partir de la base de données BHC).  $Mean\_Salary$  est le

ratio moyen des salaires et avantages assimilés du trimestre en question sur l'équivalent du nombre d'employés à temps plein (construit avec  $BHCK4135/BHCK4150/1000$ ).

La table 3.10 montre l'estimation de référence en panel A et l'effet de l'ajout de la mesure  $IOP$  dans le panel B à la colonne des coefficients de droite. D'abord, nous avons une amélioration claire du critère AIC qui diminue de 1640,1 à 1623,3. Cette amélioration est confirmée par la baisse du coefficient de dispersion  $\theta$  (estimé en log) qui passe de 2,097 à 0,934. Il y a une diminution importante de l'hétérogénéité résiduelle. Le coefficient de la mesure  $IOP$  est très positivement significatif. Par conséquent, plus l'indice  $IOP$  est grand, plus nombreuses seraient les pertes de la banque. Notons que le coefficient de  $\log(Assets)$  reste très significatif, par contre, il perd quelque peu de sa magnitude : de 0,885 à 0,604. Prenons par exemple la banque U.S. Bancorp. Son total des actifs moyen est de 12,36 (en log) et a un indice  $IOP = 2$ . Elle a subi huit pertes dans la période 2001-2010, ce qui nous fait une moyenne annuelle de 0,9. Le modèle de référence donne une estimation moyenne de 1,05 alors que le modèle augmenté de  $IOP$  donne une moyenne de 0,83 ce qui est plus proche de la fréquence moyenne observée.

Nous effectuons une dernière opération pour entériner le fait que  $\sigma_{98 \times 9}$  soit bien la mesure que nous cherchons. Nous voulons vérifier que son coefficient dans l'estimation des sévérités reste statistiquement constant sur la durée de tout notre échantillon. Pour procéder à ce test, nous estimons le modèle (33) sur une fenêtre glissante de deux ans. Elle va commencer de janvier 1994 à décembre 1995 pour donner un premier point de l'estimation du coefficient. Ensuite, nous déplaçons la fenêtre un mois vers la droite, la période sera alors de février 1994 à janvier 1996, ainsi de suite jusqu'au dernier point de l'estimation qui sera relatif à la période janvier 2008 à décembre 2010. Pour chaque point estimé, nous effectuons un test de Wald avec hypothèse nulle stipulant que le coefficient est égal à 0,05 (cette valeur provient de l'estimation du coefficient sur toute la durée 2001 à décembre 2010, voir table modèle (6b) de la table 3.9). La série des  $p$ -values des tests Wald est tracée avec les valeurs du coefficient obtenues dans la figure 3.5. Nous y voyons que le coefficient fluctue, mais reste bien stable autour de la valeur 0,05 le long de la période 1994-2010. Il y a juste deux fois que la  $p$ -value est légèrement inférieure

	(A)	(B)
	Modèle de référence	+ mesure <i>IOP</i>
<u>Étage de comptage binomiale négative</u>		
(Constante)	-10,969*** (0,741)	-8,165*** (1,255)
log(Assets)	0,885*** (0,053)	0,604*** (0,101)
mesure <i>IOP</i>		0,107*** (0,021)
Bank_Cap	4,428*** (0,933)	4,127*** (0,948)
Mean_Salary	-0,751 (0,913)	0,060 (0,928)
gGDP	0,018 (0,034)	-0,043 (0,038)
log( $\theta$ )	2,097*** (0,634)	0,934*** (0,352)
<u>Étage de correction des zéros (zero inflated)</u>		
(Constante)	1,176 (1,681)	8,100*** (1,903)
log(Assets)	-0,176 (0,120)	-0,862*** (0,237)
Mean_Salary	1,466 (2,569)	-3,739 (8,801)
gGDP	0,001 (0,109)	-0,239 (0,163)
Critère AIC	1640,089	1623,299
log MV (log Likelihood)	-810,044	-800,649
Nombre d'observations	4329	4329

\*\*\*  $p < 0,01$ , \*\*  $p < 0,05$ , \*  $p < 0,1$

Tableau 3.10 – Effet de l'indice *IOP* sur la distribution des fréquences

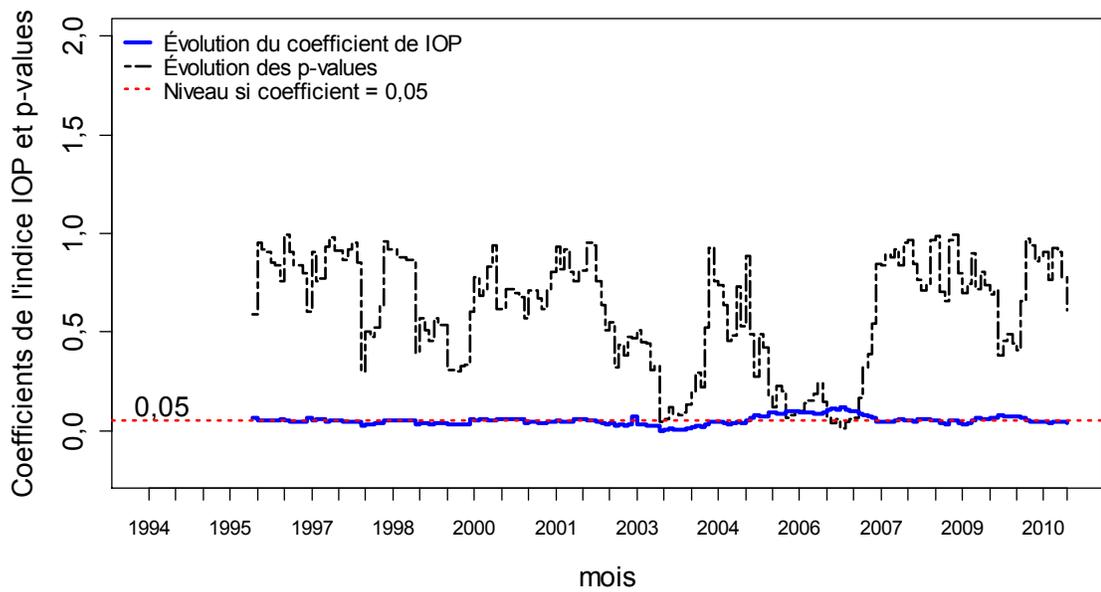


Figure 3.5 – Évolution de coefficient de *IOP* dans le temps : janvier 1996 à décembre 2010

à 5% (pris comme niveau de confiance pour valider l'hypothèse nulle). Par conséquent, nous aurons définitivement construit notre indice de mesure de l'exposition au risque opérationnel, que désormais nous nommons *IOP* dans la suite. Le modèle s'écrit alors

$$\log(Loss) = \alpha + \beta IOP + \gamma BL + \delta ET + \varepsilon \quad (34)$$

Avec ce dernier résultat tracé dans la figure 3.5, nous sommes totalement en phase avec les résultats de *STLZ* quant au risque opérationnel, dont les banquiers gardent l'exposition constante, en moyenne, à travers le temps. D'autre part, l'ajout ou non de la variable *Régime HMM* du chapitre 2 dans les estimations précédentes ne change rien à la conclusion (travaux non reportés ici).

Maintenant, nous nous intéressons plus précisément à la question de la relation entre le risque opérationnel et le risque de crédit. Nous nous proposons d'identifier des variables du crédit pouvant entrer dans un modèle afin d'expliquer et inférer notre indice *IOP*. L'intérêt est majeur. En effet, si nous savons le modéliser nous saurons l'estimer pour de nouvelles banques ou des banques qui subissent un changement comme passer à un indice supérieur par exemple. Nous saurons surtout faire des calculs avec des scénarios au sens du *stress testing*. Voyons comment !

### 3.5 Des déterminants de la mesure de l'exposition au risque opérationnel

D'abord, analysons quelque peu l'indice *IOP* identifié dans la section précédente. En fait, il est construit comme une variable continue, cependant cette variable ne prend que 6 valeurs. Les modalités sont  $\{0, 1, 2, 5, 12, 13, 15\}$ . Nous choisissons d'enlever la modalité 1, ce qui est sans conséquence sur le pouvoir de notre indice, et finalement les modalités retenues sont  $\{0, 2, 5, 12, 13, 15\}$ . Dans les 508 observations de perte de notre échantillon, nous avons respectivement 210, 21, 72, 60, 81 et 64 occurrences relatives aux six modalités. Le tableau 3.11 montre les groupes (les maisons mères) qui caractérisent chacune des modalités de l'indice. Notons à quel point les pertes enregistrées

Banque	Indice IOP		Perte en millions \$				Actifs en milliards \$		
	# pertes	(o98x9)	Min.	Max.	Médiane	Moyenne	Somme	Écart-type	Moyenne
Citigroup Inc.	64	15	1,0	8045,3	9,7	229,7	14699,1	131,4	1689
Bank of America Corporation	81	13	1,0	8400,0	19,7	211,7	17151,7	105,0	1573
JPMorgan Chase & Co	60	12	1,0	3782,3	10,9	150,2	9010,2	71,1	1296
Wells Fargo & Company	72	5	1,1	8400,0	9,0	161,9	11659,1	117,1	670
Bank of New York Mellon	12	2	2,6	743,0	22,5	87,7	1052,1	60,2	92
U.S. Bancorp	9	2	1,3	54,0	2,6	13,2	118,4	6,1	227

Tableau 3.11 – Liste des groupes de banques BHC et leurs indices respectifs

en 2001-2010 sont pratiquement en phase avec la valeur de l'indice correspondant, à l'exception de Bank of America qui arrive deuxième dans le classement, mais c'est celle qui subit le plus de pertes (en nombre et en montants perdus). Vu que nous avons six modalités, nous allons considérer la variable indice comme une variable ordinale, c'est à dire comme une variable discrète dont les modalités sont ordonnées (de la plus petite, 0, à la plus grande 15). Nous allons donc la modéliser avec un probit ou logit ordonné.

Présentons maintenant les variables explicatives que nous avons retenues et allons les extraire de la base BHC afin de modéliser l'indice *IOP*. D'abord et avant tout  $\log(\text{Assets})$  est corrélé à 76% avec la variable indice, comme montré dans la table des corrélations 3.13. En plus des papiers *STLZ* et *RMI*, nous allons nous laisser guider également par Kerstein et Kozberg (2013) qui proposent de travailler avec la logique de la classification *CAMELS*. Cet acronyme signifie : *Capital Adequacy* (C), *Asset Quality* (A), *Management* (M), *Earnings* (E), *Liquidity* (L), *Sensitivity to market or interest rate risk* (S). *Camels Rating* est un système de classement de banques américaines selon leur santé financière. Il s'appuie sur les états financiers des banques et sur un examen sur place effectué par différents régulateurs<sup>5</sup>. En fait, l'idée est que si nous cherchons à modéliser l'indice *IOP* des banques, cela revient à identifier une sorte de classement entre les banques, et donc nous nous inspirons de *CAMELS* pour repérer des variables intéressantes.

La définition des variables que nous construirons à partir de la base des données BHC est fournie dans le tableau 3.12. Pour l'adéquation du capital, nous proposons de la capturer avec le ratio de capitalisation bancaire, *Bank\_Cap* comme fait dans Dahlen et Dionne (2010). L'adéquation du capital pourrait aussi être approchée par la variable *Tier1\_Cap* (Tier1 sur total des actifs) comme suggérée dans le papier *RMI*. Par construction, un ratio *Tier1\_Cap* petit signifierait une banque plus risquée. D'ailleurs, Bâle II exige que ce ratio soit au minimum à 4%, Bâle III va passer ce minimum à 6%. Nous construisons la variable *ZScore* (distance au défaut) comme dans Laeven et Levine (2009),  $ZScore = \log[(Bank\_Cap + ROA)/\text{écart} - type(ROA)]$ . De ce fait, il y a aura une cer-

---

<sup>5</sup>La Fed, Office of the Comptroller of the Currency et FDIC

taine corrélation avec *ROA* et *Bank\_Cap* mais ce ne sera pas une redondance par rapport à ces deux variables, à cause justement du dénominateur qui va varier. Plus le *ZScore* est grand plus la banque s'éloigne de la zone du risque de défaut, et donc meilleure est sa santé financière.

Pour capturer la qualité des actifs, nous prenons la variable *Loan\_Allow* (*Allowance for loan losses*). C'est un compte de dépréciation au bilan qui reflète l'idée que les gestionnaires ont de leurs actifs de crédit, en matière de prévisions de défaut et des probabilités de recouvrement. Un ratio *Loan\_Allow* grand signifie une qualité moindre des ces actifs. Concernant la qualité du management en termes de gestion des risques, nous pensons à la variable *Mean\_Salary* comme proposée dans Dahan et Dionne (2010). Des employés mieux payés devraient, en principe, mieux travailler. Pour les bénéfices (*earnings*), nous optons pour le ratio *ROE* plutôt que *ROA* à cause des corrélations trop fortes avec les autres variables (voir tableau 3.13). En parlant des variables *ROA* et *ROE*, il convient de faire attention, car certaines variables, comme les variables de revenu (*BHCK4340* ou *BHCK4300*), sont reportées en cumulatif trimestriel. Elles sont, donc, à remettre en forme avant de les utiliser.

La liquidité sera mesurée par *Liq\_Secure* définie comme le ratio des titres liquides sur le total des actifs. Il nous reste à représenter le dernier axe *CAMELS* qui est la sensibilité au risque de marché et de taux d'intérêt. Mesurer la diversification des portefeuilles de prêts devrait nous donner une bonne idée du risque de taux d'intérêt auquel fait face la banque. Nous utilisons l'indice *HHI* (*Herfindahl-Hirschman Index*) pour ce faire, en faisant attention quant à son interprétation. En effet, un indice *HHI* plus grand signifie une concentration plus grande, donc une diversification moins bonne. La variable *Loan\_HHI* est construite en suivant Sarkisyan et Casu (2013). Cette variable va mesurer le degré de (non) diversification du portefeuille crédit entre les hypothèques, les prêts commerciaux et industriels, les prêts aux consommateurs, et les prêts divers (le reste). Quant au risque de marché, nous injectons la variable *Trade\_Deriv* qui est le ratio des produits dérivés utilisés pour fins commerciales sur le total des actifs. Afin de réduire l'hétéroscédasticité potentielle, nous ajouterons des variables de contrôles, comme l'indice de concentration

des revenus *Revenu\_HHI*, le ratio des produits dérivés employés pour couverture sur total des actifs *Hedge\_Deriv*, le ratio des hypothèques *Loan\_RS*. Deux dernières variables de contrôle : le ratio *Loans* étant le total des prêts sur total actifs et *nonInt\_Income* qui représente le ratio des bénéficiaires avant impôts sur le revenu ne provenant pas des intérêts. En fait, cette variable est une mesure forte de l'activité des banques en hors bilan, comme montré dans Boyd et Gertler (1995) et *RMI*, ce qui serait intéressant à voir.

Nous allons aussi contrôler s'il y a un effet panel aléatoire temporel puisque les trimestres se répètent. Un dernier point est que la table des corrélations ne montre aucune relation univariée entre l'indice *IOP* avec la variable *gGDP* (étant la première différence du produit national brut trimestriel), ni avec la variance du ratio de liquidité *Liq,var*, ni avec la variance *ROA,var*. L'interprétation suggérée serait que, justement, l'indice *IOP* est, en moyenne, assez constant dans le temps pour ne dépendre directement d'aucune variable de type macroéconomique, ce qui est plutôt rassurant et cohérent avec notre démarche. Par contre, les variables explicatives étant elles-mêmes reliées à l'environnement macroéconomique, il serait toujours possible d'établir une relation indirecte, par ricochet, entre *IOP* et les forces de l'économie.

Vu les chiffres du tableau 3.8, il est aisé de comprendre qu'il y a toujours un décalage dans le temps, entre les dates réelles où les pertes opérationnelles ont lieu, et les dates où ces pertes auraient été découvertes ou prises en compte dans les cas de jugement de cour. Nous allons utiliser ce fait pour extraire la matrice de nos variables explicatives avec un décalage d'un trimestre,  $x_t$ . Cela permet d'éviter tout problème d'endogénéité dans les estimations et les interprétations des résultats.  $IOP_t$  est les variables explicatives  $x_{t-1}$ . Dans la suite, *IOP* et  $x$  désigneront  $IOP_t$  et  $x_{t-1}$  respectivement. La présentation en sera moins chargée inutilement.

Regardons rapidement ce qui sort de la table 3.14. Elle est partagée en deux panels, les cinq colonnes de gauche constituent le panel A avec les banques dont l'indice du risque opérationnel est inférieur ou égal à 5. Le panel B à droite exhibe les chiffres quant aux indices supérieurs strictement à 5. Cette séparation permet d'avoir une idée sur la

Variable	Désignation	Construction
Tier1_Cap	Ratio Capital Tier 1 sur total des actifs	$BHCK8274/BHCK2170$
Bank_Cap	Ratio de capitalisation de la banque, total fond propre sur total actifs	$BHCK3210/BHCK2170$
ZScore	ZScore ou distance au défaut	$ZScore = \log[(Bank\_Cap + ROA)/\text{écart-type}(ROA)]$
Loan_Allow	Dépréciations au compte de bilan sur total portefeuille de crédit	$BHCK3123/BHCK2122$
ROE	Rendement sur fonds propres	$BHCK4340/BHCK3210$
Liq_Secure	Ratio de liquidité immédiate	$(BHCK1754 + BHCK1773)/BHCK2170$
Loan_HHI	Indice de concentration du portefeuille de crédit	$BHCK1410/(BHCK2122 + BHCK2123)**2 + ((BHCK1763 + BHCK1764)/(BHCK2122 + BHCK2123))**2 + ((BHCKB538 + BHCKB539 + BHCK2011)/(BHCK2122 + BHCK2123))**2 + ((BHCK2122 + BHCK2123 - BHCK1410 - BHCK1763 - BHCK1764 - BHCKB538 - BHCKB539 - BHCK2011)/(BHCK2122 + BHCK2123))**2$
Trade_Deriv	Total des comptes de produits dérivés pour fins commerciales sur total des actifs	$(BHCKA126 + BHCKA127 + BHCK8723 + BHCK8724)/BHCK2170$
Hedge_Deriv	Total des comptes de produits dérivés pour fins de couverture sur total des actifs	$(BHCK8725 + BHCK8726 + BHCK8727 + BHCK8728)/BHCK2170$
Revenu_HHI	Indice de concentration des revenus de la banque	$(BHCK4074/(abs(BHCK4074) + abs(BHCK4079))**2 + (BHCK4079/(abs(BHCK4074) + abs(BHCK4079))**2$ où $abs(.)$ désigne la valeur absolue
Mean_Salary	Moyenne salariale calculée comme ratio des salaires et avantages aux salariés sur le nombre d'employés temps plein ou équivalent correspondant à la même année	$BHCK4135/BHCK4150/1000$
Loan_RS	Ratio des hypothèques sur total des prêts	$BHCK1410/BHCK2122$
Loan_CI	Ratio des prêts aux entreprises commerciales et industrielles sur les prêts	$(BHCK1763 + BHCK1764)/BHCK2122$
Loans	Ratio du total des prêts sur total des actifs	$BHCK2122/BHCK2170$
Int_Income	Ratio des bénéfices sur le revenu net des intérêts avant impôts	$BHCK4074/(BHCK4074 + BHCK4079)$
nonInt_Income	Ratio des bénéfices sur le revenu net hors intérêts avant impôts	$BHCK4079/(BHCK4074 + BHCK4079)$

Tableau 3.12 – Liste des variables construites à partir de la base BHC

différence des 2 panels relativement aux valeurs des variables. Déjà la taille des banques dans le panel A est plus petite comme attendu. La distance au défaut est plus élevée pour A (meilleure santé financière), le ratio *Bank\_Cap* est plus grand, la dépréciation au bilan des actifs pour créances douteuses est moindre. À l’opposé, le *ROE* est plus petit pour le panel A qui semble préférer travailler plus avec les hypothèques et moins avec les entreprises. Ce qui sort le plus est que les banques du panel A travaillent 10 fois moins avec les produits dérivés. Cela semble une spécialité des grandes banques d’investissement BHC. Le ratio de liquidité immédiate est deux fois plus grand chez les banques du panel A qui aussi ont des portefeuilles de crédit plus concentrés, ainsi que les sources de revenus (*Loan\_HHI* et *Revenu\_HHI*). Nous voyons aussi que pratiquement toutes banques respectent 4% comme minimum du ratio *Tier1\_Cap* au panel B, ce qui n’est pas le cas, par contre, des banques du panel A où le tableau montre un minimum de 0,0013, presque nul.

Présentons maintenant notre modèle économétrique. C’est un modèle logit ordonné classique. Il suppose l’existence d’une variable latente  $y^*$  continue qui gouverne le classement de  $y$  par intervalle. Ces derniers sont définis par des constantes  $\alpha_{i||j}$  tels que

$$y^* = x'\beta + \varepsilon$$

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } y^* \leq \alpha_{0||2} \\ 2 & \text{si } \alpha_{0||2} < y^* \leq \alpha_{2||5} \\ 5 & \text{si } \alpha_{2||5} < y^* \leq \alpha_{5||12} \\ 12 & \text{si } \alpha_{5||12} < y^* \leq \alpha_{12||13} \\ 13 & \text{si } \alpha_{12||13} < y^* \leq \alpha_{13||15} \\ 15 & \text{si } \alpha_{13||15} < y^* \end{cases} \quad (35)$$

où  $y^*$  suit une loi logistique conditionnellement à la matrice  $x$  des variables explicatives et aux paramètres du modèle. Le vecteur  $\beta$  et les  $\alpha_{j||j+1}$  sont à estimer,  $j \in \{0, 2, 5, 12, 13, 15\}$ . Pour simplifier,  $\alpha_{j||j+1}$  sera notée  $\alpha_j$ . L’estimation se fait par maximum de vraisemblance calculée en utilisant le lien avec la fonction cumulative de la distribution logis-



	Panel A : banques dont indice <= 5					Panel B : banques dont indice > 5				
	Moyenne	Médiane	Écart-type	Min.	Max.	Moyenne	Médiane	Écart-type	Min.	Max.
log(Assets)	10,8682	11,0809	1,8783	7,0380	14,1117	14,1917	14,2605	0,3609	13,4874	14,7226
ZScore	6,1823	6,1628	0,8225	3,6769	9,3273	5,9533	5,9918	0,6383	4,6555	7,5428
Tier1_Cap	0,0844	0,0737	0,0541	0,0013	0,5673	0,0579	0,0584	0,0078	0,0392	0,0857
Bank_Cap	0,1062	0,0930	0,0820	0,0235	0,6813	0,0772	0,0786	0,0132	0,0519	0,1144
Loan_Allow	0,0155	0,0138	0,0099	0,0000	0,0838	0,0249	0,0192	0,0135	0,0115	0,0649
Mean_Salary	0,1818	0,1252	0,2261	0,0353	2,7024	0,2188	0,1695	0,1408	0,0687	0,5967
Trade_Deriv	2,5028	0,1303	9,4684	0,0000	52,2956	24,1046	18,4148	12,2008	8,3190	57,0455
ROE	0,0942	0,1214	0,1466	-1,0266	0,6184	0,1130	0,1305	0,0799	-0,1955	0,2316
Loan_RS	0,5358	0,5842	0,2364	0,0000	0,9687	0,4307	0,3955	0,0955	0,2678	0,5852
Loan_CI	0,1970	0,1859	0,1147	0,0000	0,7280	0,2107	0,2039	0,0415	0,1297	0,3200
Liq_Secure	0,2216	0,1735	0,1637	0,0000	0,9491	0,1245	0,1317	0,0359	0,0480	0,1901
Loan_HHI	0,5015	0,4626	0,1640	0,2829	0,9909	0,3161	0,2905	0,0488	0,2513	0,4104
Revenu_HHI	0,6051	0,5685	0,1166	0,5000	0,9814	0,5297	0,5078	0,0745	0,5000	0,9774
Hedge_Deriv	0,2902	0,1266	0,4446	0,0000	2,6054	0,2506	0,2252	0,1482	0,0211	0,6379
Loans	0,5530	0,6490	0,2352	0,0023	0,8346	0,4035	0,3914	0,0783	0,2717	0,6368
Int_Income	0,5364	0,5770	0,2307	-0,1922	0,9242	0,4969	0,5059	0,1234	0,3101	1,0117

Tableau 3.14 – Statistiques descriptives des variables BHC choisies

tique (*Cumulative Link Models*) qui s'écrit

$$\text{logit}(Pr(y \leq j)) = \log \left[ \frac{Pr(y \leq j)}{1 - Pr(y \leq j)} \right] = \alpha_j - x' \beta \quad (36)$$

Les  $\alpha_j$  sont les constantes seuils qui séparent les différentes modalités  $j$ . Le terme  $x' \beta$  à la droite de l'équation 36, quant à lui, ne dépend pas de  $j$ . De ce fait, le rapport des cotes  $Pr(y \leq j)/(1 - Pr(y \leq j))$  doit être proportionnel à  $exp(\alpha_j)$ . Nous parlons, alors, de proportionnalité des rapports de cotes (*proportional odds assumption*). Cela ressemble à l'hypothèse des modèles PH de Cox (*Proportional Hazards*). C'est une hypothèse qu'il convient de tester afin de valider les estimations du modèle logit ordonné.

Le deuxième point important, pour valider les estimations, est de contrôler s'il existe un effet panel temporel causé par les trimestres qui se répètent dans les observations. Dans ce sens, nous supposons l'existence d'une variable aléatoire  $e$  qui va représenter cet effet dans l'équation

$$y^* = x' \beta + e + u$$

où  $u$  est un terme résiduel. La variable  $e$  est supposée suivre une loi normale de moyenne nulle et un écart-type  $\sigma_e$ . L'estimation en présence de cet effet aléatoire nécessite des

calculs d'intégrales numériques, et se fait à l'aide de l'approximation de Laplace ou en utilisant les méthodes de quadrature. Nous effectuons nos estimations sous  $R$ , en faisant appel aux fonctions du logit ordonné du paquet *ordinal* de Christensen (2014) disponible dans *r-project.org*.

Le résultat de l'estimation est reporté à la table 3.15. Regardons d'abord la colonne relative au modèle (1). Vu que nos variables *Bank\_Cap* et *Tier1\_Cap* sont fortement corrélées entre elles, pour choisir laquelle prendre, ce modèle inclut les deux pour examiner leur comportement. *Bank\_Cap* sort positive, mais pas significative. Cela aurait signifié la présence de risque moral faisant que la banque plus capitalisée prendrait plus de risque comme le souligne le papier Dahan et Dionne (2010). Dans le modèle (2) nous enlevons cette variable, un test  $\chi^2$  montre que la vraisemblance n'en souffre pas ( $p\text{-value}=0,1126$ ). Le critère BIC s'en améliore. Le pouvoir de prédiction du modèle (total des prédictions justes sur le total des observations) baisse légèrement de 82,7% à 82,4%. Le pseudo  $R^2$  de McFadden et celui de Cox et Snell gardent pratiquement les mêmes valeurs d'environ 71,5% et 85,7% respectivement. Au passage, ces pseudo  $R^2$  donnent une idée sur une qualité plutôt bonne de l'ajustement de nos données quant aux modèles logit ordonné que nous utilisons. Continuons à analyser le modèle (2). La variable  $\log(\text{Assets})$  est positive et très significative comme attendu. Le ratio *Tier1\_Cap* est très négativement significatif. Quand ce ratio augmente, l'indice *IOP* diminue. Autrement dit, les banques avec une meilleure gestion du risque de crédit semblent avoir une exposition moindre au risque opérationnel. Ceci est un premier résultat important. Le *ZScore* est positif et très significatif. Plus une banque s'éloigne du défaut plus son *IOP* est grand. C'est un deuxième résultat, a priori, surprenant par rapport au résultat précédent. Nous allons y revenir plus loin.

Maintenant, passons à la variable *Loan-Allow* qui est très significative et positive. La dépréciation des gestionnaires de leurs actifs de crédit semble être un signe clair que la banque a un indice *IOP* plus grand. *Mean\_Salary* est significative à 10% et est négative. La qualité de management semble donc réduire le risque opérationnel, toutes choses étant égales par ailleurs. Le ratio *Trade\_Deriv* est très significativement négatif. Nous

	(1)	(2)	(3)	(4) probit
log(Assets)	6,297*** (0,612)	6,158*** (0,591)	5,677*** (0,585)	3,151*** (0,295)
Tier1_Cap	-141,663*** (22,731)	-133,660*** (22,242)	-100,338*** (19,112)	-58,030*** (10,353)
Bank_Cap	27,311 (17,190)			
ZScore	1,331*** (0,386)	1,369*** (0,388)	1,203*** (0,391)	0,615*** (0,214)
Loan_Allow	109,369*** (26,326)	115,585*** (25,940)	96,137*** (24,800)	49,914*** (13,166)
Mean_Salary	-2,540* (1,463)	-2,420* (1,454)	-2,242 (1,433)	-1,364* (0,826)
Trade_Deriv	-0,195*** (0,034)	-0,200*** (0,034)	-0,236*** (0,041)	-0,133*** (0,023)
ROE	26,427*** (4,889)	25,637*** (4,710)	27,170*** (4,639)	14,542*** (2,416)
Loan_RS	8,209* (4,670)	11,700*** (4,257)	14,721*** (4,712)	4,569** (1,892)
Liq_Secure	-2,063 (3,971)	-3,295 (3,853)	-13,264** (6,328)	-6,011* (3,563)
Loan_HHI	-42,321*** (6,199)	-44,598*** (6,229)	-45,687*** (6,499)	-21,355*** (2,512)
Revenu_HHI	23,354*** (4,160)	25,374*** (4,323)	22,783*** (4,844)	10,031*** (2,211)
Hedge_Deriv	-0,634 (0,596)	-0,811 (0,588)	-0,999* (0,592)	-0,576* (0,342)
non Int_Income	5,295* (2,789)	5,777** (2,790)		
Loans			-9,771*** (3,789)	-5,084** (2,167)
0 2.(constante)	85,590*** (9,471)	84,094*** (9,361)	68,451*** (10,323)	36,069*** (5,381)
2 5.(constante)	88,018*** (9,677)	86,521*** (9,570)	70,731*** (10,478)	37,194*** (5,434)
5 12.(constante)	91,677*** (9,917)	90,223*** (9,820)	74,419*** (10,681)	39,220*** (5,512)
12 13.(Intercept)	93,991*** (10,036)	92,493*** (9,932)	76,751*** (10,776)	40,545*** (5,553)
13 15.(constante)	97,748*** (10,288)	96,236*** (10,172)	80,749*** (10,932)	42,798*** (5,621)
Critère AIC	307,154	307,671	305,394	307,543
Critère BIC	380,291	376,959	374,681	376,831
Log MV (log Lik.)	-134,577	-135,836	-134,697	-135,771
<i>pseudo</i> R <sup>2</sup> McFadden	0,715	0,712	0,715	0,712
<i>pseudo</i> R <sup>2</sup> Cox & Snell	0,857	0,856	0,857	0,856
Score de prédiction	0,827	0,824	0,839	0,813
N. obs.	347	347	347	347

\*\*\*  $p < 0,01$ , \*\*  $p < 0,05$ , \*  $p < 0,1$

Tableau 3.15 – Estimation du modèle Logit ordonné

l'avons mis pour capturer l'efficacité dans la gestion du risque de marché, dans le sens que plus une banque transige dans les produits dérivés, plus elle en maîtrise le risque (comme montré dans *RMI* également). Par conséquent, une bonne gestion du risque de marché semble diminuer l'exposition au risque opérationnel. En parlant des produits dérivés, la variable *Hedge\_Deriv* n'est pas significative. Comme dans *RMI*, la gestion des risques par les canaux traditionnels, comme le *hedging*, ne semble pas affecter le risque opérationnel.

Continuons avec le *ROE*, étant très significativement positif, plus la banque est profitable, plus son exposition au risque opérationnel serait grande. Cela rappelle beaucoup le sens de la définition même du risque opérationnel<sup>6</sup>, puisqu'en augmentant ses activités la banque s'expose à des imperfections humaines, techniques, organisationnelles ou managériales. Ceci explique aussi pourquoi *ZScore* est positivement très significatif, comme signalé plus haut. En effet, cette variable est calculée avec deux composantes : *Bank\_Cap* et *ROA*. La première est éliminée du modèle (3) vu que son effet est déjà inclus dans *Tier1\_Cap*. La deuxième, elle, est fortement corrélée avec *ROE* dont nous venons de discuter. La variable *ZScore* va, donc, représenter la santé financière comme résultat d'un bon rendement de la banque. Par conséquent, le coefficient positif et significatif de *ZScore* suggère que cette santé financière a un coût : une exposition au risque opérationnel est plus grande, comme pour *ROE*. Récapitulons, *Tier1\_Cap* négatif serait qu'une bonne gestion du risque de crédit va s'accompagner d'une exposition moindre au risque opérationnel, alors qu'un coefficient positif de *ZScore* montrerait que la santé financière de la banque, comme son rendement, nécessiterait une prise de risque plus grande dans ses opérations, et donc s'expose plus au risque opérationnel.

Passons au suivant, le coefficient de *Loan\_RS* est très significativement positif. Ce ratio mesure la proportion des prêts hypothécaires de la banque. Peut-être, est-ce relié aux titrisations ou activités similaires. La variable *nonInt\_Income* est positive et significative à 5%. Le ratio de liquidité immédiate *Liq\_Secure* n'est pas significatif, même si le signe

---

<sup>6</sup>Définition du risque opérationnel : « *the risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events* » (BCBS, 2004)

négatif est celui attendu. Cela nous pousse à concevoir le modèle (3), où l'ensemble reste le même que pour (2) sauf que la variable *nonInt\_Income* est remplacée par le ratio *Loans*. Ce dernier indique la proportion des portefeuilles de crédit par rapport au total des actifs de la banque. S'il est relativement bas, cela indique que les revenus des intérêts seront moindres. Autrement dit, les variables *Loans* et *nonInt\_Income* sont intimement inversement corrélées. Dans le modèle (3), tous les résultats discutés jusqu'à maintenant pour le (2) restent valables pour le (3). La nouveauté est que la substitution des deux variables semble laisser la liquidité immédiate mieux s'exprimer en devenant significative à 5%. Juste avant de continuer l'examen des autres variables, notons que le passage du modèle (2) à (3) arrange aussi les critères AIC et BIC qui baissent à 305,4 et 374,7 respectivement.

Nous obtenons une meilleure prédiction à presque 84%. Avançons avec *Loan\_HHI* est très significativement négatif. Plus la banque se concentre sur un type de prêts moins grand sera son indice *IOP*. La diversification arrange sans doute l'exposition aux risques, cependant elle peut s'accompagner d'une complexité accrue en termes de difficultés de gestion. Le prix de cette diversification semble être une plus grande exposition au risque opérationnel, ce qui est réaliste dans la vie des banques. À l'opposé, la concentration (diversification) des sources de revenus augmente (diminue) le risque opérationnel, comme semble l'indiquer le coefficient de *Revenu\_HHI* positif et très significatif. Quant au ratio *Loans* de ce modèle (3), étant très significativement négatif, cela rejoint directement ce que nous venons de dire pour *Tier\_Cap* plus haut.

Toutes les constantes frontières des modèles logit ordonné sont très significatives pour déterminer les intervalles de classement. Par ailleurs, il n'existe pas d'effet panel aléatoire associé aux trimestres statistiquement. L'estimation en supposant son existence donne pratiquement les mêmes résultats. Le test  $\chi^2$  ne permet pas de rejeter l'absence d'effet panel aléatoire, avec une *p-value* de 0,311%. Le dernier modèle (4) permet de montrer qu'une spécification avec un probit ordonné au lieu d'un logit ordonné est moins bonne. Les critères AIC et BIC augmenteraient. Le pouvoir de prédiction baisserait à 81,3% ce qui est le moins bon de tous les modèles de nos estimations. En conclusion,

outre la variable  $\log(Assets)$ , nous venons d'identifier douze déterminants de l'indice  $IOP$  avec un pouvoir prédictif de 84%. En plus, nous voyons comment le risque opérationnel semble être une sorte de prix à payer pour le rendement de la banque et de la diversification de ses portefeuilles de crédit. D'un autre côté, l'exposition au risque opérationnel semble diminuer avec une bonne gestion du risque de crédit, le risque de marché et une bonne gestion de la liquidité de la banque.

Il nous reste, maintenant, à valider le modèle logit ordonné. Brant (1990) propose un test de l'hypothèse de rapports de cotes proportionnels. Le concept de ce test est simple. Nous commençons par rappeler l'écriture du modèle cumulatif du logit ordonné

$$\text{logit}(Pr(y \leq j)) = \log \left[ \frac{Pr(y \leq j)}{1 - Pr(y \leq j)} \right] = \alpha_j - x' \beta \quad (37)$$

Brant (1990) suggère d'estimer le modèle, mais en laissant la possibilité aux coefficients  $\beta$  de dépendre de la modalité  $j$ , d'où les  $\beta_j$  dans l'équation qui devient

$$\text{logit}(Pr(y \leq j)) = \log \left[ \frac{Pr(y \leq j)}{1 - Pr(y \leq j)} \right] = \alpha_j - x' \beta_j \quad (38)$$

Il est clair que le modèle dans l'équation 37 est imbriqué dans celui de 38, quand  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 \dots = \beta_{6-1}$  est vraie. Cela nous donne quatre contraintes. Un test de ratio de vraisemblance, comparé à une  $\chi^2$  de degré de liberté 4, permet d'évaluer  $H_0$ . Chacune des variables du modèle, à tour de rôle, va être ainsi testée afin de mesurer la contrainte de l'hypothèse de proportionnalité. Le tableau 3.16 résume les résultats du test de Brant (1990). La première colonne donne le log du maximum de vraisemblance quand nous estimons le modèle avec six coefficients différents (un coefficient pour chaque modalité). La deuxième colonne calcule le ratio de vraisemblance ( $-2 \times (\log L_{\text{contraint}} - \log L_{\text{non contraint}})$ ). La  $p$ -value du test est exposée dans la dernière colonne. Une  $p$ -value inférieure à 5% signifierait un problème de non-proportionnalité relativement à la variable concernée. Justement, les variables  $Loan\_HHI$ ,  $Loan\_RS$ ,  $Revenu\_HHI$  et  $Hedge\_Deriv$  semblent indiquer un problème. Hormis  $Loan\_HHI$ , les trois autres variables ont été intégrées dans le modèle comme variables de contrôle uni-

Test de proportionnalité de Brant (1990)				
Variable	log max. vraisemblance	Ratio vraisemblance	p-value	
1	log(Assets)	-130,0864	9,2209	0,0558
2	ZScore	-132,7897	3,8143	0,4317
3	Tier1_Cap	-133,5225	2,3487	0,6719
4	Loan_Allow	-133,8488	1,6960	0,7915
5	Mean_Salary	-133,9785	1,4365	0,8378
6	Trade_Deriv	-133,6641	2,0653	0,7237
7	ROE	-131,5355	6,3226	0,1763
8	Loan_RS	-128,3970	12,5996	0,0134
9	Liq_Secure	-130,1227	9,1483	0,0575
10	Loan_HHI	-127,6851	14,0234	0,0072
11	Revenu_HHI	-128,1867	13,0203	0,0112
12	Hedge_Deriv	-117,4187	34,5563	0,0000
13	Loans	-129,7674	9,8588	0,0429

Tableau 3.16 – Tests de validation de l’hypothèse de proportionnalité (Brant, 1990)

quement. Nous devons donc approfondir l’analyse pour la variable *Loan\_HHI*.

Harrell (2001, 2015) et d’autres auteurs critiquent les tests de proportionnalité, dont celui de Brant, qui rejettent trop souvent cette hypothèse. Harrell (2015) suggère fortement de construire des graphiques afin d’inspecter visuellement ce qui se passe. Pour une variable explicative donnée,  $X$ , il convient de tracer les quantités  $E(X | IOP \text{ observé})$  et  $E(X | IOP \text{ prédit})$  et de les comparer. Cette dernière expression est calculée avec une valeur de  $IOP$  prédite par le modèle sous l’hypothèse de proportionnalité. Si les deux tracés sont raisonnablement comparables, l’hypothèse pourrait être considérée valide. La figure 3.6 montre les graphiques de Harrell (2015) relatifs à quatre variables explicatives. Les deux premières, *Tier1\_Cap* et *Loan\_Allow*, ont déjà réussi le test de Brant (1990). Nous traçons leurs graphiques pour les avoir comme repère. Nous voyons que  $E(X | IOP \text{ observé})$  (en trait continu) et  $E(X | IOP \text{ prédit})$  (en pointillé) fluctuent, mais restent assez proches l’une de l’autre concernant ces deux variables. Ces tracés sont comparables également pour la variable *Loan\_HHI* même si l’écart des tracés est plus grand. Par contre, les tracés relatifs à la variable *Mean\_Salary* sont clairement différents.

En fait, cette variable n'étant pas significative dans le modèle, ses tracés sont montrés uniquement pour illustrer le cas qui ne fonctionne pas. L'hypothèse de proportionnalité peut alors être retenue pour *Loan\_HHI*. En somme, vu cette discussion, nous pouvons admettre l'hypothèse de proportionnalité pour l'ensemble de notre modèle logit ordonné.

Pour finir la validation de notre modèle, Christensen (2014) suggère également une vérification graphique du côté de la qualité de la convergence de l'estimation par maximum de vraisemblance. Cela revient à comparer une statistique de Wald à une quantité dite *likelihood root statistic* (Brazzale *et al.*, 2007). La première est représentée par une ligne droite dans les graphiques. La vérification est concluante quand la courbe de la statistique *likelihood root* se confond pratiquement à cette droite. Les figures 3.7, 3.8 et 3.9 exposent les résultats. Les écarts peuvent être évalués graphiquement à 95% ou 99% à l'aide de quatre lignes horizontales. Visuellement, nous retrouvons bien une certaine correspondance entre les résultats des tests de proportionnalité et ces derniers graphiques, en matière d'écart par rapport aux droites des statistiques de Wald. D'autre part, nous ne détectons pas un problème particulier pour aucune variable. Cela termine la validation de notre modèle logit ordonné. Passons aux applications !

### 3.6 Des applications

Dans cette section, nous voulons présenter quatre applications. La première est que nous sommes en mesure d'inférer un indice *IOP* pour une banque nouvelle qui, par exemple, n'existait pas avant 2001. Prenons le cas de Goldman Sachs qui est devenu BHC en 2009, et donc, qui n'est pas présente dans notre échantillon avant cette date. De ce fait, cette banque s'est vue attribuer un indice  $IOP = 0$  (pas de pertes enregistrées entre 1994 et 1999 en tant que BHC). La taille de Goldman Sachs en 2009-2010 est de 13,7 (en log) ce qui est sensiblement la même que pour JPMorgan Chase durant 2001-2004. Cette dernière banque est classée 12 (12 pertes en 1994-1999) et l'estimation de notre modèle logit ordonné donne effectivement un indice de 12 à 13 pour la même période, tandis que Goldman Sachs obtient l'indice 0 dans l'estimation du logit ordonné. C'est un exemple

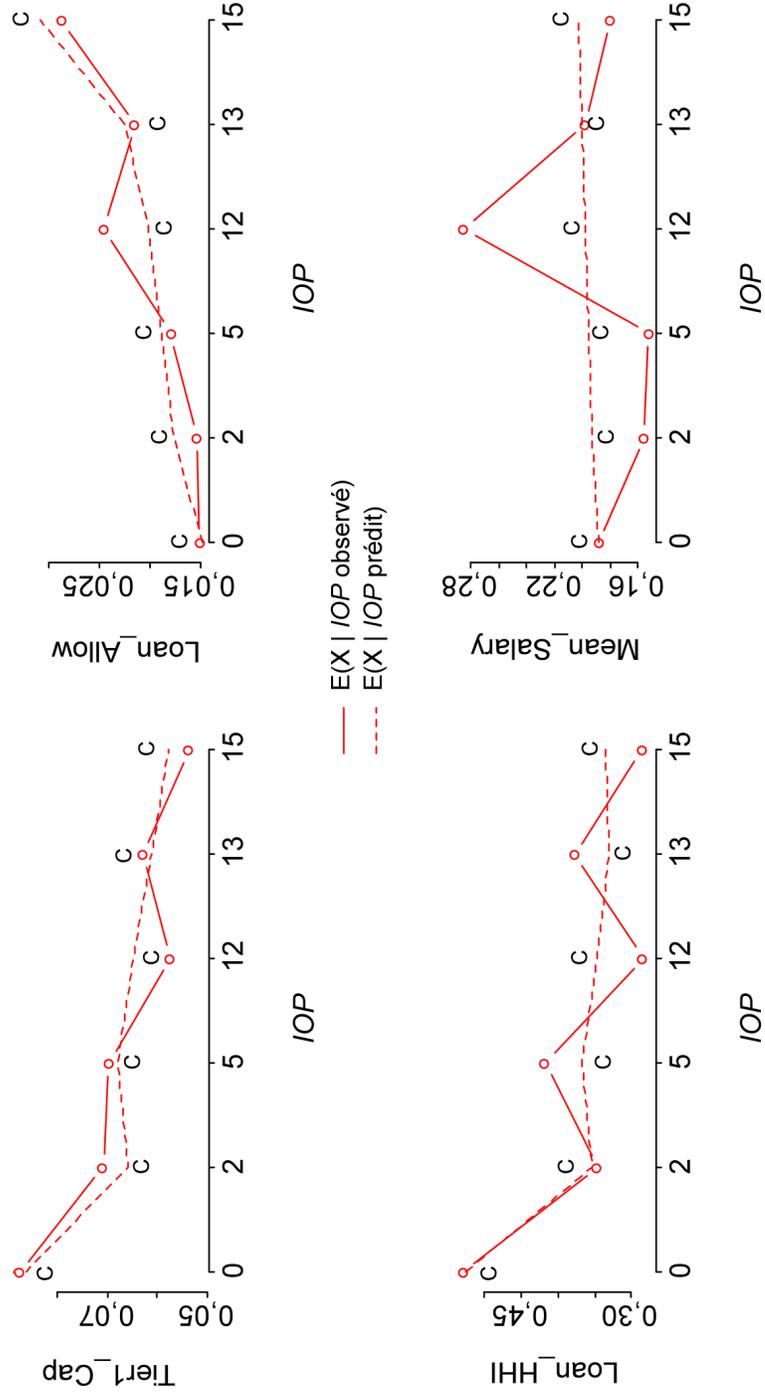


Figure 3.6 – Tracés de contrôle de l'hypothèse de proportionnalité (Harrell, 2015)

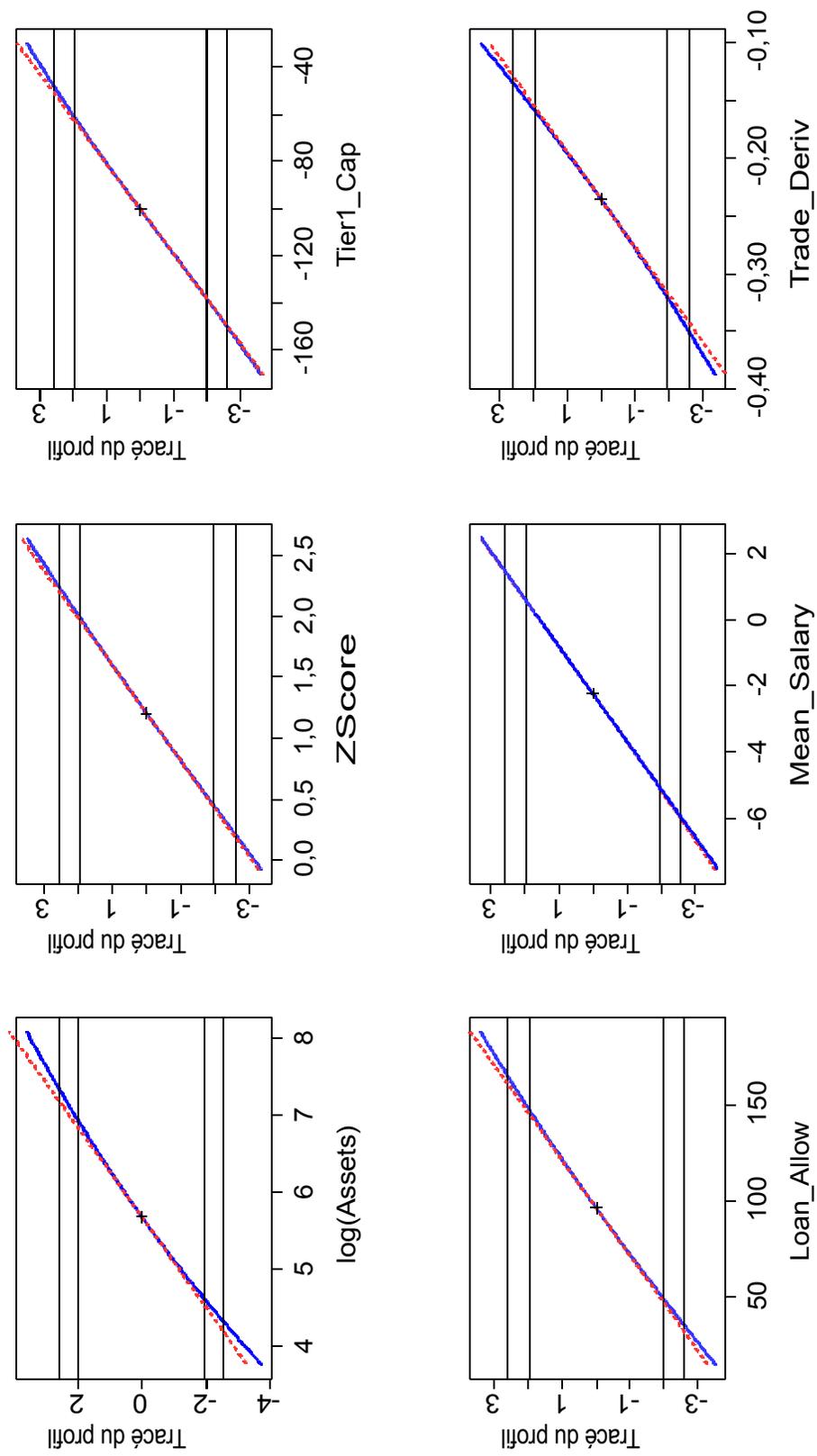


Figure 3.7 – Tracé de contrôle de convergence de l'estimation du logit ordonné (partie 1/3)

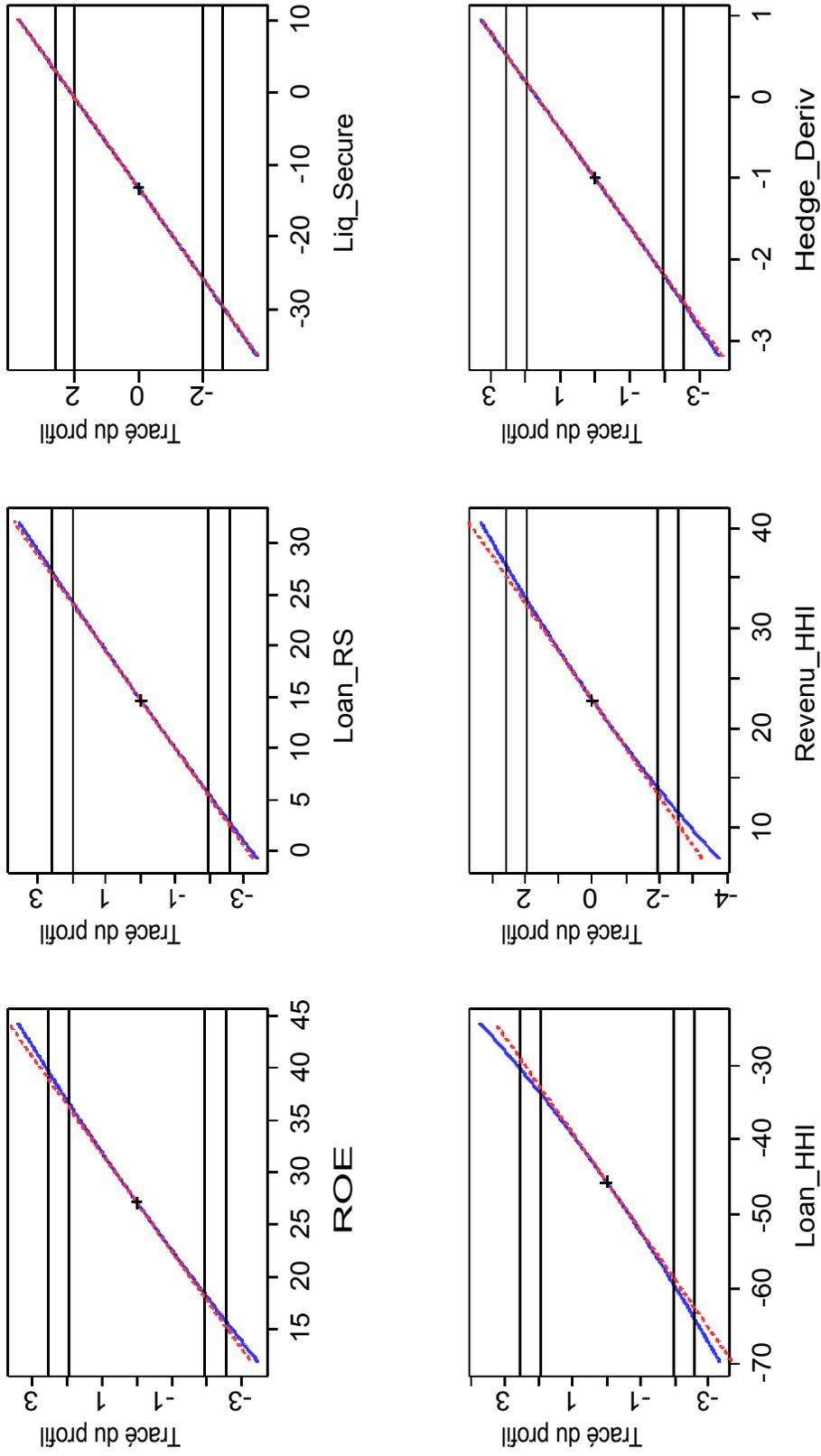


Figure 3.8 – Tracé de contrôle de convergence de l'estimation du logit ordonné (partie 2/3)

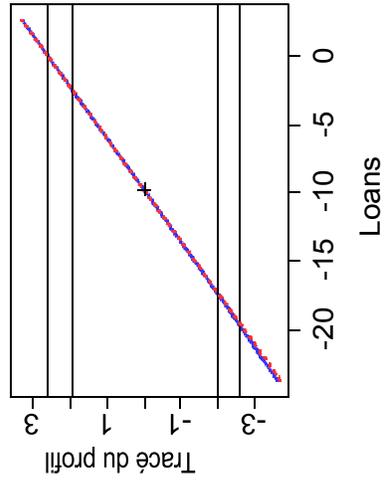


Figure 3.9 – Tracé de contrôle de convergence de l'estimation du logit ordonné (partie 3/3)

parlant pour montrer que l'exposition au risque opérationnel mesurée par *IOP* peut varier (et doit pouvoir varier) pour deux banques qui sont gérées différemment même si elles sont de la même taille. Cet exemple illustre le pouvoir discriminatoire de notre spécification pour comparer les banques au point de vue du risque opérationnel.

En parlant de l'estimation du modèle, notons que le logit ordonné délivre d'abord un vecteur de six probabilités, mettons  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ ,  $\sum p_i = 1$ . Chacune des probabilités  $p_i$  mesure la vraisemblance que l'indice *IOP* de la banque en question soit égal à l'une ou l'autre des modalités  $IOP_i \in \{0, 2, 5, 12, 13, 15\}$ . À partir de ce vecteur, il existe trois façons d'inférer l'indice de la banque. Par exemple, au troisième trimestre de 2001, le vecteur estimé de JPMorgan Chase est  $P = \{0,0001, 0,0012, 0,0492, 0,3037, 0,6134, 0,0324\}$ , lesquelles probabilités ont une somme de 1 bien entendu. Le mode étant relatif à la cinquième probabilité, l'indice inféré serait donc 13. Une deuxième façon plus informative est de déterminer l'indice comme étant l'espérance mathématique  $E(IOP) = \sum_i p_i \times IOP_i$ . Cela va apporter la souplesse de situer d'une façon continue la position où se trouve la banque. Le calcul donne  $E(IOP) = 12,35$ . Désormais, nous parlerons de l'estimation continue de l'indice *IOP* quand il sera calculé par la moyenne pondérée. Au cours de l'année 2001, par exemple, JPMorgan Chase est classée 12,00, 11,48, 12,35 et 9,83 pour chacun des quatre trimestres respectivement. Nous y voyons que cette banque était moins exposée au risque opérationnel à la fin de l'année 2001. À côté de ces deux mesures discontinues (le mode) ou continues (l'espérance mathématique), il existe un troisième moyen d'exploiter la richesse qu'offre le vecteur des probabilités  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ , c'est de l'utiliser directement dans un nouveau type de *scaling* des données externes.

L'indice estimé en discontinu ou en continu peut être utilisé en entrée pour estimer la sévérité et les fréquences d'une banque donnée. Dans ces deux cas, cela revient à utiliser une partie de l'information qu'offre  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$  en prenant le maximum ou en prenant la moyenne pondérée. Si nous souhaitons travailler d'une façon plus riche, il convient d'utiliser ce vecteur de probabilités en entier. Pour une banque B, nous faisons un tirage d'une des valeurs  $\{0, 2, 5, 12, 13, 15\}$  selon la loi discrète décrite par le vecteur

de probabilités  $P$ . Notons  $IOP_j$  la valeur tirée. Dans l'équation du modèle de sévérité, nous calculons les pertes probables pour cette banque avec  $L_i = L_{all} e^{(-IOP_{all} + IOP_j) \times 0,05}$  où  $L_{all}$  représente le vecteur des 508 pertes de notre échantillon,  $IOP_{all}$  est le vecteur des valeurs de l'indice  $IOP$  telles que calculées dans la section 4. La valeur 0,05 vient de l'estimation du modèle de sévérité (34) présentée dans le modèle (6b) de la table 3.4. Pour chaque tirage  $j$  nous obtenons 508 pertes probables pour notre banque. Cette opération peut être effectuée au besoin pour générer une distribution de sévérité pour la banque. Nous pouvons faire la même chose pour la distribution des fréquences, ensuite une convolution afin d'avoir une distribution agrégée des pertes. Ainsi, nous aurons exploité au maximum l'information contenue dans le vecteur des six probabilités.

Une troisième application serait de calculer des sévérités par cellule  $BL \times ET$ . En effet, si nous sommes en mesure de faire des tirages à volonté, nous pourrions satisfaire une exigence de Bâle II et III qui est de déterminer le capital de réserve pour chacune des 56 cellules de la matrice  $BL \times ET$ . Prenons la banque U.S. Bancorp. Nous voulons en calculer le capital pour couvrir la cellule  $CorF \times CliPBP$  (*Corporate Finance ; Clients, Products & Business Practices*) concernant la période janvier 2007 à décembre 2009. Nous allons estimer ce capital en hors échantillon à partir des observations de janvier 2001 à décembre 2006.

Les VaR estimées sont à 95%, 99%, 99,5% et 99,9%. Nous effectuerons aussi des tests de *backtesting* pour chacune des VaR calculées, à savoir la couverture inconditionnelle de Kupiec (1995), la couverture conditionnelle de Christoffersen (1998) et enfin le test  $DQ$  de Engle et Manganelli (2004). Historiquement, cette banque a eu deux pertes importantes dépassant le dernier décile des pertes durant la période 1994-1999. Elle a donc un indice historique  $IOP = 2$ . L'estimation du vecteur des probabilités de cette banque à la période 2001-2006 est  $P = \{0,2129, 0,2754, 0,4541, 0,0514, 0,0061, 0,0001\}$ . Le mode de cette distribution est 5 (troisième modalité) et l'indice continu est  $E(IOP) = 3,5$ . La banque est alors pratiquement au milieu entre les classes 2 et 5, ce qui est en phase avec l'indice historique de 2 de cette banque. Maintenant, regardons le panel A de la table 3.17 qui montre les VaR et les résultats des tests. Sans surprise, le test de Kupiec à 5%

signale une insuffisance de la couverture à 99,5% et 99,9% avec les montants 222 millions et 599 millions respectivement. C'est à cause de la période 2007-2009 qui est une période de pertes extrêmes, et les pertes de type *CliPBP* étaient les plus grandes, comme vu dans ce chapitre et discuté dans le précédent. Au panel B, nous montrons les calculs relatifs à la couverture de la cellule  $AssM \times ExeDPM$  (*Asset Management ; Execution Delivery and Process Management*). Cette cellule a eu des pertes plutôt comparables dans les périodes 2001-2006 et 2007-2009. Nous notons clairement que la couverture de 4 et 41 millions est suffisante, vu les *p-values* de tous les tests. D'autre part, la fréquence des pertes estimée est de 0,8306 pour la période 2007-2009. Cette fréquence est multipliée par 0,07480 qui est la probabilité historique d'observer le couple  $CorF \times CliPBP$  ou par 0,00787 pour le couple  $AssM \times ExeDPM$ .

Une remarque intéressante peut-être faite à ce niveau. Sans refaire les calculs, nous sommes en mesure d'avoir une estimation du capital pour la banque PNC Financial Services, par exemple, et ce à partir des résultats montrés pour U.S. Bancorp. En fait, les deux banques auraient gardé une progression de leur total des actifs comparable durant la période 2001-2010 et finissent avec une taille d'environ 290 milliards chacune. PNC Financial n'a eu aucune perte dépassant le dernier décile des pertes opérationnelles de la période 1994-1999. De ce fait, sa mesure *IOP* est estimée à 0. Le modèle logit ordonné décrit à partir de l'équation (35) confirme cette estimation de la mesure *IOP* pour cette banque. Le modèle de sévérité incluant la mesure *IOP*, décrit par l'équation (34), prédit que la sévérité de PNC devrait être  $e^{0,05 \times 0} / e^{0,05 \times 3,5} = 0,84$ . Si nous supposons que les fréquences de pertes des deux banques sont semblables, en ayant dans l'esprit l'approximation de type *single-loss*, le capital réglementaire optimal de PNC devrait représenter 84% de celui de U.S. Bancorp. Par conséquent, si les calculs du capital des deux banques étaient faits par un *scaling* basé sur des tailles des banques seulement, il y aurait un biais de 16% de trop pour la couverture de PNC. Nous pouvons, également estimer ce biais dans le cas de la banque Goldman Sachs comparée à JPMorgan Chase, comme vu plus haut. Dans un premier temps, si nous ignorons l'effet des fréquences sur le capital, un calcul rapide donnerait  $e^{0,05 \times 0} / e^{0,05 \times 12,35} = 0,54$ . Le biais aurait été alors de 46%.

	VaR	$\alpha$ (fréquence)		Test Kupiec (uc)		Christoffersen (cc)		DQ de E-M	
		théor.	observ.	stat.	p-value	stat.	p-value	stat.	p-value
Panel A	8	0,050	0,047	0,380	0,5376	0,380	0,8269	0,378	0,9843
CorF / CliPBP	120	0,010	0,013	1,462	0,2267	1,463	0,4811	1,604	0,8082
	222	0,005	0,008	3,057	0,0804	3,057	0,2168	3,656	0,4546
	599	0,001	0,003	4,652	0,0310	4,656	0,0975	7,255	0,1230
Panel B	<0,01	0,050	0,006	113,068	0,0000	113,093	0,0000	72,006	0,0000
AssM / ExeDPM	<0,01	0,010	0,006	2,685	0,1013	2,709	0,2580	2,357	0,6704
	4	0,005	0,005	0,066	0,7977	0,098	0,9524	0,103	0,9987
	41	0,001	0,001	0,193	0,6601			0,246	0,9930
Panel C	14	0,050	0,039	4,511	0,0337	4,511	0,1048	4,201	0,3795
CorF / CliPBP	145	0,010	0,011	0,380	0,5375	0,384	0,8252	0,407	0,9819
(-20% Liq Secure)	256	0,005	0,007	1,661	0,1974	1,662	0,4357	1,899	0,7544
	670	0,001	0,003	3,154	0,0757	3,155	0,2065	4,607	0,3300
Panel D	18	0,050	0,036	8,307	0,0039	8,307	0,0157	7,525	0,1106
CorF / CliPBP	167	0,010	0,010	0,032	0,8588	0,035	0,9827	0,043	0,9998
(-10% Loan HHI)	291	0,005	0,006	0,739	0,3901	0,739	0,6911	0,812	0,9368
	745	0,001	0,002	2,028	0,1545	2,028	0,3628	2,768	0,5973

Tableau 3.17 – Validations *backtesting* U.S. Bancorp

Incluons, maintenant, une estimation de l'effet des fréquences de pertes, les moyennes sont de 4,67 et 1,64 pour JPMorgan Chase et Goldman Sachs, respectivement. D'après l'approximation *single-loss*, cela revient à estimer le capital de Goldman Sachs avec un calcul de la VaR à un niveau de confiance de  $1 - (0,001 \times 4,67/1,64) \approx 99,7\%$  de la distribution de sévérité de JPMorgan Chase. Le calcul du biais final est alors de l'ordre de 33% de capital de trop pour Goldman Sachs. Ces exemples illustrent l'effet de l'extension que nous apportons aux modèles de Dahren et Dionne (2010) en y incluant la mesure *IOP* et les développements afférents.

Une quatrième application du concept de mesure *IOP* que nous proposons est d'utiliser la souplesse de cette modélisation pour créer des scénarios de *stress testing* convenables. En effet, si nous connaissons les leviers qui agissent sur la probabilité d'appartenir à l'une ou à l'autre classe de risque opérationnel nous pouvons agir dessus. Nous pouvons alors déterminer l'augmentation de la sévérité subséquente à un changement hypothétique de l'un ou plusieurs ratios identifiés plus haut. Nous rappelons ici les trois

conditions qu'exige Bâle II/III pour les scénarios de *stress testing*. Une routine *stress testing* doit représenter une situation exceptionnelle (i), qui reste plausible (ii) et qui doit suggérer ou permettre une prise d'actions afin d'améliorer la maîtrise des risques. Cette dernière condition est souvent difficile à remplir et c'est possible avec notre modèle. Revenons la banque U.S. Bancorp. Nous souhaitons répondre à la question : quelle couverture aurait suffi pour le risque opérationnel de la cellule  $CorF \times CliPBP$  si la banque savait qu'elle subirait une baisse de liquidité immédiate de 20% durant la période difficile de 2007-2009 ? C'est un scénario plausible, une question qui relève de la responsabilité du management de la banque.

Dans la base de données des variables BHC, nous lisons que cette banque fonctionne avec un ratio  $Liq\_Secure$  d'environ 20,7% (en 2005-2006). Une baisse de 20% de ce ratio donne  $20,7 \times (1 - 20\%) = 16,5\%$ . Ce qui correspond à une moyenne de l'historique du ratio  $Liq\_Secure$  de cette banque avec 17,2% en 2008 et 15,3% en 2009. Nous mettons le ratio  $Liq\_Secure$  à 16,5% et nous estimons le nouveau vecteur de probabilités  $P_{-20\%Liq}$  avec le modèle logit ordonné (35). Comme décrit plus haut, ce vecteur permet ensuite d'estimer les distributions de sévérité et des fréquences, et enfin celle des pertes agrégées correspondant au scénario qui va donner les VaR estimées à différents degrés de confiance. Si les calculs du modèle sont valides, les VaR devraient suffire statistiquement pour couvrir les pertes probables de la banque durant la période 2007-2009 comme nous les avons estimées pour le panel A.

Nous allons donc effectuer un test de Kupiec à 5%, avec l'hypothèse nulle que la proportion historique des dépassements des VaR est statistiquement égale à la probabilité théorique correspondante. La couverture est statistiquement suffisante. Le panel C donne une estimation des VaR qui répondent à la question du scénario. Une couverture de 670 millions pour la VaR à 99,9% aurait suffi, la *p-value* de Kupiec étant supérieure à 5%. Les tests d'indépendance ne détectent pas de danger de regroupements de dépassements de cette VaR non plus. En d'autres mots, si U.S. Bancorp savait qu'elle allait subir cette baisse d'environ 20% de sa liquidité immédiate, notre modèle aurait prédit la nécessité qu'elle augmente le capital relatif à cette cellule de 599 millions à 670 millions, dont

une augmentation de 12% environ. Le vecteur des probabilités relatif à ce scénario est  $P_{-20\%Liq} = \{0,17780, 24580, 48600, 08000, 01020, 00002\}$ . La fréquence des pertes estimée s'élève avec ce scénario à 0,9933 (au lieu de 0,8306 en temps normal), à multiplier par 0,07480 pour effectuer la convolution.

Au dernier panel D, nous reportons les résultats d'un scénario qui n'est pas ce qui s'est passé en 2007-2009, mais nous voulions répondre à une question similaire concernant le ratio *Loan\_HHI* cette fois. La banque fonctionne avec un ratio stable d'environ 0,31. Si nous supposons une baisse hypothétique de 10% de ce ratio, les calculs délivrent une moyenne des fréquences de 1,0863 et un vecteur de probabilités  $P_{-10\%LoanHHI} = \{0,0687, 0,2011, 0,5846, 0,1276, 0,0177, 0,0003\}$ . Ce vecteur montre un déplacement plus prononcé de la masse des probabilités vers la droite. Techniquement, c'est toujours la troisième modalité qui a la plus grande probabilité comme le scénario précédent. La banque serait toujours dans la zone d'indice  $IOP = 5$ , mais plus risquée, car  $E_{-10\%HHI}(IOP) = 5,09$  est supérieur à  $E_{-20\%Liq}(IOP) = 4,02$ . Au panel D, nous voyons qu'il faudrait prévoir un capital de 745 millions pour couvrir statistiquement cette éventualité pour cette cellule  $CorF \times CliPBP$ .

Une cinquième utilisation de cette modélisation concerne la gestion normale de tous les jours. Si U.S. Bancorp fonctionne en temps normal avec un ratio de liquidité immédiate *Liq\_Secure* de 0,207, supposons comme plus haut qu'elle subisse, en période de difficulté, une baisse de 20% de ce ratio. Avec un coefficient très significatif de  $-13,2$  (modèle (3) de la table 3.15), elle sait que son  $x'\beta$  (la composante linéaire de l'estimation) va augmenter de  $0,207 \times (-13,2) \times (-20\%) = +0,546$ . Pour espérer rester dans sa classe de risque opérationnel, elle devrait agir sur un levier positif pour tenter de neutraliser cette baisse de liquidité. Par exemple, elle peut choisir de baisser son portefeuille d'hypothèques dont le ratio *Loan\_RS* est de 0,45, en moyenne, et le coefficient est de 14,7. Ce ratio *Loan\_RS* devrait donc baisser de  $8,2\% = 0,546 / (14,7 \times 0,45)$ .

Sous la pression générale d'une crise globale par exemple, la banque peut voir sa situation changer dans ses états financiers et les ratios y afférents d'une façon importante.

Avant le retour à l'équilibre, la banque peut transiter par des indices de risque opérationnel plus ou moins conséquents. La banque est en mesure de le voir via ses propres ratios. Cela est directement relié au risque de corrélations dont parle la prochaine Bâle III (Meissner, 2014). Chernobai *et al.* (2012) ont déjà exploré des relations de la distribution des fréquences avec des variables du risque de crédit. Cope *et al.* (2012) ont établi des liens entre la distribution des sévérités de quatre types de perte (*IF*, *EF*, *CliPBP* et *EmpPWS*), chacun modélisé séparément, avec des indicateurs d'environnement légal, économique, géographique ou réglementaire des banques. Au mieux de notre connaissance, notre contribution est une première modélisation directe reliant l'exposition au risque opérationnel, en sévérités et en fréquences simultanément, avec les risques conventionnels de crédit, de marché et de liquidité des banques.

### 3.7 Conclusion

Nous arrivons à un ensemble de conclusions que nous croyons importantes. Concernant les données des pertes opérationnelles, elles sont très hétérogènes selon les périodes avant et après l'année 2001. Les distributions des fréquences et des sévérités seraient trop dépendantes l'une de l'autre pour la période avant 2001. Utiliser les données de cette période comme données externes sans précaution peut aboutir à un calcul de capital réglementaire aberrant. Chernobai et Yildirim (2008) soulèvent une problématique similaire et suggèrent une modélisation spécifique. D'autre part, nos données relatives à la période 2001-2010 semblent respecter correctement l'hypothèse fondamentale de l'indépendance des deux distributions. Concernant l'effet de la gestion des risques sur le risque opérationnel, nos résultats semblent mettre en évidence le fait suivant. Les banques auraient continué à s'exposer au risque opérationnel de la même façon, sinon plus, tout au long de la période 1994-2010. D'un autre côté, les gestionnaires des risques, les régulateurs et les superviseurs semblent avoir su mieux maîtriser le risque opérationnel à partir de l'année 2001.

D'autre part, nous construisons une mesure de l'exposition au risque opérationnel, *IOP*.

Cette mesure joue un rôle principal pour expliquer aussi bien les sévérités que les fréquences, en utilisant le modèle de Dahen et Dionne (2010), ce qui en fait une extension. Le pouvoir explicatif de cette mesure sur la sévérité est statistiquement constant dans le temps. La taille de la banque est une variable explicative forte de *IOP*. Ceci est conforme avec l'intuition disant qu'une grande banque est plus exposée au risque opérationnel qu'une petite. Outre la taille de la banque, nous avons identifié 12 variables qui déterminent la mesure *IOP* avec un pouvoir de prédiction de 85% environ. Cela établit un pont direct entre le risque opérationnel et les risques de crédit, de marché et de liquidité. La gestion des risques de crédit, de marché et de la liquidité de la banque semble réduire son exposition au risque opérationnel. Par contre, plus elle améliore le rendement de ses activités et plus elle diversifie ses portefeuilles de crédit, la banque augmente son exposition au risque opérationnel.

En conséquence, une banque bien gérée, vu ses ratios de gestion, calculera un capital réglementaire moins cher qu'une banque de même taille que la première, mais moins bien gérée. De ce fait, un biais existe si seule la taille de la banque est prise en compte. En effet, le capital calculé aurait été le même pour les deux banques. Il aurait été surestimé pour la première, et sous-estimé pour la seconde. Les exemples d'estimation de ce biais montrent qu'il peut atteindre 30% de capital de trop, selon les performances de la gestion de la banque concernée.

Parmi les applications que nos résultats montrent, deux seraient prometteuses. Il sera possible de réaliser un *scaling* plus précis de la distribution des sévérités pour une banque donnée, à partir de la connaissance de ses ratios de gestion et de sa taille. Ceci est cohérent avec l'intuition de dire que deux banques de même taille, mais avec une gestion différente (ratios différents) devraient aboutir à des capitaux réglementaires différents (les distributions des sévérités et des fréquences engendrées seraient différentes). D'autre part, avec notre modèle incluant *IOP*, il sera possible de décrire la distribution des sévérités en engendrant autant d'observations que souhaité. Ce soin apportera une meilleure modélisation de la distribution des sévérités, ce qui est fondamental pour l'estimation du capital réglementaire. Ensuite, comme une deuxième application, il sera possible de

concevoir des scénarios de *stress testing* conformes à Bâle II, et en évaluer l'impact. Les variables identifiées, étant du risque de crédit, de marché ou de liquidité, sont elles-mêmes reliées aux facteurs macroéconomiques. Par conséquent, elles peuvent servir de pont conducteur afin de simuler des situations de *stress testing* extrêmes et en mesurer l'impact sur le risque opérationnel, par ricochet. Ajoutons, pour finir, que notre modèle pourrait servir de base de mesure du risque de corrélation que Bâle III va exiger prochainement.



## Chapitre 4

### Validation des modèles du risque opérationnel

Les problèmes soulevés par la littérature en risque opérationnel parlent d'imprécision et d'instabilité des calculs du capital réglementaire. Nous pensons que ce serait essentiellement lié au fait que la validation *backtesting* est très difficile. Nous construisons une nouvelle approche dans ce chapitre. Les tests et les applications semblent concluants. Une extension à l'évaluation des scénarios et au calcul de *stress testing* est également proposée. Voyons comment !

#### 4.1 Introduction

Le *backtesting* est l'un des aspects les plus importants de la conception des modèles du risque. Cette validation est très difficile en risque opérationnel pour trois raisons. Il y a peu d'observations de pertes et encore moins dans les hauts quantiles, même avec les données externes. La réglementation Bâle II/III exige une VaR à 99,9%. En plus, la queue de distribution est connue épaisse (Dutta et Perry (2008), Embrechts *et al.* 2006).

Pour une VaR 99,9%, il faut 1000 observations pour espérer trouver un dépassement de la VaR. Même avec 1000 observations et un seul dépassement, les tests statistiques pourraient ne pas être efficaces avec si peu d'information. Malgré cela, la validation des modèles reste pleinement la responsabilité des banques, comme précisé dans la réglementation (BCBS, 2003 ; principe 2 de BCBS, 2005 et BCBS, 2006b). En l'absence d'un outil *backtesting* convenable pouvant trancher dans la question, les concepteurs se départagent en deux écoles. Les adeptes des modèles basés sur les distributions de valeurs extrêmes croient fortement que les modèles classiquement bâtis sur la lognormale sous-estimeraient le capital de réserve (voir Chavez-Demoulin, Embrechts et Hofert 2013, entre autres). À l'opposé, les critiques sont de plus en plus importantes quant à l'adéquation des modèles de valeurs extrêmes qui aboutissent souvent à un calcul de

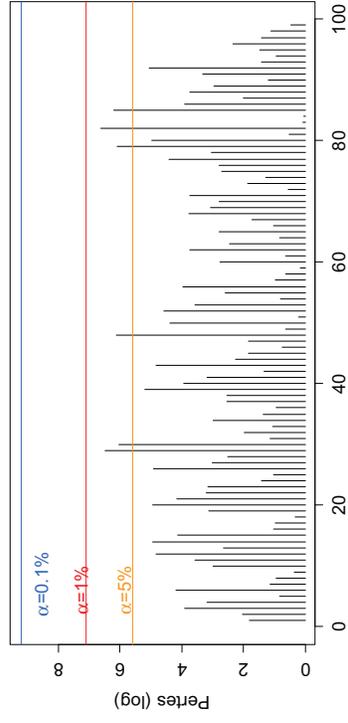
Pertes (en millions de dollars)					
Nombre	Moyenne	Médiane	Écart-type	Minimum	Maximum
99	49	10	114	1	700

Tableau 4.1 – Statistiques descriptives des pertes de Merrill Lynch de janvier 1994 à juin 2011

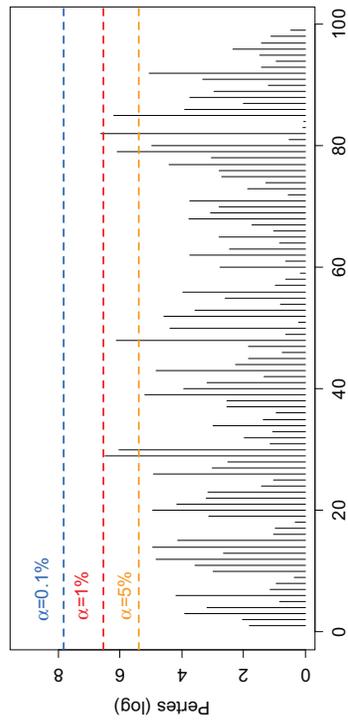
capital exagérément surestimé (voir Jobst et Gregoriou, 2009, par exemple). Pour donner un repère à la discussion, la figure 4.1 présente 99 pertes opérationnelles enregistrées par Merrill Lynch de janvier 1994 à juin 2011 (base de données *Algo OpData*). Dans la figure 4.1a, les 99 observations apparaissent avec trois niveaux de VaR relativement à 95%, 99% et 99,9% calculés avec un modèle lognormal (modèle 1). La figure 4.1b fait la même chose en utilisant une distribution Pareto généralisée (modèle 2). Aucun des deux modèles ne présente un dépassement de la VaR à 99,9%. Est-ce un bon signe ? Les deux modèles conviendraient-ils à ces données, à ce degré de confiance ? Est-ce plutôt le peu d'observations qui fait que nous ne pouvons rien dire pour valider ou rejeter l'un ou l'autre des deux modèles ?

Plus encore, la procédure de *bootstrapping* de Dowd (2002) ne peut pas nous aider vu qu'il n'y a pas de dépassement donc il n'y aura pas de dépassement non plus dans les échantillons générés. Wernz (2014) préconise d'utiliser des degrés de confiance moins grands et d'appliquer des règles statistiques qui vont malheureusement elles-mêmes souffrir du même manque d'observations. Dans des papiers et livres récents, les auteurs ne parlent pas de la validation *backtesting*, d'autres en parlent, mais peu, et ils restent trop souvent au niveau des généralités théoriques (Brechmann *et al.*, 2014 ; Peters et Shevchenko, 2014 ; Chavez-Demoulin *et al.*, 2013 ; Chernobai *et al.*, 2008). Le modèle Dahlen et Dionne (2010) se distingue en offrant la possibilité de multiplier les observations des pertes par 56, étant donné que la *scaling* tient compte des huit lignes d'affaires et des sept types de pertes définis par la nomenclature du risque opérationnel de Bâle II.

D'une façon générale, il semble naturel de conduire le *backtesting* sur la distribution agrégée issue de la convolution de la sévérité  $n$  fois avec elle-même,  $n$  étant aléatoi-



(a) VaR du modèle 1



(b) VaR du modèle 2

Figure 4.1 – Pertes de Merrill Lynch de janvier 1994 à juin 2011

rement tiré de la distribution des fréquences. Justement, la validation de la distribution agrégée n'exclut pas une possible inadéquation du modèle des sévérités. Le modèle des fréquences, étant incorporé dans l'agrégation, peut affecter les résultats du *backtesting* global. En somme, nous voulons passer le message qu'il est important de valider la sévérité seule dans une première étape. Dans la suite de ce chapitre, nous verrons d'autres raisons qui nous semblent primordiales pour effectuer un *backtesting* cohérent sur la sévérité seule.

Dans la section 4.3, nous allons développer une nouvelle technique de *backtesting* que nous proposons. La section 4.4 va présenter trois applications. La première est un exemple pour faire un premier tour des fonctionnalités de l'outil. La deuxième application revient sur les données de perte de Merrill Lynch afin d'apporter une évaluation des deux modèles concurrents. La troisième application vise à monter une première extension de l'utilisation de notre technique dans l'évaluation des scénarios et des opinions des experts. La section 4.5 est réservée au *stress testing*. En effet, nous développerons une extension de notre technique afin de mesurer la magnitude d'une période de stress (hautes pertes), que nous pourrions valider. Une conclusion est exposée à la section 4.6. Pour commencer, nous faisons un premier zoom concernant les 99 données de pertes de Merrill Lynch, à l'aide de la procédure de *bootstrapping* de Dowd (2002).

## **4.2 La procédure de *bootstrapping* de Dowd (2002)**

Revenons aux 99 pertes de Merrill Lynch décrites dans la figure 4.1. Avec Dowd (2002, 2004), nous apprenons que le test de Kupiec, utilisé pour valider les proportions de dépassement de la VaR, pourrait ne pas suffire dans certains cas. Nous suivons cet auteur, ainsi que Quell et Meyer (2011), pour construire un *bootstrapping* de 10000 vecteurs ; chaque vecteur est obtenu à l'aide de 99 ré-échantillonnages aléatoires avec remise effectués sur l'échantillon initial. Dans notre cas, cela revient à engendrer une matrice de 99 lignes et 10000 colonnes. Dowd désigne par *échantillons* les vecteurs générés, et utilise l'appellation *échantillon initial* quand il parle des observations d'origine. Il est vrai

qu'il existe une petite ambiguïté, malgré cela nous utiliserons la terminologie de Dowd afin de rester compatible avec la littérature.

Nous reviendrons sur chacun des modèles qui ont généré les VaR, plus tard. Pour le moment, analysons le modèle 1 visualisé dans la figure 4.1a (à gauche, lignes horizontales en pointillé). La table 4.2 présente les différents calculs. Le modèle 1 a une VaR à 95% qui s'élève à 217,4 millions et est dépassée avec une fréquence observée de  $\pi_{obs,ini} = 0,0606$  dans l'échantillon initial. L'hypothèse nulle du test de Kupiec s'écrit  $H_0 : \pi_{obs,ini} = 0,05$ . La statistique de ce test est 0,220 et la *p-value* est 0,6389, étant supérieur à 5%, cela conduit à ne pas rejeter l'hypothèse nulle et par conséquent le modèle 1 semble valide pour la VaR à 95%. Du côté du *bootstrapping*, les 10000 échantillons délivrent une estimation de fréquence de dépassement de cette VaR de  $\pi_{bootstrap} = 0,0607$ , avec un intervalle de confiance à 95% de [0,0202, 0,1010]. Ces estimations correspondent en nombre de dépassements à une médiane de 6 avec un intervalle de confiance de 95% de [2, 10]. Pour les calculs, nous utilisons les expressions de la vraisemblance de la loi binomiale comme suit.

$$Pr(n \text{ dépassements ou MOINS}) = \sum_{i=0}^n \binom{99}{i} p^i (1-p)^{99-i} \quad (39)$$

$$Pr(m \text{ dépassements ou PLUS}) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{99}{i} p^i (1-p)^{99-i} \quad (40)$$

Théoriquement, une loi binomiale de paramètre 0,05 avec 99 tirages donnerait 9 succès ou plus avec une *p-value* de 0,0599. La procédure *bootstrapping* identifie un nombre de dépassements de 10 et une *p-value* de 0,2776. Cette dernière étant supérieure au seuil de 5%, le *bootstrapping* confirme la décision basée sur le test Kupiec. Malgré cela, nous voyons que les dépassements de la VaR s'éloignent de la binomiale. Pour mesurer cela, nous faisons appel au classement des tests en zones par couleur verte, jaune et rouge (*Basel Traffic Lights Approach*, BCBS 2006a, annexe 10a). Pour ce fait, nous suivons Quell et Meyer (2011). Le concept de base que nous prenons est simple. Par rapport

à une binomiale dont le nombre de tirages est 99, la probabilité de succès est 5%, par exemple, si l'expérience est répétée 100 fois, nous devrions observer 95% des cas avec 9 dépassements de la VaR ou moins, et 99,99% des cas avec 15 dépassements ou moins. Vu que les échantillons du *bootstrapping* peuvent être considérés comme des répétitions de l'expérience, la zone rouge consistera en la proportion des échantillons où le nombre de dépassements de la VaR est supérieur à 16, la zone jaune entre 10 et 15, et enfin la verte ceux avec 9 dépassements ou moins. Les trois dernières colonnes de la table 4.2 montrent le calcul de ces zones par degré de confiance et par modèle. Au panel A, pour la VaR à 95%, nous voyons qu'avec le modèle basé sur une lognormale nous serions à 14,7% des cas en zone jaune. Vu autrement, nous ne pouvons pas être sûrs d'être dans le vert, à 10% d'erreur par exemple. Le modèle devient douteux et exigerait une revue dès que la zone jaune (plus la rouge) est supérieure à 10%. Passons à la VaR à 99%, pour la lognormale toujours. La VaR est de 687,4 millions et est dépassée une seule fois sur les 99 observations, d'où une fréquence observée dans l'échantillon d'origine  $\pi_{obs,ini} = 0,0101$ . Cette fréquence est pratiquement la même que celle théorique 0,01, la statistique de Kupiec est aussi petite que 0,0001, la *p-value* est de 0,9920. D'autre part, la procédure *bootstrapping* révèle une estimation de la fréquence de dépassement de 0,0102. L'intervalle de confiance à 95% du nombre des dépassements est [0, 3]. La *p-value* du *bootstrapping* est 0,3654 > 5%, cela confirme le test de Kupiec. Par contre, les zones des tests semblent ne pas indiquer un éventuel avertissement pour revoir le modèle à ce degré de confiance. Ce résultat serait prévisible dans le sens que la fréquence de dépassement estimée est pratiquement la même pour le degré de confiance 99% alors qu'avec 6,07% de dépassements, elle est assez différente des 5% théoriques de la VaR à 95%.

Comme nous venons de le voir, le *bootstrapping*, moyennant le calcul des zones de Bâle, a permis de remettre en question la conclusion de l'adéquation de la VaR à 95%, tout en confirmant l'adéquation de celle à 99%. Par contre, nous ne pouvons rien dire quant à la VaR à 99,9%. La situation est encore plus spéciale pour les calculs utilisant la distribution *GPareto*, puisqu'il n'y a pas de dépassement à partir du degré de confiance 99%

Modèle	d.conf.	VaR	test Kupiec		fréquence		Bootstrap Dowd(2002) & i.conf.95%			p-value Bootstrap	zones Bâle II/III		
			stat.	p.value	théor.	observ.	estim.	inf.	sup.		verte	jaune	rouge
Panel A <i>LN</i>	0,9500	217,4	0,220	0,6389	0,050	0,0606	0,0607	0,0202	0,1010	0,2776	85,2	14,7	0,1
	0,9900	687,4	0,000	0,9920	0,010	0,0101	0,0102	0,0000	0,0303	0,3654	92,0	7,9	0,1
	0,9990	2497,8			0,001	0,0000	0,0000						
Panel B <i>GPareto</i>	0,9500	266,6	0,220	0,6389	0,050	0,0606	0,0607	0,0202	0,1010	0,2776	85,2	14,7	0,1
	0,9900	1208,4			0,010	0,0000	0,0000						
	0,9990	9752,4			0,001	0,0000	0,0000						

Tableau 4.2 – Calculs de *bootstrapping* pour les modèles de Merrill Lynch

inclus. D’où les questions que nous soulevons au début du chapitre, concernant la validation et la comparabilité des deux modèles. C’est pour cette raison que nous construisons, dans le présent chapitre, un outil en mesure de donner aux données l’occasion de « mieux s’exprimer ». Regardons comment dans la suite !

### 4.3 Le développement théorique

La procédure *bootstrapping* de Dowd (2002) donne à toute observation autant de chances d’apparaître, une ou plusieurs fois, que de s’absenter, pour construire un nouvel échantillon de la même taille initiale. Cet échantillonnage aléatoire et statistiquement neutre permet, par conséquent, aux nouveaux échantillons d’avoir les mêmes propriétés que celui d’origine. C’est une sorte de redistribution horizontale des observations initiales. Si nous voulons mesurer les chances de dépassement d’un niveau de VaR, nous devons construire des échantillons où chaque observation peut avoir une chance de se multiplier en vertical dans le sens de l’amplitude. En effet, ce que nous voulons faire est de donner à chaque observation la même chance de recevoir un coefficient multiplicatif  $\eta$  aléatoire. Ce nombre peut être supérieur ou inférieur à 1. Si  $\eta > 1$ , nous donnons une chance à l’observation concernée de pouvoir atteindre ou dépasser la VaR. En contrepartie, aléatoirement une autre observation se verra multiplier par un autre  $\eta < 1$ , donc cette deuxième observation va être réduite. Par construction, nous voulons que les chances de multiplication soient neutres pour  $\eta > 1$ ,  $\eta = 1$  ou  $\eta < 1$ . Pour le *bootstrapping* de Dowd (2002), l’échantillon initial est considéré comme un cas particulier où chaque observation aura été sélectionnée une et une seule fois. Pour nous, l’échantillon initial sera aussi

un cas particulier, pour ce que nous voulons construire, avec un coefficient multiplicatif de 1 pour toutes les observations. Si nous notons  $y$  une observation de l'échantillon d'origine, et si nous tirons  $n$  d'une distribution aléatoire  $\eta$ , nous voulons que le produit  $\eta \times y$  ait approximativement la même chance de dépasser un seuil  $x$  qui serait l'une des VaR par exemple. Finalement, nous voulons avoir  $E(\eta) = 1$  et

$$Pr(\eta \times y > x) \approx Pr(y > x) \quad (41)$$

Nous cherchons donc une approximation. Il est alors fondamental que nous attirions l'attention sur la précision des calculs faits sur des petites probabilités des queues de distribution. Prenons une distribution  $F$  et notons  $\bar{F}$  la fonction quantile correspondante.  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ . Supposons  $F(x) = 0,998$ , Il est possible de l'approximer par  $F(x) \approx 0,997$ . L'erreur de l'approximation serait de  $(0,998 - 0,997)/0,998 = 0,001/0,991 = 0,1\%$  ce qui est très acceptable. Par contre, si nous prenons la fonction quantile correspondante  $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 0,002$ , si nous l'approximons avec  $1 - 0,997 = 0,003$ , l'erreur serait  $(0,003 - 0,002)/0,002 = 50\%$  ! Le travail sur les fonctions quantiles  $\bar{F}$  ne revient pas à approximer  $F$  puis chercher le complément à 1. Ceci clarifié,  $\eta y$  est une convolution multiplicative entre  $\eta$  et  $y$ . En parlant de convolution, il nous vient la définition de la convolution additive  $S_n = \sum_n y_n$  qui est la somme de  $n$  tirages aléatoires de  $y$ . En assurance comme en risque opérationnel, la plupart des modélisations de la sévérité est basée sur des distributions dites subexponentielles. Les lois de Pareto, Burr, Cauchy, lognormale, Weibull et bien d'autres appartiennent à cette classe de distributions notée  $\mathcal{S}$ . Cette définition nous vient de Chistyakov (1964). Une distribution  $F \in \mathcal{S}$  si nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Pr(y_1 + y_2 > x)}{Pr(y > x)} = 2$$

ce qui revient à écrire, quand  $x \rightarrow \infty$

$$Pr(y_1 + y_2 > x) \approx 2 \times Pr(y > x)$$

L'intuition derrière cette écriture est que le seul moyen qu'une somme aléatoire de deux observations devienne très grande est que l'une ou l'autre des  $y_i$  le soit (Asmussen *et al.*, 2000). Pour le voir, nous calculons la probabilité que la somme  $y_1 + y_2 > x$  mais que  $y_1 \leq x$  et  $y_2 \leq x$ , ensuite, nous montrons qu'elle est approximativement nulle.

$$\begin{aligned}
Pr(y_1 + y_2 > x, y_1 \leq x, y_2 \leq x) &= Pr(y_1 + y_2 > x) - Pr(y_1 + y_2 > x, y_1 > x) \\
&\quad - Pr(y_1 + y_2 > x, y_2 > x) \\
&\approx 2Pr(y > x) - Pr(y_1 > x) - Pr(y_2 > x) \\
&\approx 0
\end{aligned} \tag{42}$$

Autrement vu, pour avoir  $y_1 + y_2 > x$  nous devons faire deux tirages  $y_1$  et  $y_2$  de  $y$ . Nous avons alors deux chances de tomber sur un grand  $y$ . D'où,  $Pr(y_1 + y_2 > x) \approx 2 \times Pr(y > x)$ . La classe des distributions subexponentielles  $\mathcal{S}$  est au  $c\frac{1}{2}$ ur des distributions à queue épaisse. L'exploration mathématique de la théorie des distributions à queue épaisse touche beaucoup de domaines qui ont attiré à la théorie des files d'attente (*queueing theory*) et la théorie des branches (*branching theory*) où un individu de la génération  $n$  va générer un nombre aléatoire d'individus de la génération  $n + 1$ . Les applications sont nombreuses en transport et distribution, télécommunication, mécanique des fluides, etc.. En assurance, Embrechts et Goldie (1980), Embrechts et Veraverbeke (1982), Embrechts, Klüppelberg et Mikosch (1997) travaillent les bases de la théorie de ruine. Il s'agit d'estimer la probabilité qu'un assureur se retrouve en situation de cessation de paiement à cause d'un flux de réclamations qui arriverait dans un intervalle de temps relativement court et dont le total des remboursements dépasserait les capacités de l'entreprise. Par ailleurs, des applications économétriques concernent les séries temporelles à variance infinie (Davis and Resnick, 1985).

De la définition de la classe  $\mathcal{S}$ , il est classique de montrer que pour tout nombre entier  $n$  fixe, la somme de  $n$  tirages aléatoires de  $y$ ,  $S_n = \sum_n y_n$ , vérifie l'approximation

$$Pr(S_n > x) \approx n \times Pr(y > x), \tag{43}$$

Revenons à l'expression (41), avec  $E(\eta) = 1$  nous préservons le premier moment, car  $E(\eta y) = E(\eta)E(y) = E(y)$ ,  $\eta$  et  $y$  étant indépendantes. Nous commençons par la classe des queues épaisses dites *Slowly Varying Tailed* notées  $\mathcal{L}$ , Une distribution  $L \in \mathcal{L}$  si sa fonction quantile  $\bar{L}$  obéit à l'écriture suivante quand  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{L}(cx)}{\bar{L}(x)} = 1 \quad \forall c > 0 \quad (44)$$

Un exemple de distribution de la classe  $\mathcal{L}$  est  $F(x) = 1 - 1/\log^\gamma(x)$ . Choisissons une distribution  $\eta$  discrète, notons  $N$  son support possiblement infini,  $\eta_i \in N$ . Si  $y \in \mathcal{L}$ , alors  $Pr(\eta y > x) = \sum_{\eta_i} Pr(\eta_i y > x) Pr(\eta = \eta_i) = \sum_{\eta_i} \bar{L}(\frac{x}{\eta_i}) Pr(\eta = \eta_i)$ . En utilisant (44), le terme  $\bar{L}(x/\eta_i) \approx \bar{L}(x)$  sort de la somme et celle-ci se réduit à 1, puisque la somme des probabilités de  $\eta$  somment à 1. Par conséquent, l'approximation (41) est vérifiée si  $y$  appartient à  $\mathcal{L}$ . Sauf un intérêt théorique, la classe  $\mathcal{L}$  n'est pas utile pour nos données de risque opérationnel qui plutôt exhibent un comportement asymptotique subexponentiel de la queue de distribution. Nous connaissons les distributions de type Pareto, elles appartiennent à la classe *Regularly Varying Tailed*, notée  $\mathcal{RV}$ .  $F \in \mathcal{RV}$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $c > 0$ , aux hauts quantiles  $x \rightarrow \infty$ , nous avons la relation asymptotique

$$\frac{\bar{F}(cx)}{\bar{F}(x)} \approx c^{-\delta} \quad (45)$$

Remarquons que si  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\implies c^{-0} = 1$ , et nous revenons à la classe  $\mathcal{L}$ . Les fondements théoriques de la classe  $\mathcal{RV}$  ont été identifiés depuis les années 70-80. Bingham (2007) en est un fondateur et en résume l'historique dans ce papier. Les distributions de type Pareto, Burr et Cauchy appartiennent à  $\mathcal{RV}$ . Cette classe est très utile dans l'étude de comportement des distributions à queue épaisses. Les auteurs de cette littérature l'utilisent souvent pour bien établir ce qu'ils veulent montrer pour ensuite, progressivement, généraliser leurs résultats à d'autres classes (Borovkov et Borovkov 2008, Resnick 2007, Foss, Korshunov et Zachary 2013 et d'autres). D'ailleurs, nous allons utiliser la même stratégie, vu que cette classe est presque déjà prête à assurer l'approximation (41) que nous souhaitons établir. En effet,  $Pr(\eta y > x) = \sum_{\eta_i} \bar{F}(\frac{x}{\eta_i}) Pr(\eta = \eta_i) \approx \bar{F}(x) \sum_{\eta_i} \eta_i^\delta Pr(\eta = \eta_i)$ . La

quantité sous la somme de ce dernier membre serait l'espérance mathématique  $E(\eta^\delta)$  à condition qu'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $E(\eta^{\delta+\varepsilon}) < \infty$ . Ce résultat nous vient du théorème de Breiman (1965), repris par Cline et Samorodnitsky (1994) et Resnick (2007). C'est ce que nous annonçons dans la proposition suivante.

**Proposition 1 :**

Soit  $\eta$  une v.a. discrète,  $\eta > 0$ . Si  $y$  est une v.a. d'une distribution  $\mathcal{RV}$  positive d'indice  $-\delta$ , alors nous avons l'approximation

$$Pr(\eta y > x) \approx Pr(y > x) \times E(\eta^\delta), \quad x \rightarrow \infty \quad (46)$$

De plus, si  $E(\eta^\delta) \approx 1$ , alors l'approximation (41) est vérifiée.

**Remarque 1 :**

L'indice  $\delta$  d'une distribution  $F \in \mathcal{RV}$  ne dépend que de  $F$  et est, donc, le même quel que soit le choix de la distribution  $\eta$ .

Maintenant, nous voulons identifier une distribution  $\eta$  candidate qui va fonctionner pour l'approximation. Nous savons que  $E(\eta) = 1$  et  $E(\eta^\delta) \approx 1$ . Remarquons qu'à l'aide d'une expansion de Taylor au troisième ordre au voisinage de 1, nous avons  $\eta^\delta \approx 1 + (\eta - 1)\delta + (\eta - 1)^2(\delta - 1)\delta/2 + (\eta - 1)^3(\delta - 2)(\delta - 1)\delta/6$ . D'où  $E(\eta^\delta) \approx 1 + 0,5\delta(\delta - 1)E(\eta - 1)^2 + 0,167\delta(\delta - 1)(\delta - 2)E(\eta - 1)^3$  car  $E(\eta) = 1$ .  $E(\eta^\delta) \approx 1 + 0,5\delta(\delta - 1) \times Var(\eta) + 0,167\delta(\delta - 1)(\delta - 2)Asym(\eta)$ . Si nous voulons  $E(\eta^\delta) \approx 1$  et si nous supposons que  $\eta$  ait une certaine asymétrie positive pour avoir une certaine épaisseur de la queue droite, alors il y a trois cas possibles. Si  $\delta < 1$  alors  $\delta < 2$  également, donc  $(\delta - 1)(\delta - 2)Asym(\eta) > 0$  tandis que  $\delta(\delta - 1)Var(\eta) < 0$ . Dans ce cas où  $\delta < 1$  nous pouvons nous attendre à ce que ces deux termes de signes opposés se neutralisent à un certain degré afin que  $E(\eta^\delta)$  reste proche de 1. Maintenant, dans le cas où  $\delta > 2$ , nous aurions les deux termes de la variance et de l'asymétrie de  $\eta$  positifs, et

donc plus  $\delta$  sera grand plus  $E(\eta^\delta)$  s'éloignera de 1. Le troisième cas où  $1 < \delta < 2$ , nous serions un peu entre les deux situations précédentes. En résumé, pour avoir  $E(\eta^\delta) \approx 1$ , nous aurons besoin que  $\delta$  ne dépasse pas trop 1. Nous en tenons compte dans le choix de la distribution  $\eta$  que nous fixons désormais telle que

$$\eta = \frac{\text{Poisson}(1) + 1}{2}$$

Remarquons maintenant que le paramètre  $\delta$  identifié dans (45) est une asymptote quand  $x \rightarrow \infty$ , donc  $\delta$  est plutôt la limite d'une fonction  $d(x, c)$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

Comme exemple d'une distribution  $\mathcal{RV}$ , prenons la Pareto généralisée (*GPareto*) et calculons la limite à l'infini de  $\bar{F}(cx)/\bar{F}(x)$ . La *GPareto* de paramètre *shape*  $\xi$  et paramètre *scale*  $\sigma$  s'écrit

$$y \sim \text{GPareto}(\sigma, \xi) \Rightarrow \Pr(y > x) = \bar{F}(x) = \begin{cases} (1 + \frac{\xi}{\sigma}x)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ e^{-x/\sigma} & \xi = 0 \end{cases}$$

Pour un  $c > 0$  donné, et dans le cas  $\xi \neq 0$ ,

$$\frac{\bar{F}(cx)}{\bar{F}(x)} = \frac{(1 + \frac{\xi}{\sigma}cx)^{-1/\xi}}{(1 + \frac{\xi}{\sigma}x)^{-1/\xi}} = \left( \frac{\sigma + \xi cx}{\sigma + \xi x} \right)^{-1/\xi} = \left( \frac{\frac{\sigma}{x} + \xi c}{\frac{\sigma}{x} + \xi} \right)^{-1/\xi}$$

Nous voyons que quand  $x \rightarrow \infty$  alors  $\sigma/x$  tend vers 0 et la limite de  $\bar{F}(cx)/\bar{F}(x)$  se réduit à  $c^{-1/\xi}$ . Par conséquent, nous venons de montrer simultanément que la *GPareto*  $\in \mathcal{RV}$  et que son indice  $\delta$  est tout simplement égal à  $1/\xi$ .

Puisque la proposition 1 est une approximation asymptotique, nous devons évaluer sa convergence empiriquement selon les paramètres qui entrent en jeu. La figure 4.2a trace  $d(\eta_i) = \log(\bar{F}(x/\eta_i)/\bar{F}(x))/\log(\eta_i)$  pour  $x$  correspondant aux quantiles 95% jusqu'à 99,97%. La sous-figure de gauche représente une *GPareto* avec  $\xi = 1,5$ , celle du milieu  $\xi = 1$  et celle de droite  $\xi = 0,5$ . Pour chaque tracé,  $\eta_i$  prend successivement les valeurs de 0,5 à 5,5, ce qui correspond aux valeurs que prend  $\eta$  avec une probabilité non nulle

en pratique. Si la proposition 1 fonctionne bien, nous devrions avoir les courbes  $d(\eta_i)$  converger suffisamment pour avoir  $E(\eta^{d(\eta_i)}) \approx 1$ , de sorte que nous pourrions dire que  $d(\eta) \approx \delta$ . Par inspection visuelle, le graphique de gauche montre les courbes  $d(\eta)$  qui se confondent pratiquement avec la ligne horizontale qui représente la constante 0,67 qui est justement  $1/\xi = 1/1,5 = 0,67$ . Dans le graphique du milieu, où  $\xi = 1$ , nous avons une convergence moins bonne des courbes  $d(\eta)$  vers les quantiles 95% où l'écart est au maximum. Cependant, l'écart maximal est de l'ordre de 0,1 ce qui est négligeable. À l'opposé, les courbes  $d(\eta)$  n'ont pas convergé sur le graphique de droite relatif à  $\xi = 0,5$ . Plus précisément, il y a un écart de 1,35 à 1,75 pour le degré de confiance 95%. Cet écart va se réduire quand  $x$  atteint le quantile 99,9%, mais la valeur  $d(\cdot) \approx 1,9$  est loin de 1 que nous attendons comme valeur de  $\delta$  s'il existe selon la proposition 1. En somme, nous savons maintenant que selon  $\xi$  il y a des cas où la limite asymptotique de l'expression (45) n'est pas encore atteinte dans la pratique. Pour cela nous traçons dans la figure (4.2b) l'évolution de la dispersion des courbes  $d(\eta)$  en fonction de  $\xi$ . Cette dispersion est calculée comme l'écart-type divisé par la moyenne des courbes  $d(\eta)$  qui correspondent à un intervalle  $\xi \in [0,5, 2,0]$  et  $\sigma \in [10, 40]$ . Nous nous donnons comme règle de ne pas dépasser 5% comme dispersion. Il faudra alors  $\xi > 0,69$  environ. La proposition 1 s'applique bien pour les distributions *GPareto* à partir de  $\xi \geq 0,7$ . Nos données de pertes opérationnelles exhibent un paramètre  $\xi \approx 1$ , ce qui nous arrange puisque c'est ce qui est généralement estimé dans les travaux de type valeurs extrêmes appliquées aux pertes opérationnelles des banques (voir Dahan, Dionne et Zajdenweber 2010, entre autres). Nous sommes prêts maintenant à annoncer la proposition 2.

**Proposition 2 :**

Supposons que la variable aléatoire  $y$  suive une loi *GPareto* de paramètres  $\sigma$  et  $\xi$ . La variable aléatoire  $\eta$  est définie telle que  $\eta = (\text{Poisson}(1) + 1)/2$ . Si  $\xi \geq 0,7$  alors pour tout  $x \geq x_{95\%}$  où  $x_{95\%}$  correspond au quantile 95%, nous avons l'approximation

$$Pr(\eta y > x) \approx Pr(y > x) \times E(\eta^\delta) \tag{47}$$

De plus, si  $E(\eta^\delta) \approx 1$ , alors l'approximation (41) est vérifiée avec une précision de  $\pm 4\%$  ou mieux.

**Remarque 2 :**

Comme signalé au début de cette section, nous travaillons avec des probabilités très petites. Une précision de  $\pm 4\%$  est très satisfaisante dans le sens que le calcul des VaR lui-même est souvent établi avec une précision moins grande, de l'ordre de 15 – 25%, voire plus, à cause du nombre limité d'observations de perte. C'est dû au manque de données ou à l'incertitude sur le choix du modèle statistique de base.

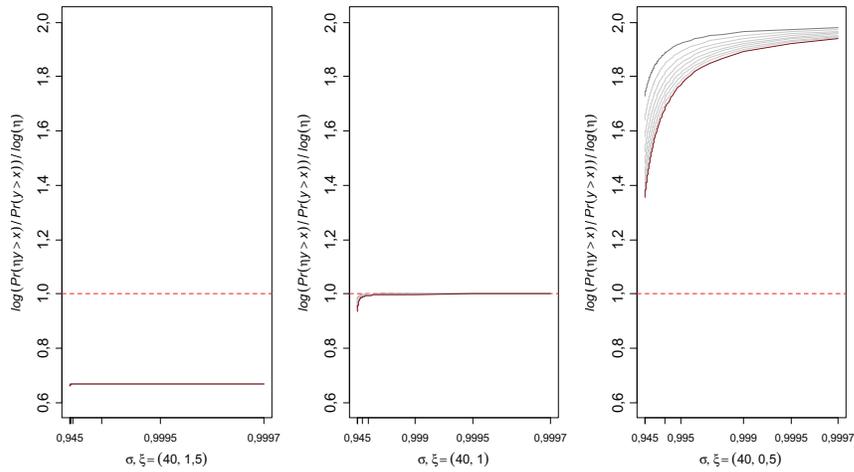
Maintenant, regardons le cas de distributions dites *Intermediate Regularly Varying*, notée  $\mathcal{IR}$ . Une distribution  $F \in \mathcal{IR}$  quand pour tout  $c > 0$  nous pouvons écrire

$$\lim_{c \downarrow 1} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(cx)}{\bar{F}(x)} = 1$$

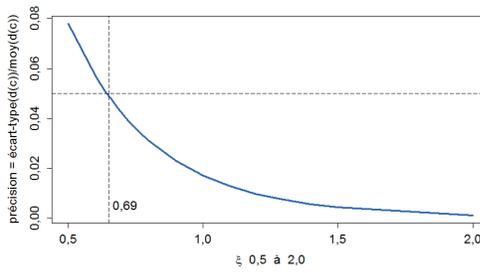
Malgré le peu de transparence de cette écriture, l'intuition sous-jacente est qu'il existe trois constantes  $k, \delta_1$  et  $\delta_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $k > 1$  et  $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2$  permettant d'encadrer la fonction quantile  $\bar{F}$  (Resnick et Samorodnitsky, 1999 ; Cline et Samorodnitsky, 1994), pour  $x > x_0$  assez grand

$$k^{-1}x^{-\delta_2} \leq \bar{F}(x) \leq kx^{-\delta_1}$$

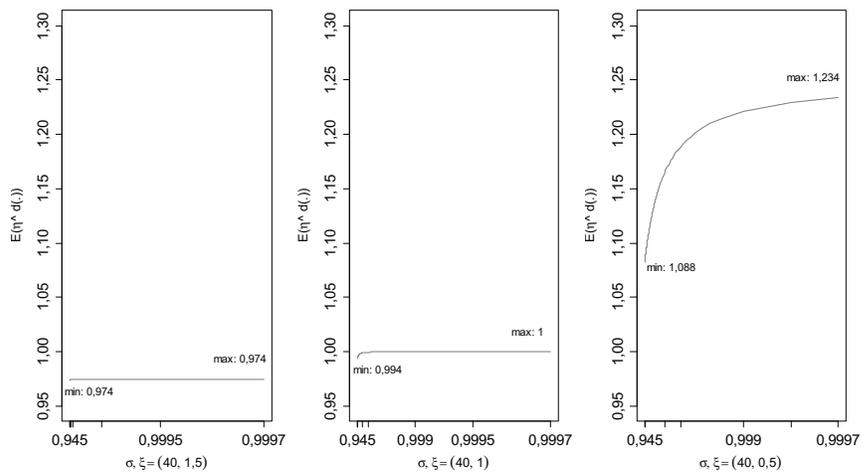
Les constantes  $\delta_1$  et  $\delta_2$  portent le nom d'indices de Matuszewska. Nous avons besoin de cette classe  $\mathcal{IR}$  car la lognormale et la Weibull, par exemple, y appartiennent. La deuxième raison est que les classes  $\mathcal{RV}$  et  $\mathcal{IR}$  constitueraient le plus gros morceau des distributions subexponentielles utilisées en risque opérationnel et en assurance (Resnick 2007, Borovkov et Borovkov 2008). La troisième raison est liée à la discussion au début de ce chapitre, à savoir que pour les uns, la lognormale sous-estimerait le capital de couverture, et pour les autres, les distributions de la théorie des valeurs extrêmes ne seraient pas adaptées et donneraient un capital exagérément surestimé. De la dernière



(a) Tracé des fonctions  $d(\cdot)$  selon les quantiles



(b) Dispersion des courbes  $d(\cdot)$  selon  $\xi$



(c) Évolution de  $E(\eta^{d(\cdot)})$  selon les quantiles

Figure 4.2 – Évaluation empirique de distributions  $GPareto$  selon le paramètre *shape*  $\xi$

double inégalité, nous pouvons encadrer  $\bar{F}(cx)/\bar{F}(x)$  avec

$$\begin{aligned} k^{-1}(cx)^{-\delta_2} \times (kx^{-\delta_1})^{-1} &\leq \bar{F}(cx)/\bar{F}(x) \leq k(cx)^{-\delta_1} \times (k^{-1}x^{-\delta_2})^{-1} \\ k^{-2}x^{-(\delta_2-\delta_1)}c^{-\delta_2} &\leq \bar{F}(cx)/\bar{F}(x) \leq k^2x^{(\delta_2-\delta_1)}c^{-\delta_1} \end{aligned} \quad (48)$$

Les inégalités (48) ne manquent pas de rappeler l'expression 45. En effet, si  $\delta_1 \approx \delta_2$  et  $k \approx 1$ , les deux valeurs encadrant  $\bar{F}(cx)/\bar{F}(x)$  se réduisent pratiquement à la même quantité  $c^{-\delta_1}$ . Dans ce cas, cela devient une égalité et nous revenons à la classe  $\mathcal{RV}$ . Autrement dit, nous avons l'inclusion  $\mathcal{RV} \subset \mathcal{IR}$ , mais l'inverse n'est pas vrai. La classe  $\mathcal{IR}$  est plus riche. Nous voulons maintenant explorer l'encadrement (48) dans le cas de la distribution lognormale. Si nous pouvons identifier les conditions où les constantes seraient assez proches l'une de l'autre  $\delta_1 \approx \delta_2$  et  $k \approx 1$ , quand  $x$  est grand, mettons au voisinage des quantiles 95% à 99,97%, nous pourrions alors espérer que l'approximation (41) fonctionne (comme pour la classe  $\mathcal{RV}$ ). Dans ce sens, Perline (2005) attire l'attention des concepteurs de modèles sur le fait que la lognormale peut mimer un comportement d'une loi Pareto dans certaines conditions surtout une lognormale tronquée. Il montre clairement que des données provenant d'une lognormale tronquée peuvent tromper la vigilance des concepteurs surtout si ces données ne contiennent pas suffisamment d'observations de hauts quantiles. Il parle alors de fausse Pareto ou fausse loi de puissance. Commençons par le calcul de limite suivant quand  $x \rightarrow \infty$  pour une densité lognormale notée  $f$ .

$$\begin{aligned} \frac{f(cx)}{f(x)} &= \frac{e^{-\frac{(\log(cx)-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma cx}} / \frac{e^{-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \\ &\approx \frac{1}{c} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(\log(cx))^2 - (\log(x))^2]} = \frac{1}{c} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(\log(c)+\log(x))^2 - (\log(x))^2]} \\ &= \frac{1}{c} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \times 2\log(c)\log(x)} = \frac{1}{c} e^{-\frac{\log(c)\log(x)}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$f(cx) \approx \frac{e^{-\frac{\log(c)\log(x)}{\sigma^2}}}{c} f(x) \quad x \rightarrow \infty \quad (49)$$

De cette dernière approximation, quand  $x \rightarrow \infty$ , nous passons à la fonction quantile de la lognormale en écrivant

$$\begin{aligned}
\bar{F}(cx) &= \int_{cx}^{+\infty} f(t)dt = \int_x^{+\infty} f(cu)d(cu) \\
&\approx \int_x^{+\infty} c \times \frac{e^{-\frac{\log(c)\log(u)}{\sigma^2}}}{c} f(u)du \\
&= \int_x^{+\infty} e^{-\frac{\log(c)\log(u)}{\sigma^2}} f(u)du \\
&= \int_x^{+\infty} u^{-\log(c)/\sigma^2} f(u)du \tag{50}
\end{aligned}$$

Une intégration par partie donne

$$\int_x^{+\infty} u^{-\log(c)/\sigma^2} f(u)du = \left[ u^{-\log(c)/\sigma^2} F(u) \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} d(u^{-\log(c)/\sigma^2}) F(u) \tag{51}$$

$$\approx -x^{-\log(c)/\sigma^2} F(x) - \left[ u^{-\log(c)/\sigma^2} \right]_x^{+\infty} \tag{52}$$

$$= x^{-\log(c)/\sigma^2} \bar{F}(x) = c^{-\log(x)/\sigma^2} \bar{F}(x) \tag{53}$$

Dans l'expression  $\int_x^{+\infty} d(u^{-\log(c)/\sigma^2}) F(u)$  à droite de (51), quand  $x \rightarrow \infty$  alors  $u \rightarrow \infty$  et donc  $F(u) \sim 1$ .

D'où finalement, quand  $x \rightarrow \infty$

$$\bar{F}(cx) \approx c^{-\log(x)/\sigma^2} \bar{F}(x) \tag{54}$$

Nous voyons de l'expression (54) que pour la lognormale, nous n'avons pas une convergence vers une asymptote horizontale comme dans le cas de la classe  $\mathcal{RV}$ . Par contre, si nous traçons comme plus haut les courbes  $d(\eta_i) = \log(\bar{F}(x/\eta_i)/\bar{F}(x))/\log(\eta_i)$ , celles-ci vont être monotones avec des pentes de l'ordre de  $\log(x)/\sigma^2$ . Il y a deux remarques importantes. Si  $\sigma$  augmente les pentes en question diminuent et l'écart entre les courbes diminue également. Cela revient à dire qu'il doit exister un  $\sigma_0$  à partir duquel l'enca-

drement dont nous parlons dans la ligne (48) devient serré au point d'avoir  $\delta_1 \approx \delta_2$ , Au passage, notons que le paramètre  $\mu$  de la lognormale ne figure pas dans ces calculs de limite. Seul le paramètre  $\sigma$  entre en jeu, ce qui est similaire quant au paramètre  $\xi$  pour la Pareto vue plus haut. Nous pouvons maintenant passer à l'évaluation empirique de l'approximation (54) La figure (4.3a) montre d'abord une mimique dans le sens que les courbes sont pratiquement droites de 95% jusqu'à environ 99% pour commencer à fléchir. Le quantile 99,9% se retrouve en plein dans cette courbature. Dans le graphique de gauche avec  $\sigma = 4$ , nous voyons un écart limité entre les courbes  $d(\eta_i)$ , en plus toutes les courbes restent inférieures à 1 pour l'intervalle de  $x$  correspondant aux quantiles 95% à 99,97%. Le graphique du milieu où  $\sigma = 3$ , les courbes  $d(\eta_i)$  sont plus dispersées, deviennent supérieures à 1 aux quantiles 99,9% et 99,97% mais restent proches de cette valeur. Par contre, le graphique de droite avec  $\sigma = 1,5$  montre un écart important entre les courbes  $d(\eta_i)$  qui dépassent 1 et de plus en plus loin de cette valeur. Les graphiques (4.3c) tracent  $E(\eta_i^{d(\cdot)})$ . Quand cette espérance mathématique reste au voisinage de 1 pour  $\sigma = 4$  et 3, et ce pour tout  $x$  correspondant aux quantiles 95% à 99,97%, à l'opposé,  $E(\eta_i^{d(\cdot)})$  devient rapidement de plus en plus loin de 1. Nous comprenons qu'il existe une valeur de  $\sigma$  au-dessous de laquelle nous n'avons pas la proposition 1. La courbe (4.3b) trace la dispersion des courbes  $d(\eta_i)$ . Cette dispersion est bien décroissante en  $\sigma$ . Si le critère est de ne pas tolérer plus de 5% de dispersion, la valeur limite de  $\sigma$  est 1,8 environ. Nous sommes prêts pour annoncer la proposition 3.

**Proposition 3 :**

Supposons que la variable aléatoire  $y$  suive une loi lognormale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ .  $\eta = (Poisson(1) + 1)/2$ . Si  $\sigma \geq 1,8$  alors pour tout  $x$  correspondant à l'intervalle de quantiles 95% à 99,97%, nous avons l'approximation

$$Pr(\eta y > x) \approx Pr(y > x) \times E(\eta^\delta) \tag{55}$$

De plus, si  $E(\eta^\delta) \approx 1$ , alors l'approximation (41) est vérifiée avec une précision de  $\pm 4\%$

ou mieux.

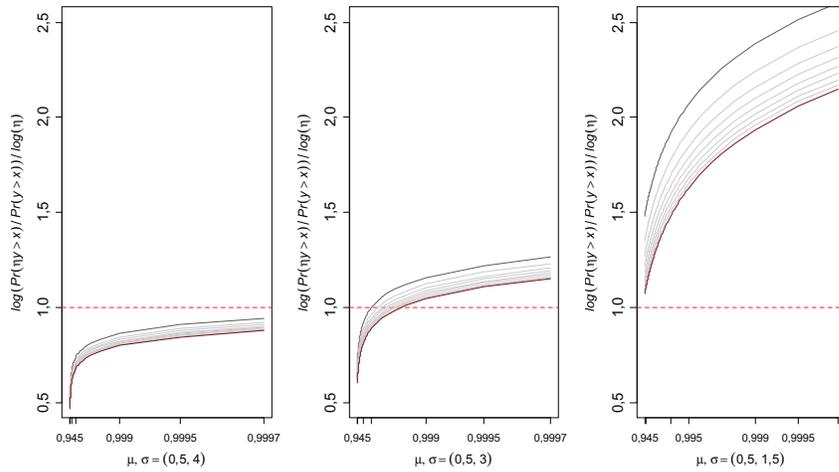
Il est possible d'élargir l'intervalle [95%, 99,97%], par contre, la précision de l'approximation pourrait diminuer.

Pour récapituler, les distributions *GPareto* convergent suffisamment quand  $\xi \geq 0,7$ . Les distributions lognormales convergent également quand leur paramètre  $\sigma > 1,8$ . Dans ces conditions, les propositions 2 et 3 s'appliquent dans les cas respectifs.

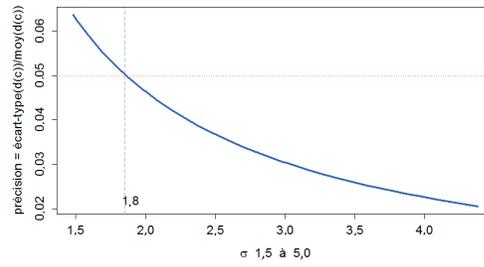
## 4.4 Des applications

### 4.4.1 Un exemple

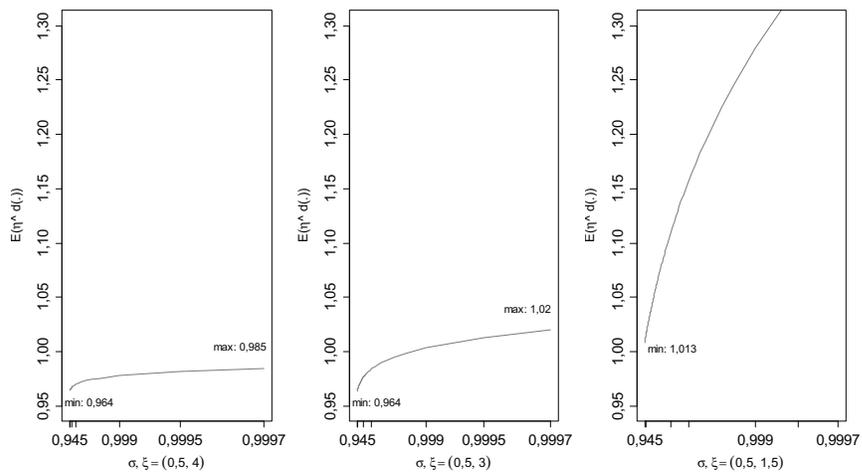
Nous souhaitons maintenant valider la nouvelle technique avec un exemple. Pour simplifier le texte, nous désignerons notre nouvelle technique de *backtesting* par *bootstrap multiplicatif* ou *multi boot* en abrégé dans les tableaux où nous présenterons les résultats. Notre exemple consiste en une série générée de 269 observations synthétiques d'une lognormale de paramètres  $\mu = 2,1$  et  $\sigma = 2,2$ . À cette série, que nous appelons *A*, nous construisons une nouvelle série *B* en supprimant l'observation qui correspond au maximum de *A*. Les tests Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling et Shapiro-Wilk ne rejettent pas la normalité du log de la série *B* avec les mêmes paramètres d'origine que la série *A*, et ce avec des statistiques et *p-values* respectives de 0,0494 (*p-value* = 0,5279), 0,5333 (*p-value* = 0,1711) et 0,9939 (*p-value* = 0,3454). La figure 4.4 montre côte à côte les séries *A* et *B* avec les trois VaR à 95%, 99% et 99,9%. L'observation qui va être supprimée dans *B* est en trait continu gras. La table 4.3 présente les calculs et les résultats des tests *backtesting*. Pour la série *A*, les trois VaR sont 304,5, 1363,7 et 7321,1 respectivement. Il y a 18 dépassements pour la VaR 95%, quatre pour 99% et aucun pour la VaR à 99,9%. En prenant un seuil critique de 5%, nous voyons que le test Kupiec ne rejette pas la VaR à 95% avec une *p-value* de 0,2308. La procédure *multi boot* estime la fréquence de dépassement à 0,0632, ce qui est considéré un trop grand écart avec la fréquence théorique de 5%, et est rejeté avec une *p-value* 0,0268 < 5%. Pratiquement la



(a) Tracé des fonctions  $d(\cdot)$  selon les quantiles



(b) Dispersion des courbes  $d(\cdot)$  selon  $\sigma$



(c) Évolution de  $E(\eta^{d(\cdot)})$  selon les quantiles

Figure 4.3 – Évaluation empirique de distributions lognormales selon le paramètre *scale*  $\sigma$

même remarque tient pour la VaR à 99% avec une fréquence de 0,0176 par rapport à 1% théorique.

Les VaR calculées avec ce modèle lognormal ne semblent pas bien marcher, même si les observations proviennent d'une lognormale et malgré les tests Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling et Shapiro-Wilk. Nous avons choisi cet exemple pour insister clairement sur le fait que le *backtesting* de la VaR ne peut pas être remplacé par d'autres tests comme ceux relatifs à l'ajustement de la distribution du modèle. La deuxième motivation du choix de ce modèle est de montrer qu'à un degré de confiance de 99,9%, il n'y a pas de dépassement de VaR, et justement, nous voyons dans les colonnes *multi boot* du tableau que nous sommes en mesure d'estimer la fréquence des dépassements à 0,05% versus 0,1% théorique avec une *p-value* de 0,1366 > 5%. Dans les trois dernières colonnes du tableau, nous affichons les calculs des zones des tests de Bâle, comme nous avons fait plus haut en utilisant cette fois nos 10000 échantillons multiplicatifs. Nous voyons que le modèle ne se comporte pas bien vu que nous serions trop souvent en jaune : 10,3%, 22,4% et 13,7% des échantillons multiplicatifs. Passons maintenant à la série *B*. Cette fois, le *bootstrapping multiplicatif* délivre une estimation de 0,0598 comme fréquence de dépassement de la VaR à 95%, ce qui est jugé suffisamment proche de la théorique, avec une *p-value* de 0,0922 > 5%. La suppression de l'observation représentant le maximum semble suffire pour arranger le *backtesting* de la série *B* pour la VaR à 99% également avec une *p-value* de 0,0965.

Quant au degré de confiance 99,9%, nous ne pouvons pas effectuer le test Kupiec puisqu'aucun dépassement n'est observé dans la série *B* non plus. L'estimation *multi boot* délivre une valeur de 0,0003 et une *p-value* de 0,0767 > 5%. En fait, l'estimation *multi boot* semble confirmer une intuition que nous pouvons avoir en inspectant le graphique (4.4b). En effet, la série *A* possède quatre observations dépassant la VaR à 99% et suffisamment grandes pour s'approcher de la VaR à 99,9%. Elles deviennent candidates au dépassement dès qu'elles reçoivent un coefficient multiplicatif suffisant pour franchir ce seuil. La série *B* a trois observations candidates pour franchir la VaR à 99,9%. C'est donc normal que la *p-value* qui correspond à la série *B* soit moins grande que celle de la série

Modèle	d.conf.	VaR	Test Kupiec		Fréquence		Multi boot & in.conf.95%			p-value multi boot	Zones Bâle II/III		
			stat.	p.value	théor.	observ.	estim.	inf.	sup.		verte	jaune	rouge
Panel A série A	0,9500	304,5	1,436	0,2308	0,050	0,0667	0,0632	0,0519	0,0741	0,0268	89,7	10,3	0,0
	0,9900	1363,7	0,551	0,4580	0,010	0,0148	0,0176	0,0111	0,0222	0,0039	77,6	22,4	0,0
	0,9990	7321,1			0,001	0,0000	0,0005	0,0000	0,0037	0,1366	86,3	13,7	0,0
Panel B série B	0,9500	304,5	0,914	0,3392	0,050	0,0632	0,0598	0,0483	0,0706	0,0922	96,1	3,9	0,0
	0,9900	1363,7	0,035	0,8520	0,010	0,0112	0,0140	0,0074	0,0186	0,0965	95,4	4,6	0,0
	0,9990	7321,1			0,001	0,0000	0,0003	0,0000	0,0037	0,0767	92,3	7,7	0,0

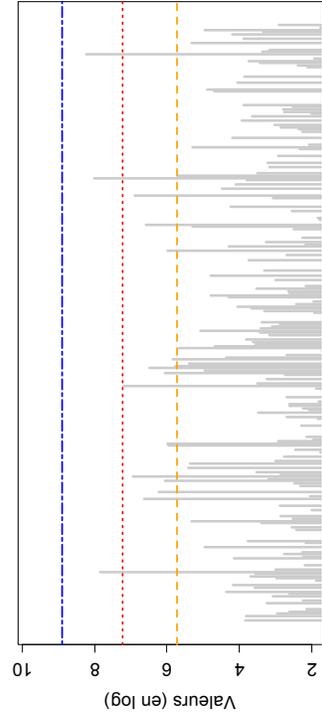
Tableau 4.3 – Validation d’un exemple

A.

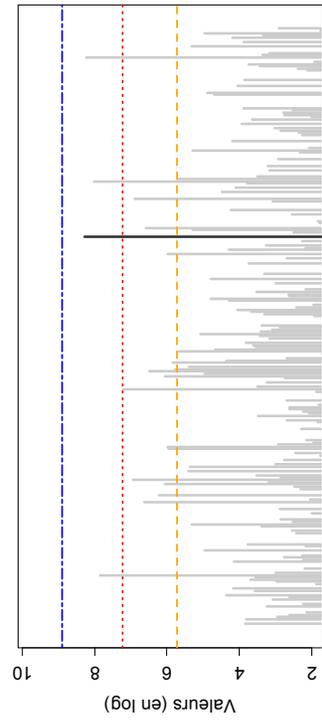
Cette remarque est valable également pour les autres degrés de confiance. Ce serait une sorte de distance qui reste pour franchir une limite de VaR donnée. Dans ce sens, le papier de Colletaz *et al.* (2013) met l’accent sur le fait que c’est important de prendre en compte de combien une VaR donnée est dépassée. Avec le présent chapitre, nous attirons l’attention sur la VaR qui ne serait pas dépassée, mais qu’un certain nombre d’observations s’en approchent plus ou moins. D’autre part, comme confirmation, nous avons la zone verte des tests qui récolte 92,3% à 96,1% des échantillons multiplicatifs, ce qui est clairement un signal que le modèle cette fois peut être considéré stable. Avec cet exemple, nous venons de monter une première application. Nous y avons détecté également une certaine faiblesse de la modélisation de la VaR avec une distribution lognormale. Dans la suite, nous présentons une application aux données réelles de pertes opérationnelles de Merrill Lynch, où nous approfondissons l’analyse.

#### 4.4.2 Les pertes opérationnelles de Merrill Lynch

C’est une application où nous voulons déterminer les VaR à 95% et 99% de la sévérité des pertes de Merrill Lynch. Dans le cas où la sévérité aurait ses premiers moments infinis, ces VaR pourraient être considérées comme des valeurs maximales délimitant les pertes maximales probables de la banque, comme dans Dahen, Dionne et Zajdenweber (2010). Ce papier modélise la sévérité avec une distribution Pareto de type I concernant la période de 1994 à 2004. Pour nous, les calculs porteront de janvier 1994 jusqu’à juin



(a) Série A



(b) Série B

Figure 4.4 – Tracés d'un exemple

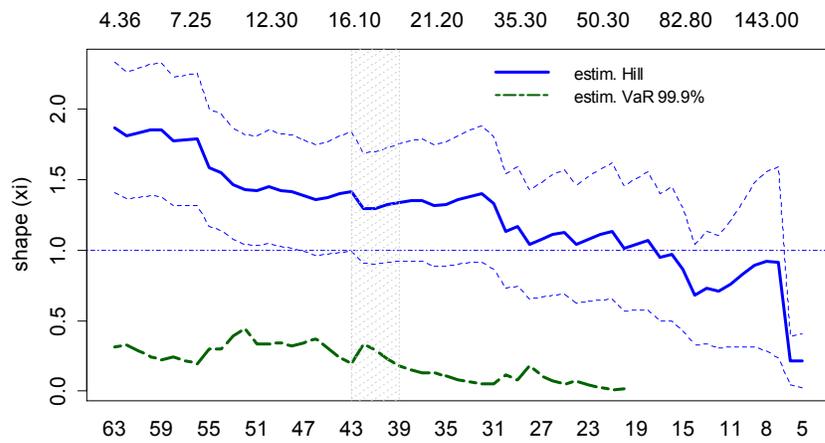
2011 à partir de la base *Algo OpData*, et utiliserons une distribution Pareto généralisée (*GPareto*). Les graphiques 4.1 présentés au début de ce chapitre concernent cette sévérité. Pour déterminer convenablement le seuil  $u$  à partir duquel les observations seront considérées extrêmes, nous représentons les calculs de l'estimateur de Hill pour différents seuils dans la figure 4.5 (trait continu). Sur ce même graphique, nous reportons l'estimation de la VaR à 99,9% afin de visualiser ses zones de stabilité relative. C'est un moyen d'avoir plus d'information sur l'estimation du seuil  $u$ , vu que la distribution *GPareto* possède deux paramètres  $\sigma$  et  $\xi$ .

La zone hachurée de ce graphique montre une certaine stabilité de l'estimateur de Hill comme de la VaR estimée en utilisant cette zone comme seuils. Nous choisissons  $u = 19$  pour cette raison. La figure 4.5b semble confirmer ce choix. En effet, c'est le QQ-plot des résidus de Smith correspondant à l'estimation de la *GPareto* avec  $u = 19$ ,  $\sigma_1 = 38,00$  ( $p\text{-value}=0,000$ ) et  $\xi = 0,899$  ( $p\text{-value}=0,0090$ ). Les résidus de Smith consistent en la transformée  $W$  documentée dans Smith (2003). Le test Kolmogorov-Smirnov de ces résidus avec l'hypothèse nulle qu'ils suivent une loi exponentielle de paramètre 1 donne une statistique de 0,1109 avec une  $p\text{-value}=0,6541$ . Par conséquent, ce test ne rejette pas  $H_0$ , ce qui confirme ce que nous voyons sur le QQ-plot qui contient pratiquement tous les points à l'intérieur de l'intervalle de confiance de 95%. Pour calculer les VaR de ce modèle, il suffit d'écrire que  $Pr(y > R^*) = Pr(y > R^* | y > u) \times \gamma$ , où  $\gamma = N_u/n$  est la proportion des observations qui dépassent le seuil  $u = 19$ . Dans ce cas,  $Pr(y > R^*) = [1 + \xi(R^* - u)/\sigma_1]^{-1/\xi} \times \gamma = \alpha$ . Nous en déduisons

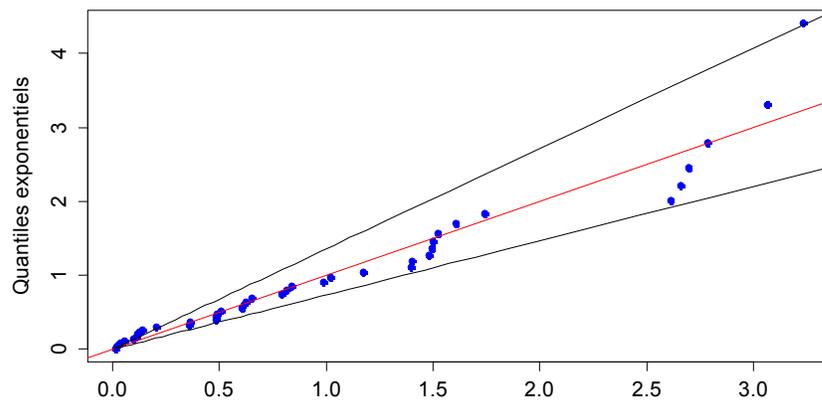
$$VaR_{\alpha,GPareto} = u + \frac{\sigma_1}{\xi} \left[ \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^\xi - 1 \right], \quad \alpha = 5\%, 1\%, 0,1\%$$

Les calculs de VaR avec ce modèle *GPareto* délivrent des chiffres comparables à ceux du papier de Dahan, Dionne et Zajdenweber (2010).

En parallèle avec ce modèle, nous construisons deux autres modèles alternatifs pour calculer les VaR. Le premier est bâti avec une distribution lognormale tronquée au même point  $u = 19$  que le précédent. Le test Kolmogorov-Smirnov délivre une statis-



(a) Estimateur de Hill



(b) QQ-Plot,  $u = 19$

Figure 4.5 – Estimateur de Hill des pertes de Merrill Lynch et QQ-plot

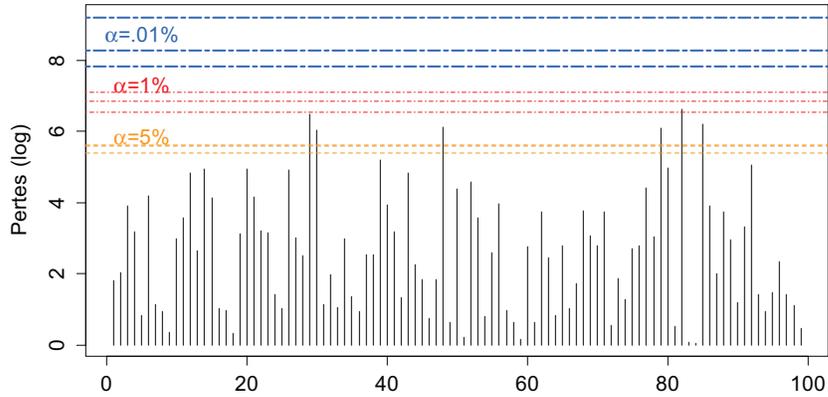


Figure 4.6 – Tracé chronologique des pertes de Merrill Lynch avec les VaRs à 95%, 99% et 99,9%

tique  $D = 0,126$  et une  $p\text{-value}=0,4935$ . Les observations de pertes de Merrill Lynch tronquées à  $u = 19$  millions peuvent donc être considérées provenant d'une lognormale tronquée de paramètres  $\mu_2 = 2,52$  et  $\sigma_2 = 1,86$ . Pour calculer le quantile  $R^*$  de la VaR de ce modèle, nous partons du fait que  $Pr(y > R^*) = Pr(y > R^* | y > u) \times \gamma = \Phi((\log(R^*) - \mu_2)/\sigma_2)/\lambda \times \gamma = 1 - \alpha$ , où  $\lambda = (1 - \Phi((19 - \mu_2)/\sigma_2))$  et  $\gamma$  est la proportion des observations qui dépassent  $u = 19$ . Nous en obtenons

$$VaR_{\alpha, LN-tr} = \exp \left[ \Phi^{-1} \left( (1 - \alpha) \times \lambda / \gamma \right) \times \sigma_2 + \mu_2 \right], \quad \alpha = 5\%, 1\%, 0,1\%$$

Le troisième et dernier modèle utilise une lognormale complète pour l'ensemble des 99 observations. Le test Kolmogorov-Smirnov donne une statistique  $D = 0,112$  et une  $p\text{-value}=0,1661$ . Nous ne rejetons pas la lognormale dans ce cas, par contre nous avons une sorte d'indication vu que la  $p\text{-value}$  est moindre que celle du modèle tronqué. En effet, les observations se prêtent, a priori, moins bien à ce dernier modèle. Les paramètres de la lognormale complète sont  $\mu_3 = 2,60$  et  $\sigma_3 = 1,79$ . Nous calculons les VaR en utilisant l'équation précédente avec  $\lambda = \gamma = 1$ . D'autre part, nous calculerons les VaR à cinq degrés de confiance, à savoir 95%, 99%, 99,5%, 99,9% et enfin 99,97%. Ce dernier

quantile nous donnera de l'information en cas de dépassement de la VaR à 99,9%. La figure 4.6 trace la série des pertes avec les VaR des trois modèles afin de visualiser les niveaux et les dépassements. La table 4.4 montre les résultats du *backtesting* de Kupiec et celui de notre procédure.

Les trois modèles ont pratiquement la même VaR à 95% et leurs dépassements sont comparables. La procédure *multi boot* est générée à l'aide 30000 échantillons afin de donner le plus de chance possible aux 99 observations de s'exprimer. Elle confirme le non-rejet des tests de Kupiec avec des *p-values* supérieures à 5%. À partir du degré de confiance 99% les modèles commencent à diverger. Commençons par le panel C bâti avec une distribution lognormale (*LN*) pour toutes les observations. Il y a un dépassement pour le modèle *LN* relativement au degré de confiance 99%. Le test Kupiec ne rejette pas l'adéquation de la fréquence observée dans l'échantillon d'origine de 0,0101 qui est en effet très proche de la fréquence théorique 0,01. Par contre, l'estimation *multi boot* semble prédire une fréquence de dépassements de 0,0167, non rejetée avec une *p-value* 0,1433 > 5%. Le calcul des zones de Bâle signale une faiblesse, ayant plus de 21% dans la zone jaune. Il n'y a pas de dépassement dans l'échantillon d'origine pour la VaR à 99,5%, donc pas de test Kupiec possible, par contre, la fréquence des dépassements est estimée à 0,0075 contre 0,005 théorique.

Nous ne rejetons pas ce résultat avec une *p-value*=0,4403 > 5% mais la zone jaune contient trop d'échantillons générés qui tombent dans cette zone. La VaR à 99,9%, non dépassée dans l'échantillon initial, obtient une estimation de sa fréquence à 0,0005 contre 0,001 théorique, ce qui est considéré comme limite trop faible avec une *p-value* de 0,0471  $\lesssim$  5%. La VaR extrême à 99,97% est aussi estimée par *multi boot* ayant détecté un seul dépassement dans les 30000 échantillons multiplicatifs générés. La fréquence résultante est très petite et est évaluée à 0,00003, ce qui est 10 fois plus petit que la théorique de 0,0003. Jugée trop petite elle est rejetée avec une *p-value* de 0,0032. En résumé, le modèle *LN* montre des faiblesses importantes, malgré le fait que les observations de pertes d'origine n'ont rien montré d'anormal pour les degrés de confiance où il y a dépassement des VaR, et bien entendu, nous ne pouvons rien dire dans les cas de

Modèle	d.conf.	VaR	Test Kupiec		Fréquence		Multi boot & in.conf.95%			p-value multi boot	Zones Bâle II/III						
			stat.	p.value	théor.	observ.	estim.	inf.	sup.		verte	jaune	rouge				
Panel A <i>GPareto</i>	0,9500	266,6	0,220	0,6389	0,050	0,0606	0,0517	0,0303	0,0808	0,3512	98,4	1,6	0,0				
	0,9900	1208,4			0,010	0,0000	0,0052	0,0000	0,0202					0,4228	99,0	1,0	0,0
	0,9950	2274,3			0,005	0,0000	0,0009	0,0000	0,0101					0,0896	99,8	0,2	0,0
	0,9990	9752,4			0,001	0,0000	0,0000										
	0,9997	28859,7			0,000	0,0000	0,0000										
Panel B <i>LN · tr</i>	0,9500	270,1	0,220	0,6389	0,050	0,0606	0,0517	0,0303	0,0808	0,3522	98,4	1,6	0,0				
	0,9900	947,8			0,010	0,0000	0,0102	0,0000	0,0303					0,3207	94,0	6,0	0,0
	0,9950	1501,9			0,005	0,0000	0,0034	0,0000	0,0101					0,2947	96,5	3,4	0,0
	0,9990	3883,1			0,001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000					0,0059	99,4	0,6	0,0
	0,9997	7297,0			0,000	0,0000	0,0000										
Panel C <i>LN</i>	0,9500	217,4	0,220	0,6389	0,050	0,0606	0,0653	0,0404	0,0909	0,1110	89,4	10,6	0,0				
	0,9900	687,4			0,010	0,0101	0,0167	0,0000	0,0404					0,1433	78,8	21,2	0,0
	0,9950	1047,6			0,005	0,0000	0,0075	0,0000	0,0202					0,4403	84,1	15,9	0,0
	0,9990	2497,8			0,001	0,0000	0,0005	0,0000	0,0000					0,0471	95,3	4,7	0,0
	0,9997	4446,1			0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000					0,0032	0,0	100,0	0,0

Tableau 4.4 – Validation des modèles de VaR de Merrill Lynch

non-dépassements, justement.

Passons au panel A pour passer au modèle *GPareto*. Sauf la VaR à 95%, les autres degrés de confiance n'ont aucun dépassement dans l'échantillon d'origine. Les fréquences de dépassement pour 99% et 99,5% sont estimées par notre procédure à 0,0052 et 0,0009 respectivement. Ces estimations ne rejettent pas le modèle *GPareto* à ces deux degrés de confiance. Par contre, la VaR 99,9% ne semble pas être atteinte dans aucun des 30000 échantillons générés. En somme, le modèle *GPareto* semble bien correspondre jusqu'au degré de confiance 99,5% compris, les zones de Bâle semblent aussi confirmer cette adéquation. Par contre, ce modèle ne conviendrait pas au degré de confiance 99,9%. En effet, nous avons déroulé plusieurs centaines de fois la procédure *multi boot* sans tomber sur aucun dépassement dans les degrés de confiance 99,9%. Il nous reste le modèle *LN · tr* de la lognormale tronquée présenté au panel B. A priori, il se comporte comme le précédent, avec les mêmes remarques pour 95%, puis ne présente pas de dépassements pour les autres degrés de confiance dans l'échantillon initial. Les VaR calculées sont inférieures, mais restent assez comparables à celles du modèle *GPareto* jusqu'au degré de confiance 99,5% compris. À partir de là, nous voyons qu'il y a une augmentation du capital de  $9752,4/3883,1 = 2,5$  fois pour le degré de confiance 99,9%, et bien plus encore pour 99,97%. Cette grande différence semble justifier le fait que la fréquence

de dépassement est estimée à 0,0001 contre 0,001 théorique. Cette petite fréquence est rejetée avec une *p-value* de 0,0059 sans que cela n'influence les zones de Bâle qui restent au vert avec une proportion de 94% ou plus pour toutes les VaR de ce modèle  $LN \cdot tr$ , sauf le dernier niveau extrême qui n'est pas atteint comme le montrent les résultats du *bootstrapping multiplicatif*.

En résumé, ce modèle  $LN \cdot tr$  semble bien se comporter pour calculer les VaR de 95% à 99,9%. En plus, nous savons qu'avec un capital de 3883,1 millions nous n'avons qu'un seul dépassement dans un seul des 30000 échantillons multiplicatifs. Cela signifie clairement qu'avec ce capital il reste encore de la capacité pour se couvrir advenant des pertes plus importantes éventuellement. Pour résumer ce qui précède, le modèle  $LN$  serait insuffisant alors que celui de  $GPareto$  serait trop cher. Cela apporte une réponse aux questions que nous nous posions au début de ce chapitre. Pourtant, graphiquement, tous les trois modèles ne semblent pas très différents quant aux dépassements des VaR et nous nous demandions comment les départager. Précisons encore une fois que le modèle bâti à l'aide d'une lognormale tronquée semble offrir une bonne alternative, le point de troncature  $u$  étant identifié de la même façon que pour la  $GPareto$  (*Peak Over Threshold*).

#### **4.4.3 Une application aux scénarios et opinions des experts**

La méthode des scénarios représente l'un des moyens demandés par Bâle II pour modéliser le risque opérationnel. Ils sont mis à contribution pour ajuster ou compléter les distributions des fréquences et la sévérité. Dans ce sens, les scénarios sont un moyen de valider (ou amender) les modèles, comme le soulignent Quell et Meyer (2011). Les scénarios peuvent être classés en deux parties. Les scénarios historiques sont des cas réels advenant à une autre banque et il s'agit de s'en inspirer après mise à l'échelle temporelle ou dimensionnelle par rapport à la banque en question, comme dans Dutta et Babbal (2014). La base de données *Algo OpData* englobe des cas intéressants surtout concernant la crise financière récente. Les scénarios peuvent également être synthétiques en se basant principalement sur les avis des experts. Ces derniers peuvent partir de leur intui-

tion professionnelle pour monter des scénarios afin d'en évaluer l'impact. Notons que les scénarios ne sont pas des situations de *stress testing* puisque ces dernières sont supposées plausibles, mais rares, alors que les scénarios doivent viser à compléter le modèle de gestion des risques de tous les jours.

Prenons le cas d'une banque qui pense voir ses pertes de la ligne d'affaires *Corporate Finance* doubler en sévérité en moyenne. Nous proposons d'apporter une réponse à ce scénario pour Merrill Lynch, avec le modèle  $LN \cdot tr$  que nous avons retenu au bout de la section précédente. Dans la base de données *Algo OpData*, nous observons qu'il y a 12 pertes de cette ligne sur 99, 143,3 millions en moyenne, un minimum de 12,30 et un maximum 642,70 millions. Voici la stratégie que nous proposons pour évaluer l'impact de ce scénario. Nous pouvons y aller d'une façon linéaire, ou plutôt déterministe, et dire que probablement, la banque ferait face à une augmentation simultanée de sa sévérité quant à cette ligne d'affaires. Dans ce cas, toutes les valeurs afférentes seront simplement multipliées par deux. Ensuite, nous générons 30 000 échantillons multiplicatifs pour les 99 observations y compris celles multipliées par deux. Les échantillons multiplicatifs ainsi générés font que la moyenne de l'ensemble est multipliée par 1,296 alors que la médiane est multipliée par 1,062. L'écart entre la médiane et la moyenne devient plus grand. Les données deviennent plus asymétriques. Nous pouvons nous attendre à un effet plus accentué sur les hauts quantiles. La table 4.5 exhibe les résultats dans le panel B. À titre de référence, nous reprenons les chiffres du modèle de la lognormale tronquée dans le panel A, afin de faciliter la comparaison. Vu que nous avons multiplié toutes les observations relatives à la ligne d'affaires en question, il semble que l'une d'elles a dû dépasser la VaR à 99%, ce qui est reporté par le test de Kupiec. Du côté de la procédure multiplicative, nous observons que toutes les *p-values* sont supérieures au seuil 5%. Ce scénario ainsi mesuré serait bien couvert par les différentes VaR de 95% à 99,9%. Cela confirmerait la validité de la spécification lognormale tronquée.

Analysons maintenant ce qui se passe pour le panel C. Au lieu de multiplier les valeurs de toutes les observations en question par deux, nous générons plutôt 30 000 échantillons multiplicatifs avec  $E(\eta_{Corp,Fin.}) = 2$  pour ces 12 pertes, ensuite nous prenons

$E(\eta_{autres}) = 1$  pour le reste des 87 pertes. Autrement dit, nous multiplions stochastiquement par deux les 12 valeurs. La différence est importante dans le concept. En effet, la multiplication stochastique par deux voudrait dire que le risque concernant cette ligne d'affaires n'est pas systématique. Autrement dit, une augmentation des prix ou du taux d'intérêt, par exemple, ferait que toutes les valeurs devraient suivre d'une façon pratiquement déterministe. Par contre, un élargissement de la ligne d'affaires apporté par la banque devrait s'accompagner d'une augmentation stochastique des risques opérationnels, dans ce cas, justement, la multiplication devrait être stochastique.

Revenons à notre scénario, dans le cas de la multiplication stochastique par deux, la moyenne de l'ensemble est multipliée par 1,296 qui est naturellement la même chose que pour la multiplication déterministe, par contre la médiane reçoit un coefficient multiplicatif de 1,138, ce qui est supérieur à 1,062. Cela montre une asymétrie moins grande que celle du cas précédent. Nous devons le voir dans les résultats du panel C. En effet, nous voyons que la fréquence des dépassements estimée pour le degré de confiance 95% est de 0,0669 alors qu'elle est de 0,0641 et 0,0517 pour le panel B et le panel A de référence, respectivement. La situation s'inverse pour la VaR à 99,9%, la fréquence estimée est de 0,0002 et 0,0006 concernant les panels C et B respectivement. En examinant la zone jaune des deux panels, le scénario avec multiplication déterministe serait plus risqué que celui avec la multiplication stochastique dans le sens que le modèle de la lognormale tronquée commence plus à montrer une certaine faiblesse. En fait, la raison serait liée au fait que la plupart des grandes pertes de Merrill Lynch sont justement observées dans la ligne d'affaires *Corporate Finance*. De ce fait, appliquer une augmentation systématique du risque dessus devrait aboutir à une situation plus risquée que si l'augmentation du risque était de la même amplitude mais aléatoire.

Avec cette application, nous montrons la possibilité de transformer les scénarios et mesurer leur impact sur la stabilité du capital de réserve. Nous allons voir dans la section suivante la contribution de notre outil dans la création et la mesure de situations de *stress testing*.

Modèle	d.conf.	VaR	Test Kupiec		Fréquence		Multi boot & in.conf.95%			p-value multi boot	Zones Bâle II/III			
			stat.	p.value	théor.	observ.	estim.	inf.	sup.		verte	jaune	rouge	
Panel A (référence)	0,9500	270,1	0,220	0,6389	0,050	0,0606	0,0517	0,0303	0,0808	0,3522	98,4	1,6	0,0	
	0,9900	947,8			0,010	0,0000	0,0102	0,0000	0,0303		0,3207	94,0	6,0	0,0
	0,9950	1501,9			0,005	0,0000	0,0034	0,0000	0,0101		0,2947	96,5	3,4	0,0
	0,9990	3883,1			0,001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000		0,0059	99,4	0,6	0,0
Panel B Corp.Fin. X 2	0,9500	270,1	1,681	0,1948	0,050	0,0808	0,0641	0,0404	0,0909	0,1357	89,7	10,3	0,0	
	0,9900	947,8	0,000	0,9920	0,010	0,0101	0,0167	0,0000	0,0303		0,1255	80,1	19,9	0,0
	0,9950	1501,9			0,005	0,0000	0,0069	0,0000	0,0202		0,4690	86,6	13,4	0,0
	0,9990	3883,1			0,001	0,0000	0,0006	0,0000	0,0101		0,0630	93,7	6,3	0,0
Panel C Corp.Fin. E(.)=2	0,9500	270,1	0,220	0,6389	0,050	0,0606	0,0669	0,0404	0,0909	0,0899	87,9	12,1	0,0	
	0,9900	947,8			0,010	0,0000	0,0149	0,0000	0,0303		0,1658	84,8	15,2	0,0
	0,9950	1501,9			0,005	0,0000	0,0072	0,0000	0,0202		0,4502	85,6	14,4	0,0
	0,9990	3883,1			0,001	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000		0,0245	97,5	2,4	0,0

Tableau 4.5 – Évaluation des scénarios de Merrill Lynch

#### 4.5 Une extension au *stress testing*

Le *stress testing* conventionnel consiste en des scénarios plausibles mais rares. Les banques doivent savoir évaluer l'impact en pertes si telle ou telle situation se présente. Depuis la crise financière récente, le concept de *stress testing* a plus mûri. Aujourd'hui la littérature parle du *reverse stress testing (RST)*. Il s'agit d'identifier les causes plausibles qui feraient que la banque soit en difficulté majeure. Dans cette section, nous allons suivre l'esprit du *RST* en répondant à la question : quelle est l'amplitude du choc qui aurait fait que les pertes habituelles de la période normale deviennent grandes dans la période de stress ? En fait, nous voulons pouvoir estimer l'amplitude d'un choc stress multiplicatif, dans le sens qu'une amplitude de 1 ne correspond à aucune différence stochastique par rapport à la normale, et que par exemple, avec une amplitude de 5 nous donnera la sévérité de la période de stress considérée.

Nous commençons par un calcul probabiliste afin de montrer que le calcul de *stress testing* sur la distribution agrégée revient à un calcul de *stress testing* sur la distribution de sévérité. Notons  $F$  la distribution de la sévérité en période normale et  $F'$  la sévérité en période de stress.  $S_n = \sum_n y_n$  est la distribution agrégée en temps normal,  $S'_{n'} = \sum_{n'} y'_{n'}$  est la distribution agrégée en période de stress. Pour simplifier les expressions des calculs, nous allons prendre les notations complémentaires suivantes :  $S = S_n > x$ ,  $Y = y > x$ ,  $S = S'_n >$

$x', Y' = y' > x'$ . Ainsi, la probabilité  $Pr(y > x, S'_n > x')$  sera écrite  $Pr(Y, S')$ . Maintenant,  $Pr(S, Y) \approx Pr(Y)$  comme vu plus haut. De cela découle  $Pr(S|Y) = Pr(S, Y)/Pr(Y) \approx Pr(Y)/Pr(Y) = 1$ . D'autre part,  $Pr(Y|S) = Pr(Y, S)/Pr(S) \approx Pr(Y)/(n \times Pr(Y)) \approx 1/n$ . D'une façon similaire, nous pouvons écrire que  $Pr(S, Y') \approx n \times Pr(Y, Y')$  et symétriquement  $Pr(S', Y) \approx n' \times Pr(Y', Y)$ . De ces deux dernières expressions découle le fait que  $Pr(S', S) \approx n' \times n \times Pr(Y', Y)$ . D'où finalement la relation que nous recherchons  $Pr(S'|S) \approx n' \times Pr(Y'|Y)$ , réécrite avec la notation habituelle

$$Pr(S'_n > x' | S_n > x) \approx n' \times Pr(y' > x' | y > x)$$

Le comportement de la queue de distribution pendant la période de stress de la distribution agrégée découle directement de celui de la sévérité. Autrement dit, pour mesurer le risque de la période de stress, et ce relativement à celui de la période normale, le calcul peut être fait sur la sévérité, à un coefficient multiplicatif près égal à  $E(n')$ . Nous voulons maintenant établir les équations qui vont nous permettre d'estimer l'amplitude des chocs subis par la sévérité pendant la période de stress. Notons  $F$  la distribution de la sévérité,  $\alpha$  est le complément à 100% du degré de confiance, par exemple 1% pour le degré de confiance 99%. Supposons que  $F$  représente la queue de la distribution à partir d'un certain seuil  $u$  comme pour la famille des distributions de Pareto. Dans ce sens, notons  $\lambda$  et  $\lambda'$  les proportions respectives des observations dépassant le seuil  $u$  dans la distribution  $F$  (période normale) et  $F'$  (période de stress). Pour cela, nous commençons par écrire

$$\begin{aligned} \alpha &= Pr(y > x) = \bar{F}(x)\lambda \\ \alpha &= Pr(y' > x') = \bar{F}'(x')\lambda' \end{aligned} \quad (56)$$

Si nous voulons mesurer la magnitude de stress de la période de stress par rapport à la période normale, une façon de le faire est de chercher une distribution  $\eta$  qui, en convolution multiplicative avec  $y$ , va répliquer le comportement de la queue de  $y'$  en convolution multiplicative. Cela revient à écrire  $Pr(y' > x') \approx Pr(\eta y > x')$ . Si  $y$  et  $y'$  appartiennent à la classe  $\mathcal{RV}(-\delta)$  ou  $\mathcal{IR}(-\delta_1, \delta_2, k)$ , nous avons  $Pr(\eta y > x') \approx Pr(y > x') \times E(\eta^{\delta_F})$ .

Le paramètre  $\delta_F$  est indexé par la fonction de distribution  $F$  puisqu'il en dépend, mais ne dépend pas de la distribution  $\eta$  comme précisé par la proposition 1. Cela nous donne

$$\alpha \approx Pr(y > x')E(\eta^{\delta_F}) \approx \bar{F}(x')\lambda E(\eta^{\delta_F})$$

Puisque  $x' = \bar{F}'^{-1}(\alpha/\lambda')$ ,  $\bar{F}'^{-1}$  étant la réciproque de la fonction  $\bar{F}'$ , alors

$$E(\eta^{\delta_F}) \approx \frac{\alpha/\lambda}{\bar{F}(\bar{F}'^{-1}(\alpha/\lambda'))} \quad (57)$$

L'expression 57 est intéressante à plusieurs égards. D'abord, le terme à gauche ne dépend pas de  $\alpha$  alors que celui de droite en dépend, du moins dans l'expression analytique. Cela semble indiquer que la mesure de l'amplitude du choc de stress  $E(\eta^{\delta_F})$  est une même mesure, mettons 5, peu importe le degré de confiance auquel le capital stress sera calculé. La deuxième remarque est que l'indice  $\delta_F$  du terme à gauche dépend bien entendu de  $F$  mais pas de  $F'$  qui apparaît au dénominateur du terme de droite. Les fonctions  $\bar{F}$  et  $\bar{F}'$  étant a priori quelconques, ce que nous venons de préciser met des conditions pour lier  $F$  et  $F'$ . Rappelons que l'indice  $\delta_F$  est lié au paramètre *shape*  $\xi$  de la *GPareto*, par exemple. Si  $F$  et  $F'$  ont des paramètres  $\xi$  proches l'un de l'autre dans ce cas,  $F$  et  $F'$  ont pratiquement le même  $\delta_F$ . Cette même condition que  $\xi \approx \xi'$  peut satisfaire aussi la première remarque, à savoir que  $E(\eta^{\delta_F})$  ne doit pas dépendre de  $\alpha$ . Pour le voir, prenons  $F$  et  $F'$  deux distributions *GPareto*.  $\bar{F}$  et  $\bar{F}'^{-1}$  s'écrivent alors

$$F(x) \approx (\xi x/\sigma)^{-1/\xi} = \alpha/\lambda \quad (58)$$

$$F'^{-1}(z) \approx \sigma'(\lambda'/z)^{\xi'/\xi'} \quad (59)$$

Les expressions (58) et (59) sont obtenues en négligeant  $u$  devant  $x$  et 1 devant  $\xi x/\sigma$ , puisque  $x \rightarrow \infty$ . En utilisant (58) et (59) dans (57) et en supposant  $\xi \approx \xi'$  nous avons

$$E(\eta^{\delta_F}) \approx (\alpha/\lambda) / \left( \lambda' \frac{\sigma' \alpha}{\sigma} \right) = \frac{\sigma' \lambda'}{\sigma \lambda} \quad (60)$$

Ainsi, la période de stress ne serait pas forcément une aggravation du paramètre *shape*

Stress	d.conf.	VaR	Test Kupiec		Fréquence		Multi boot & in.conf.95%			p-value	Zones Bâle II/III		
			stat.	p.value	théor.	observ.	estim.	inf.	sup.	multi boot	verte	jaune	rouge
Panel A	0,9500	1039,1	15,836	0,0001	0,050	0,0096	0,0524	0,0449	0,0609	0,2974	100,0	0,0	0,0
choc stress	0,9900	9478,6			0,010	0,0000	0,0080	0,0032	0,0096	0,0059	100,0	0,0	0,0
ampl.=5,3	0,9950	13065,0			0,005	0,0000	0,0059	0,0032	0,0096	0,3162	100,0	0,0	0,0
	0,9990	18274,0			0,001	0,0000	0,0033	0,0000	0,0064	0,2348	23,5	76,5	0,0

Tableau 4.6 – Validation de l’amplitude de la période de stress

de la distribution initiale. Par contre, ce serait le rapport des paramètres *scale* qui va faire la différence, en plus du rapport des  $\lambda$  (les proportions de dépassement du seuil  $u$ ). Nous appliquons la procédure *POT* pour choisir un seuil  $u$  pour  $F$  (de janvier 2001 à juin 2007) et  $F'$  (juillet 2007 à mars 2009). Le seuil  $u = 36$  semble bien convenir aux deux périodes. Ce seuil est le même ici par coïncidence uniquement. L’estimation de  $F$  comme *GPareto* donne  $\sigma = 41,94$  ( $p\text{-value}=0,0000$ ) et  $\xi = 1,160$  ( $p\text{-value}=0,0003$ ). L’estimation de  $F'$  donne  $\sigma' = 178,80$  ( $p\text{-value}=0,0000$ ) et  $\xi' = 1,162$  ( $p\text{-value}=0,0034$ ).  $\xi \approx \xi'$  et le rapport  $\sigma'/\sigma = 4,26$ . Les proportions de dépassements sont  $\lambda = 0,215$  et  $\lambda' = 0,319$ .

Le calcul délivre enfin une valeur de  $E(\eta^{\delta_F}) \approx 5,3$ . Nous prenons une distribution  $\eta$  de même type de construction que précédemment, une loi Poisson de moyenne 5,3, cette fois, à laquelle nous ajoutons 1, puis nous remettons le tout à une moyenne de 5,3. Cela donne  $\eta = (Poisson(5,3) + 1)/8 \times 5,3$ . La figure 4.7 schématise le raisonnement de l’estimation du choc de stress. Une dernière remarque concernant l’estimation de l’amplitude du choc avec des distributions *GPareto*. Le fait que les deux paramètres *shape* doivent pratiquement être les mêmes neutralise une éventuelle surestimation des calculs, la preuve en est que l’expression finale de  $E(\eta^{\delta})$  n’est pas fonction de  $\xi$  (expression (60)).

Il nous reste à effectuer les calculs pour valider cette estimation. Une façon de le faire est de prendre toutes les observations de la période normale afin de les soumettre à une multiplication stochastique de 5,3 d’une façon similaire pour les calculs de scénario dans la section précédente. Le vecteur des 312 observations de la période normale va être multiplié en 10000 échantillons en utilisant la distribution  $\eta$  définie dans le paragraphe

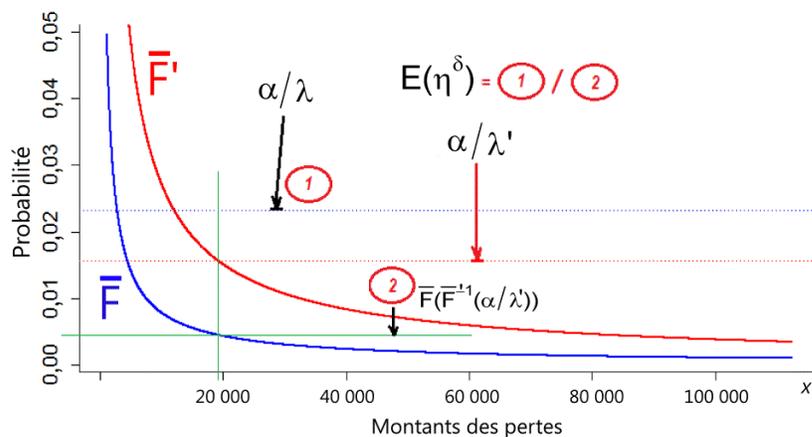


Figure 4.7 – Tracé de la mesure du choc de stress

précédent avec une moyenne de 5,3. Nous calculons les différentes VaR de 95% à 99,9% en non paramétrique directement des 94 observations de la période de stress. L'hypothèse nulle postule que les dépassements des VaR sont statistiquement les mêmes que ceux théoriques.

Si l'estimation du choc est valide, nous devons obtenir des *p-values* supérieures au seuil de 5%. Le tableau 4.6 résume les calculs de validation. La première remarque est que le test de Kupiec semble rejeter la fréquence de dépassement de la VaR à 95% car la fréquence observée dans l'échantillon initial n'est que de 0,0096 contre 5% théorique. Ensuite, dans l'échantillon initial toujours il n'y a plus de dépassements d'aucune des trois autres VaR de 99% à 99,9%. Dans les colonnes relatives à la procédure *bootstraping multiple*, les fréquences de dépassement estimées semblent être assez proches des théoriques de sorte qu'elles ne sont pas rejetées sauf pour la VaR à 99% où elle est estimée à 0,0080 contre 1% théorique, ce qui n'est pas loin mais la *p-value* de  $0,0059 < 5\%$  semble indiquer qu'elle est trop basse par rapport à la théorique. Un commentaire pour les zones de tests de Bâle, toutes les VaR sont à 100% au vert sauf celle à 99,9% qui est à 76,5% dans le jaune. Une interprétation serait que nous sommes en période de stress justement, et que le modèle serait à sa limite de l'acceptabilité, ce qui est normal vu

que nous sommes en période de stress. Vu ces différents résultats, nous considérons que l'estimation de l'amplitude du choc de stress est valide.

Un dernier paragraphe est consacré à une construction intuitive de *reverse stress testing* (*RST*), en lien avec les développements du chapitre précédent. L'objectif du *RST* est l'identification des causes plausibles qui feraient que la banque soit en difficulté majeure. Ces causes peuvent être représentées par des combinaisons des ratios des banques. En effet, la banque peut partir d'une liste de cas de banques liquidées qu'elle juge pertinents pour son étude. Elle identifie les ratios d'intérêt que ces banques liquidées ont eu vers la fin de leur vie. En utilisant sa taille (total de ses actifs), la banque estime son exposition au risque opérationnel, *IOP*, en utilisant les jeux de ratios de chacun des cas. Cela lui permet d'obtenir la distribution des sévérités et celle des fréquences, comme montré dans le chapitre précédent. Finalement, elle calcule le capital qui en découle. Les experts de la banque pourraient alors examiner les montants calculés dans chaque cas, afin d'évaluer si la banque peut être mise en danger. En parallèle, la banque estime sa *stress VaR* (*sVaR*).

En fait, Bâle III va demander de calculer ce capital correspondant au risque de marché en période de stress (BCBS, 2011), nous pouvons la calculer pour le risque opérationnel en utilisant le développement de cette section. Supposons que l'amplitude de stress d'une période donnée soit de 5,3 comme estimé plus haut, cette amplitude peut être appliquée, par multiplication stochastique, aux données de la banque (données internes, données externes redimensionnées, scénarios pertinents). Cela donne un capital qui peut être considéré comme *sVaR* pour le risque opérationnel. La banque examine alors, par ses spécialistes, le danger que représenterait la perte de ce montant. L'intérêt de calculer *sVaR* est que la banque pourra savoir si elle a eu une liste de liquidations significatives pour elle ou non. En effet, les cas de liquidation pertinents pour la banque sont ceux dont le capital calculé est comparable à *sVaR*. Il nous reste à faire le lien avec les facteurs macroéconomiques. La banque peut s'inspirer des développements de la littérature pour déterminer l'impact des conditions de l'économie sur les ratios de gestion. Elle sera donc en mesure de déterminer les circonstances aggravant les ratios des cas de liquidations, ce qui multiplie ces derniers et enrichit l'étude *RST*.

## 4.6 Conclusion

Les problèmes soulevés par la littérature en risque opérationnel parlent d'imprécision et d'instabilité des calculs du capital. Nous pensons que ce serait essentiellement relié au fait que la validation *backtesting* est très difficile. Nous construisons une nouvelle approche dans ce chapitre. Les tests et les applications semblent concluants. Une extension à l'évaluation des scénarios et calcul de *stress testing* est également proposée. Un message important que nous lançons est qu'il est primordial de pouvoir valider individuellement le modèle des sévérités avant de valider l'ensemble. Un deuxième message est que les modèles bâtis sur les distributions de valeurs extrêmes telles que les Pareto surestime- raient trop le capital de réserve. À l'opposé, celui calculé en employant une distribution lognormale unique pour toutes les observations de pertes serait sous-estimé. Par contre, une conception avec une lognormale tronquée semble représenter choix raisonnable.

Ces résultats vont dans le même sens que ceux de Dutta et Perry (2008). En effet, ces auteurs trouvent que les distributions de type valeurs extrêmes sont celles dont les calculs donneraient trop souvent des capitaux de réserve incohérents (dépassant 10% du total des actifs). De l'autre côté, ils trouvent que le modèle basé sur une log-logistique serait l'un des plus cohérents en calcul de capital réglementaire du risque opérationnel. La log-logistique ayant une queue un peu plus épaisse que la lognormale, il serait intéressant d'étudier son comportement au voisinage des hauts quantiles par rapport aux propositions 1 et 3, comme fait dans ce chapitre. Elle serait, probablement, plus intéressante que la lognormale tronquée, sans le souci d'avoir à identifier un seuil optimal pour la troncature.

Par ailleurs, la méthodologie conçue pour mesurer l'amplitude des périodes de *stress testing* s'imbrique dans l'ensemble des développements de ce chapitre. La magnitude mesurée est de 5,3 pour la période des grandes pertes opérationnelles de juillet 2007 à mars 2009. Cette technique de mesure peut faciliter grandement l'estimation de la *sVaR* pour le risque opérationnel des banques, ce qui pourrait ouvrir une voie intéressante pour les recherches futures.

Enfin, le nouveau *backtesting* développé s'appliquant aux tests de la fréquence des dépassements de la VaR, une extension aux tests d'indépendance des dépassements, tels que ceux de Christoffersen (1998) et Engle et Manganelli (2004), serait une étape importante pour compléter cet outil.



## Chapitre 5

### Conclusion générale

Cette conclusion sera relativement courte, du moment que nous avons établi une conclusion individuelle pour chacun de nos chapitres de développement. Nous ferons ici un lien de consolidation des contributions. Dans le chapitre introduction, l'état des lieux succinct nous a conduits à montrer qu'il y a un problème important touchant la modélisation du risque opérationnel. Le calcul du capital réglementaire optimal souffrirait d'une fragilité qui fait que les montants calculés peuvent être instables et aberrants. Trois causes principales sont examinées en continu par les chercheurs : la qualité relativement mauvaise des données des pertes opérationnelles, l'inadéquation probable de certains modèles utilisés, et la présence de biais pouvant affecter les estimations. En outre, une difficulté majeure consiste en l'inefficacité des tests de validation *backtesting* des modèles du risque opérationnel.

Un premier message important est que les données de pertes de la période 1994-2000 ne conviendraient pas pour modéliser des pertes externes. Leurs distributions des sévérités et des fréquences seraient trop dépendantes l'une de l'autre. Ceci viole une hypothèse principale de la modélisation *AMA* de Bâle II. Nous croyons que beaucoup de problèmes soulevés dans la littérature quant à l'instabilité des calculs du capital sont aggravés par l'utilisation de données comparables de cette période. Ce problème serait d'ailleurs relié à des pratiques que les gestionnaires des banques faisaient avant, justement, la réglementation du risque opérationnel (voir aussi Chernobai et Yildirim, 2008).

Derrière la « querelle » lognormale versus Pareto, le point positif est que nous savons que le capital réglementaire optimal est encadré par les deux types de modèles. Le problème est que cet intervalle est trop grand pour être utile, sauf pour activer les efforts des chercheurs et des praticiens afin de réduire cet écart. D'autre part, la procédure de *backtesting* doit avoir le dernier mot pour valider ou écarter les modèles. Si nous pou-

vons avoir plus confiance en un modèle, nous pouvons avancer pour envisager la mise en pratique de la méthode des scénarios de perte et du stress testing, conformément aux exigences de Bâle II. C'est un deuxième message sur lequel nous insistons ici.

Nous avons développé un outil novateur de *backtesting*, au chapitre précédent. Cette contribution nous a permis d'apporter un élément important montrant que les distributions relevant des valeurs extrêmes surestiment beaucoup le capital. Ceci est dans la ligne de Dutta et Perry (2008), Jobst et Gregoriou (2009), Dahan et Dionne (2010) et d'autres. Ceci justifie, en quelque sorte, le fait que nous ayons repris les modèles de sévérité et des fréquences de Dahan et Dionne (2010) afin de les enrichir, et ce, de deux extensions. La première est l'identification d'un biais occasionné par une hétérogénéité temporelle importante. En effet, nous avons documenté, aux chapitres 2 et 3, que les cycles économiques peuvent affecter les pertes opérationnelles au point d'engendrer un changement de régime dans ces données. Les périodes concernées sont relatives à la série des crises de dette des années 90, dont la crise de défaut de la Russie de 1998, et à la crise financière récente de 2007-2008. Ce biais peut causer une surestimation du capital de couverture en temps normal et inversement, une sous-estimation du capital par rapport aux pertes extrêmes enregistrées suite aux périodes de crise. Ce biais ne serait pas mineur, une estimation montre que son impact biaiserait le capital de 25 à 30%.

La deuxième extension des modèles Dahan et Dionne (2010) est d'inclure une mesure de l'exposition au risque opérationnel. Cette mesure et les développements faits autour représentent, au mieux de notre connaissance, une première dans la littérature du risque opérationnel. Une fois qu'elle est incluse dans les modèles des sévérités et des fréquences, elle en augmente le pouvoir de prédiction. Nous modélisons un pont direct de cette mesure, *IOP*, avec une dizaine de déterminants clés du risque de crédit, de marché et de liquidité.

Les avantages qu'offre la mesure *IOP* s'inscrivent dans l'ensemble des contributions de plusieurs manières. D'abord, un *scaling* plus cohérent avec l'intuition économique est possible. Une banque bien gérée, vu ses ratios de gestion, calculera un capital moins

cher qu'une banque de même taille que la première, mais moins bien gérée. De ce fait, un biais existe si seule la taille de la banque est prise en compte. En effet, le capital calculé aurait été le même pour les deux banques. Par conséquent, il aurait été surestimé pour la première, et sous-estimé pour la seconde. Les exemples d'estimation de ce biais montrent qu'il peut atteindre 30% de capital en trop, selon les performances de la gestion de la banque concernée. Notons que les deux extensions, l'inclusion du régime de Markov et de la mesure de l'exposition au risque opérationnel peuvent être modélisées ensemble. Il serait intéressant d'en évaluer le fonctionnement global, et surtout d'évaluer la correction simultanée de ces deux biais, si l'un ou l'autre peut affecter le calcul du capital de 25 à 30%.

En toute vraisemblance, les biais qui existent dans les données de pertes opérationnelles sont à très grand impact sur le capital. Peut-être, est-ce relié à la contamination des données dont parlent Nešlehová, Embrechts et Chavez-Demoulin (2006) ainsi que Dutta et Perry (2008), en discutant des causes possibles faisant que la moyenne de ces données semble être infinie. Par conséquent, l'identification et la correction des biais des données est une question fondamentale pour le futur de la recherche dans le risque opérationnel. C'est un troisième message auquel nous attirons une attention particulière.

Par ailleurs, rappelons qu'un *scaling* des données externes bien fait ne peut pas être évalué uniquement en comparant statistiquement les distributions. C'est à cause, encore une fois, de la rareté des données et leur qualité. La méthode des scénarios devrait combler ce vide. L'impact marginal de chaque scénario sur le capital calculé permet de mesurer l'écart du modèle de la banque par rapport à sa vraie exposition au risque. Si trop de scénarios tombent trop bas par rapport au capital initial, le *scaling* serait surestimé, et vice versa. Avec notre modèle reliant *IOP* aux déterminants identifiés, les professionnels de la banque sont en mesure de créer des scénarios complets, en employant les ratios de gestion comme leviers multiples. Le nouvel outil de *backtesting*, en facilitant grandement l'évaluation des scénarios, peut jouer un rôle central dans l'ajustement du modèle de la banque à sa vraie exposition au risque opérationnel.

D'autre part, nous pouvons faire du *stress testing* à partir d'une configuration macroéconomique extrême. La littérature est riche de méthodologies d'évaluation des forces de l'économie sur les ratios de gestion des risques conventionnels. La banque en mesure l'impact sur ses propres ratios et obtient son exposition *IOP*. Elle est donc en mesure de calculer son capital *sVaR* (*Stress Value at Risk*) correspondant à cette situation économique. Le *reverse stress testing* est également faisable. Un schéma intuitif est proposé dans le chapitre précédent. Ajoutons que notre modèle liant la mesure *IOP* aux ratios de gestion pourrait servir de base de mesure du risque de corrélation que Bâle III va exiger prochainement. Nous pensons que cela permettra d'ouvrir une voie pertinente dans la modélisation du *stress testing* du risque opérationnel.

Par ailleurs, nous lançons un quatrième et dernier message dans le sens qu'il est primordial de pouvoir valider individuellement le modèle des sévérités avant de valider l'ensemble. Une distribution de sévérité mal spécifiée ne peut donner qu'un modèle agrégé final mal spécifié.

À titre de robustesse quant à la stabilité de nos résultats et comme avenues d'amélioration, nous pensons aux pistes suivantes. Nous pourrions faire appel à une méthode différente de détection de régimes comme dans Maalaoui Chun *et al.* (2014). Il y a probablement d'autres enseignements à tirer si nous décortiquons l'existence des régimes dans la moyenne comme dans la volatilité, comme le permet cette méthode. Il serait intéressant également d'utiliser une technique différente pour le *scaling* des données en conduisant nos développements. Nous pensons à l'approche de changement de mesure proposée par Dutta et Babbel (2014), en combinant l'analyse de scénarios avec les données historiques. Concernant la nouvelle approche de *backtesting*, une extension aux tests d'indépendance des dépassements des VaR, tels que ceux de Christoffersen (1998) et Engle et Manganelli (2004), permettrait à cet outil de passer à une étape supérieure.

## Bibliographie

- ABDYMOMUNOV, A., BLEI, S. K. et ERGASHEV, B. (2011). Worst-Case Scenarios as a Stress Testing Tool for Risk Models. *Federal Reserve Banks - Federal Reserve Bank of Richmond*.
- ACHARYA, V. V., SCHNABL, P. et SUAREZ, G. (2013). Securitization without risk transfer. *Journal of Financial Economics*, 107(3):515–536.
- ALTMAN, E. I., BHARATH, S. T. et SAUNDERS, A. (2002). Credit ratings and the BIS capital adequacy reform agenda. *Journal of Banking and Finance*, 26(5):909–921.
- AMES, M., SCHUERMAN, T. et SCOTT, H. S. (2014). Bank Capital for Operational Risk : A Tale of Fragility and Instability. *Discussion Paper No. 763, Harvard Law School*, 1936-5349.
- ASHBAUGH-SKAIFE, H., COLLINS, D. W. et KINNEY, W. R. (2007). The discovery and reporting of internal control deficiencies prior to SOX-mandated audits. *Journal of Accounting and Economics*, 44(1):166–192.
- ASMUSSEN, S., BINSWANGER, K. et HØJGAARD, B. (2000). Rare events simulation for heavy-tailed distributions. *Bernoulli*, 6(2):303–322.
- BAI, J. (2003). Testing Parametric Conditional Distributions of Dynamic Models. *The Review of Economics and Statistics*, 85(3):531–549.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (BCBS) (2003). Sound Practices for the Management and Supervision of Operational Risk. *Bank For International Settlements (BIS)*, (February-2003):1–20.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (BCBS) (2004). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*. Numéro June-2004.

- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (BCBS) (2005). Update on work of the Accord Implementation Group related to validation under the Basel II Framework. *Bank For International Settlements (BIS)*, 4(January-2005):2–5.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (BCBS) (2006a). *Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. A Revised Framework. Comprehensive Version*. Numéro June-2006.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (BCBS) (2006b). The IRB Use Test : Background and Implementation. *Bank For International Settlements (BIS)*, 9(September-2006):1–5.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (BCBS) (2009). Principles for sound stress testing practices and supervision. *Bank For International Settlements (BIS)*, 92(May-2009):1182–1198.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (BCBS) (2011). *Revisions to the Basel II market risk framework – updated as of 31 December 2010*. Numéro December 2010.
- BAUM, L. E. et PETRIE, T. (1966). Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 1554–1563.
- BAUM, L. E., PETRIE, T., SOULES, G. et WEISS, N. (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 164–171.
- BAVISHI, V. B. (1993). International Accounting and Auditing Standards. *Princeton, NJ : CIFAR*.
- BIELL, L. et MULLER, A. (2013). Sudden crash or long torture : The timing of market reactions to operational loss events. *Journal of Banking and Finance*, 37(7):2628–2638.

- BINGHAM, N. H. (2007). Regular variation and probability : The early years. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200(2007):357–363.
- BÖCKER, K. et KLUPPELBERG, C. (2005). Operational VaR : a closed-form approximation. *RISK Magazine*, 18(12):90–93.
- BOROVKOV, A. A. et BOROVKOV, K. A. (2008). *Asymptotic analysis of random walks : Heavy-tailed distributions*. Numéro 118. Cambridge University Press.
- BOYD, J. H. et GERTLER, M. (1995). Are banks dead ? Or are the reports greatly exaggerated ? Rapport technique, National Bureau of Economic Research.
- BRANT, R. (1990). Assessing proportionality in the proportional odds model for ordinal logistic regression. *Biometrics*, 46(4):1171–1178.
- BRAZZALE, A. R., DAVISON, A. C. et REID, N. (2007). *Applied asymptotics : case studies in small-sample statistics*, volume 23. Cambridge University Press.
- BRECHMANN, E., CZADO, C. et PATERLINI, S. (2014). Flexible dependence modeling of operational risk losses and its impact on total capital requirements. *Journal of Banking and Finance*, 40:271–285.
- BREIMAN, L. (1965). On some limit theorems similar to the arc-sin law. *Theory of Probability and Its Applications*, 10(2):323–331.
- BULLA, J. (2011). Hidden Markov models with t components. Increased persistence and other aspects. *Quantitative Finance*, 11(3):459–475.
- CHAVEZ-DEMOULIN, V., DAVISON, a. C. et MCNEIL, a. J. (2005). Estimating value-at-risk : a point process approach. *Quantitative Finance*, 5(2):227–234.
- CHAVEZ-DEMOULIN, V., EMBRECHTS, P. et HOFERT, M. (2013). An extreme value approach for modeling operational risk losses depending on covariates. *Work. Pap., Dep. Math., ETH Zurich*.

- CHERNOBAI, A., JORION, P. et YU, F. (2012). The determinants of operational risk in US financial institutions. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 46(6):1683–1725.
- CHERNOBAI, A. et YILDIRIM, Y. (2008). The dynamics of operational loss clustering. *Journal of Banking and Finance*, 32(12):2655–2666.
- CHERNOBAI, A. S., RACHEV, S. T. et FABOZZI, F. J. (2008). *Operational risk : a guide to Basel II capital requirements, models, and analysis*, volume 180. John Wiley & Sons.
- CHISTYAKOV, V. P. (1964). A theorem on sums of independent positive random variables and its applications to branching random processes. *Theory of Probability & Its Applications*, 9(4):640–648.
- CHRISTENSEN, R. H. B. (2014). A Tutorial on fitting Cumulative Link Mixed Models with clmm2 from the ordinal Package. *cran. R-project.Org*.
- CHRISTOFFERSEN, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, 39(4):841–862.
- CLINE, D. et SAMORODNITSKY, G. (1994). Subexponentiality of the product of independent random variables. *Stochastic Processes and their Applications*, 49(93):75–98.
- COLLETAZ, G., HURLIN, C. et PÉRIGNON, C. (2013). The Risk Map : A new tool for validating risk models. *Journal of Banking & Finance*, 37(10):3843–3854.
- COPE, E. et LABBI, A. (2008). Operational loss scaling by exposure indicators : Evidence from the ORX database. *Journal of Operational Risk*, 3(4):25–45.
- COPE, E. W. (2011). Penalized likelihood estimators for truncated data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(1):345–358.
- COPE, E. W., PICHE, M. T. et WALTER, J. S. (2012). Macroenvironmental determinants of operational loss severity. *Journal of Banking and Finance*, 36(5):1362–1380.

- CRUZ, M. G., PETERS, G. W. et SHEVCHENKO, P. V. (2015). *Fundamental Aspects of Operational Risk and Insurance Analytics : A Handbook of Operational Risk*. John Wiley & Sons.
- DAHEN, H. et DIONNE, G. (2010). Scaling models for the severity and frequency of external operational loss data. *Journal of Banking and Finance*, 34(7):1484–1496.
- DAHEN, H., DIONNE, G. et ZAJDENWEBER, D. (2010). A practical application of extreme value theory to operational risk in banks. *Journal of Operational Risk*, (2):63.
- DANIELSSON, J., EMBRECHTS, P., GOODHART, C., KEATING, C., MUENNICH, F., RE-NAULT, O., SHIN, H. S. et OTHERS (2001). An academic response to Basel II. *Special Paper-LSE Financial Markets Group*.
- DE FONTNOUVELLE, P., DEJESUS-RUEFF, V., JORDAN, J. S. J. S. et ROSENGREN, E. S. (2006). Capital and Risk : New Evidence on Implications of Large Operational Losses. *Journal of Money, Credit, and Banking*, 38(7):1819–1846.
- DOWD, K. (2002). A bootstrap back-test. *Risk*, 15(10):93–94.
- DOWD, K. (2004). A modified Berkowitz back-test. *Risk*, 17(4):86–87.
- DOYLE, J., GE, W. et MCVAY, S. (2007). Accruals quality and internal control over financial reporting. *The Accounting Review*, Vol. 82, pp. 1141-1170, October 2007.
- DUTTA, K. K. et BABEL, D. F. (2014). Scenario analysis in the measurement of operational risk capital : a change of measure approach. *Journal of Risk and Insurance*, 81(2):303–334.
- DUTTA, K. K. et PERRY, J. (2008). A tale of tails : An empirical analysis of loss distribution models for estimating operational risk capital. *Federal Reserve Bank of Boston*, (212).
- ELBANNAN, M. A. (2009). Quality of internal control over financial reporting, corporate governance and credit ratings. *International Journal of Disclosure and Governance*, 6(2):127–149.

- ELLUL, A. et YERRAMILI, V. (2013). Stronger Risk Controls, Lower Risk : Evidence from U.S. Bank Holding Companies. *The Journal of Finance*, 68(5):1757–1803.
- EMBRECHTS, P. et GOLDIE, C. M. (1980). On closure and factorization properties of subexponential and related distributions. *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)*, 29(02):243–256.
- EMBRECHTS, P. et HOFERT, M. (2011). Practices and issues in operational risk modeling under Basel II. *Lithuanian Mathematical Journal*, 51(2):180–193.
- EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C. et MIKOSCH, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Finance and Insurance*, volume 33. Springer Science & Business Media.
- EMBRECHTS, P. et VERAVERBEKE, N. (1982). Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. *Insurance : Mathematics and Economics*, 1(1):55–72.
- ENGLE, R. F. et MANGANELLI, S. (2004). CAViaR : Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business and Economic Statistics*, 22(4):367–381.
- ERGASHEV, B. (2008). Should Risk Managers Rely on Maximum Likelihood Estimation Method While Quantifying Operational Risk ? *The Federal Reserve Bank of Richmond*, (704):1–23.
- ERGASHEV, B. a. (2011). A Theoretical Framework for Incorporating Scenarios into Operational Risk Modeling. *Journal of Financial Services Research*, 41(3):145–161.
- FAHLENBRACH, R., PRILMEIER, R. et STULZ, R. M. (2012). This time is the same : Using bank performance in 1998 to explain bank performance during the recent financial crisis. *The Journal of Finance*, 67(6):2139–2185.
- FILSON, D. et OLFATI, S. (2014). The impacts of Gramm-Leach-Bliley bank diversification on value and risk. *Journal of Banking and Finance*, 41:209–221.

- FOSS, S., KORSHUNOV, D. et ZACHARY, S. (2013). *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*. Springer.
- FRACHOT, A. et RONCALLI, T. (2002). Mixing internal and external data for managing operational risk. *Groupe de recherche opérationnelle, SSRN 1032525*, pages 1–7.
- FROOT, K. A. (2003). Bank capital and risk management : operational risks in context. *Conference Series ; the Federal Reserve Bank of Boston*.
- GANEGODA, A. et EVANS, J. (2013). A scaling model for severity of operational losses using generalized additive models for location scale and shape (GAMLSS). *Annals of Actuarial Science*, 7(01):61–100.
- GOMPERS, P., ISHII, J. et METRICK, A. (2003). Corporate governance and equity prices. *The Quarterly Journal of Economics*, 118(1):107–156.
- HAKENES, H. et SCHNABEL, I. (2011). Bank size and risk-taking under Basel II. *Journal of Banking and Finance*, 35(6):1436–1449.
- HAMILTON, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 357–384.
- HARRELL, F. E. (2001). *Regression modeling strategies*. Springer Science & Business Media.
- HARRELL, F. E. (2015). rms : Regression modeling strategies. R package. *cran. R-project.Org*, 17(version 4.3-1).
- HECKMAN, J. J. (1979). Sample selection bias as a specification error. *Econometrica*, 47:153–161.
- HERNÁNDEZ, L., TEJERO, J., SUÁREZ, A. et CARRILLO-MENÉNDEZ, S. (2014). Percentiles of sums of heavy-tailed random variables : beyond the single-loss approximation. *Statistics and Computing*, 24(3):377–397.

- HERRING, R. J. (2002). The Basel 2 approach to bank operational risk : Regulation on the wrong track. *The Journal of Risk Finance*, 4(1):42–45.
- JENSEN, J. (1906). Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica*, 30(1):175–193.
- JOBST, A. A. (2007). The treatment of operational risk under the New Basel framework : Critical issues. *Journal of Banking Regulation*, 8(4):316–352.
- JOBST, A. A. et GREGORIOU, G. N. (2009). Consistent Quantitative Operational Risk Measurement. *Operational Risk toward Basel III*, page 23.
- KASHYAP, A., RAJAN, R. et STEIN, J. (2008). Rethinking capital regulation. *In Federal Reserve Bank of Kansas City Symposium, Jackson Hole*.
- KAUFMANN, D., KRAAY, A. et MASTRUZZI, M. (2009). Governance matters VIII : aggregate and individual governance indicators, 1996-2008. *Policy Research Working Paper 4978*.
- KERSTEIN, J. et KOZBERG, A. (2013). Using Accounting Proxies of Proprietary FDIC Ratings to Predict Bank Failures and Enforcement Actions During the Recent Financial Crisis. *Journal of Accounting, Auditing and Finance*, 28(2):128–151.
- KINDELBERGER, C. P. et ALIBER, R. Z. (2005). *Manias, panics and crashes : A history of financial crisis*. Palgrave Macmillan.
- KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H. et WILLMOT, G. E. (2012). *Loss models : from data to decisions*, volume 715. Wiley, 1998-2012.
- KOROLKIEWICZ, M. W. et ELLIOTT, R. J. (2007). *Smoothed parameter estimation for a hidden Markov Model of credit quality*. Springer.
- KROSZNER, R. S. et STRAHAN, P. E. (2013). Regulation and deregulation of the US banking industry : Causes, consequences and implications for the future. *In Economic Regulation and Its Reform : What Have We Learned ?* University of Chicago Press.

- KUPIEC, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3(2):73–84.
- LA PORTA, R., BOTERO, J. C., DJANKOV, S., Lopez-de SILANES, F. et SHLEIFER, A. (2004). The Regulation of Labor. *Quarterly Journal of Economics*, 119:1182–1339.
- LA PORTA, R., Lopez-de SILANES, F. et SHLEIFER, A. (2006). What works in securities laws ? *The Journal of Finance*, 61(1):1–32.
- LAEVEN, L. et LEVINE, R. (2009). Bank governance, regulation and risk taking. *Journal of Financial Economics*, 93(2):259–275.
- LAMBRIGGER, D. D., SHEVCHENKO, P. V. et WÜTHRICH, M. V. (2007). The quantification of operational risk using internal data, relevant external data and expert opinion. *Journal of Operational Risk*, 2(3):3–27.
- LEWIS, C. et LANTSMAN, Y. (2005). What is a Fair Price to Transfer the Risk of Unauthorized Trading ? : A Case Study on Pricing Operational Risk.
- LIECHTY, J. (2013). Regime Switching Models and Risk Measurement Tools. *Handbook on Systemic Risk*, page 180.
- MAALAOUI CHUN, O., DIONNE, G. et FRANCOIS, P. (2014). Detecting Regime Shifts in Credit Spreads. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 49(5-6):1339–1364.
- MEISSNER, G. (2014). *Correlation Risk Modeling and Management, + Website : An Applied Guide Including the Basel III Correlation Framework - With Interactive Models in Excel / VBA*. Wiley Finance. Wiley.
- MITRA, S. et DATE, P. (2010). Regime switching volatility calibration by the Baum–Welch method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(12):3243–3260.
- MOOSA, I. et SILVAPULLE, P. (2012). An empirical analysis of the operational losses of Australian banks. *Accounting and Finance*, 52(1):165–185.

- MOOSA, I. A. (2007). Operational risk : a survey. *Financial Markets, Institutions and Instruments*, (4).
- MOOSA, I. A. (2011). Operational risk as a function of the state of the economy. *Economic Modelling*, 28(5):2137–2142.
- NA, H., VAN DEN BERG, J., MIRANDA, L. C. et LEIPOLDT, M. (2006). An econometric model to scale operational losses. *The Journal of Operational Risk*, 1(2):11–31.
- NAGAFUJI, T. (2006). Quantification of Operational Risks Using Scenario Data. *Operational Risk Scenario Analysis Workshop, the Bank of Japan, Tokyo*.
- NEŠLEHOVÁ, J., EMBRECHTS, P. et CHAVEZ-DEMOULIN, V. (2006). Infinite mean models and the LDA for operational risk. *Journal of Operational Risk*, 1(1):3–25.
- OPDYKE, J. J. D. et CAVALLO, A. (2012). Estimating Operational Risk Capital : the Challenges of Truncation, the Hazards of MLE, and the Promise of Robust Statistics. *Journal of Operational Risk*, 7(3):3–90.
- OYAMA, T. (2006). Operational Risks Management and Scenario Analysis. *Operational Risk Scenario Analysis Workshop, the Bank of Japan, Tokyo*.
- PERLINE, R. (2005). Strong, weak and false inverse power laws. *Statistical Science*, pages 68–88.
- PETERS, G. W. et SHEVCHENKO, P. V. (2014). *Advances in Heavy Tailed Risk Modeling : A Handbook of Operational Risk*. Wiley New York.
- POWER, M. (2005). The invention of operational risk. *Review of International Political Economy*, 12(4):577–599.
- PSARADAKIS, Z. et SOLA, M. (1998). Finite-sample properties of the maximum likelihood estimator in autoregressive models with Markov switching. *Journal of Econometrics*, 86(2):369–386.

- QUELL, P. et MEYER, C. (2011). *Risk Model Validation : A Practical Guide to Addressing the Key Questions*. Risk Books.
- RABINER, L. (1989). A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. *Proceedings of the IEEE*, 77(2):257–286.
- REBONATO, R. (2010). *Plight of the fortune tellers : why we need to manage financial risk differently*. Princeton University Press.
- RESNICK, S. I. (1999). Activity periods of an infinite server queue and performance of certain heavy tailed fluid queues. *Queueing Systems*, 33(1999):43–71.
- RESNICK, S. I. (2007). *Heavy-tail phenomena : probabilistic and statistical modeling*. Springer Science & Business Media.
- RIGBY, B., STASINOPOULOS, M., HELLER, G. et VOUDOURIS, V. (2014). The Distribution Toolbox of GAMLSS. *gamlss.org*.
- ROSENGREN, E. (2006). Scenario Analysis and the AMA. *Operational Risk Scenario Analysis Workshop, the Bank of Japan, Tokyo*.
- SAKALO, T. (2011). A framework for uncertainty modeling in operational risk. *Journal of Operational Risk*, 6(4).
- SARKISYAN, A. et CASU, B. (2013). Retained Interest in Securitisations and Implications for Bank Solvency. *European Central Bank Working Paper, NO 1538 / 2013*.
- SHEVCHENKO, P. V. et WÜTHRICH, M. (2006). The structural modelling of operational risk via Bayesian inference : Combining loss data with expert opinions. *The Journal of Operational Risk*, 1(3):3–26.
- SHIH, J., SAMAD-KHAN, A. et MEDAPA, P. (2000). Is the size of an operational loss related to firm size ? *Operational Risk*.
- SIU, K. B. et YANG, H. (2007). Expected shortfall under a model with market and credit risks. *In Hidden Markov Models in Finance*, pages 91–100. Springer.

- SIU, T. K. (2007). On fair valuation of participating life insurance policies with regime switching. *In Hidden Markov Models in Finance*, pages 31–43. Springer.
- SMITH, R. L. (2003). Statistics of extremes, with applications in environment, insurance, and finance. *Extreme values in finance, telecommunications, and the environment*.
- STULZ, R. M. (2008). Risk management failures : What are they and when do they happen ? *Journal of Applied Corporate Finance*, 20(4):39–48.
- VISSER, I. et SPEEKENBRINK, M. (2010). depmixS4 : An R-package for hidden Markov models. *Journal of Statistical Software*, 36(7):1–21.
- WERNZ, J. (2014). Risk Modeling and Capital : Operational Risk. *In Bank Management and Control*, pages 81–92. Springer.
- ZHANG, Y., WU, M. et MI, Q. (2012). Operational risk management of commercial bank of China based on the revenue model of the CAPM model. *Advances in Applied Economics and Finance*, 1(2):133–137.
- ZHOU, X., DURFEE, A. V. et FABOZZI, F. J. (2014). On Stability of Operational Risk Estimates by LDA : From Causes to Approaches. *SSRN 2486279*.
- ZUCCHINI, W. et MACDONALD, I. L. (2009). *Hidden Markov models for time series : an introduction using R*. CRC Press.



