

HEC MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE MAÎTRISE
ÈS SCIENCES EN GESTION (M. Sc.)

Couverture globale en présence de
frais de transaction : analyse de la
stratégie

Edith Viau

12 novembre 2017

Résumé

La méthode de couverture dite globale introduite par Hodges et Neuberger (1989) [6] permet de prendre en compte les frais de transaction encourus lors du rebalancement du portefeuille, contrairement à la méthode de couverture delta-neutre telle que développée par Black et Scholes (1973) [1]. De plus, le marché Black-Scholes est un marché complet, alors qu'un marché est incomplet en présence de frais de transaction. Ceci justifie le fait de devoir modifier la couverture delta-neutre pour pouvoir prendre en compte cette réalité.

Une adaptation de la méthode de couverture globale inspirée de Godin (2016) [5] est considérée au sein du présent mémoire. La solution du problème de couverture y est effectuée à l'aide de la programmation dynamique.

Le présent mémoire porte sur l'analyse qualitative et quantitative de la stratégie obtenue par la programmation dynamique appliquée à la vente d'une option d'achat européenne, en présence de frais de transaction fixes et proportionnels.

Une des conséquences de l'utilisation de la méthode globale est que la quantité de sous-jacent à transiger dépend du portefeuille de couverture.

Enfin, le mémoire se poursuit avec des exemples de stratégies obtenues pour des trajectoires potentielles, permettant de classifier les frais de transaction selon leur effet sur la décision de rebalancement : plus les frais sont élevés, plus il faut attendre d'être près de l'échéance avant de procéder à un rebalancement.

Ce mémoire est d'intérêt pour les personnes oeuvrant dans la couverture de portefeuille, mais aussi pour celles désirant décider des frais de transaction optimaux permettant de maximiser les échanges.

Mots-clés : Gestion de risques, couverture de risques, ingénierie financière, programmation dynamique, modélisation du risque, coûts de transaction, modélisation mathématique, recherche quantitative, analyse quantitative.

Remerciements

Je tiens à remercier ma directrice, professeure Michèle Breton, pour ses conseils ainsi que pour ses suggestions et ses commentaires. J'aimerais souligner le fait que ce mémoire serait tout-à-fait autre sans son apport et celui de mon co-directeur, professeur Frédéric Godin. Merci pour toutes les heures passées sur ce projet, pour votre analyse fine et votre souci du détail ainsi que pour m'avoir fait profiter de votre grande expérience dans le milieu de la recherche.

Merci aussi à Yaovi Gassesse Siliadin pour son aide à la compréhension de la méthode d'interpolation spectrale durant la première partie du projet.

Je remercie aussi le Fonds de Recherche du Québec Nature et Technologie (FRQNT) et le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) pour le soutien financier accordé, soutien nécessaire à la complétion de mes études de maîtrise.

Merci à tout le personnel oeuvrant au Laboratoire de calcul et d'exploitation des données (LACED) pour m'avoir permis d'utiliser leurs installations ainsi que pour le temps et le soutien accordés à mes travaux.

Enfin, je remercie mes parents, ma famille et mes amis pour leur support tout au long de mes études, pour les encouragements et pour avoir cru en ce projet.

Merci.

Table des matières

1	Revue de littérature	6
2	Description du problème et de la solution	9
3	Présentation des principaux résultats	15
4	Analyse numérique des résultats	17
5	Exemples de trajectoires possibles : évolution de la couverture	57
6	Conclusion	74
7	Annexe	78

Introduction

"I have the result, only I do not yet know how to get to it." - Gauss

Prenant vraisemblablement place parmi les contrats transigés sur les premières Bourses européennes (17ième siècle), les options sont des produits financiers dont la valeur est contingente à celle d'un second actif, appelé l'actif sous-jacent. Les développements modernes ayant trait à l'évaluation de ces contrats ont donné à la communauté financière des méthodes permettant de calculer analytiquement le prix d'une option européenne, la plus connue étant celle de Black et Scholes (1973) [1]. Dans ce même article, il est expliqué comment il est possible de couvrir un portefeuille composé d'options par la méthode dite de la couverture delta-neutre, sous l'hypothèse d'absence de frais de transaction.

Depuis les trente dernières années s'est développée une variété de techniques quantitatives de couverture de portefeuille prenant en compte les frais de transaction, en commençant par Leland (1985) [7], ainsi que des méthodes globales, c'est-à-dire prenant en compte l'entièreté de la période de couverture, celles-ci commençant avec Hodges et Neuberger (1989) [6]. La méthode que nous présentons est une méthode globale avec des frais de transaction, adaptée de la méthode sans frais de transaction de François et al.(2014) [4]. Une variation sur le même thème est donnée dans Godin (2016) [5].

Dans ce mémoire, nous sommes intéressés à analyser la stratégie de couverture optimale obtenue par la méthode de couverture globale. Plus particulièrement, nous désirons répondre à la question suivante : comment évolue la stratégie globale de couverture au fil du temps, pour une situation donnée ? En d'autres mots, de quelle façon la décision optimale de l'agent effectuant la couverture diffère dépendamment du temps restant avant l'échéance ?

Ce mémoire est constitué de six sections, la première étant la présente introduction. Pour la deuxième section, une brève revue de littérature permet de jeter les bases de notre démarche et de la situer dans l'univers de la recherche dans laquelle celle-ci évolue. La troisième section est composée d'une explication et d'une description mathématique du problème de couverture ainsi que de la solution apportée par la programmation dynamique.

La quatrième section présente les principaux résultats des investigations numériques réalisées. La cinquième section contient les résultats numériques obtenus ainsi qu'une analyse qualitative de ceux-ci. La sixième section présente une analyse de la stratégie obtenue pour trois trajectoires possibles de l'actif sous-jacent. Suivent la conclusion ainsi que la bibliographie. Le mémoire se termine par une annexe où sont expliqués les différents chemins empruntés afin d'améliorer le temps d'exécution du programme, ainsi que des figures venant compléter l'analyse.

1 Revue de littérature

Depuis l'avènement de la formule de Black-Scholes [1], plusieurs critiques ont été émises à son endroit, notamment sur la question du rebalancement continu en présence de frais de transaction. En effet, ceux-ci rendent invalide l'argument d'arbitrage utilisé pour la réplique et l'évaluation d'une option. Cet argument dit que la valeur d'une option doit être égale au prix du portefeuille de réplique. Un rebalancement continu du portefeuille de réplique composé d'un actif sans risque et d'un actif risqué entraîne des frais de transaction qui sont potentiellement infinis.

Cette problématique, expliquée par Leland (1985) [7], y est défendue de la façon suivante : au lieu d'un rebalancement continu, pourquoi ne pas effectuer un rebalancement à intervalles définis ? Les frais de transaction sont alors bornés. L'inconvénient porte alors sur les erreurs de réplique : celles-ci seront d'autant plus petites que les intervalles sont rapprochés. Or, plus il y a de rebalancements, plus les frais augmenteront. Leland (1985) [7] propose une méthode de couverture qui apporte un changement à la volatilité utilisée dans la méthode du delta proposée par Black Scholes. Cette nouvelle méthode a certains avantages, notamment que les coûts de transaction sont bornés, que la réplique considère les frais de transaction et que la stratégie proposée coïncide vers la méthode de Black Scholes lorsque les frais de transaction tendent vers zéro.

La méthode proposée par Leland (1985) [7] a un défaut, souligné par Zhao et Ziemba (2003) [15]. Dans certains cas, la stratégie de couverture est triviale : il suffit d'avoir une part de l'actif sous-jacent en sa possession, et ce, peu importe la valeur des frais de transaction. Le principal défaut de cette stratégie est que la partie ayant vendu l'option et désirent se couvrir est complètement exposée aux variations dans la valeur de l'actif sous-jacent. Après avoir énoncé ce point, Zhao et Ziemba (2003) [15] viennent nourrir la discussion en proposant une méthode basée sur la domination des préférences (*preference-domination*).

Hodges et Neuberger (1989) [6] sont les premiers à présenter formellement une méthode de couverture optimale basée sur la programmation dynamique,

en présence de frais de transaction variables. Le problème de maximisation de l'utilité est résolu grâce à l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. La méthode utilisée y est comparée avec celle de Leland (1985) [7].

Les auteurs Davis, Panas et Zariphopoulou (1993) [3] adaptent la solution proposée par Hodges et Neuberger (1989) afin de démontrer la validité des schémas d'approximation en temps discret basés sur l'arbre binomial afin de calculer la solution de problème en temps continu

Par la suite, Clewlow et Hodges (1997) [2] élargissent le contexte de la solution de Hodges et Neuberger (1989) [6] afin d'inclure des coûts fixes de transaction, en plus de comparer la performance de la stratégie obtenue à celle d'autres stratégies par le biais d'une simulation. Cette étude comparative est continuée par Martellini et Priaulet (2002) [8].

De son côté, Valeri Zakamouline a écrit plusieurs articles sur la question de la couverture globale en présence de frais de transaction. Zakamouline (2006) [12] se penche sur l'extension à des coûts fixes et proportionnels de la stratégie d'utilité globale de Davis, Panas et Zariphopoulou (1993) [3] ainsi que sur la méthode asymptotique développée dans Whalley et Wilmott (1994) [9]. Zakamouline (2005) [10], pour sa part, continue la réflexion en comparant deux méthodes de couverture globale avec coûts de transaction, la première étant une approximation de la méthode basée sur l'utilité, où il en obtient une forme fermée; la seconde est une méthode d'optimisation de paramètres de la stratégie de couverture dans un contexte de compromis entre le risque et les rendements.

Dans Zakamouline (2006a) [11], l'auteur présente une approximation analytique efficace de la stratégie de couverture optimale pour une option d'achat européenne, avec coûts de transaction, alors que Zakamouline (2006b) [13] se penche sur la question de la couverture globale lorsqu'on possède un portefeuille d'options.

Enfin, Zakamouline (2009) [14] se pose la question de la meilleure stratégie de couverture en présence de coûts de transaction et ce, lorsque l'on prend en compte la position prise sur l'option à couvrir, ainsi que les préférences de risque de l'institution pour laquelle est mise en place la couverture, c'est-à-dire l'institution ayant vendu l'option.

La contribution de ce mémoire à l'approche de couverture globale basée sur la programmation dynamique est principalement de fournir une analyse qualitative et quantitative des stratégies obtenues, ainsi que d'observer les décisions prises par le programme dynamique sur des trajectoires simulées.

2 Description du problème et de la solution

Commençons par décrire le problème à résoudre avant de procéder à la description mathématique de celui-ci ainsi que de la solution proposée.

Une option d'achat est un contrat donnant le droit mais non l'obligation d'acheter une quantité donnée d'un actif sous-jacent, à un prix d'exercice donné. Il est dit que nous exerçons une option lorsque nous décidons de nous prévaloir de notre droit d'exercice. Les options peuvent être exercées à différents moments : une option dite européenne peut être exercée uniquement à l'échéance, alors qu'une option dite américaine peut être exercée à tout moment avant l'échéance. Comme nous prenons pour acquis que les intervenants sur le marché cherchent à maximiser leurs profits, il en découle que la valeur à l'échéance de l'option est donnée par $\max\{S_T - K; 0\}$, où S_T est la valeur de l'actif sous-jacent à l'échéance T et K est le prix d'exercice convenu lors de l'écriture du contrat d'option d'achat. En d'autres mots, le détenteur de l'option exercera son option uniquement si le prix S_T auquel il peut vendre l'actif sous-jacent est plus élevé que le prix K auquel il peut se le procurer.

Il est important pour le vendeur de l'option de répliquer celle-ci avec un portefeuille de couverture : en d'autres mots, d'être en mesure de couvrir la valeur de l'option par un portefeuille donné. Ce portefeuille est appelé le portefeuille de couverture ou encore, la couverture.

Dans ce mémoire, nous nous plaçons dans la position de la personne ayant vendu l'option et désirant se couvrir. Ainsi, le portefeuille de couverture est donc notre portefeuille de couverture, ou encore, notre couverture.

Une couverture est une forme d'assurance qui nous permet d'être en mesure de remplir notre partie du contrat. Dans ce cas-ci, le but est double : d'une part, l'objectif de la couverture est d'avoir un portefeuille ayant une valeur suffisamment élevée afin de nous permettre d'acheter la ou les parts nécessaires d'actif sous-jacent à l'option dans le but de les vendre au détenteur de l'option si celui-ci décide d'exercer l'option. D'autre part, il s'agit d'effectuer cette couverture de façon optimale par rapport au critère retenu, généralement une combinaison du risque encouru et du coût de la couverture.

Il existe plusieurs stratégies de couverture. Dans ce mémoire, nous ne discuterons que de la couverture dite delta-neutre (*delta hedging*), introduite par Black et Scholes (1973) [1], et de la couverture globale telle qu'introduite par Hodges et Neuberger (1989) [6].

La stratégie de couverture delta-neutre consiste à acquérir une quantité de l'actif sous-jacent équivalente à l'impact d'une variation marginale du prix du sous-jacent sur la valeur de l'option. Ainsi, toute perte sur la position en option est compensée par un gain sur la position en actif. Lorsque cette couverture est effectuée en temps continu et en absence de frais de transaction, nous obtenons une couverture parfaite. En pratique, il est impossible d'effectuer un rebalancement continu, sans oublier qu'il nous serait alors impossible d'obtenir une borne pour les frais de transaction. Ce sont là deux des raisons nous poussant à développer des méthodes alternatives de couverture.

La couverture globale telle qu'introduite par Hodges et Neuberger (1989) [6] se base sur la programmation dynamique. La méthode consiste à identifier les variables d'état affectant la valeur de notre portefeuille à échéance et de choisir une fonction de pénalité qui viendra mesurer la satisfaction éprouvée face à l'état final de notre couverture. Ce qui nous importe, c'est la qualité de notre couverture à l'échéance. Au sein de cette méthode, c'est le risque de l'erreur terminale qui est considéré et optimisé, et qui est considéré dans le présent mémoire. Cette couverture n'est pas invalidée par le caractère discret de l'implémentation, en plus de s'adapter aisément à la présence de frais de transaction.

Modèle de marché

Nous supposons un marché incomplet composé d'un actif sans risque et d'un actif risqué. De plus, il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage. L'actif sans risque est un compte sur le marché monétaire avec un taux d'intérêt constant r . Sa valeur à la date t , pour une unité, est dénotée par B_t . L'actif risqué est l'actif sous-jacent à l'option d'achat écrite par une entité commerciale donnée. La valeur de l'actif risqué est dotée de la propriété de Markov. Le prix d'une unité de l'actif risqué à la date t est dénoté par S_t . Enfin, la

valeur de l'option à couvrir à la date t est dénotée par C_t . Le marché évolue de façon continue, alors que les observations et les décisions sont effectuées à dates discrètes, notées t_n où $n = 0, \dots, N$ et $t_N = T$.

Le processus suivi par l'actif sans risque est le suivant :

$$B_t = \exp(rt).$$

L'évolution de l'actif risqué est décrit par un processus stochastique, dont la valeur à la date t_n est donnée par S_{t_n} . L'information disponible aux investisseurs est décrite par la filtration engendrée par le processus stochastique S , notée G . Nous avons alors $G_{t_n} = \sigma(S_{t_0}, \dots, S_{t_n})$, où $\sigma(S_{t_n})$ désigne la sigma-algèbre engendrée par la variable aléatoire S_{t_n} .

La composition du portefeuille de couverture entre la date t_{n-1} et la date t_n , immédiatement avant la décision de rebalancement prise à t_n , est représentée par le vecteur (q_n, p_n) . Ici, p_n représente le nombre d'unités de l'actif sans risque et q_n , le nombre d'unités de l'actif risqué. Une stratégie de couverture (q, p) est une séquence $\{(q_n, p_n)\}, n = 0, \dots, N$. Pour être admissible, une stratégie de couverture doit être prévisible par la filtration G et doit être auto-financée. Nous noterons l'ensemble des stratégies de couverture admissibles par Q .

Il y a des frais pour transiger l'actif sous-jacent. Afin de refléter les diverses façons de calculer les frais de transaction, ceux-ci comportent une partie fixe f_1 , une partie variable, f_2 et une partie proportionnelle, f_3 . Ils sont donnés par l'équation suivante, à la date t_n :

$$F_n(q_n, q_{n+1}) = f_1 1_{\{q_n \neq q_{n+1}\}} + f_2 |q_n - q_{n+1}| + f_3 S_{t_n} |q_n - q_{n+1}|.$$

Comme nous ne nous intéressons qu'aux stratégies de couverture auto-financées, nous devons avoir :

$$S_{t_n} q_{n+1} + B_{t_n} p_{n+1} + F_n = S_{t_n} q_n + B_{t_n} p_n.$$

Pour tout $n < N$, la valeur du portefeuille est donnée par :

$$v_n = S_{t_n}q_n + B_{t_n}p_n.$$

La valeur du portefeuille à la date t_n est donc :

$$v_n = v_0 + \sum_{i=1}^n (p_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + q_i(S_{t_i} - S_{t_{i-1}}) - F_{t_{i-1}}).$$

Équation de Bellman

Plusieurs critères peuvent être utilisés pour caractériser une stratégie de couverture optimale. Certains de ces critères sont basés sur une pénalisation de la différence entre la valeur du portefeuille de couverture et celle de l'option. Nous choisissons de considérer un critère global basé sur l'erreur terminale de la couverture caractérisée par la différence entre la valeur de l'option et la valeur du portefeuille de couverture à échéance T .

Dans le cas d'une option européenne, ce critère prend la forme suivante :

$$\min_{q \in Q} E [g(C_T, v_T)]. \quad (1)$$

Ici, E est l'espérance, q est une stratégie de couverture, Q est l'ensemble des stratégies de couvertures admissibles et g est une fonction de pénalité à définir. Nous avons aussi C_T , la valeur de l'option à l'échéance T ainsi que v_T , la valeur du portefeuille à l'échéance T .

Dans ce mémoire, nous analyserons les résultats obtenus par la fonction semi-quadratique $g_1(C_T, v_T) = (\max\{C_T - v_T, 0\})^2$ ainsi que ceux obtenus par la fonction quadratique $g_2(C_T, v_T) = (C_T - v_T)^2$. Pour la fonction semi-quadratique, si la valeur de l'option est plus élevée que la valeur du portefeuille, alors nous encaissons une perte et nous obtenons une pénalité positive d'autant plus grande que cette erreur est grande. Si la valeur de l'option est plus petite que la valeur du portefeuille, alors nous sommes en position d'acquérir de l'actif sous-jacent et la pénalité est nulle. Ainsi, le but n'est pas d'avoir une couverture parfaite où la valeur du portefeuille est équivalente à celle de l'option, mais bien de minimiser l'impact du montant déboursé à l'échéance. Une telle pénalité ne récompense pas les gains et vise donc à minimiser purement le risque. Nous considérerons les résultats obtenus par la fonction quadratique pour fins de comparaison.

Formulation de la solution par la programmation dynamique

Nous allons résoudre ce problème à l'aide de l'équation de Bellman.

Afin d'exprimer l'équation de Bellman en toute généralité quant à la valeur de l'actif sous-jacent, nous utiliserons le changement de variable suivant qui nous permet d'en extraire les rendements :

$$y_{t_n} = \log(S_{t_n}).$$

Soit $n = 0, \dots, N$. Dans le cas nous concernant, nous avons vendu une option d'achat européenne dont la valeur à l'échéance est $C_T = \max\{S_N - K, 0\}$. À partir de l'équation (1) et avec la pénalité semi-quadratique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \min_{q \in Q} \mathbb{E}[g(C_T, v_T)] &= \min_{q \in Q} \mathbb{E}[(\max\{C_T - v_N, 0\})^2] \\ &= \min_{q \in Q} \mathbb{E}[(\max\{\max\{S_T - K, 0\} - v_N, 0\})^2]. \end{aligned}$$

Dans Godin (2016) [5], il est démontré que la fonction valeur dépend de trois variables d'état, qui sont les suivantes :

- la valeur du portefeuille v_n ;
- la valeur de l'actif sous-jacent à la date t_n , donnée par S_{t_n} ;
- la décision de couverture passée, soit le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille de couverture avant le rebalancement, q_n .

Afin de calculer la fonction valeur au fil du temps, nous obtenons l'ensemble d'équations suivantes, à résoudre à rebours pour $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \psi_N(y_T, q_N, v_N) &= g_i(C_T, v_T), \\ \psi_n(y_{t_n}, q_n, v_n) &= \min_{q_{n+1}} \mathbb{E}[\psi_{n+1}(y_{t_{n+1}}, q_{n+1}, v_{n+1}) | y_{t_n}, q_n, v_n], \quad (2) \\ &\forall n \in (0, 1, \dots, N - 1). \end{aligned}$$

Pour chaque pas de temps n , nous obtenons une décision de couverture q_n donnée par :

$$q_{n+1} = \arg \min_{q_{n+1}} \mathbf{E} [\psi_{n+1}(y_{t_{n+1}}, q_{n+1}, v_{n+1}) | y_{t_n}, q_n, v_n], \quad (3)$$

$$\forall n \in (0, 1, \dots, N - 1).$$

La solution à la date initiale t_0 de cet ensemble d'équations est donnée par :

$$\psi_0(y_{t_0}, \mu_0, v_0) = \min_{q_{0:N} \text{ admissible}} \mathbf{E} [g_i(C_T, v_T)].$$

Ceci nous permet d'obtenir une stratégie de couverture auto-financée $q = \{q_n\}_{n=0}^N$, qui est celle résolvant le problème (1).

L'implémentation informatique de la solution par la programmation dynamique utilisée dans ce mémoire est celle donnée dans François (2014) [4].

3 Présentation des principaux résultats

Cette section se concentre sur la présentation des principaux résultats obtenus, retenus lors de notre analyse. Ces résultats sont expliqués de façon exhaustive dans les sections ultérieures. Ce présent survol permet de comparer plusieurs aspects rendant la méthode de couverture globale supérieure à la méthode delta-neutre.

Échéance et rebalancement

Premièrement, nous notons que l'attrait du rebalancement diminue au fur et à mesure que nous nous rapprochons de l'échéance de l'option et ce, uniquement lorsque nous sommes en présence de frais de transaction. En effet, plus nous sommes près de l'échéance, moins il y a de chances que nous observions de grandes variations dans la valeur de l'actif sous-jacent (moins celui-ci a le temps pour évoluer de façon à prendre une valeur drastiquement différente de sa valeur présente). Le risque se voit diminuer mais les frais ne changeant pas, il est donc moins intéressant de rebalancer notre portefeuille.

Ce résultat est appuyé par les analyses effectuées sur les figures 4, 8, 9, 12 et 13

Valeur du portefeuille et rebalancement

Du fait que la méthode globale prend en considération la valeur du portefeuille dans sa stratégie de couverture, il est possible que nous n'ayons pas besoin de nous procurer de l'actif sous-jacent afin de mettre en place une couverture lorsque la valeur du portefeuille est élevée.

Ce résultat est appuyé par les analyses effectuées sur les figures 2, 12 et 13.

Fréquence de rebalancement

Dans la sixième section, celle où nous présentons des exemples de stratégies obtenues pour différentes trajectoires de l'actif sous-jacent, nous observons qu'en présence de frais de transaction, nous rebalançons moins souvent

que lorsque nous sommes en absence de frais de transaction. En effet, nous tentons ainsi d'éviter de devoir payer les frais de transaction.

Ce résultat est appuyée par la différence de rebalancement entre les figures 19, 22, 25 et 28.

Quantité transigée lors du rebalancement

Dans la sixième section, une deuxième observation tient à la quantité d'actif sous-jacent qui est transigée lors des rebalancements. En effet, pour les deux méthodes globales, cette quantité changera selon le type de frais de transaction.

Dans le cas des frais fixes f_1 , nous observons que les changements à chaque rebalancement sont brusques, c'est-à-dire que nous ne révisons pas notre position après avoir transigé. Ce propos est illustré par la figure 23.

Dans le cas des frais variables f_2 , nous observons que les changements sont graduels, et qu'ils suivent les décisions prises par la méthode delta-neutre. En effet, les frais variables f_2 sont les frais les plus bas considérés dans ce mémoire. Ce propos est illustré par la figure 26.

Enfin, pour les frais proportionnels f_3 , nous voyons que nous ajustons progressivement notre couverture, plus lentement que pour la couverture delta-neutre. Les changements dans notre couverture sont graduels. Ce propos est illustré par la figure 29.

4 Analyse numérique des résultats

Dans ce mémoire, nous voulons analyser l'évolution du nombre de parts d'actifs risqué dans le portefeuille de couverture, et ce, pour des valeurs données des variables d'état. Nous commençons par exécuter le programme décrit précédemment (équation 2), puis nous allons observer les stratégies obtenues par celui-ci et ce, pour différentes combinaisons des variables d'état.

Pour cette expérimentation numérique, nous avons pris les valeurs suivantes pour les paramètres permettant de calculer la couverture delta-neutre : $r = 0.02$, $\sigma_{BS} = 0.1898$, $\mu_{BS} = 0.0124$. Ces valeurs sont celles obtenues dans François et al.(2014) [4]. Ici, σ_{BS} désigne la volatilité constante utilisée dans Black et Scholes (1973) [1] et où μ_{BS} désigne la dérive.

Le sous-jacent évolue selon un mouvement brownien géométrique avec les mêmes paramètres que pour le calcul de la couverture delta-neutre. Ces paramètres sont utilisés dans le calcul de la couverture delta-neutre ainsi que dans le calcul du mouvement de l'actif sous-jacent, donné par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu_{BS} - \frac{\sigma_{BS}^2}{2}\right)t + \sigma_{BS}W_t\right).$$

Ici, W_t suit un mouvement brownien.

Le rebalancement est hebdomadaire et il y a cinq rebalancements, i.e. nous sommes à six semaines avant l'échéance ($T = 6$).

Nous nous intéressons aux cas où l'option est hors de la monnaie ($S_{t_n} = 900$), à la monnaie ($S_{t_n} = 1000$), et dans la monnaie ($S_{t_n} = 1100$); aux cas où le nombre de parts d'actif risqué dans le portefeuille à la date précédente est nul ($q_n = 0$), partiel ($q_n = 0.5$) ou total ($q_n = 1$); ainsi qu'aux cas où la valeur du portefeuille est faible ($v_n = 1.4$), neutre ($v_n = 26.9$) ou élevée ($v_n = 104.2$). La valeur du portefeuille est décidée comme étant le prix obtenu par la formule de Black-Scholes pour une option arrivant à échéance dans 6 semaines et qui est, à l'émission, hors de la monnaie ($S_{t_0} = 900$), à la monnaie ($S_{t_0} = 1000$), ou dans la monnaie ($S_{t_0} = 1100$).

Les figures qui suivent se lisent de la façon suivante : le titre indique dans quelle situation nous sommes en rapport aux trois variables d'état et

inclut le prix d'exercice. Dans l'ordre, nous avons la valeur de l'actif sous-jacent, soit S_{t_n} , donnée dans le titre par actif sous-jacent ; le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement, soit q_n ; le prix d'exercice K ; et enfin, la valeur v_n du portefeuille, donnée par Ptf . L'axe horizontal est celui du temps, discrétisé (c'est-à-dire aux dates t_n) ; l'axe vertical est celui de la quantité d'unités de l'actif sous-jacent à transiger, soit $q_{n+1} - q_n$ (si ce nombre est positif, nous achetons ; s'il est négatif, nous vendons). Les étoiles représentent la couverture delta-neutre ; les points représentent la couverture globale obtenue avec la programmation dynamique avec fonction objective semi-quadratique, i.e. $\psi_N(y_T, \mu_N, v_N) = (\max\{C_T - v_N, 0\})^2$; les carrés représentent la couverture globale obtenue avec la programmation dynamique avec fonction objective quadratique, i.e. $\psi_N(y_T, q_N, v_N) = (C_T - v_N)^2$. Sur le graphique, en bas, sont indiqués le prix de l'option selon la formule de Black-Scholes pour la date t_n correspondante.

Afin de compléter l'analyse des stratégies de couverture calculées par le programme dynamique, nous effectuons une simulation de Monte-Carlo où la méthode de couverture delta-neutre et la méthode globale sont appliquées sur chacune des trajectoires du sous-jacent simulées. Nous avons appliqué les deux méthodes de couverture sur chacune des trajectoires obtenues lors d'une simulation, soit $M = 10000$ trajectoires du sous-jacent entre $t = 0$ et T . Ces simulations permettent entre autre le calcul des métriques suivantes.

Nous définissons la moyenne échantillonnale, sous simulation, de la somme des coûts de transaction (coût moyen) \bar{c} sur les vecteurs de frais F_n^i , $n = 1, \dots, N$ et $i = 1, \dots, M$ (i représentant l'itération de la simulation) par :

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1, \dots, M} (F_n^i)}{M}.$$

La pénalité moyenne semi-quadratique de couverture $e\bar{r}r_1$ sur les valeurs de portefeuilles v_T^i et les valeurs de l'option à l'échéance C_T^i est donnée par :

$$e\bar{r}r_1 = \frac{\sum_i g_1(C_T^i, v_T^i)}{M}.$$

La pénalité moyenne quadratique de couverture $e\bar{r}r_2$ sur les valeurs de

portefeuilles v_T^i et les valeurs de l'option à l'échéance C_T^i est donnée par :

$$e\bar{r}r_2 = \frac{\sum_i g_2(C_T^i, v_T^i)}{M}.$$

Les résultats obtenus sont présentés dans un tableau à la fin de la section sur l'analyse des stratégies obtenues.

Chaque coût moyen \bar{c} et chaque pénalité moyenne de couverture $e\bar{r}r_i, i \in \{1, 2\}$ est présentée comme un intervalle de confiance $[b, \delta]$ où b est l'estimation ponctuelle et δ est la quantité à ajouter ou à soustraire afin d'obtenir les bornes de l'intervalle de confiance. Ici, le paramètre α est égal à 0.05.

Cette section est organisée de la façon suivante : chaque sous-section traite d'un cas particulier de frais de transaction, pour un total de quatre sous-sections (absence de frais de transaction, présence de frais f_1 , présence de frais f_2 et présence de frais f_3). Chaque sous-section présente les résultats où la stratégie obtenue par la méthode de couverture globale diffère de la stratégie obtenue par la méthode de couverture delta-neutre. Chaque sous-section se termine par une analyse générale. Cette organisation nous permet de bien observer l'influence de chaque type de frais sur la stratégie de couverture.

Notons que nous nous plaçons dans la position de la personne ayant vendu l'option et désirant se couvrir, et que le portefeuille de couverture est donc notre portefeuille de couverture.

Absence de frais de transaction

Tout d'abord, nous considérons une version du programme dynamique sans frais de transaction ($f_1 = f_2 = f_3 = 0$) et où la seule source d'erreur de couverture pour la méthode delta-neutre est le rebalancement discret de la stratégie de couverture.

Comme nous sommes en absence de frais de transaction, la décision de couverture q_{n+1} ne dépend pas de la décision de couverture q_n , conditionnellement à S_{t_n}, v_{t_n} . Il peut être démontré formellement que la fonction valeur ne dépend pas de q_n en absence de frais de transaction.

Pour commencer, présentons un cas où la décision de couverture q_{n+1} obtenue par la méthode globale diffère de celle obtenue par la méthode de la couverture delta.

Option à la monnaie

Considérons une option à la monnaie où la valeur du sous-jacent ainsi que le prix d'exercice sont tous les deux de 1000\$.

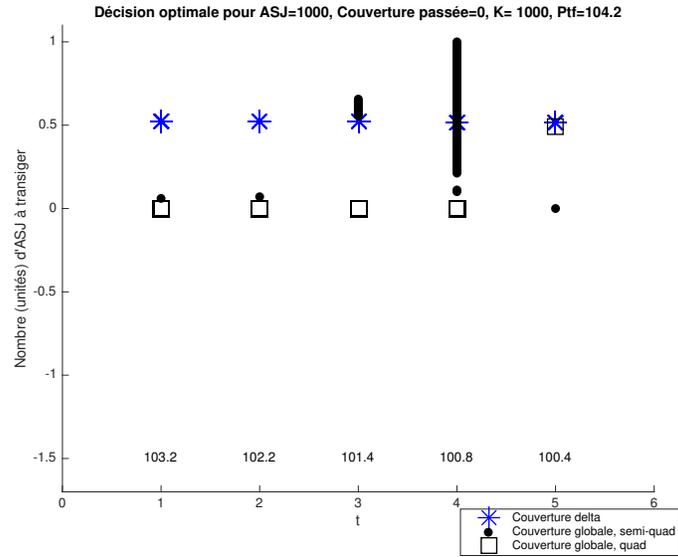


FIGURE 1 – Absence de frais de transactions, option à la monnaie, portefeuille ayant une valeur élevée. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Lorsque l'option est à la monnaie et que la valeur du portefeuille de réplcation est élevée (figure 1), la position sur le marché monétaire est suffisante pour surpasser la valeur de l'option à échéance avec très forte probabilité, et nous n'avons pas besoin de nous procurer une grande quantité d'actif sous-jacent pour nous couvrir. Effectivement, le capital investi dans le marché monétaire sera plus grand que la valeur de l'option avec une probabilité extrêmement grande. Comme la méthode delta-neutre ne tient pas compte de la valeur du portefeuille et requiert donc de détenir des parts du sous-

jacent afin de reproduire la variation de valeur de l'option, ceci explique la différence entre les deux courbes. Dans le cas de la méthode de couverture globale, nous ne rebalançons que très peu le portefeuille puisque nous avons un portefeuille avec une valeur suffisamment élevée pour nous couvrir. Nous désirons éviter le risque de voir la valeur de l'actif sous-jacent descendre, ce qui abaisserait la valeur de notre couverture si celle-ci était positive.

Cet argument est complété par les figures 33 et 34 situées en annexe. Sur la première figure (33), nous sommes à la monnaie et la valeur de notre portefeuille est faible, alors que sur la deuxième (34), nous sommes à la monnaie et la valeur de notre portefeuille est neutre. Dans ces deux cas, les méthodes globales concordent avec la méthode delta-neutre et nous mettons en place une couverture, c'est-à-dire que nous avons $q_{n+1} > q_n$. Ceci est dû à la valeur du portefeuille, qui n'est pas élevée.

Analyse générale, absence de frais de transaction

La stratégie obtenue par la méthode de couverture globale coïncide avec la stratégie obtenue par la méthode delta-neutre, sauf dans le cas où notre portefeuille a une grande valeur et que nous sommes à la monnaie (figure 1).

Pour ce qui est des résultats concernant les coûts moyens de transaction ainsi que la pénalité moyenne terminale, nous obtenons le tableau suivant :

TABLE 1 – Coûts moyens, pénalité moyenne de couverture - Comparaison des méthodes

Méthode de couverture	\bar{c}	$e\bar{r}r_1$	$e\bar{r}r_2$
Couverture delta-neutre	[0 ; 0]	[42.05 ; 0.81]	[75.71 ; 0.87]
Couverture globale, semi-quadratique	[0 ; 0]	[39.88 ; 0.72]	[80.14 ; 0.82]
Couverture globale, quadratique	[0 ; 0]	[42.01 ; 0.81]	[75.71 ; 0.87]

Nous voyons ici qu'en absence de frais de transaction, la pénalité moyenne de la méthode de couverture globale est plus petite que celle de la méthode delta-neutre.

Frais fixes f_1

Passons à l'analyse des stratégies obtenues en présence de frais fixes de transaction, soit $f_1 1_{\{q_n \neq q_{n+1}\}}$. Ici, nous posons $f_1 = 5$. Comme dans le cas où nous sommes en absence de frais de transaction, nous ne discuterons que des cas où la méthode delta-neutre et la méthode globale prennent des décisions différentes.

Couverture passée nulle

Commençons par analyser les cas où le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est nul.

Option à la monnaie

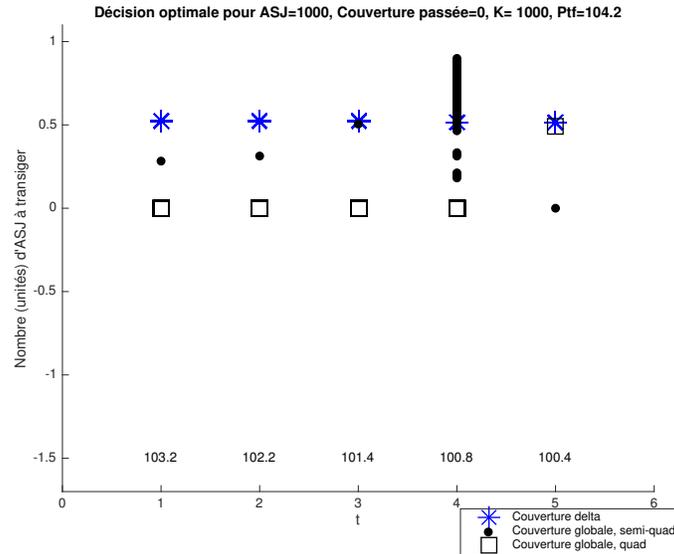


FIGURE 2 – Frais fixes f_1 , option à la monnaie, portefeuille ayant une valeur élevée, couverture passée nulle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option ; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre ; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Dans le cas où nous sommes à la monnaie (figures 41, 42, situées en annexe, et 2), nous préférons nous procurer une quantité positive d'actif sous-jacent afin de se couvrir, et ce, pour les deux méthodes. Le seul cas échappant à cette règle parmi les différentes valeurs de portefeuille considérées est le cas où nous avons une très grande valeur de portefeuille (figure 2). Alors, dans le cas de la méthode globale, nous n'acquérons pas d'actif sous-jacent car la position sur le marché monétaire a une valeur suffisamment élevée. Ceci est la même réflexion que dans le cas en absence de frais de transaction, où nous sommes à la monnaie et avec un portefeuille ayant une valeur élevée (figure 1). Ajoutons que le fait de ne rebalancer que très peu voire pas du tout nous permet d'économiser sur les frais de transaction.

Dans le cas avec une valeur de portefeuille élevée, nous acquérons une plus grande couverture lorsque nous utilisons la méthode globale avec objectif semi-quadratique que lorsque nous suivons la méthode globale à objectif quadratique. Dans le cas (figure 2) de la méthode quadratique, nous ne nous couvrons pas car si l'actif sous-jacent prend de la valeur avant l'échéance, alors le portefeuille prendra d'autant plus de valeur, amenant potentiellement la fonction objectif à prendre une valeur positive si v_T est plus grand que c_T . Dans le cas semi-quadratique, si v_T est plus grand que c_T , la fonction objectif prendra la valeur de zéro. Ainsi, nous n'avons pas besoin de prendre en compte le cas où l'actif sous-jacent perd de sa valeur. Il est ici plus important de se protéger contre le cas où l'actif sous-jacent gagne en valeur, et de mettre en place une couverture.

La réflexion expliquant l'inversion des rôles au dernier pas de temps va comme suit : dans le cas semi-quadratique, nous ne nous couvrons pas ($q_{n+1} = 0$) car nous sommes à la monnaie et que nous jugeons notre couverture suffisante puisque notre portefeuille a une valeur très élevée ; dans le cas quadratique, nous nous couvrons ($q_{n+1} = 0.5$) car si l'actif perd en valeur, alors notre valeur de portefeuille sera plus faible si nous possédons de l'actif sous-jacent que si notre portefeuille était composé uniquement d'actifs sur le marché monétaire. Ainsi, la fonction objectif quadratique sera minimisée. Par ailleurs, si l'actif sous-jacent gagne en valeur, alors notre portefeuille contenant une certaine quantité d'actif sous-jacent suivra le gain et il nous

sera plus facile de minimiser la fonction objectif quadratique, à échéance.

Ajoutons que pour la méthode globale quadratique, si nous avons une valeur trop élevée de portefeuille, la pénalité quadratique sera elle aussi grande. La méthode globale quadratique tente de faire descendre la valeur du portefeuille en payant des frais de transaction, et ce, afin de minimiser la pénalité.

Option dans la monnaie

Passons maintenant au cas où l'option est dans la monnaie afin d'analyser les cas où le portefeuille a une valeur neutre ou élevée.

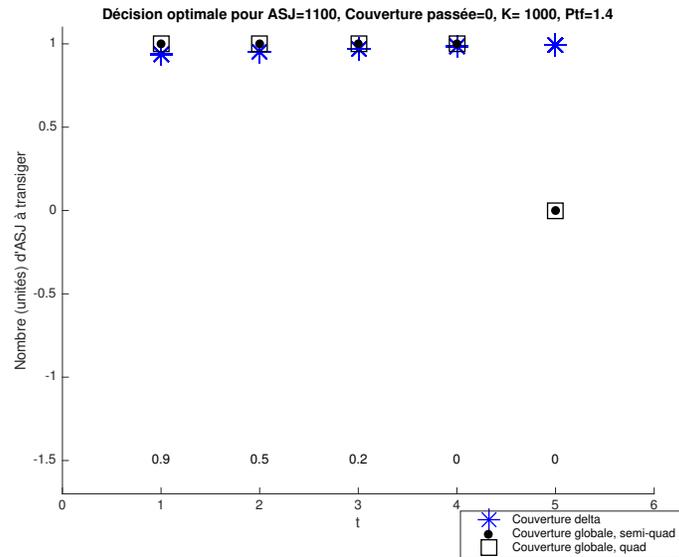


FIGURE 3 – Frais fixes f_1 , option dans la monnaie, portefeuille ayant une valeur faible, couverture passée nulle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

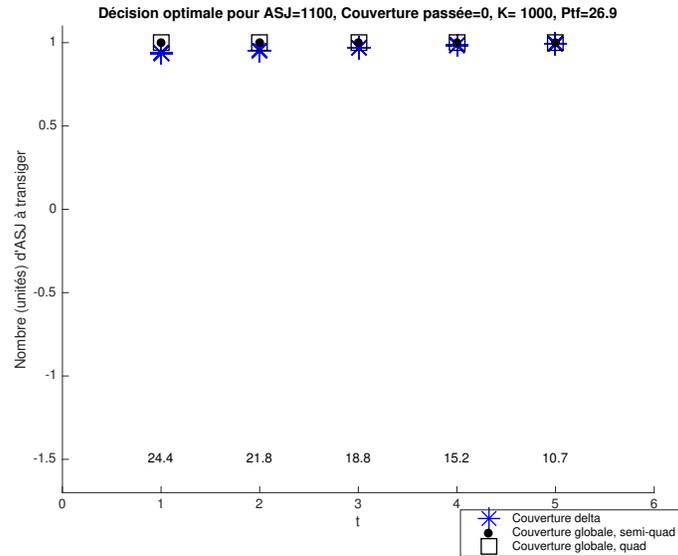


FIGURE 4 – Frais fixes f_1 , option dans la monnaie, portefeuille ayant une valeur neutre, couverture passée nulle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option ; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre ; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

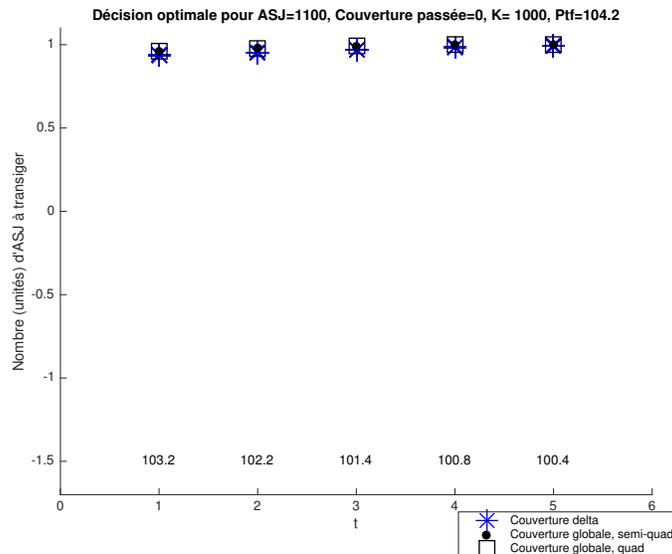


FIGURE 5 – Frais fixes f_1 , option dans la monnaie, portefeuille ayant une valeur élevée, couverture passée nulle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option ; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre ; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Lorsque l'on se rapproche de l'échéance et que nous avons une valeur faible de portefeuille (figure 3), il est sous-optimal de se procurer une quantité positive de l'actif sous-jacent puisque nous devrions nous endetter pour ce faire. De façon plus précise, plus nous nous rapprochons de l'échéance, moins il devient intéressant de payer des frais de transaction importants afin de se protéger d'un risque d'appréciation de l'actif sous-jacent car moins celui-ci aura la possibilité de prendre de la valeur. Il est donc sous-optimal de payer de larges frais pour couvrir un risque plus marginal. Lorsque notre portefeuille a une valeur neutre ou élevée (figures 4 et 5), nous mettons en place une couverture, pour la même situation puisque nous n'avons pas à nous endetter pour payer les frais de transaction associés à la mise en place

d'une couverture.

Couverture passée partielle

Passons maintenant à l'analyse des mêmes situations lorsque la couverture est partielle (figures 43 à 51, en annexe).

Le seul cas où les méthodes globale et delta-neutre divergent est le cas où nous sommes à la monnaie, avec un portefeuille ayant une valeur élevée et une couverture partielle (figure 48). L'explication de ceci est analogue au cas où la couverture est nulle, le portefeuille a une valeur élevée et l'option est à la monnaie (figure 2).

Couverture passée totale

Maintenant, finissons cette partie sur les frais fixes f_1 avec l'analyse des mêmes situations lorsque la couverture est totale.

Option hors de la monnaie

Lorsque l'option est hors de la monnaie, nous vendons les parts acquises par le passé de l'actif sous-jacent, et ce, pour les deux méthodes de couverture. Les figures 52 et 53 illustrent cette situation et sont en annexe.

Il y a une seule exception, c'est le cas où le portefeuille est neutre. Nous obtenons la figure 6.

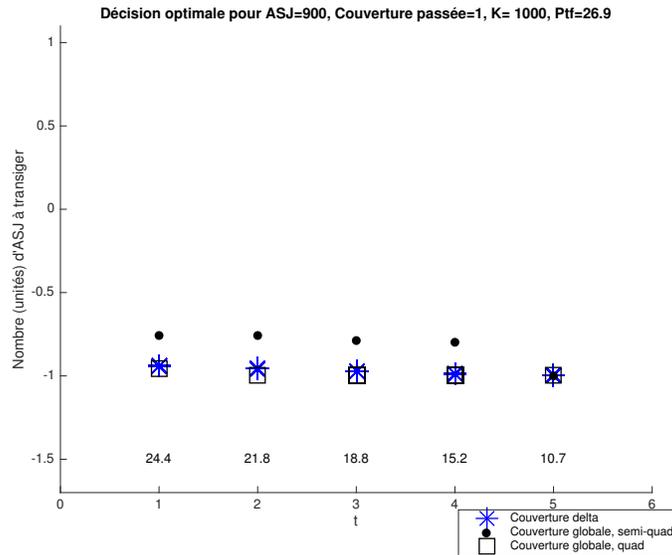


FIGURE 6 – Frais fixes f_1 , option hors de la monnaie, portefeuille ayant une valeur neutre, couverture passée totale. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option ; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre ; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Sur la figure 6, il y a une différence entre la méthode globale à fonction objectif semi-quadratique, d'une part, et la méthode delta-neutre ainsi que la méthode globale à fonction objectif quadratique, de l'autre. En effet, lorsque nous sommes aux dates $n = 1, 2, 3, 4$, la méthode globale à objectif semi-quadratique a une plus grand quantité d'actif sous-jacent dans son

portefeuille ($q_{n+1} = 0.2$) que les deux autres méthodes ($q_{n+1} = 0$). Ce même phénomène se retrouve sur les figures 39 et 44, situées en annexe.

Ceci s'explique de la façon suivante : lorsque nous sommes hors de la monnaie et que le portefeuille a une valeur neutre, nous avons suffisamment de fonds pour pouvoir nous couvrir dans le cas où l'option terminerait à la monnaie ou dans la monnaie. Les méthodes de couverture réagissent de façons différentes.

La méthode delta-neutre souhaite se débarrasser de l'actif sous-jacent car si celui-ci continue à descendre, nous allons devoir essayer une perte qui ne sera pas compensée par la valeur de l'option à l'échéance étant donné que nous serons alors hors de la monnaie : l'option aura une valeur nulle.

La méthode globale à objectif quadratique considère que notre portefeuille a une valeur trop élevée et souhaite l'amoindrir afin de la rapprocher de la valeur de l'option à échéance. Elle considère souhaitable que de payer les frais de transactions et de vendre la totalité de la totalité de la quantité de l'actif sous-jacent.

La méthode globale à objectif semi-quadratique ne désire pas amoindrir la valeur de notre portefeuille outre mesure puisqu'elle ne considère pas qu'une valeur élevée de portefeuille soit un désagrément. Par contre, elle prend en compte la présence de frais de transactions, et réduit donc la proportion de la couverture qui est liquidée afin d'éviter les coûts.

Cet exemple (figure 6) est intéressant car il illustre clairement pourquoi il est préférable d'avoir un critère semi-quadratique plutôt que quadratique puisque le fait d'avoir une fonction objectif quadratique amène parfois à abaisser la valeur du portefeuille de couverture.

Option à la monnaie

Les figures 54 à 56 illustrent cette situation et sont en annexe.

Lorsque l'option est à la monnaie, nous gardons la couverture totale mise en place dans le passé sauf si notre portefeuille a une valeur élevée (figure 56). Alors, nous vendons les parts acquises par le passé de l'actif sous-jacent pour la méthode globale, contrairement au cas où nous utilisons la méthode delta-neutre et où nous ne vendons que la moitié des parts acquises par le passé. L'explication de ceci est analogue au cas où la couverture est nulle, le

portefeuille a une valeur élevée et la couverture est nulle (figure 2).

Option dans la monnaie

Lorsque l'option est dans la monnaie, nous gardons la couverture totale mise en place dans le passé et ce, pour toutes les valeurs de portefeuille et toutes les méthodes considérées.

Les figures 57 à 59 illustrent cette situation et sont en annexe.

Analyse générale, frais fixes f_1

Ce qui est à retenir est que la variable affectant le plus la différence entre la méthode delta-neutre et la méthode globale est la valeur du portefeuille. En effet, lorsque celui-ci a une valeur élevée, nous n'acquérons pas d'actif sous-jacent pour la méthode globale.

Soulignons que les bénéfices liés à couverture sont de moins en moins importants par rapport aux frais de transaction lorsque nous sommes près de l'échéance, expliquant l'absence de couverture lorsque nous sommes près du temps T .

Si nous considérons les coûts moyens de transaction ainsi que la pénalité moyenne obtenus à partir d'une simulation Monte Carlo, nous obtenons le tableau suivant :

TABLE 2 – Coûts moyens, pénalité moyenne de couverture - Comparaison des méthodes

Méthode de couverture	\bar{c}	$e\bar{r}r_1$	$e\bar{r}r_2$
Couverture delta-neutre	[30 ; 0]	[980.86 ; 3.58]	[980.86 ; 3.58]
Couverture globale, semi-quadratique	[22.87 ; 0.03]	[761.82 ; 5.64]	[764.02 ; 5.62]
Couverture globale, quadratique	[24.23 ; 0.03]	[815.88 ; 5.81]	[816.19 ; 5.81]

Ce tableau nous permet de constater que la pénalité moyenne pour les méthodes globales est toujours strictement inférieure à la pénalité moyenne pour la méthode delta-neutre. De plus, les coûts moyens sont eux aussi plus faibles pour les méthodes globales que pour la méthode delta-neutre.

Frais variables f_2

Passons à l'analyse des stratégies obtenues en présence de frais variables de transaction $f_2|q_n - q_{n+1}|$. Ici, nous avons $f_2 = 5$.

Couverture passée nulle

Commençons par analyser les cas où le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est nul, c'est-à-dire que $q_n = 0$.

Option hors de la monnaie

Nous présentons ici l'analyse des stratégies obtenues pour différentes valeurs de portefeuille lorsque le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est nul et que l'option est hors de la monnaie.

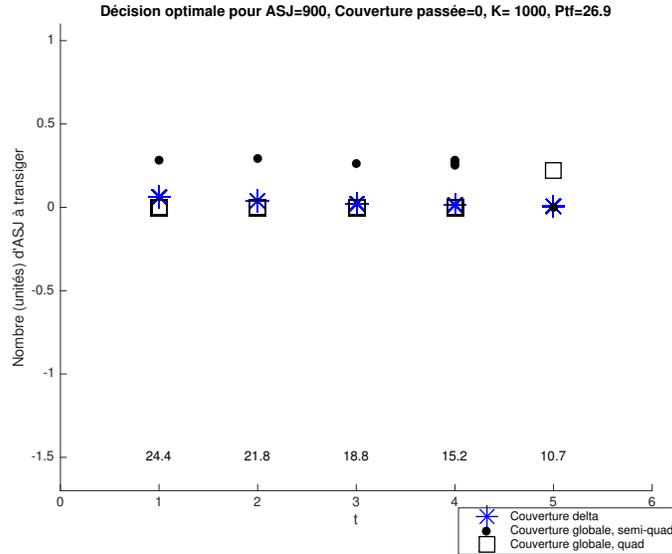


FIGURE 7 – Frais variables f_2 , option hors de la monnaie, portefeuille ayant une valeur neutre, couverture passée nulle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option ; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre ; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Lorsque le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est nul et que l'option est hors de la monnaie, les frais f_2 agissent comme les frais fixes, c'est-à-dire que nous n'achetons pas d'actif sous-jacent, et ce, pour les deux méthodes de couverture. Voir les figures 60 et 61 en annexe.

Pour le cas quadratique, la seule différence est pour le dernier pas de temps lorsque le portefeuille a une valeur neutre (figure 7) ou élevée (figure 61) : comme nous avons une pénalité non-nulle lorsque v_T est plus grand que C_T , nous tentons de réduire la valeur du portefeuille en mettant en place une couverture.

Pour le cas semi-quadratique, la seule différence d'avec la méthode delta-

neutre apparaît lorsque le portefeuille a une valeur neutre (figure 7). Alors, nous nous couvrons si nous sommes loin de l'échéance et ce, par la même réflexion que pour la figure 2.

Option à la monnaie

Lorsque la couverture est nulle et que nous sommes à la monnaie, les méthodes delta-neutre et globale sont similaires (figures 62 et 63), sauf dans le cas où le portefeuille est élevé (figure 64). Dans ce cas, nous observons la même situation que pour le cas présenté dans la figure 2.

Option dans la monnaie

Nous pouvons maintenant procéder à l'analyse de la stratégie obtenue pour le cas où la couverture est nulle et que l'option est dans la monnaie.

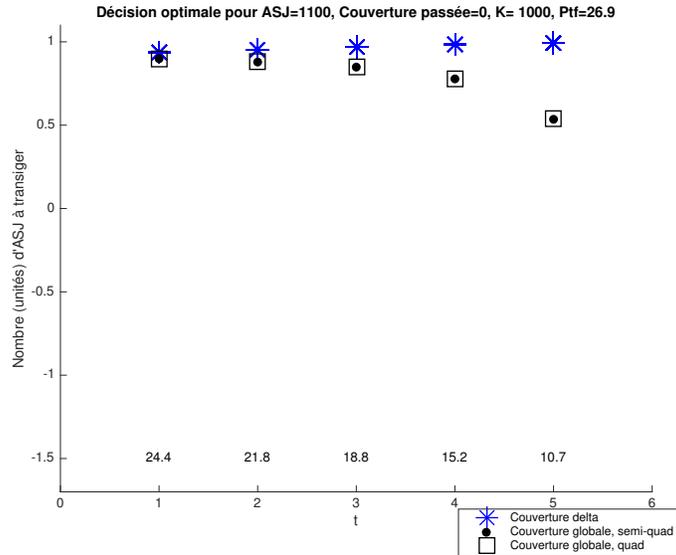


FIGURE 8 – Frais variables f_2 , option dans la monnaie, portefeuille ayant une valeur neutre, couverture passée nulle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option ; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre ; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Lorsque l'option est dans la monnaie, un phénomène intéressant se produit : nous acquérons de l'actif sous-jacent d'autant moins que nous sommes près de l'échéance (figure 8), et d'autant plus que nous sommes riches (figure 66, en annexe). La question est de savoir pourquoi nous nous procurons d'autant moins d'actif sous-jacent que nous en avons le plus crucialement besoin, c'est-à-dire lorsque le portefeuille est nul ou neutre et que notre couverture est nulle.

En fait, c'est qu'à l'avant-dernier pas de temps ($n = 5$), si nous ne nous

sommes pas couverts et que l'actif sous-jacent redescend sous sa valeur actuelle, alors notre pénalité finale est minimisée (près de zéro). Cela compense, lors du calcul de l'espérance, pour le fait que la pénalité finale est maximisée si l'actif sous-jacent remonte au-dessus de sa valeur actuelle. Si nous avons mis une couverture en place, et que l'actif sous-jacent descend sous sa valeur actuelle, la valeur du portefeuille deviendra négative car nous avons dû emprunter de l'argent et que notre position sur l'actif sous-jacent perd de la valeur. C'est ce portefeuille négatif qui fait en sorte que la pénalité espérée finale est grande.

En d'autres mots, près de l'échéance, la taille du risque est petite par rapport aux coûts. Donc nous ne nous couvrons pas autant que lorsque nous sommes loin de l'échéance.

Couverture passée partielle

Continuons notre analyse avec les cas où le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est partiel.

Option hors de la monnaie

Lorsque l'option est hors de la monnaie et que le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est partiel (figure 69), nous réagissons pour les deux méthodes en nous débarrassant de la couverture mise en place dans le passé, c'est-à-dire que $q_n - q_{n+1}$ est négatif.

Option à la monnaie

Lorsque l'option est à la monnaie et que le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est partiel, nous gardons la couverture mise en place si notre portefeuille est faible ou neutre (figures 70 et 71, en annexe). Lorsque la valeur du portefeuille est élevée (figure 72, en annexe), nous observons le même phénomène qu'à la figure 69.

Option dans la monnaie

Procédons à l'analyse des cas où le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est partiel et que l'option est dans la monnaie.

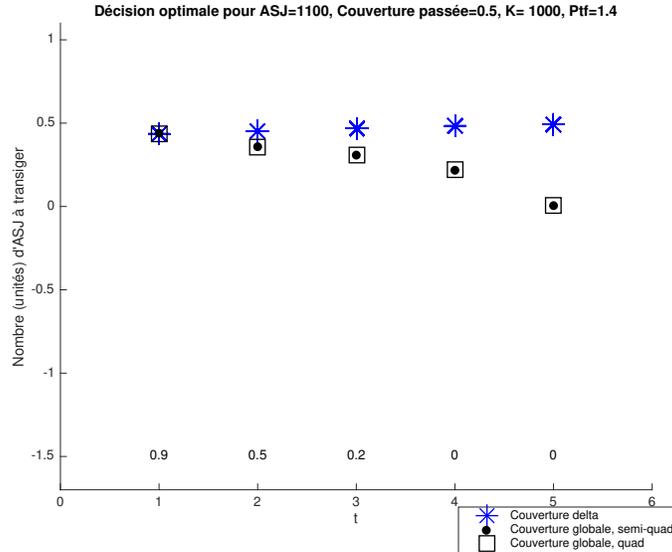


FIGURE 9 – Frais variables f_2 , option dans la monnaie, portefeuille ayant une valeur faible, couverture passée partielle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option ; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre ; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Lorsque l'option est dans la monnaie, nous augmentons notre couverture en achetant de l'actif sous-jacent d'autant plus que nous sommes loin de l'échéance (figure 9), et d'autant plus que nous sommes en possession d'un portefeuille ayant une valeur élevée (figures 73 et 74, en annexe).

Ici, nous nous couvrons de moins en moins non pas parce que nous sommes en possession d'un portefeuille ayant une valeur suffisamment élevée, mais bien parce que la valeur au temps T de l'actif sous-jacent est de plus

en plus certaine au fur et à mesure que nous nous rapprochons du moment T .

Couverture passée totale

Concluons cette section sur l'analyse des stratégies obtenues en présence de frais variables par l'analyse des cas où le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est total.

Option à la monnaie

La seule différence entre les deux méthodes est que nous nous débarrassons complètement de la couverture mise en place dans le passé en vendant de l'actif sous-jacent lorsque le portefeuille est élevé, dans le cas de la méthode globale (figure 83, en annexe). La réflexion est la même que dans ce cas avec absence de frais de transaction (figure 1) et avec frais de transaction f_1 (figure 83). Comme le risque de terminer dans la monnaie diminue en se rapprochant de l'échéance, le bénéfice de la couverture diminue lui aussi, alors que les frais restent aussi importants.

Analyse générale, frais variables f_2

Nous notons le phénomène suivant : les frais variables agissent sur la quantité à transiger, alors que les frais fixes f_1 agissent sur la décision de transiger. En effet, lorsque nous avons uniquement des frais fixes f_1 , nous obtenons souvent la décision Black-Scholes pour la couverture globale, alors que nous obtenons une décision différente de Black-Scholes pour les frais variables f_2 puisque l'on optimise la couverture en prenant en compte les frais variables, qui sont d'autant plus élevés que la quantité à transiger est grande.

Si nous considérons les coûts moyens de transaction à partir d'une simulation Monte Carlo, nous obtenons le tableau suivant :

TABLE 3 – Coûts moyens, pénalité moyenne de couverture - Comparaison des méthodes

Méthode de couverture	\bar{c}	$e\bar{r}r_1$	$e\bar{r}r_2$
Couverture delta-neutre	[6.05 ; 0.01]	[112.48 ; 1.4]	[122.98 ; 1.38]
Couverture globale, semi-quadratique	[4.98 ; 0]	[99.82 ; 1.2]	[118.44 ; 1.18]
Couverture globale, quadratique	[5.38 ; 0]	[102.09 ; 1.25]	[114.41 ; 1.24]

Ce tableau nous permet de confirmer l'avantage des méthodes globales sur la méthode delta-neutre et ce, autant au niveau des coûts moyens qu'au niveau de la pénalité moyenne.

Frais proportionnels f_3

Passons à l'analyse des stratégies obtenues en présence de frais proportionnels de transaction $f_3 S_{t_n} |q_n - q_{n+1}|$. Ici, nous avons $f_3 = 0.0250$.

Couverture passée nulle

Commençons par les cas où le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est nul, c'est-à-dire $q_n = 0$.

Option hors de la monnaie

En premier lieu, analysons les cas où l'option est hors de la monnaie.

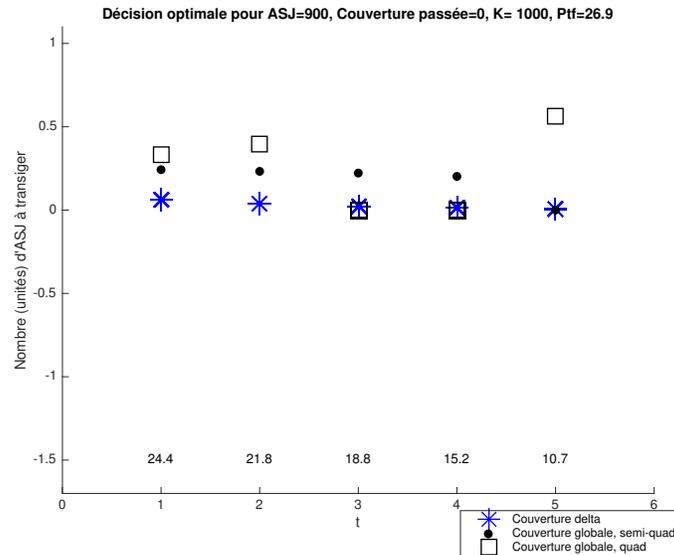


FIGURE 10 – Frais proportionnels f_3 , option hors de la monnaie, portefeuille ayant une valeur neutre, couverture passée nulle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Lorsque l'option est hors de la monnaie, nous maintenons notre position en actif sous-jacent si le portefeuille a une valeur faible (figure 84, en annexe),

et ce, pour les deux méthodes.

Si le portefeuille a une valeur neutre (figure 10), nous augmentons légèrement notre position dans le cas semi-quadratique. En effet, il s'agit ici d'augmenter la valeur du portefeuille afin d'amener l'erreur semi-quadratique à zéro. En effet, si v_T est plus grand que C_T , alors cette erreur vaut zéro. Si le portefeuille a une valeur élevée (figure 85, en annexe), cette astuce n'est plus nécessaire et nous ne nous procurons pas d'actif sous-jacent.

Pour la fonction objectif quadratique, dans le cas où le portefeuille est neutre (figure 10), la méthode hésite entre acquérir de l'actif sous-jacent et ne pas en acquérir. Il y a deux optimums locaux.

Par contre, lorsque le portefeuille est élevé (figure 85, en annexe) et que nous utilisons la fonction objectif quadratique, alors nous nous couvrons uniquement lorsque nous sommes près de l'échéance, contrairement à la méthode semi-quadratique. En effet, $(C_T - v_T)^2$ sera minimale si et seulement si $C_T = v_T$. Si le portefeuille a une valeur élevée, il faut se procurer de l'actif sous-jacent dans l'espoir que celui-ci perde de la valeur et entraîne la valeur du portefeuille à la baisse.

Option à la monnaie

Passons maintenant aux cas où l'option est à la monnaie.

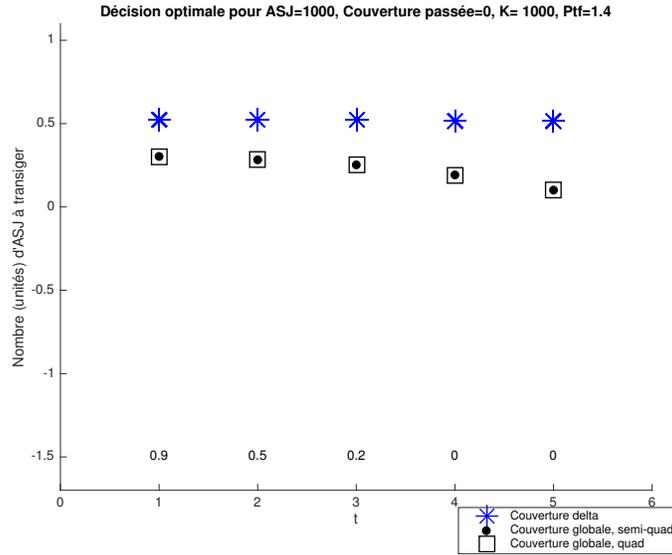


FIGURE 11 – Frais proportionnels f_3 , option à la monnaie, portefeuille ayant une valeur faible, couverture passée nulle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option ; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre ; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Lorsque l'option est à la monnaie, le besoin de mettre en place une couverture se fait ressentir ; celui-ci est balancé par notre capacité à éviter l'endettement causé par une telle transaction. C'est pourquoi nous acquérons de l'actif sous-jacent d'autant plus que nous sommes loin de l'échéance, l'actif sous-jacent étant alors plus à risque de finir dans la monnaie. Cette situation est illustrée par les figures 11 (ci-haut) et 86 (en annexe).

Lorsque nous sommes en bonne position financière (la valeur du portefeuille est élevée), nous sommes indifférents face à l'optimalité de la couverture : c'est cette indifférence qui nous fait choisir l'option de ne pas reba-

lancer, afin d'éviter de payer des frais de transaction. Voir la figure 87, en annexe.

Option dans la monnaie

Enfin, terminons avec les cas où l'option est dans la monnaie.

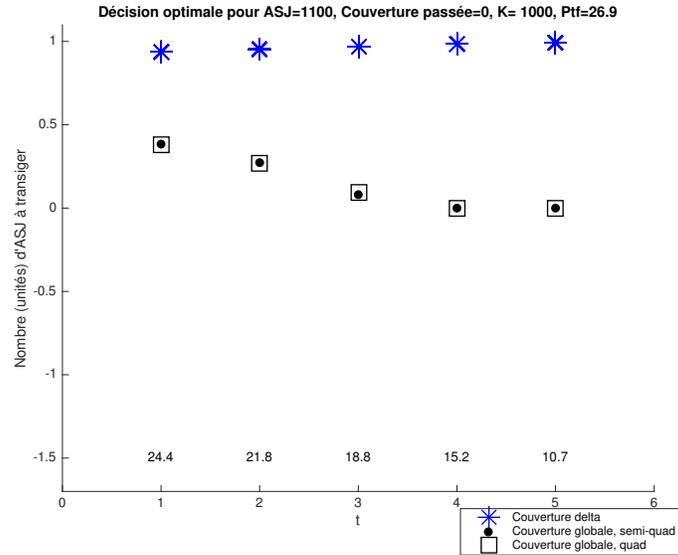


FIGURE 12 – Frais proportionnels f_3 , option dans la monnaie, portefeuille ayant une valeur neutre, couverture passée nulle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

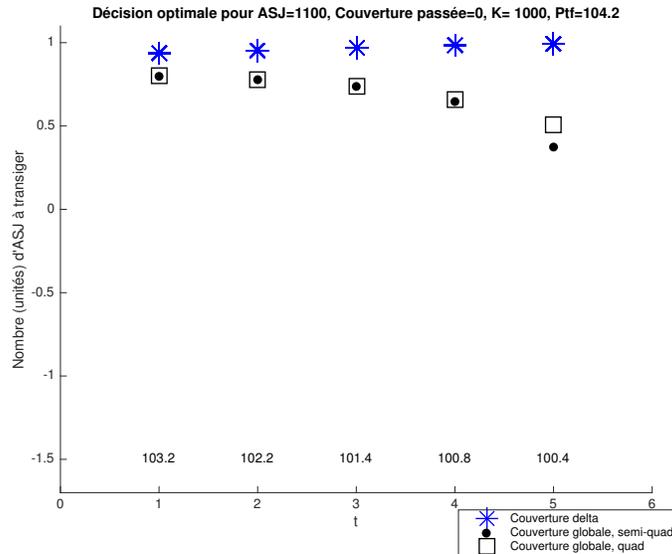


FIGURE 13 – Frais proportionnels f_3 , option dans la monnaie, portefeuille ayant une valeur élevée, couverture passée nulle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

C'est l'effet des frais de transaction proportionnels qui est la cause principale de l'absence de transaction dans les cas où le portefeuille est faible (figure 88, en annexe).

Dans le cas où la valeur du portefeuille est élevée (figure 13, ci-haut) ou neutre (figure 12, ci-haut), la même réflexion que précédemment (figure 9) s'applique : plus nous sommes près de l'échéance, moins nous voulons alourdir notre position dans le marché monétaire en se créant de la dette car plus nous avons peur que notre valeur de portefeuille redescende. En d'autres mots, l'importance du risque encouru décroît avec l'échéance, alors que les frais restent les mêmes.

Couverture passée partielle

Continuons notre analyse avec frais de transaction proportionnels avec les cas où le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est partiel, i.e. $q_n = 0.5$. Notons que nous ne discuterons que des cas où les méthodes globales et la méthode delta-neutre ne coïncident pas.

Option dans la monnaie

Soulignons les différences entre les deux méthodes lorsque l'option est dans la monnaie.

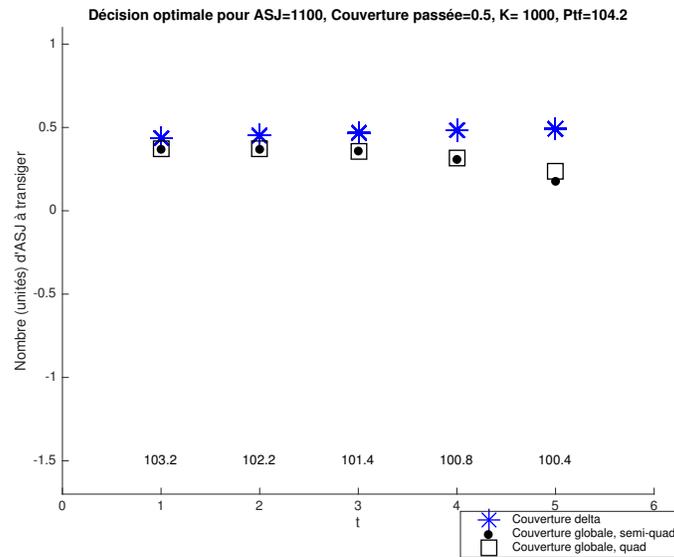


FIGURE 14 – Frais proportionnels f_3 , option dans la monnaie, portefeuille ayant une valeur élevée, couverture passée partielle. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option ; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre ; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Lorsque l'option est dans la monnaie, nous gardons le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement mais uniquement lorsque nous avons une valeur de portefeuille faible (figure 95, en

annexe) ou neutre (figure 14, en annexe). Si nous avons une grande valeur de portefeuille (figure 14, ci-haut), nous profitons de notre capacité d'endettement afin d'ajouter à notre couverture, sauf si nous sommes près de l'échéance.

La même réflexion que précédemment (cas dans la monnaie, couverture nulle) s'applique : plus nous sommes près de l'échéance, moins nous voulons alourdir notre position dans le marché monétaire en se créant de la dette car plus nous avons peur que notre valeur de portefeuille redescende.

Couverture passée totale

Enfin, concluons la section sur les frais proportionnels f_3 par l'analyse des cas où le nombre de parts de l'actif sous-jacent dans le portefeuille avant le rebalancement est total.

Option à la monnaie

Commençons par l'analyse des cas où l'option est à la monnaie.

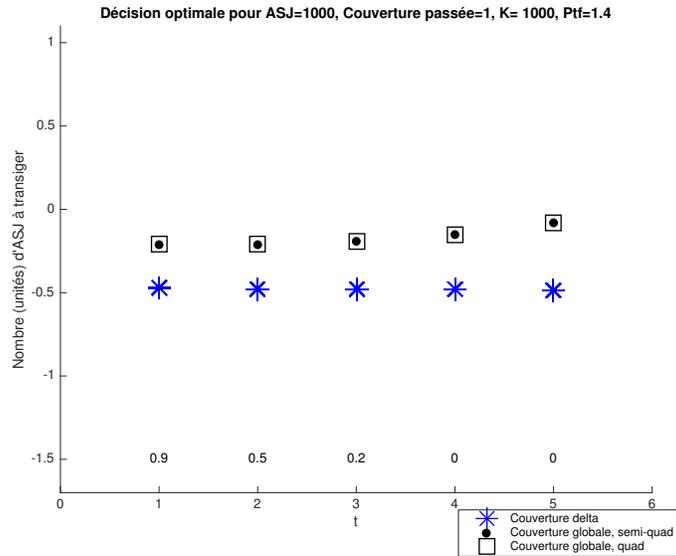


FIGURE 15 – Frais proportionnels f_3 , option à la monnaie, portefeuille ayant une valeur faible, couverture passée totale. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option ; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre ; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

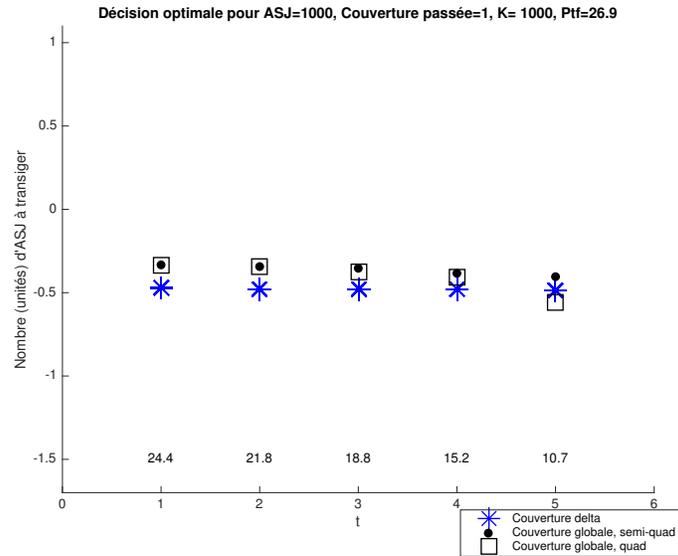


FIGURE 16 – Frais proportionnels f_3 , option à la monnaie, portefeuille ayant une valeur neutre, couverture passée totale. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

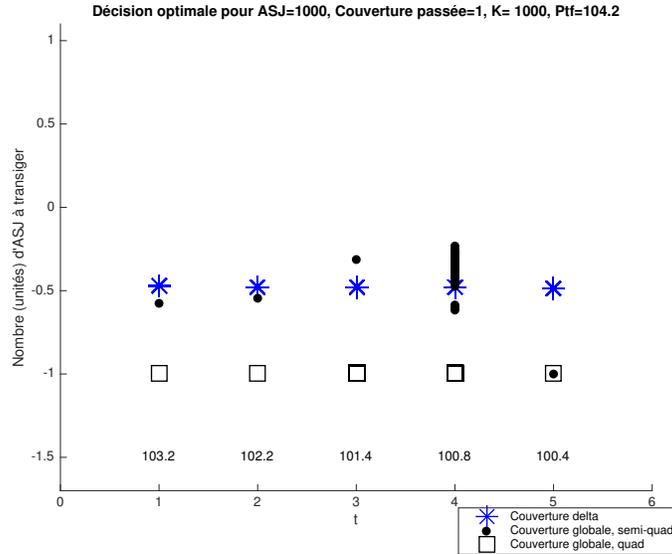


FIGURE 17 – Frais proportionnels f_3 , option à la monnaie, portefeuille ayant une valeur élevée, couverture passée totale. L'axe horizontal indique le temps écoulé depuis l'achat de l'option; l'axe vertical indique la quantité d'actif sous-jacent à transiger afin de mettre en place la méthode de couverture choisie. Les étoiles représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture delta-neutre; les points représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; les carrés représentent la décision de couverture optimale selon la méthode de couverture globale à objectif quadratique. En bas du graphique sont indiquées pour chaque date t_n la valeur de l'option selon le modèle de Black-Scholes.

Ici, nous voyons l'importance de la valeur du portefeuille. Si celle-ci est faible (figure 15, ci-haut), alors nous cherchons à rentabiliser notre couverture passée en la gardant, d'autant plus que nous sommes près de l'échéance. En effet, si nous voulons annuler la couverture, il nous faut payer des frais de transaction d'autant plus élevés que la transaction est grande. Or, notre faible capacité d'endettement nous en empêche.

Dans le cas où le portefeuille a une valeur neutre (figure 16, ci-haut), nous vendons une partie de l'actif sous-jacent acquis par le passé : $q_{n+1} = 0.5$. Le but est de créer une position sur le marché monétaire suffisamment grande pour nous permettre d'assumer notre partie du contrat à échéance.

Contrairement au cas où notre portefeuille a une valeur élevée (figure 17,

ci-haut), nous ne nous débarrassons pas totalement de la couverture mise en place par le passé lorsque le portefeuille a une valeur neutre. En effet, nous voulons éviter le scénario où l'actif sous-jacent prend de la valeur (option dans la monnaie) et que notre position sur le marché monétaire ne soit plus suffisante pour répliquer la valeur de l'option. En gardant une part d'actif sous-jacent dans notre portefeuille, nous espérons que celle-ci sera suffisante pour répliquer la valeur de l'option.

Analyse générale, frais proportionnels f_3

Nous observons ici toute la différence faite par le choix d'optimiser en prenant en compte la valeur du portefeuille. En effet, lorsque nous décidons d'optimiser pour amoindrir la différence entre la valeur de l'option et la valeur du portefeuille à l'échéance (méthodes globales), nous gardons parfois une couverture en place afin de réduire la valeur du portefeuille. D'autre part, les frais de transaction affectent la stratégie en rendant possible un grand endettement, ce qui vient réduire nos positions.

Si nous considérons les coûts moyens de transaction à partir d'une simulation Monte Carlo, nous obtenons le tableau suivant :

TABLE 4 – Coûts moyens, pénalité moyenne de couverture - Comparaison des méthodes

Méthode de couverture	\bar{c}	$e\bar{r}r_1$	$e\bar{r}r_2$
Couverture delta-neutre	[30.25 ; 0.03]	[1070.75 ; 5.57]	[1070.77 ; 5.57]
Couverture globale, semi-quadratique	[14.06 ; 0.01]	[464.91 ; 5.12]	[472.48 ; 5.09]
Couverture globale, quadratique	[14.84 ; 0.01]	[466.63 ; 5.02]	[469.81 ; 5]

Encore une fois, nous pouvons observer les résultats supérieurs obtenus pour les méthodes globales en rapport à la méthode delta-neutre, et ce, autant au niveau des coûts moyens qu'au niveau de la pénalité moyenne.

Analyse générale, présence de frais de transaction

Cette section vise à passer en revue les faits saillants observés aux sections précédentes.

La principale différence entre les méthodes globales et la méthode delta-neutre pour les cas observés est que nous prenons en compte la valeur du portefeuille pour les méthodes globales. Cette optimisation globale nous pousse à adopter une couverture partielle ou totale lorsque l'option est hors de la monnaie, afin de réduire l'erreur associée à un portefeuille ayant une valeur trop élevée.

D'autre part, les frais nous poussent à réfléchir à notre capacité d'endettement lorsque nous devrions y avoir recours afin de mettre en place une couverture, par exemple lorsque notre portefeuille est neutre ou faible et que nous sommes dans la monnaie. Alors que la méthode delta-neutre ne prend pas en compte les frais de transaction en amont, la méthode globale les inclut dans son calcul préalable et nous donne une stratégie optimisée pour la valeur de portefeuille, prenant en considération la faible valeur du portefeuille dans ce cas.

De façon générale, une très forte valeur de portefeuille réduit l'attrait de la couverture lorsque l'option est à la monnaie ou dans la monnaie parce qu'alors, nous sommes en mesure de nous couvrir avec la position sur le marché monétaire. Enfin, la position optimale est d'autant plus petite que nous sommes près de l'échéance de l'option. Ceci est dû au fait que la taille du risque décroît avec l'échéance, alors que les frais restent toujours de la même taille.

5 Exemples de trajectoires possibles : évolution de la couverture

Dans cette section seront présentés des exemples de trajectoires amenant l'option à être, à échéance, hors de la monnaie, à la monnaie et dans la monnaie.

Les figures des trajectoires sont composés de la façon suivante : sur la figure de gauche sont présentées les décisions de couvertures globale et delta-neutre évoluant selon le temps ; sur la figure de droite est présentée l'évolution de la valeur du portefeuille obtenu pour les deux types de couvertures. L'axe horizontal est celui du temps ; l'axe vertical de gauche est celui de la décision de couverture pour la figure de gauche, et de la valeur du portefeuille pour celui de droite ; enfin, l'axe vertical de droite est celui de la valeur prise par l'actif sous-jacent. La couverture delta-neutre est dénotée par une étoile grise et la couverture globale, par un point noir. Enfin, la trajectoire de l'actif sous-jacent est représentée par une ligne noire.

Notons qu'ici, nous illustrons q_{n+1} et non pas $q_{n+1} - q_n$.

Absence de frais de transaction

Commençons par les cas où il y a absence de frais de transaction.

En absence de frais de transaction, les deux méthodes sont similaires et ce, peu importe la valeur de l'option à l'échéance que nous considérons. Sur les figures suivantes (figures 18 à 20), nous observons que les décisions prises par la méthode delta-neutre et la méthode globale sont semblables, avec une légère variation pour le cas où l'échéance est dans la monnaie (figure 20). Dans ce cas, la méthode globale avec fonction objectif semi-quadratique prend une décision de couverture plus faible que les deux autres méthodes, et ce, uniquement aux pas de temps $n = 3, 4$ et 5 .

Cas où l'option est hors de la monnaie à l'échéance

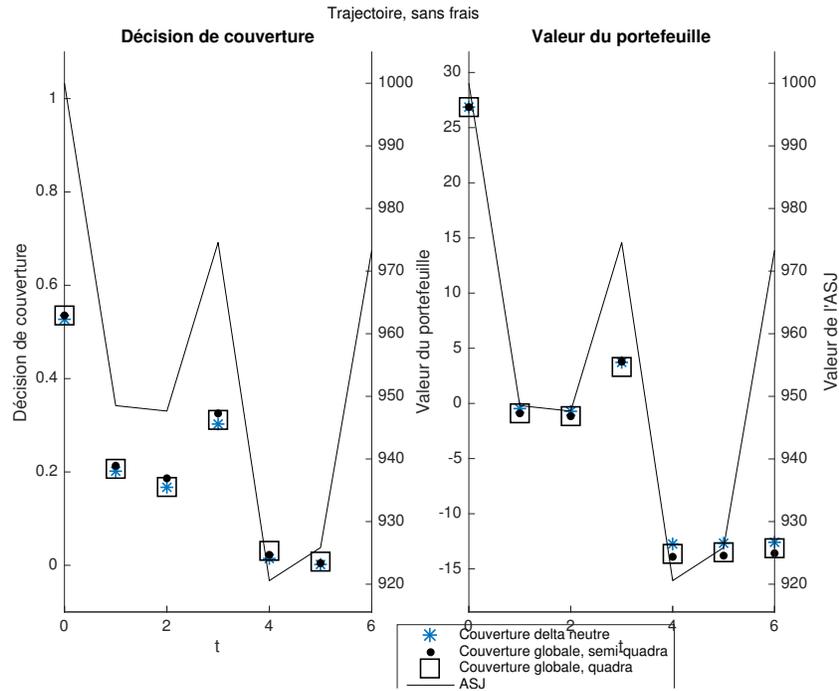


FIGURE 18 – Absence de frais de transaction, simulation d'une option qui est hors de la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre ; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

Cas où l'option est à la monnaie à l'échéance

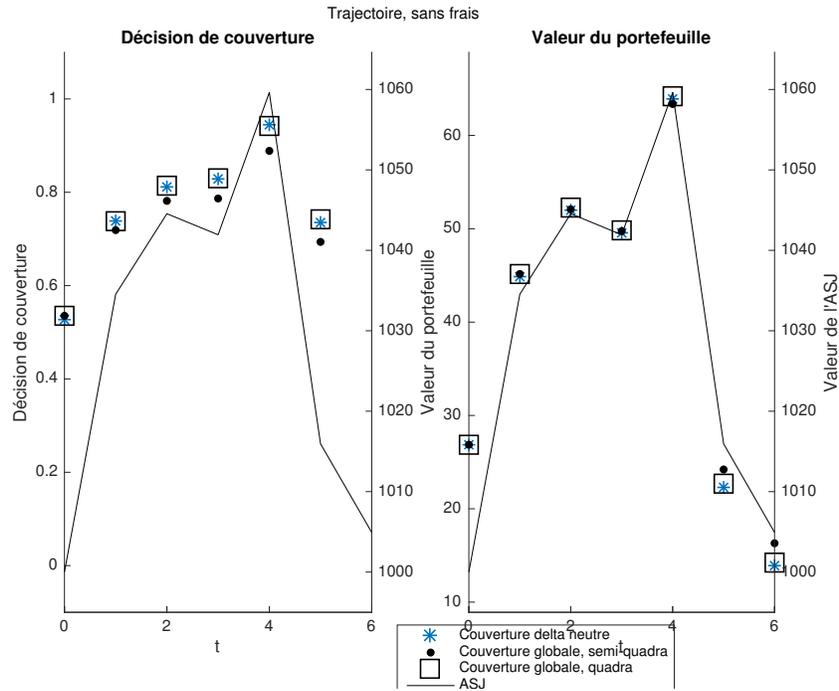


FIGURE 19 – Absence de frais de transaction, simulation d'une option qui est à la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre ; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

Cas où l'option est dans la monnaie à l'échéance

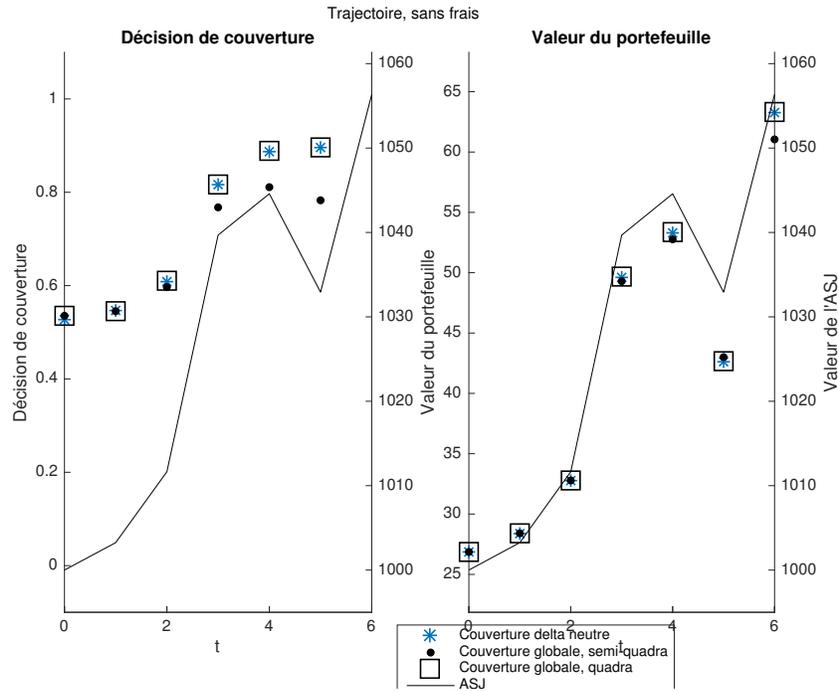


FIGURE 20 – Absence de frais de transaction, simulation d'une option qui est dans la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre ; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

Frais fixes f_1

Portons maintenant notre attention sur les résultats obtenus en présence de frais de transaction f_1 .

Cas où l'option est hors de la monnaie à l'échéance

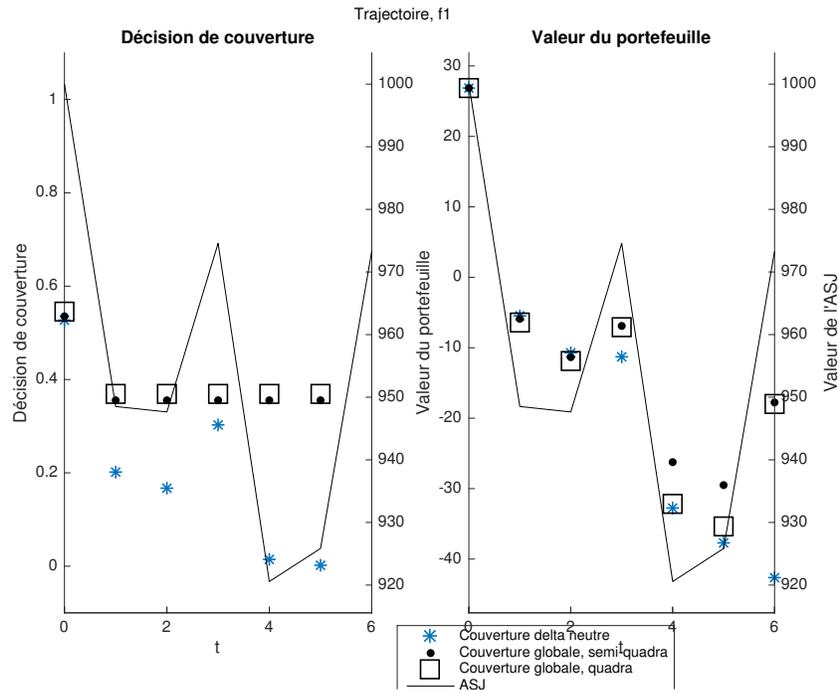


FIGURE 21 – Frais de transaction f_1 , simulation d'une option est hors de la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

En présence de frais de transaction fixes f_1 et lorsque l'option est hors de la monnaie (figure 21), nous liquidons une partie de notre position en $n = 1$.

Notons que nous pouvons observer l'effet des frais de transaction fixes, puisque nous gardons notre couverture mise en place au temps $n = 2$ alors que nous nous en débarrassons en absence de frais de transaction (figure 18). Nous voulons éviter de devoir payer plusieurs fois des frais, affectant à la négative la valeur du portefeuille.

Notons qu'ici, la valeur du portefeuille pour la couverture globale est encore plus près de zéro que pour la couverture delta-neutre, ce qui minimise l'erreur de la méthode globale comparativement à la méthode delta-neutre, à l'échéance.

Cas où l'option est à la monnaie à l'échéance

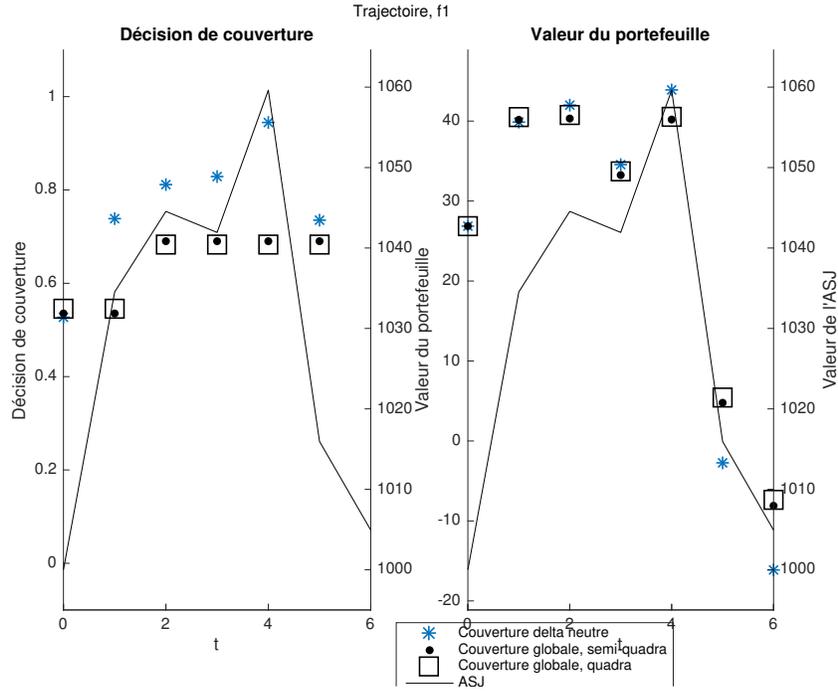


FIGURE 22 – Frais de transaction f_1 , simulation d'une option qui est à la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre ; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

Lorsque l'option est à la monnaie et que nous sommes en présence de frais de transaction f_1 (figure 22), nous acquérons moins d'actif sous-jacent qu'en l'absence de frais de transaction (figure 19). Surtout, nous semblons acquérir de l'actif sous-jacent par étapes, gardant la même position pour plusieurs pas de temps sans la reconsidérer lorsque la situation change.

La valeur du portefeuille de couverture globale est plus près de zéro que celle du portefeuille de couverture delta-neutre.

Cas où l'option est dans la monnaie à l'échéance

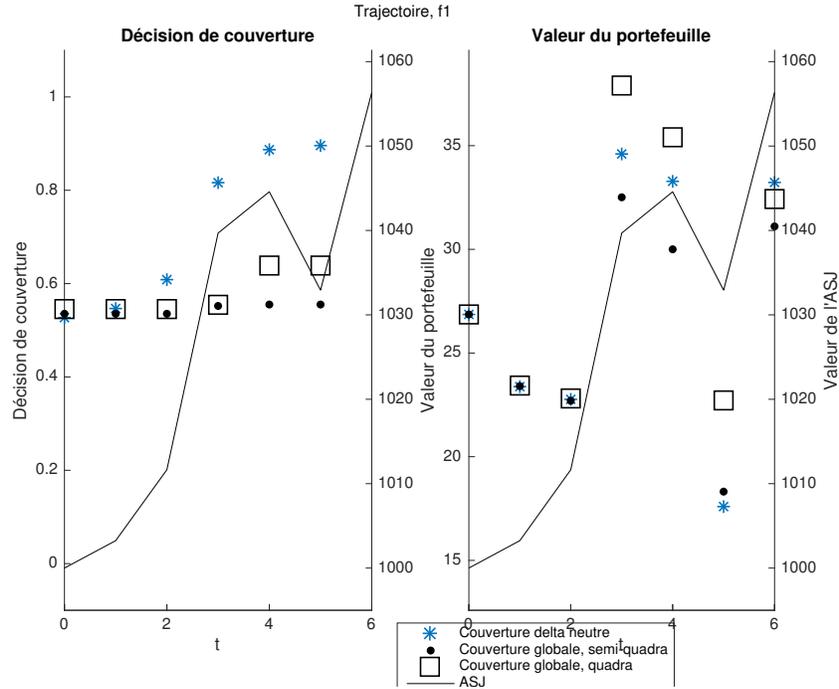


FIGURE 23 – Frais de transaction f_1 , simulation d'une option qui est dans la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre ; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique ; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

Nous voyons ici l'effet des frais fixes f_1 sur la décision de couverture globale. En effet, si l'on compare la figure en absence de frais de transaction (figure 20) avec la figure avec frais f_1 (figure 23, ci-haut), nous observons que l'introduction des frais porte q_n à être moins élevé, et ce, pour chaque date n considérée. Notons aussi que les rebalancements sont moins fréquents.

La valeur du portefeuille de couverture globale est plus élevée pour la méthode globale avec objectif quadratique que pour les deux autres méthodes,

et ce du fait du dernier rebalancement au temps $t = 4$, ainsi que par le petit nombre de rebalancement total, qui permet de réduire l'effet des frais de transaction.

Frais variables f_2

Lorsque les frais de transaction sont de type f_2 , nous obtenons des résultats similaires pour les deux méthodes. Ceci peut s'expliquer par le fait que ces frais sont plus bas que les autres types de frais, pour la valeur choisie pour f_2 .

Les figures sont jointes ci-dessous (figures 24 à 26).

Échéance hors de la monnaie

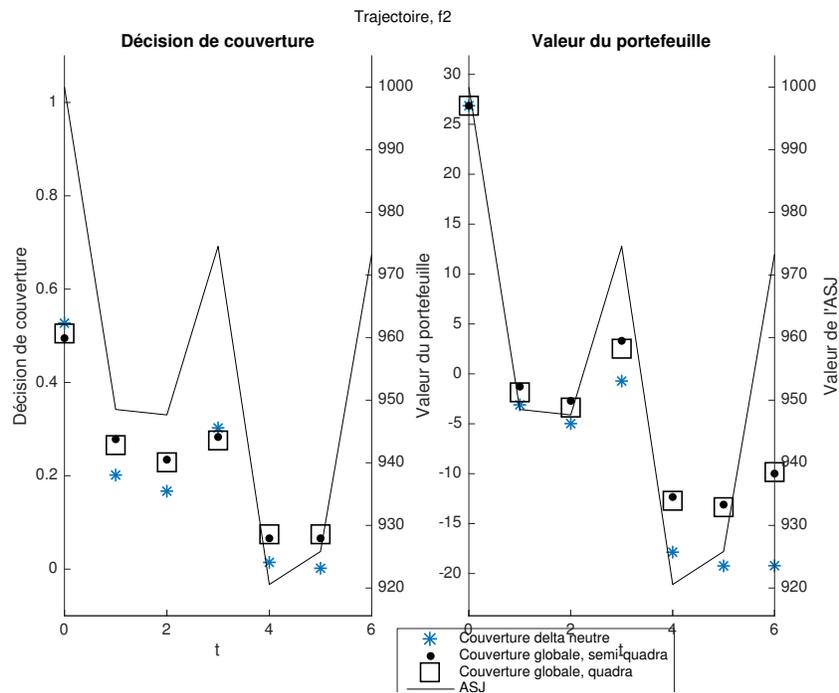


FIGURE 24 – Frais de transaction f_2 , simulation d'une option qui est hors de la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

Cas où l'option est à la monnaie à l'échéance

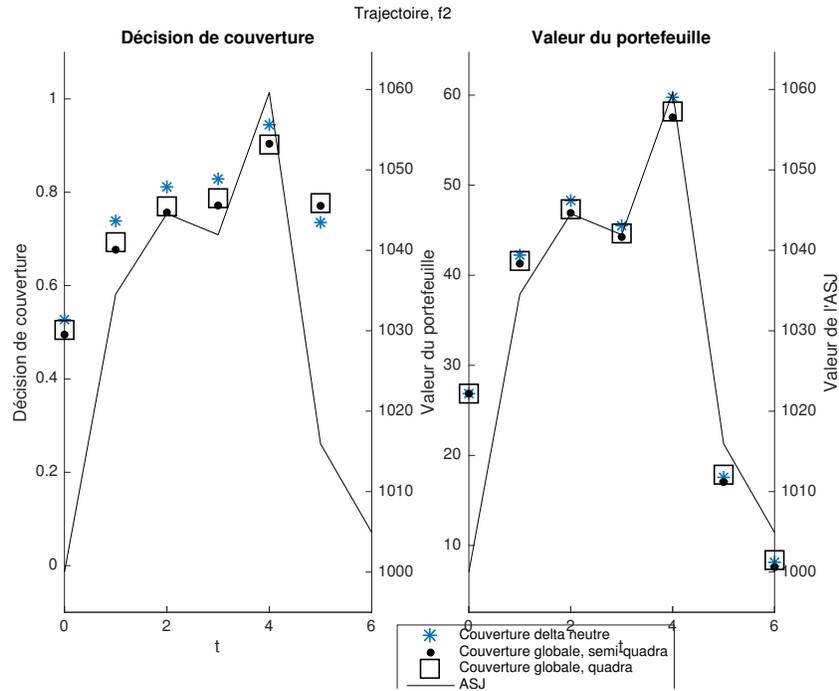


FIGURE 25 – Frais de transaction f_2 , simulation d'une option qui est à la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

Cas où l'option est dans la monnaie à l'échéance

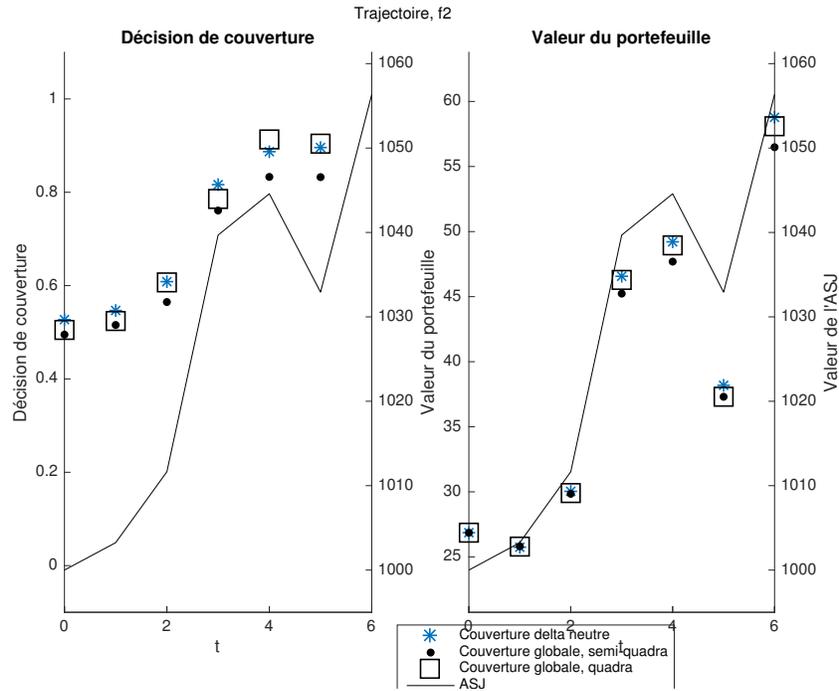


FIGURE 26 – Frais de transaction f_2 , simulation d'une option qui est dans la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

Frais proportionnels f_3

Portons maintenant notre attention sur les résultats obtenus en présence de frais de transaction f_3 .

Cas où l'option est hors de la monnaie à l'échéance

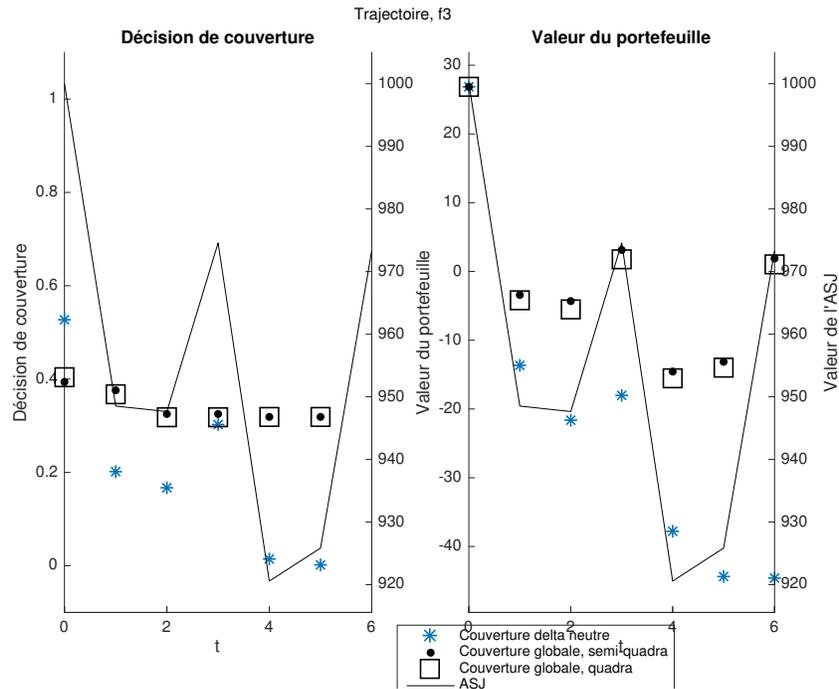


FIGURE 27 – Frais de transaction f_3 , simulation d'une option qui est hors de la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

Nous observons que nous transigeons moins souvent dans le cas des frais f_3 (figure 27) que dans le cas des frais f_2 (figure 24), c'est-à-dire que les rebalancements sont moins fréquents. En effet, les frais f_3 sont proportionnels

à la valeur et à la quantité de l'actif sous-jacent transigé pour mettre en place la couverture et sont donc plus élevés.

Dans ce cas-ci, la valeur du portefeuille est aussi plus près de zéro pour la méthode globale par rapport à la méthode delta-neutre.

Cas où l'option est à la monnaie à l'échéance

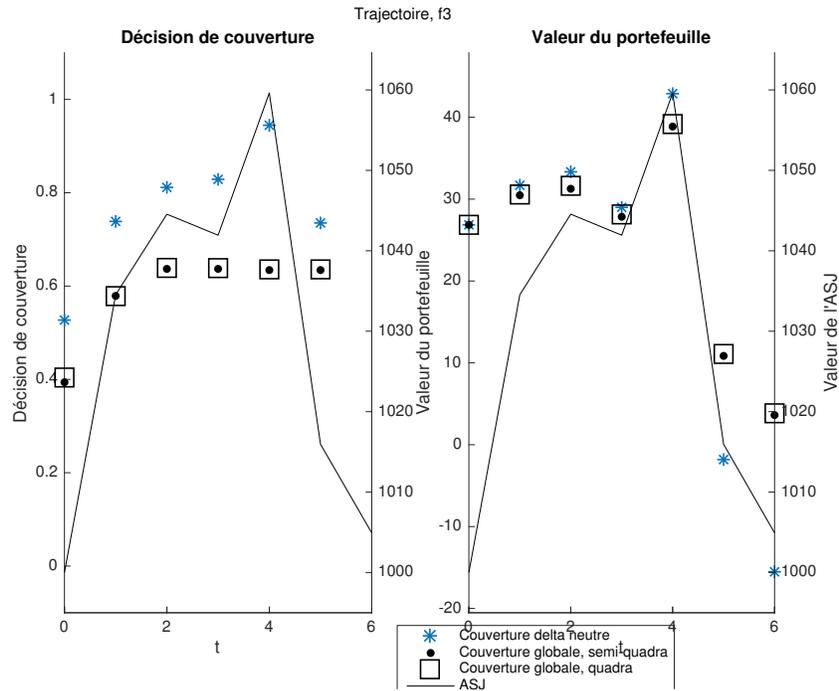


FIGURE 28 – Frais de transaction f_3 , simulation d'une option qui est à la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

C'est avec les frais les plus élevés, soit les frais f_3 , que nous observons le plus grand écart entre les stratégies prises par les deux méthodes de couver-

ture lorsque nous sommes à la monnaie (figure 28).

En effet, dans le cas de la méthode globale, nous attendons que la trajectoire de l'actif sous-jacent se confirme avant de procéder à l'achat d'actif sous-jacent afin de mettre en place une couverture. Les rebalancements sont moins fréquents pour la méthode globale que pour la méthode delta-neutre.

Dans ce cas-ci, la valeur du portefeuille est aussi plus élevée pour la méthode globale par rapport à la méthode delta-neutre.

Cas où l'option est dans la monnaie à l'échéance

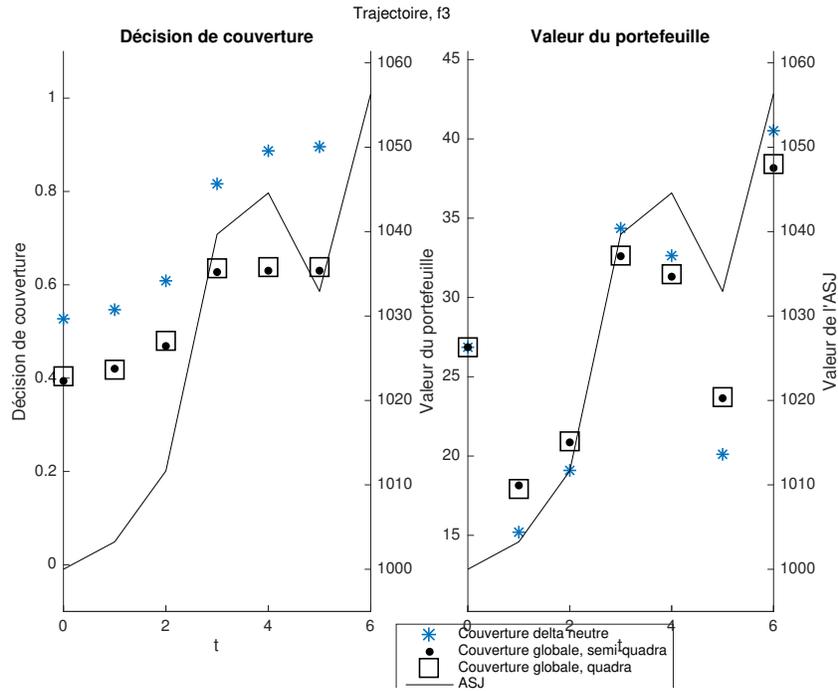


FIGURE 29 – Frais de transaction f_3 , simulation d'une option qui est dans la monnaie à l'échéance. Sur les deux graphiques, l'axe horizontal représente le temps écoulé depuis l'achat de l'option. Sur le graphique de gauche, l'axe vertical représente la décision optimale de couverture q_{n+1} ; sur le graphique de droite, l'axe vertical représente la valeur du portefeuille. Les décisions et valeurs obtenues pour les différentes méthodes sont représentées par les étoiles pour la méthode de couverture delta-neutre; par les points pour la méthode de couverture globale à objectif semi-quadratique; et par des carrés pour la méthode de couverture globale à objectif quadratique.

Contrairement au cas où nous étions à la monnaie, il est maintenant avantageux de payer les frais f_3 afin de mettre en place une couverture en acquérant de l'actif sous-jacent (figure 29). C'est ce que nous faisons pour les deux types de couverture.

Remarquons que nous n'ajustons presque pas cette couverture pour la méthode globale, alors que nous effectuons un ajustement avec la méthode delta-neutre.

Analyse générale

De façon générale, la décision de couverture lorsque nous utilisons la méthode de la couverture globale est moins élevée, mais la valeur du portefeuille obtenu est plus grande.

Comme mentionné dans la section 4 (présentation des principaux résultats), nous observons que la présence de frais et le type de frais de transaction agissent sur la stratégie globale retenue et ce, de la façon suivante : lorsque les frais sont fixes plutôt que variables ou proportionnels, nous procédons que rarement à des rebalancements ; lorsque les frais sont variables ou proportionnels, les rebalancements sont plus graduels pour la méthode globale que pour la méthode delta-neutre.

Enfin, de façon générale, nous obtenons une valeur de portefeuille qui est plus près de zéro pour les méthodes globales que pour la méthode delta-neutre.

6 Conclusion

Au sein de ce mémoire est présentée une méthode de couverture globale, étudiée selon le point de vue d'une institution ayant une position courte sur une option d'achat et désirant gérer le risque associé à cette position. Une comparaison du comportement de la méthode de couverture globale et de la méthode de couverture delta-neutre est effectuée ; des trajectoire simulées de la couverture ainsi que la relation entre la décision de rebalancement et les variables d'états associées au problème ont été étudiées.

Ces analyses nous ont permis de mieux comprendre la différence entre la méthode de couverture globale et la méthode de couverture delta-neutre pour les cas considérés. Les principaux résultats obtenus portent sur la relation entre le temps restant avant l'échéance et le rebalancement, sur la relation entre la valeur du portefeuille de couverture et le rebalancement, sur la fréquence de rebalancement ainsi que sur la quantité transigée lors du rebalancement.

Premièrement, nous avons vu que l'attrait du rebalancement diminue au fur et à mesure que nous nous approchons de l'échéance de l'option et ce, uniquement lorsque nous sommes en présence de frais de transactions. Deuxièmement, nous avons vu que la valeur du portefeuille peut affecter la décision de rebalancer. Troisièmement, nous avons observé qu'en présence de frais de transaction, nous rebalançons moins souvent qu'en leur présence. Quatrièmement, pour la méthode de couverture globale, les frais de transaction affectent la quantité transigée lors du rebalancement, celle-ci changeant selon le type de frais.

Enfin, nous désirons souligner que l'analyse effectuée dans la section 6 sur l'application des stratégies obtenues pour les différentes méthodes à des trajectoires simulées ne nous donne pas toute l'information. Le temps ne nous a pas permis de pousser plus loin cette partie et de prendre en compte un plus grand nombre de simulations. Des travaux ultérieurs pourraient porter sur une telle analyse. Notons que la méthode de couverture globale peut être appliquées à d'autres modèles pour l'actif sous-jacent. Il nous serait aussi possible d'ajouter des variables d'état pour obtenir un modèle à volatilité

stochastique ; par contre, un tel modèle entraînerait l'ajout d'une variable d'état, ce qui augmenterait le temps de calcul nécessaire pour obtenir les stratégies.

Références

- [1] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.
- [2] Les Clewlow and Stewart Hodges. Optimal delta-hedging under transactions costs. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8) :1353–1376, 1997.
- [3] Mark HA Davis, Vassilios G Panas, and Thaleia Zariphopoulou. European option pricing with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2) :470–493, 1993.
- [4] Pascal François, Geneviève Gauthier, and Frédéric Godin. Optimal hedging when the underlying asset follows a regime-switching markov process. *European Journal of Operational Research*, 237(1) :312–322, 2014.
- [5] Frédéric Godin. Minimizing cvar in global dynamic hedging with transaction costs. *Quantitative Finance*, 16(3) :461–475, 2016.
- [6] Stewart D Hodges and Anthony Neuberger. Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review of Futures Markets*, 8(2) :222–239, 1989.
- [7] Hayne E Leland. Option pricing and replication with transactions costs. *The Journal of Finance*, 40(5) :1283–1301, 1985.
- [8] Lionel Martellini and Philippe Priaulet. Competing methods for option hedging in the presence of transaction costs. *The Journal of Derivatives*, 9(3) :26–38, 2002.
- [9] E Whalley and Paul Wilmott. Hedge with an edge. *Risk*, 7(10) :82–85, 1994.
- [10] Valeri Zakamouline. Optimal hedging of options with transaction costs. *Wilmott Magazine*, July, pages 70–82, 2005.
- [11] Valeri Zakamouline. Efficient analytic approximation of the optimal hedging strategy for a european call option with transaction costs. *Quantitative Finance*, 6(5) :435–445, 2006.

- [12] Valeri Zakamouline. European option pricing and hedging with both fixed and proportional transaction costs. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30(1) :1–25, 2006.
- [13] Valeri Zakamouline. Optimal hedging of option portfolios with transaction costs. *Available at SSRN 938934*, 2006.
- [14] Valeri Zakamouline. The best hedging strategy in the presence of transaction costs. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 12(06) :833–860, 2009.
- [15] Yonggan Zhao and William T Ziemba. On leland’s option hedging strategy with transaction costs. *Stochastic Programming E-Print Series*, 2003.

7 Annexe

Figures supplémentaires - Fonction objectif semi-quadratique

Absence de frais de transaction

Option hors de la monnaie

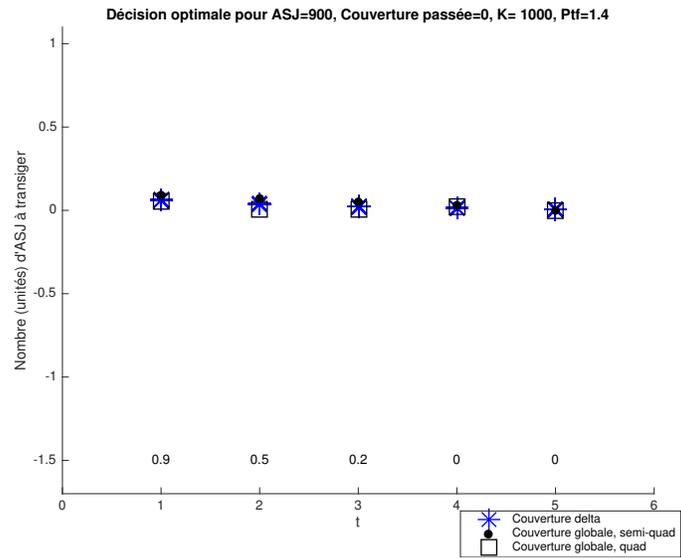


FIGURE 30 – Option hors de la monnaie, portefeuille faible.

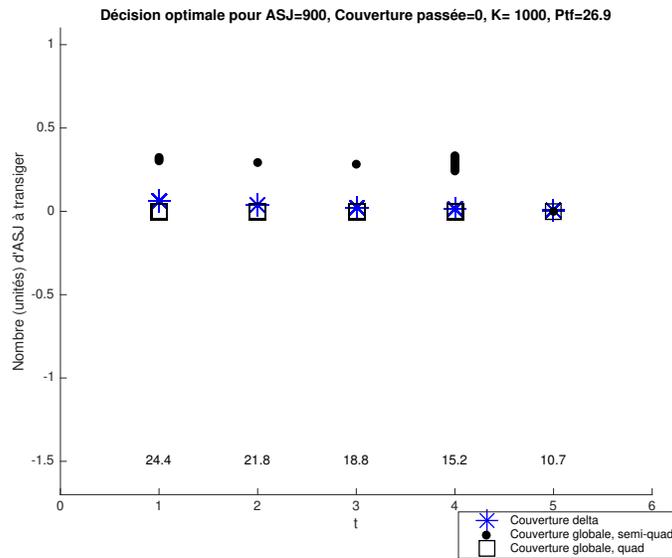


FIGURE 31 – Option hors de la monnaie, portefeuille neutre.

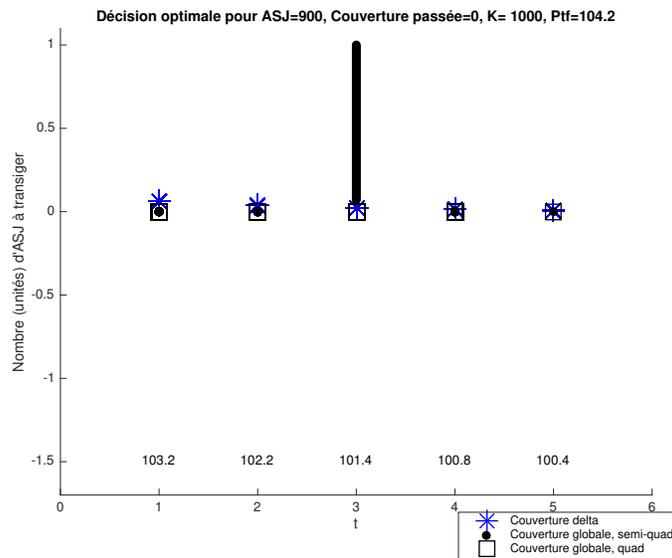


FIGURE 32 – Option hors de la monnaie, portefeuille élevé

Option à la monnaie

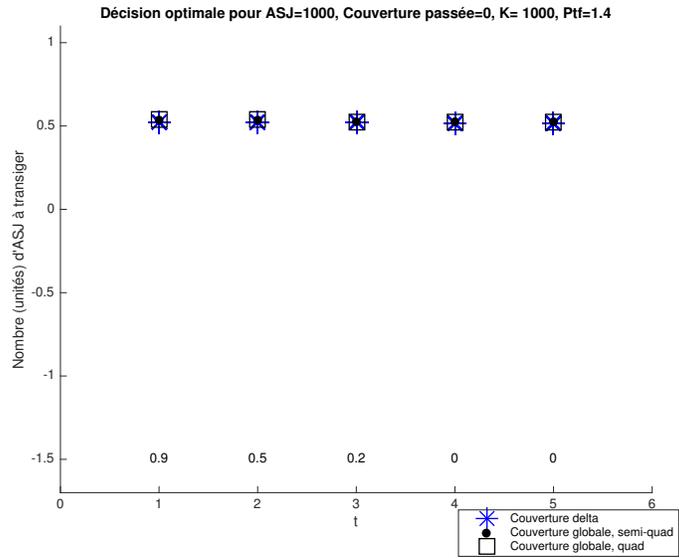


FIGURE 33 – Option à la monnaie, portefeuille faible.

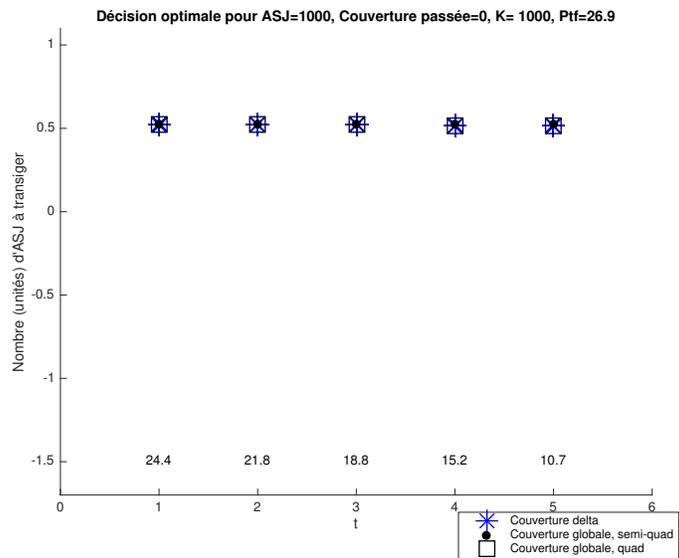


FIGURE 34 – Option à la monnaie, portefeuille neutre.

Option dans la monnaie

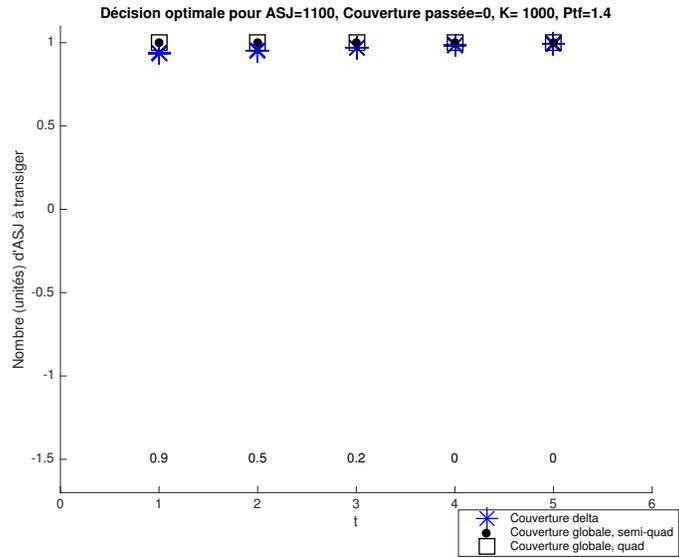


FIGURE 35 – Option dans la monnaie, portefeuille faible.

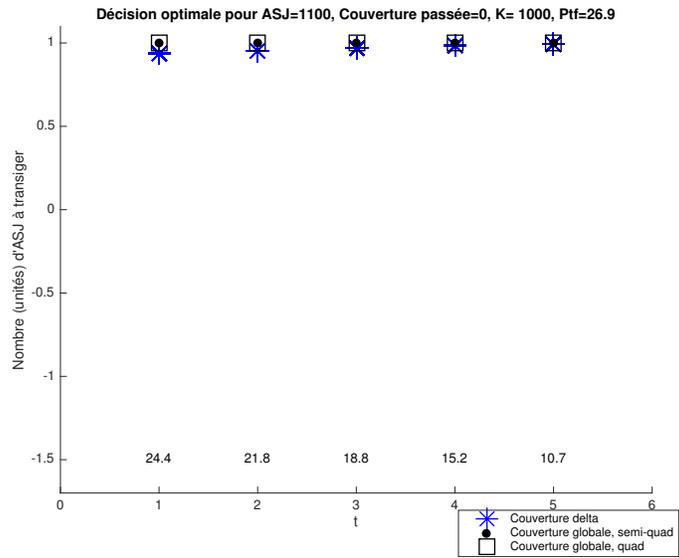


FIGURE 36 – Option dans la monnaie, portefeuille neutre.

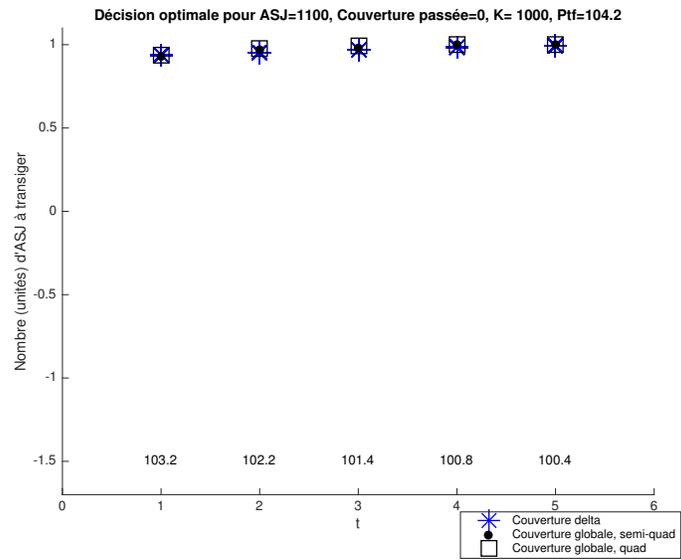


FIGURE 37 – Option dans la monnaie, portefeuille élevé.

Frais fixes f_1

Couverture passée nulle

Option hors de la monnaie

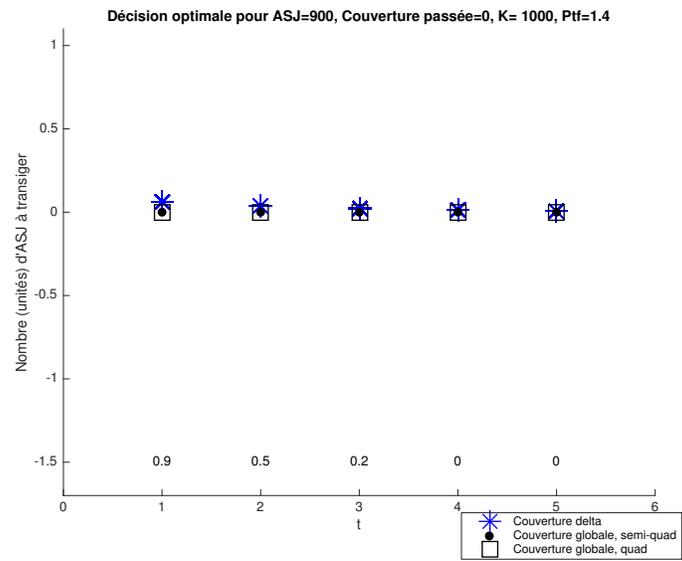


FIGURE 38 – Option hors de la monnaie, portefeuille faible, couverture nulle.

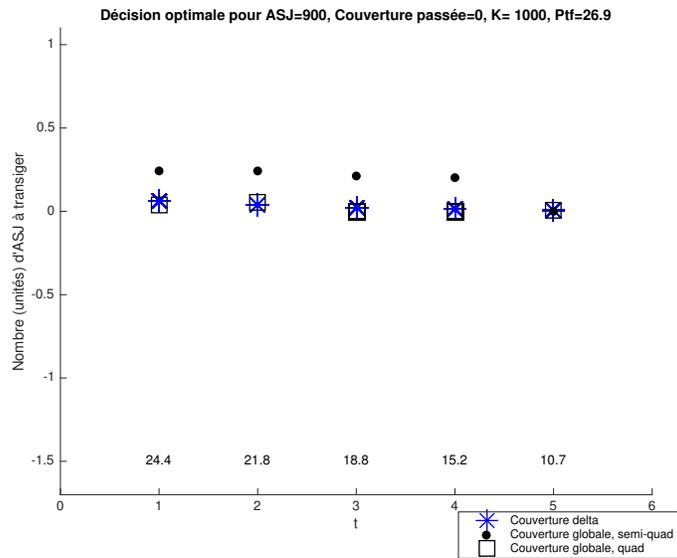


FIGURE 39 – Option hors de la monnaie, portefeuille neutre, couverture nulle.

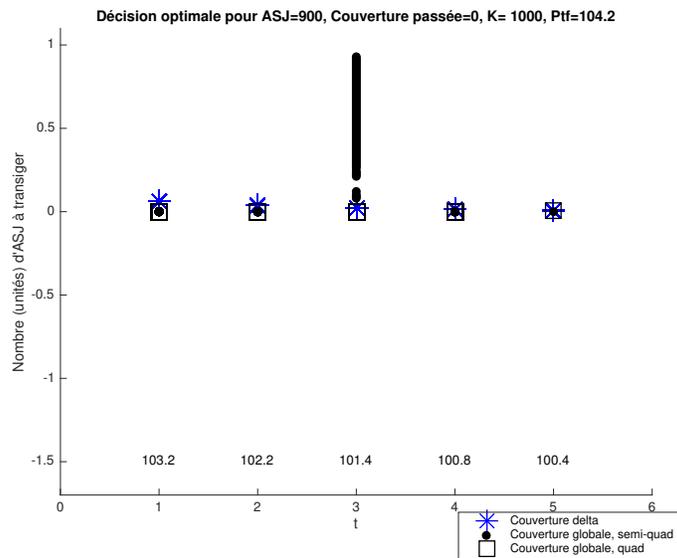


FIGURE 40 – Option hors de la monnaie, portefeuille élevé, couverture nulle.

Option à la monnaie

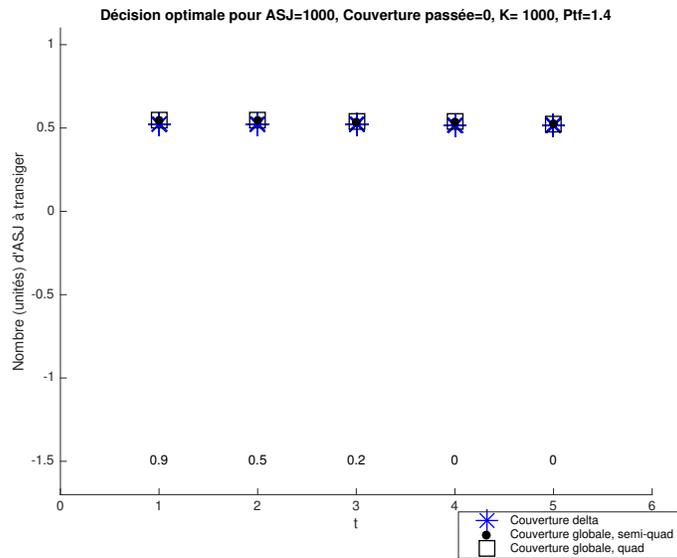


FIGURE 41 – Option à la monnaie, portefeuille faible, couverture nulle.

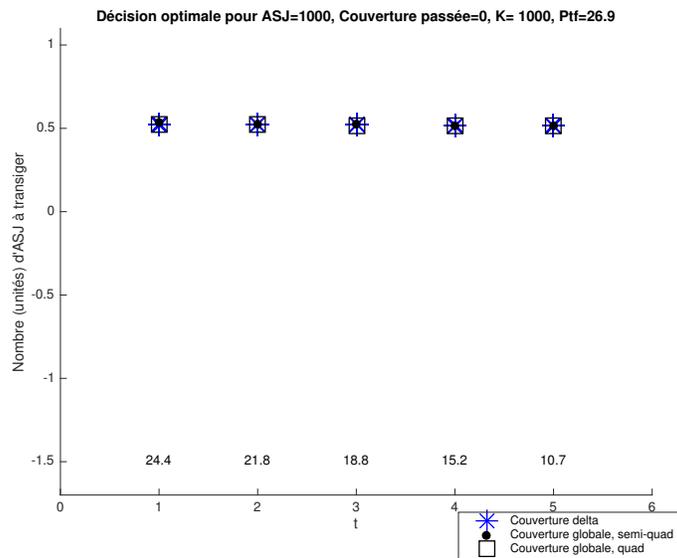


FIGURE 42 – Option à la monnaie, portefeuille neutre, couverture nulle.

Couverture passée partielle
Option hors de la monnaie

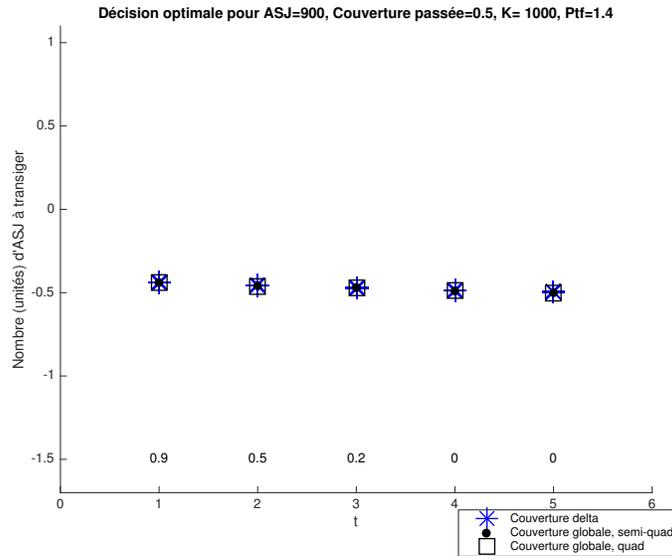


FIGURE 43 – Option hors de la monnaie, portefeuille faible, couverture partielle.

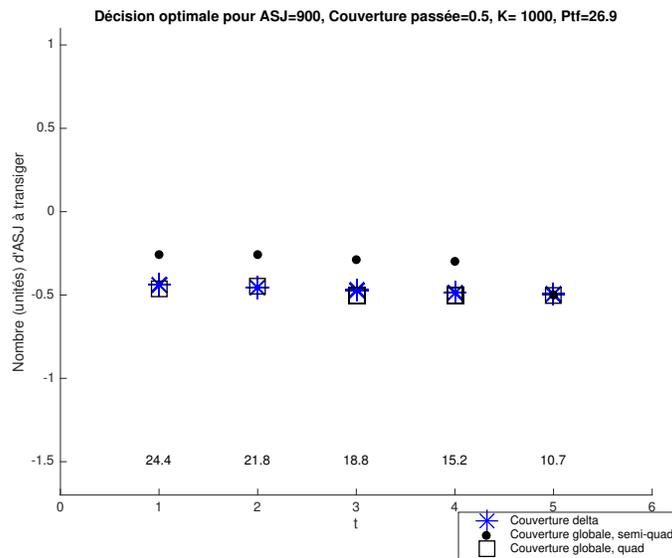


FIGURE 44 – Option hors de la monnaie, portefeuille neutre, couverture partielle.

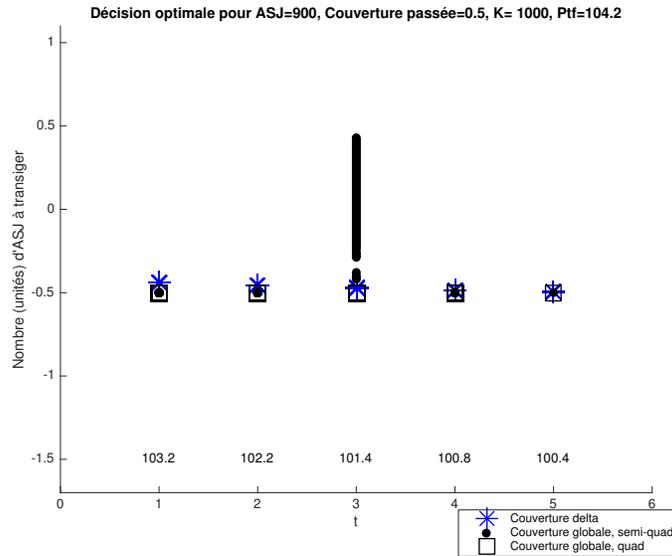


FIGURE 45 – Option hors de la monnaie, portefeuille élevé, couverture partielle.

Option à la monnaie

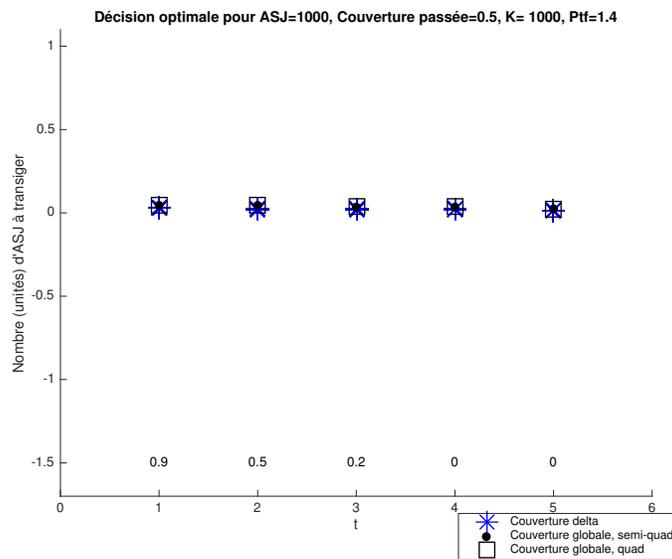


FIGURE 46 – Option à la monnaie, portefeuille faible, couverture partielle.

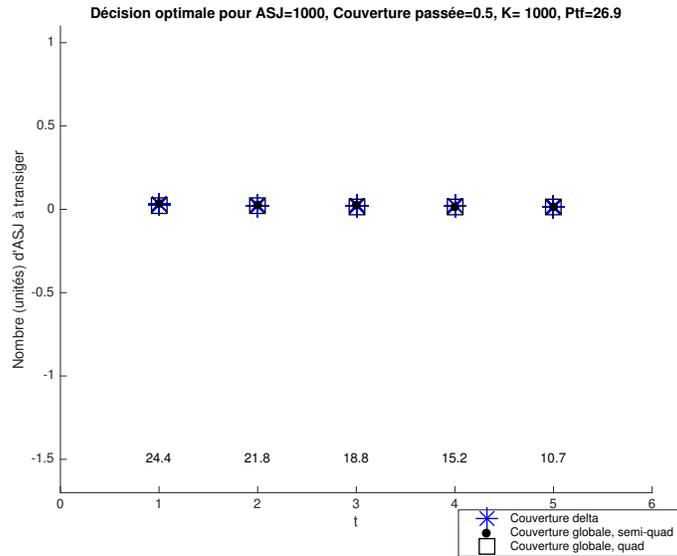


FIGURE 47 – Option à la monnaie, portefeuille neutre, couverture partielle.

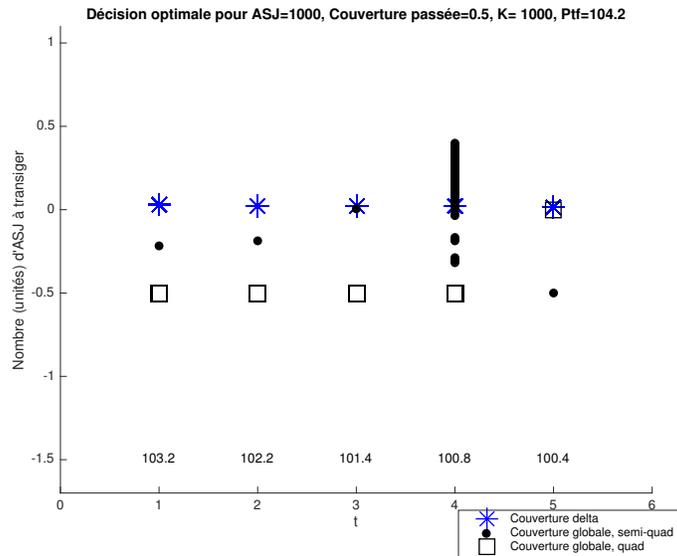


FIGURE 48 – Option à la monnaie, portefeuille élevé, couverture partielle.

Option dans la monnaie

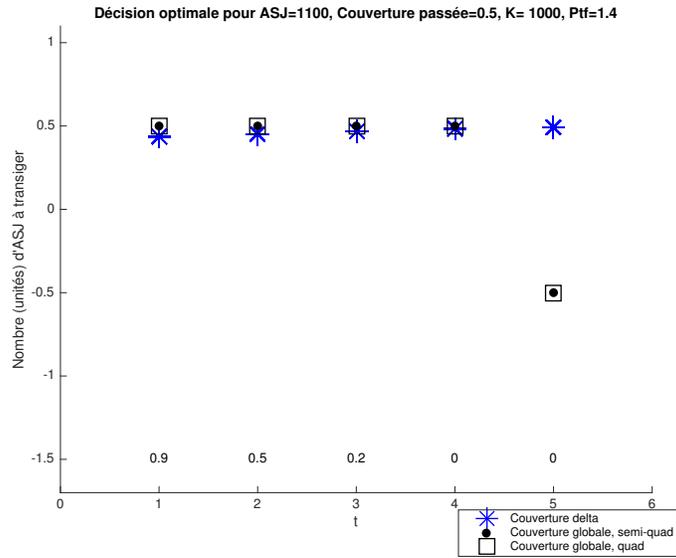


FIGURE 49 – Option dans la monnaie, portefeuille faible, couverture partielle.

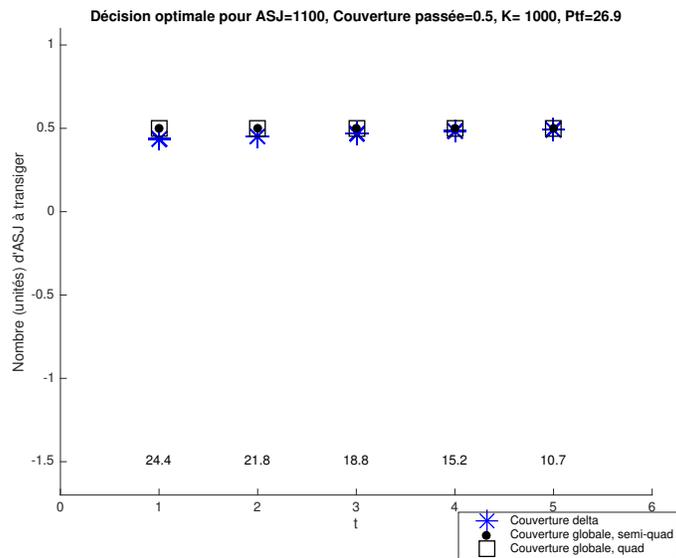


FIGURE 50 – Option dans la monnaie, portefeuille neutre, couverture partielle.

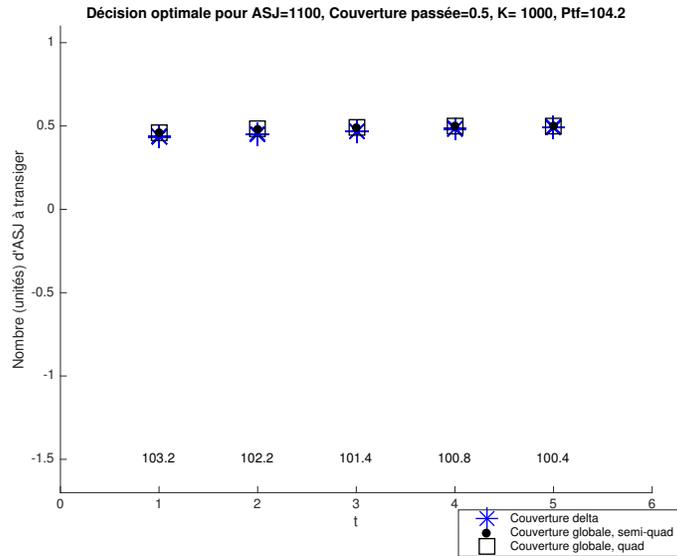


FIGURE 51 – Option dans la monnaie, portefeuille élevé, couverture partielle.

Couverture passée totale Option hors de la monnaie

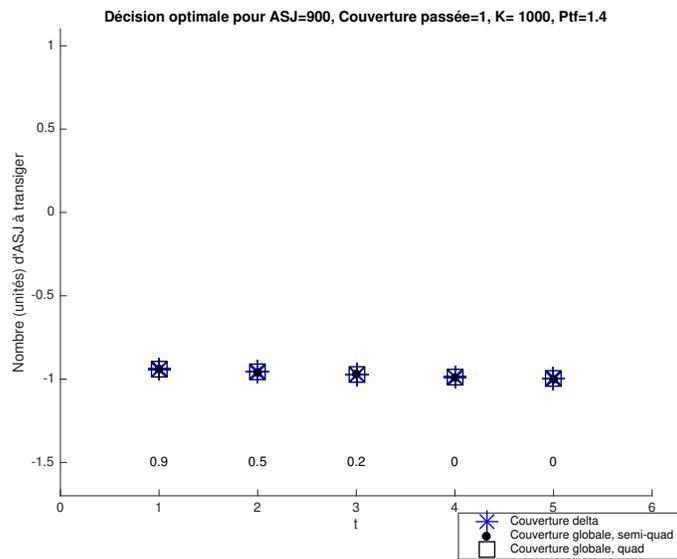


FIGURE 52 – Option hors de la monnaie, portefeuille faible, couverture totale.

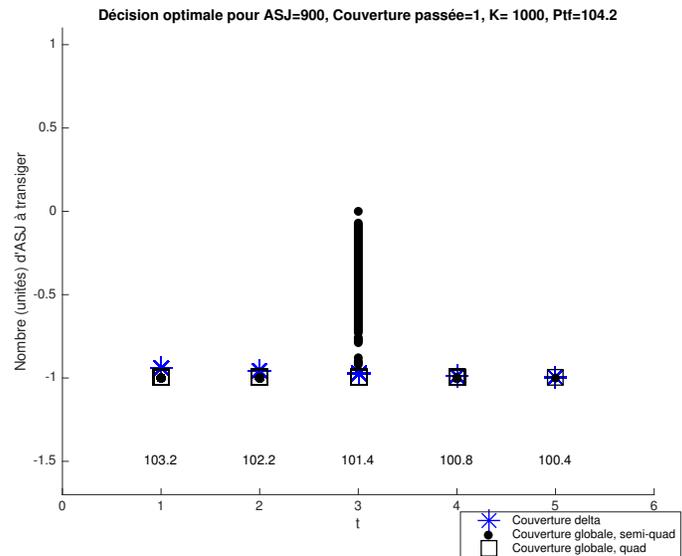


FIGURE 53 – Option hors de la monnaie, portefeuille élevé, couverture totale.

Option à la monnaie

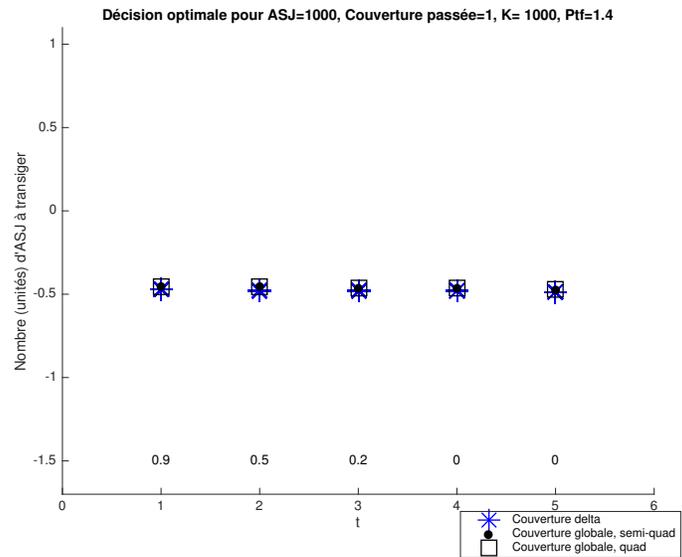


FIGURE 54 – Option à la monnaie, portefeuille faible, couverture totale.

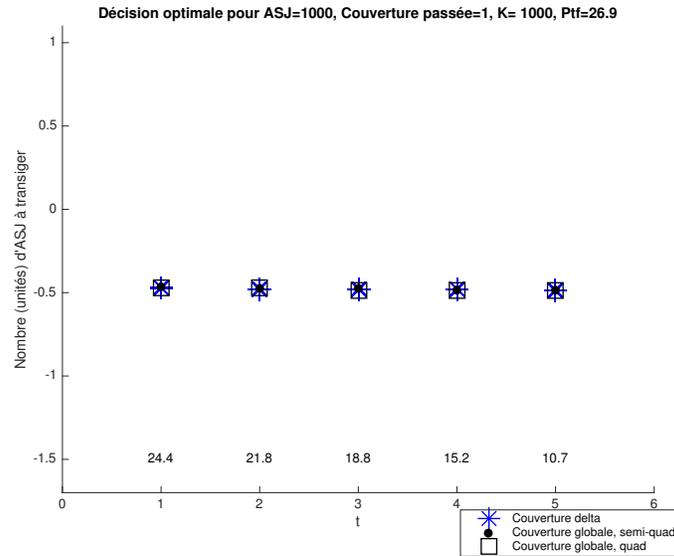


FIGURE 55 – Option à la monnaie, portefeuille neutre, couverture totale.

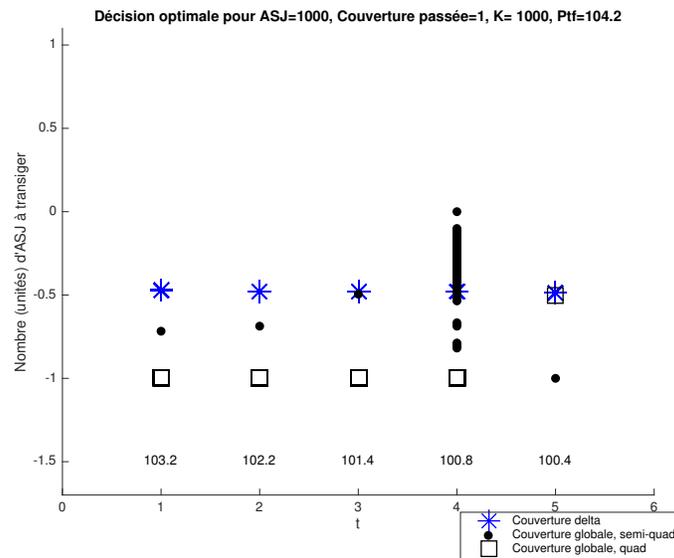


FIGURE 56 – Option à la monnaie, portefeuille élevé, couverture totale.

Option dans la monnaie

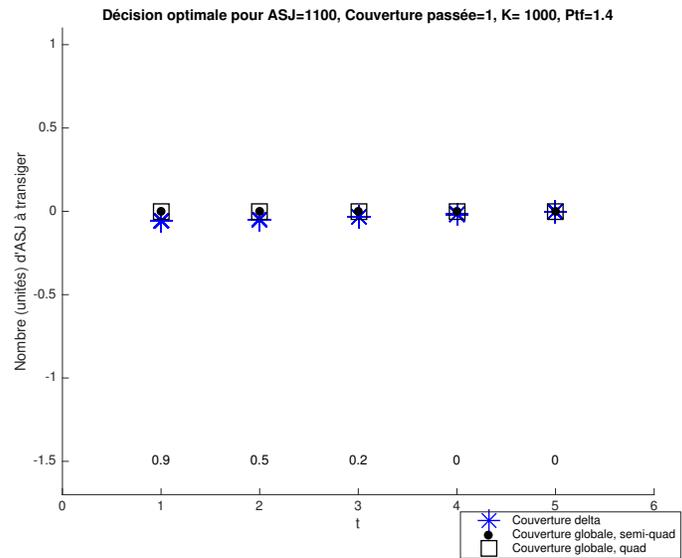


FIGURE 57 – Option dans la monnaie, portefeuille faible, couverture totale.

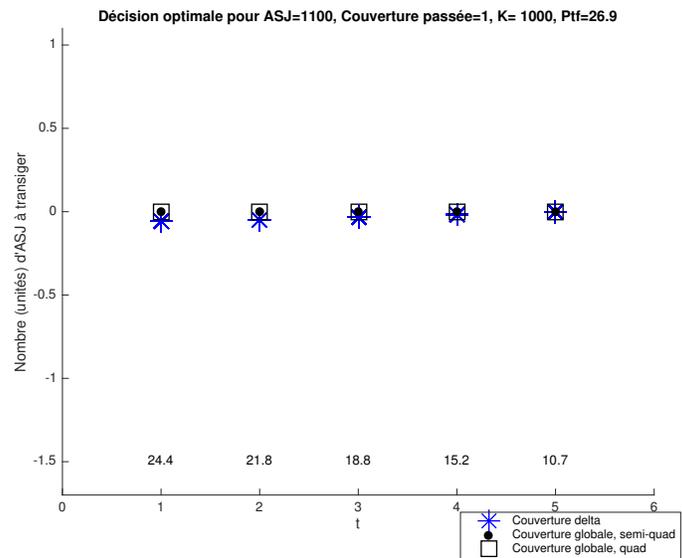


FIGURE 58 – Option dans la monnaie, portefeuille neutre, couverture totale.

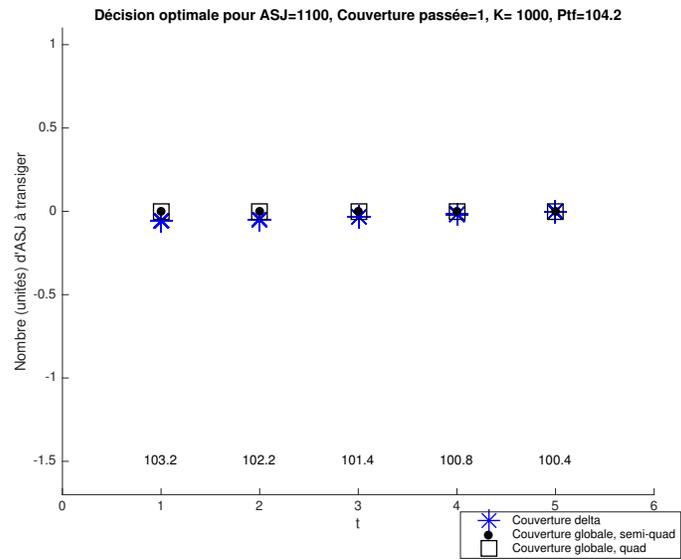


FIGURE 59 – Option dans la monnaie, portefeuille élevé, couverture totale.

Frais variables f_2

Couverture passée nulle Option hors de la monnaie

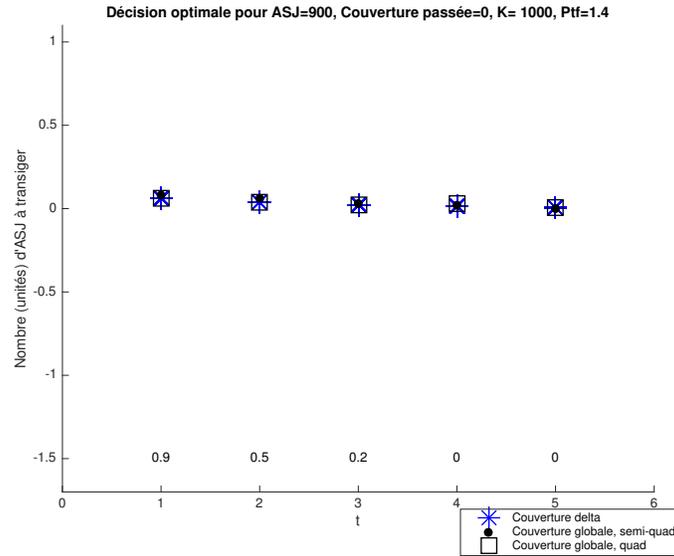


FIGURE 60 – Option hors de la monnaie, portefeuille faible, couverture nulle.

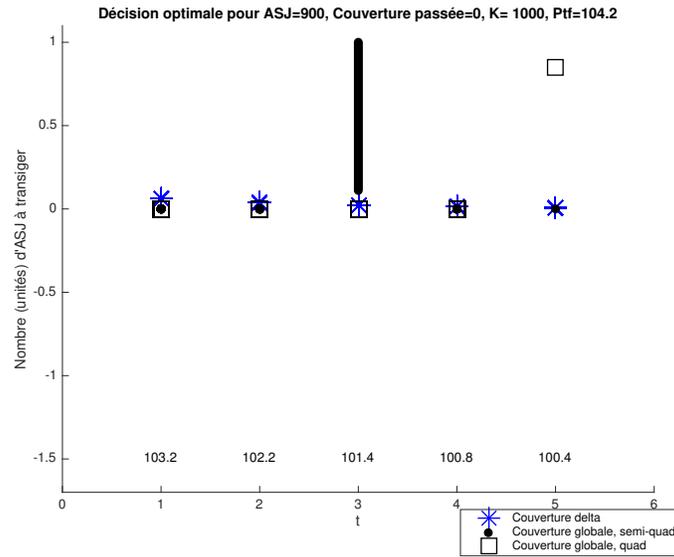


FIGURE 61 – Option hors de la monnaie, portefeuille élevé, couverture nulle.

Option à la monnaie

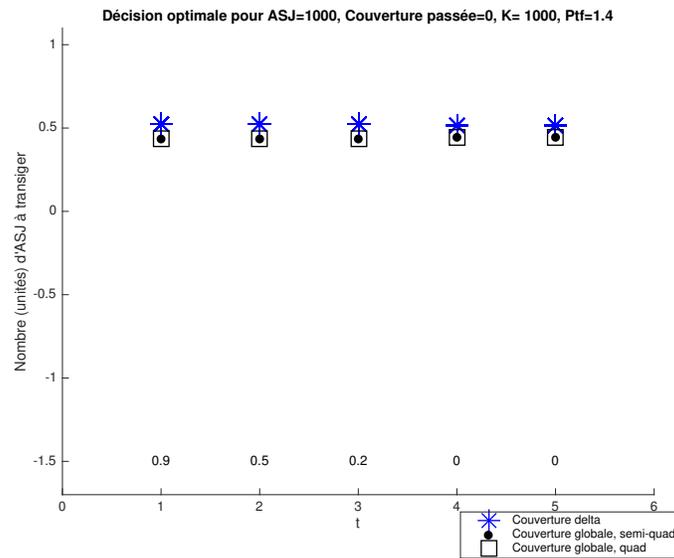


FIGURE 62 – Option à la monnaie, portefeuille faible, couverture nulle.

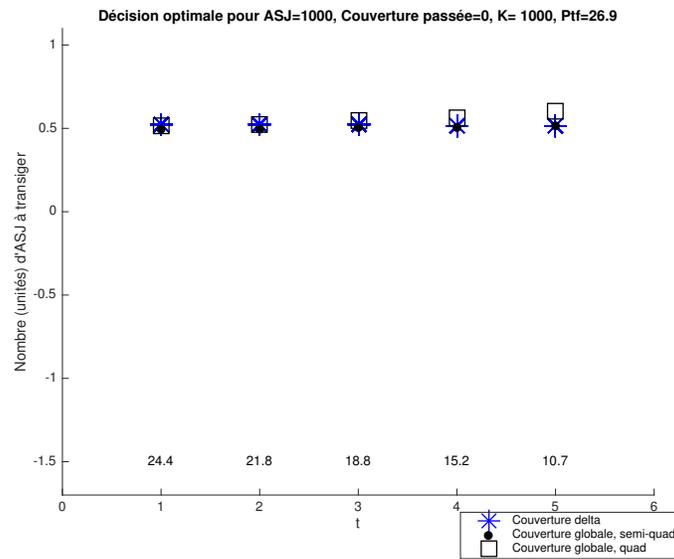


FIGURE 63 – Option à la monnaie, portefeuille neutre, couverture nulle.

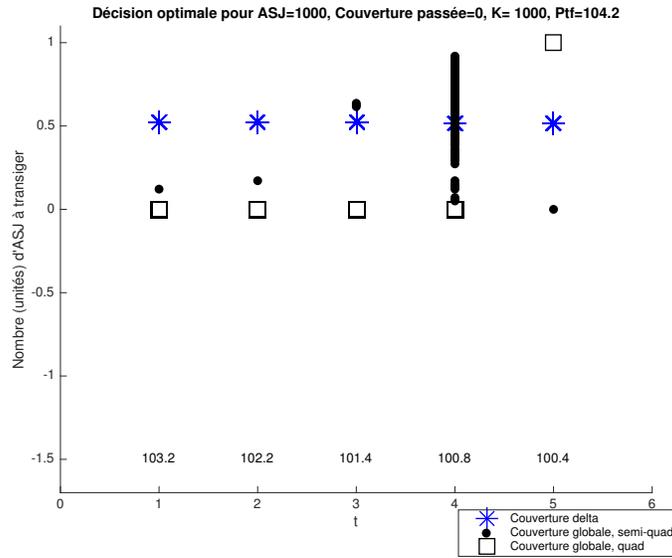


FIGURE 64 – Option à la monnaie, portefeuille élevé, couverture nulle.

Option dans la monnaie

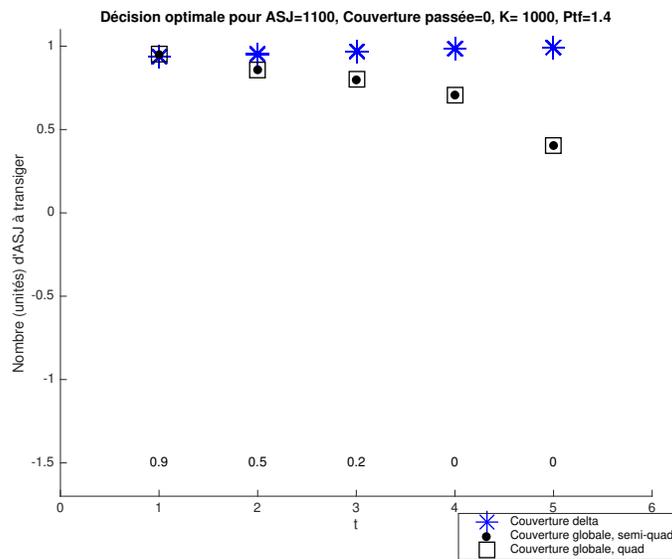


FIGURE 65 – Option dans la monnaie, portefeuille faible, couverture nulle.

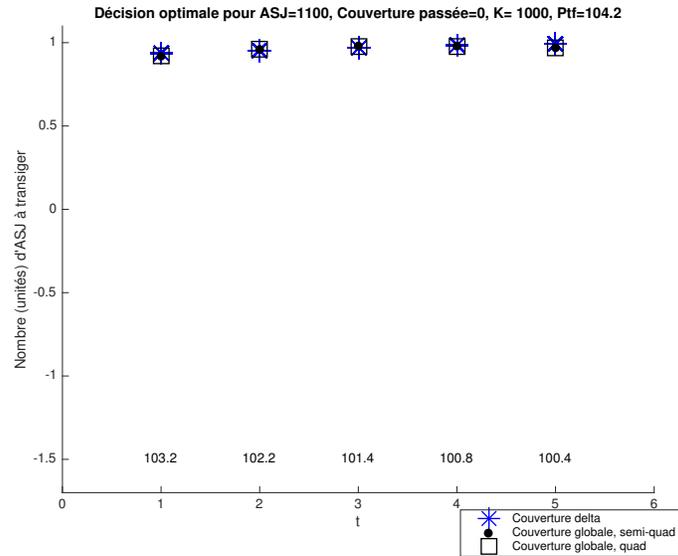


FIGURE 66 – Option dans la monnaie, portefeuille élevé, couverture nulle.

Couverture passée partielle Option hors de la monnaie

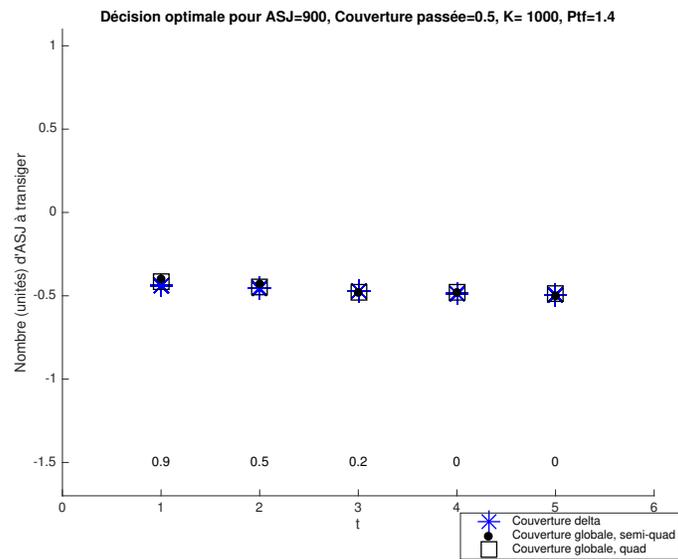


FIGURE 67 – Option hors de la monnaie, portefeuille faible, couverture partielle.

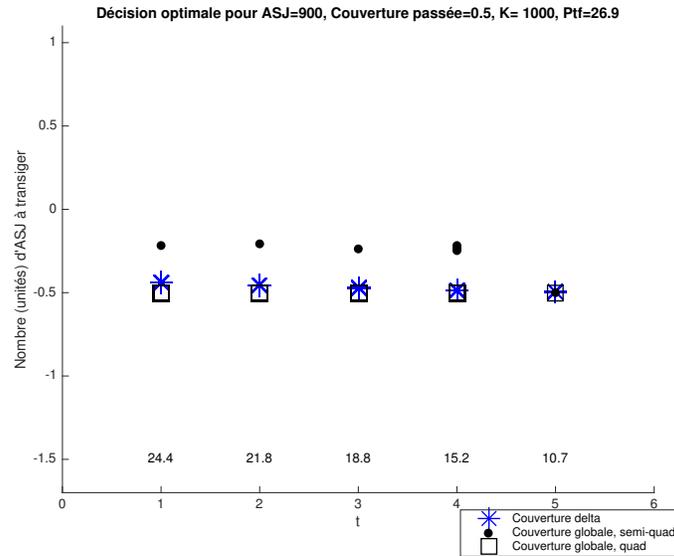


FIGURE 68 – Option hors de la monnaie, portefeuille neutre, couverture partielle.

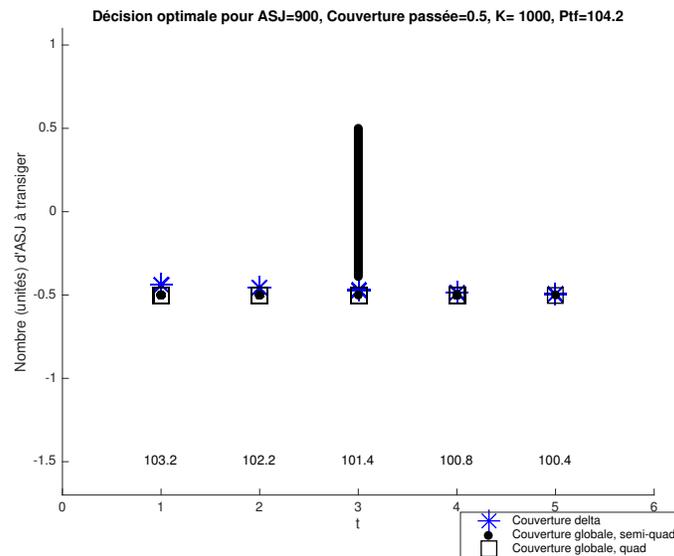


FIGURE 69 – Option hors de la monnaie, portefeuille élevé, couverture partielle.

Option à la monnaie

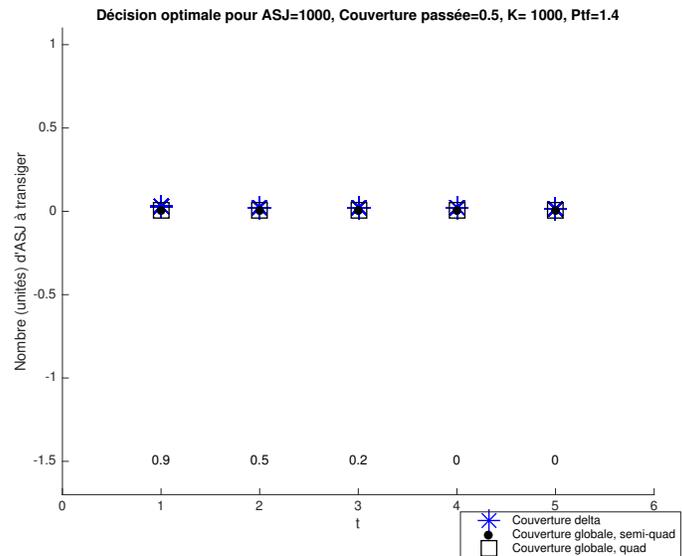


FIGURE 70 – Option à la monnaie, portefeuille faible, couverture partielle.

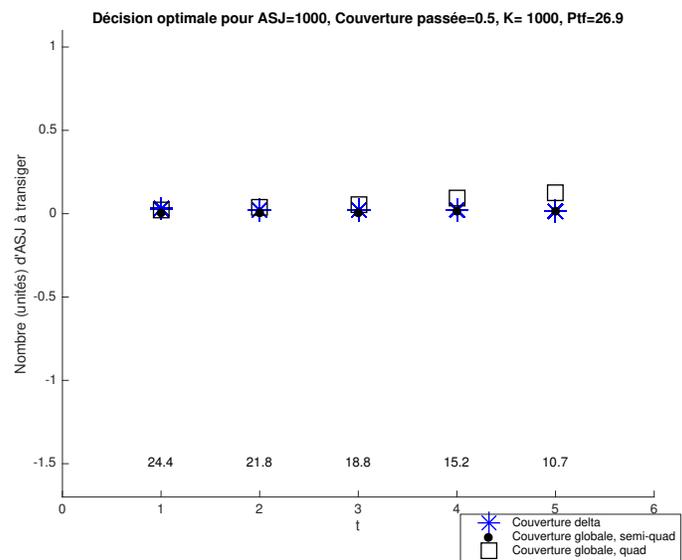


FIGURE 71 – Option à la monnaie, portefeuille neutre, couverture partielle.

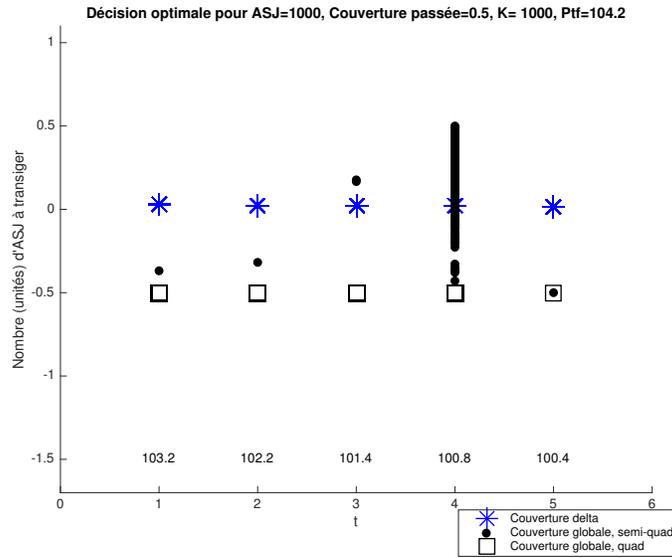


FIGURE 72 – Option à la monnaie, portefeuille élevé, couverture partielle.

Option dans la monnaie

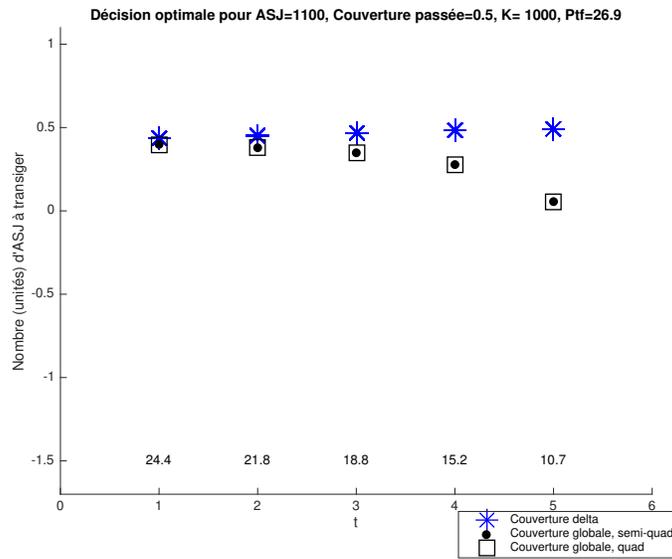


FIGURE 73 – Option dans la monnaie, portefeuille neutre, couverture partielle.

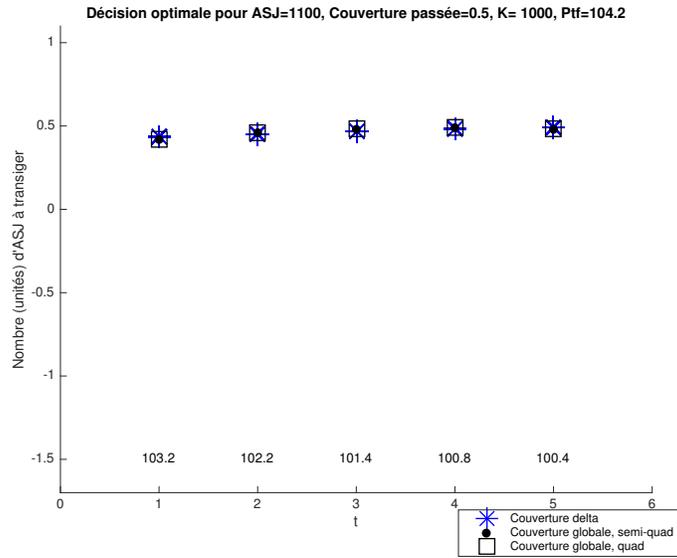


FIGURE 74 – Option dans la monnaie, portefeuille élevé, couverture partielle.

Couverture passée totale Option hors de la monnaie

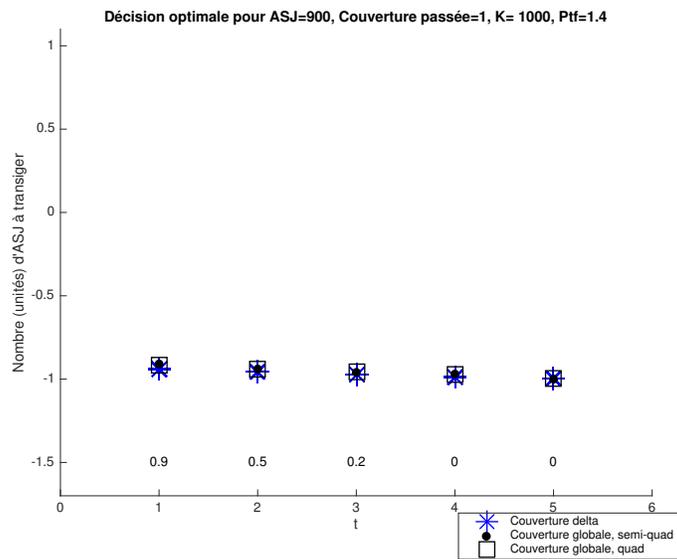


FIGURE 75 – Option hors de la monnaie, portefeuille faible, couverture totale.

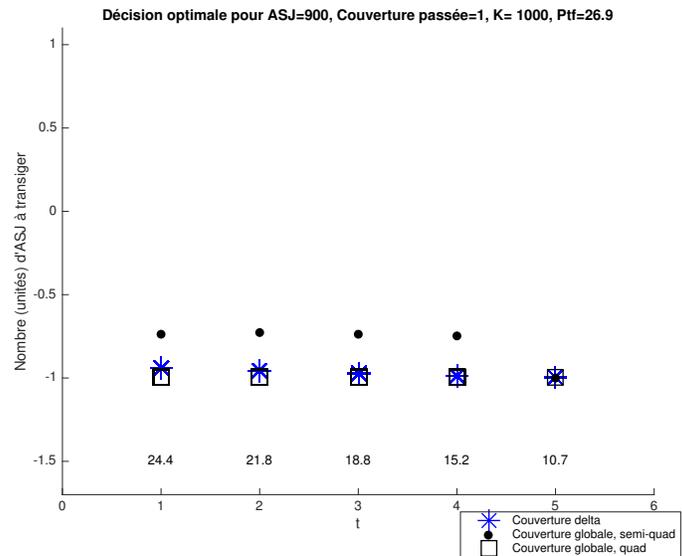


FIGURE 76 – Option hors de la monnaie, portefeuille neutre, couverture totale.

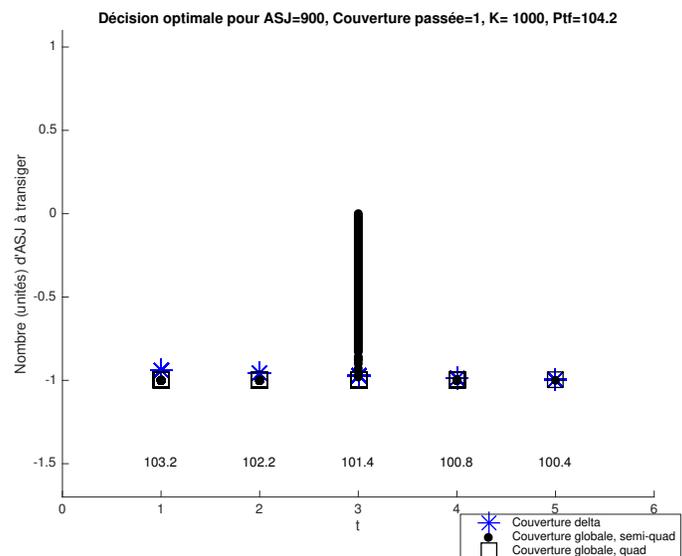


FIGURE 77 – Option hors de la monnaie, portefeuille élevé, couverture totale.

Option à la monnaie

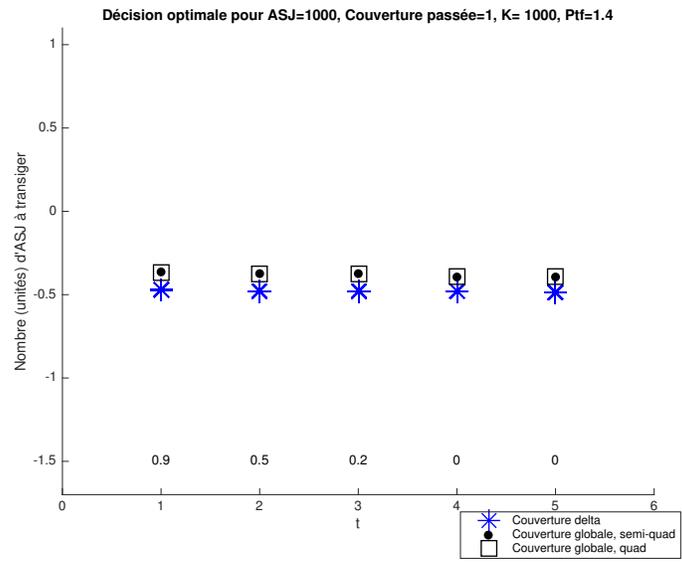


FIGURE 78 – Option à la monnaie, portefeuille faible, couverture totale.

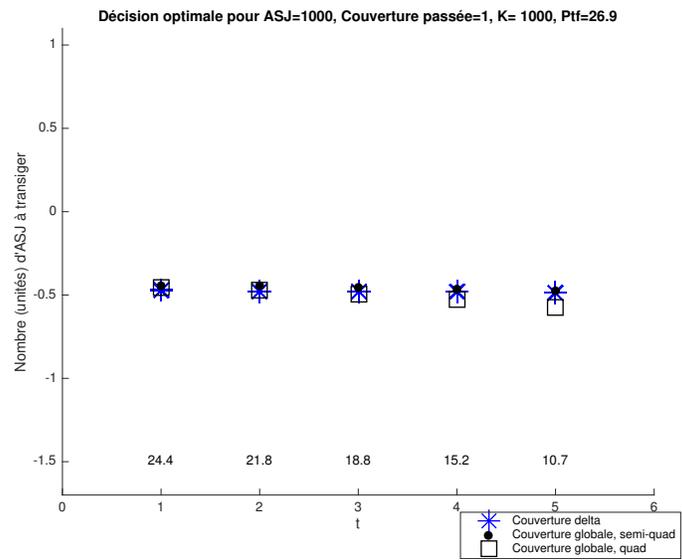


FIGURE 79 – Option à la monnaie, portefeuille neutre, couverture totale.

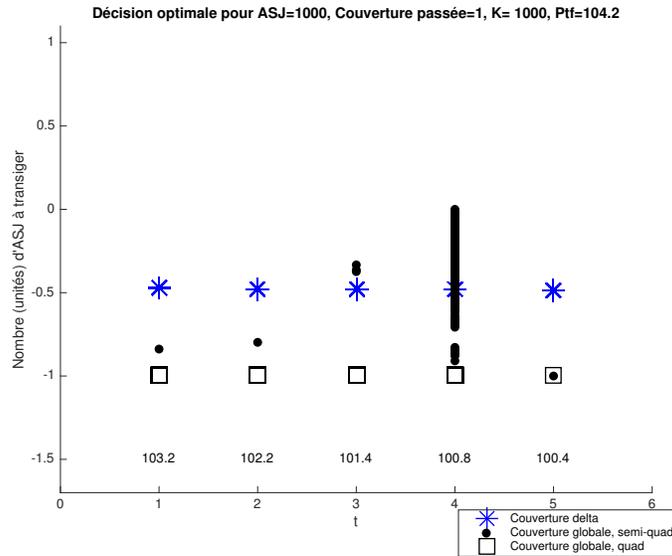


FIGURE 80 – Option à la monnaie, portefeuille élevé, couverture totale.

Option dans la monnaie

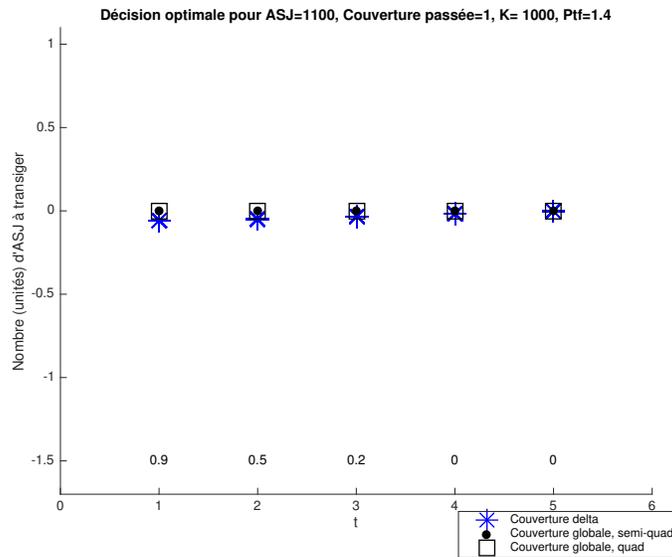


FIGURE 81 – Option dans la monnaie, portefeuille faible, couverture totale.

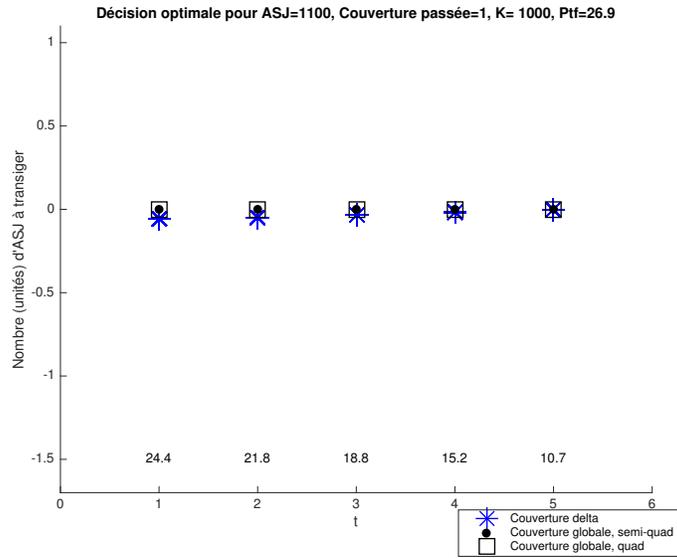


FIGURE 82 – Option dans la monnaie, portefeuille neutre, couverture totale.

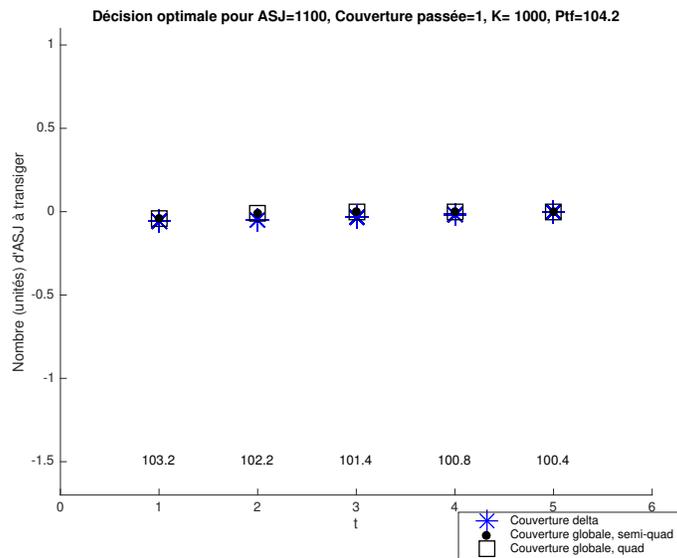


FIGURE 83 – Option dans la monnaie, portefeuille élevé, couverture totale.

Frais proportionnels f_3

Couverture passée nulle

Option hors de la monnaie

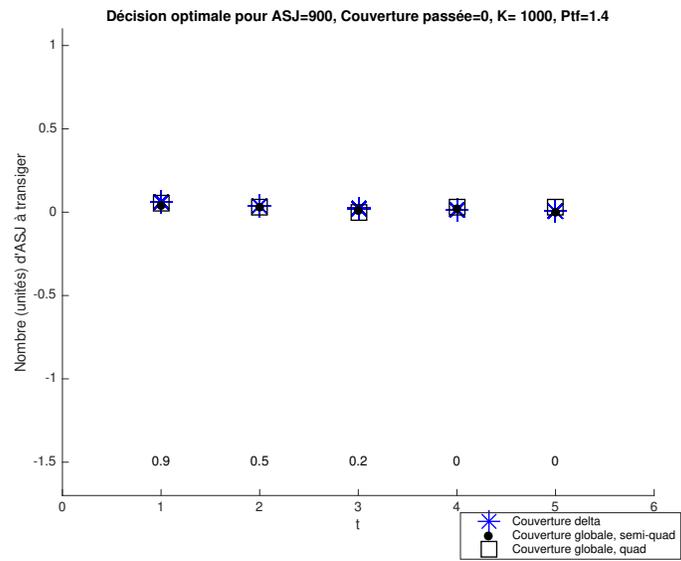


FIGURE 84 – Option hors de la monnaie, portefeuille faible, couverture nulle.

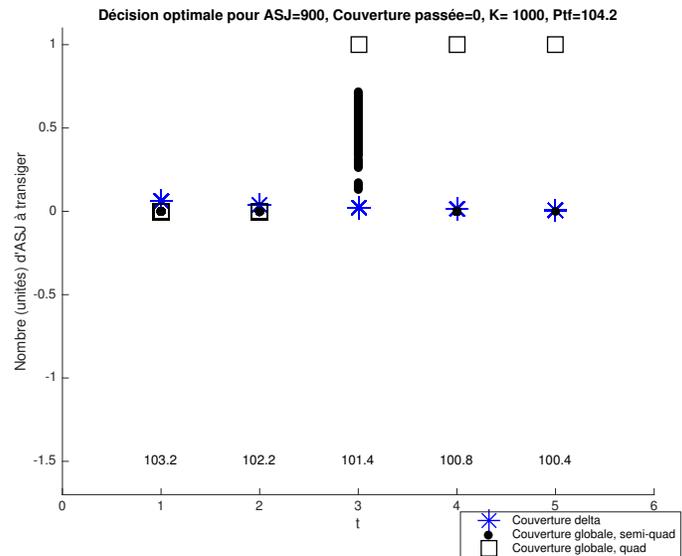


FIGURE 85 – Option hors de la monnaie, portefeuille élevé, couverture nulle.

Option à la monnaie

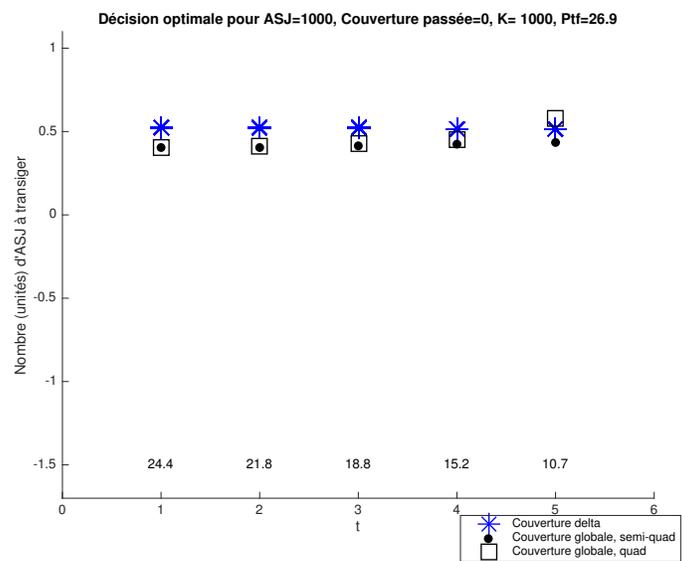


FIGURE 86 – Option à la monnaie, portefeuille neutre, couverture nulle.

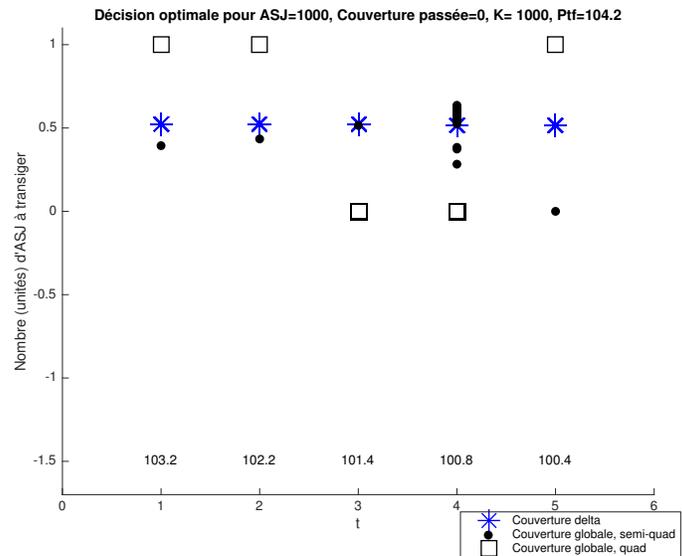


FIGURE 87 – Option à la monnaie, portefeuille élevé, couverture nulle.

Option dans la monnaie

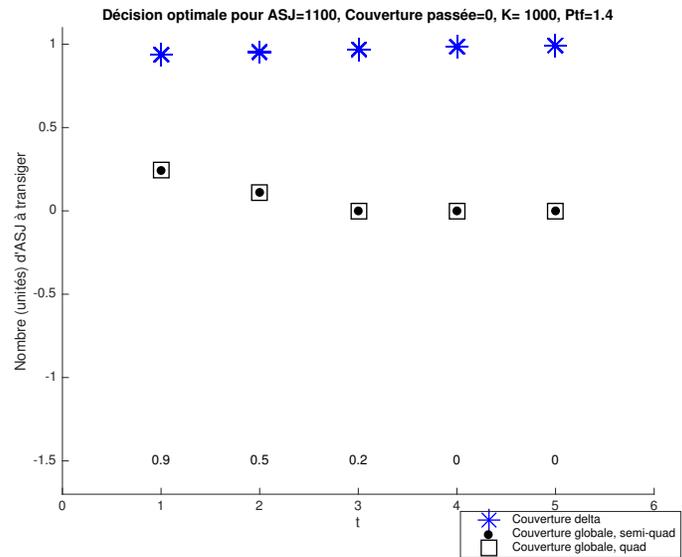


FIGURE 88 – Option dans la monnaie, portefeuille faible, couverture nulle.

Option hors de la monnaie

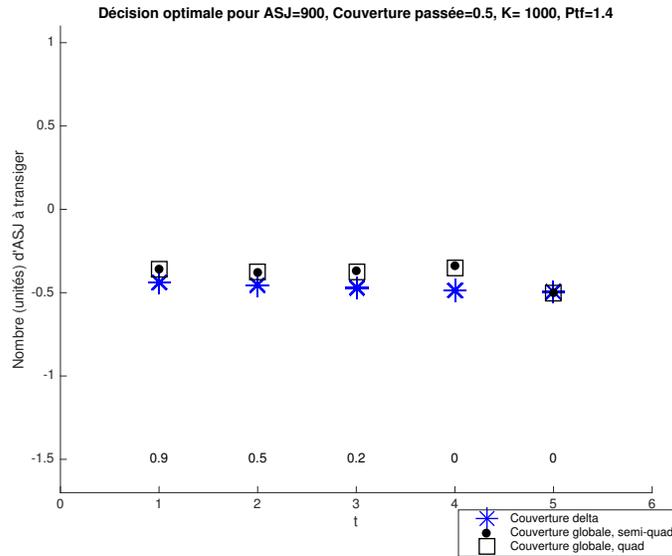


FIGURE 89 – Option hors de la monnaie, portefeuille faible, couverture partielle.

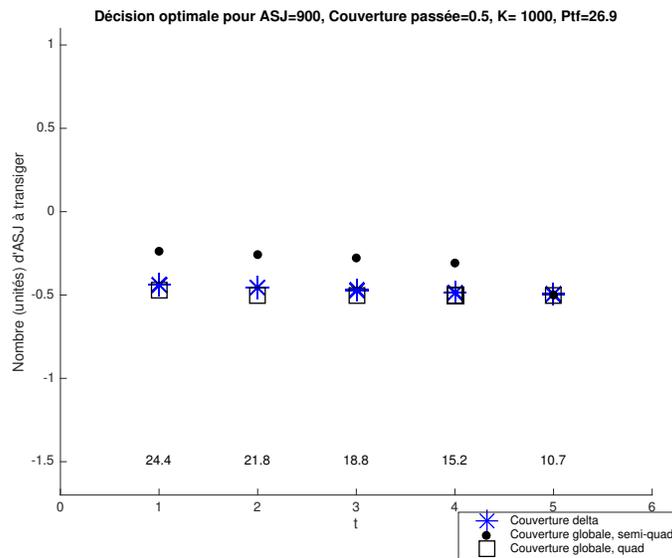


FIGURE 90 – Option hors de la monnaie, portefeuille neutre, couverture partielle.

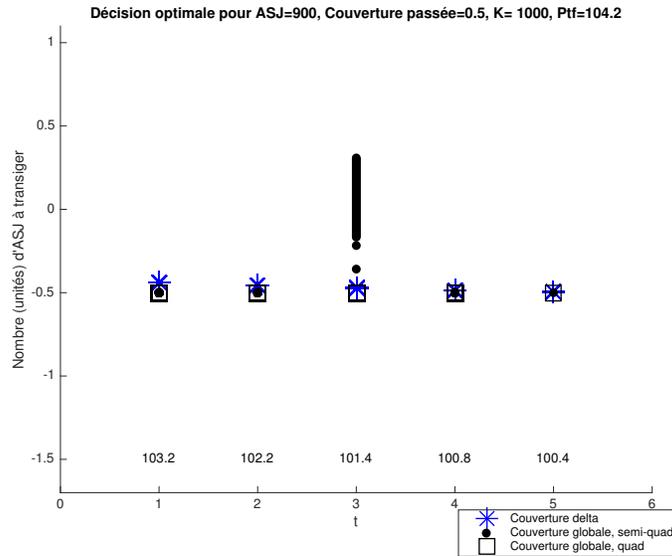


FIGURE 91 – Option hors de la monnaie, portefeuille élevé, couverture partielle.

Option à la monnaie

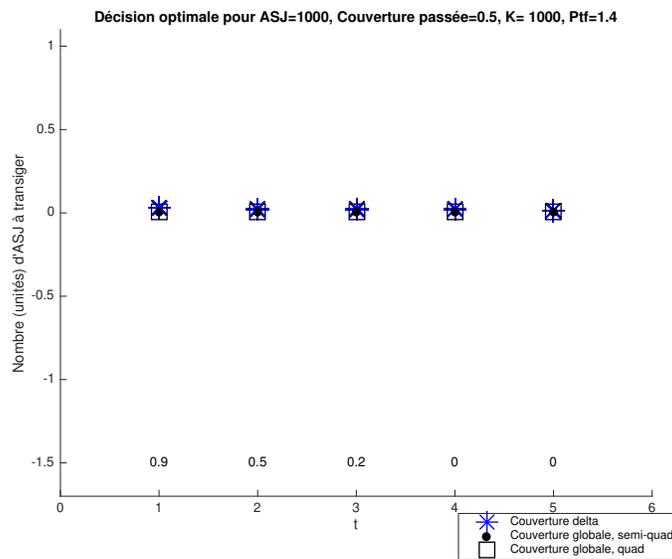


FIGURE 92 – Option à la monnaie, portefeuille faible, couverture partielle.

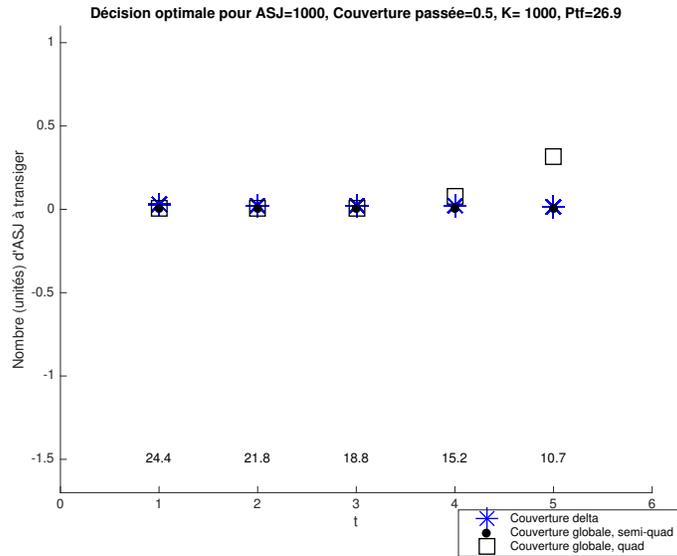


FIGURE 93 – Option à la monnaie, portefeuille neutre, couverture partielle.

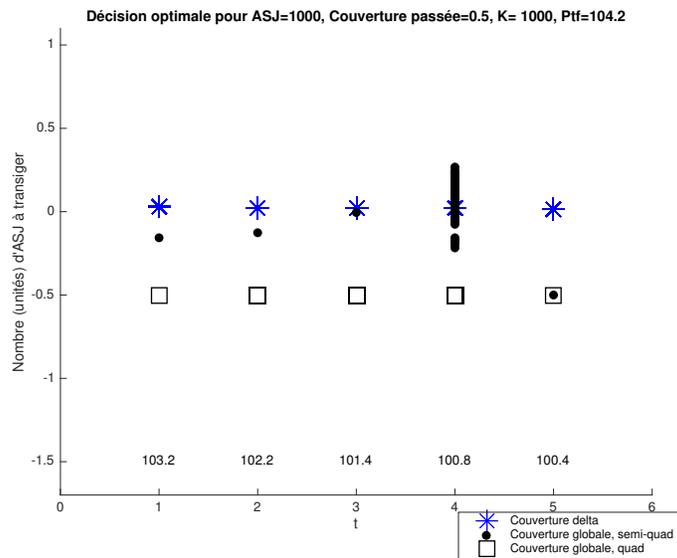


FIGURE 94 – Option à la monnaie, portefeuille élevé, couverture partielle.

Option dans la monnaie

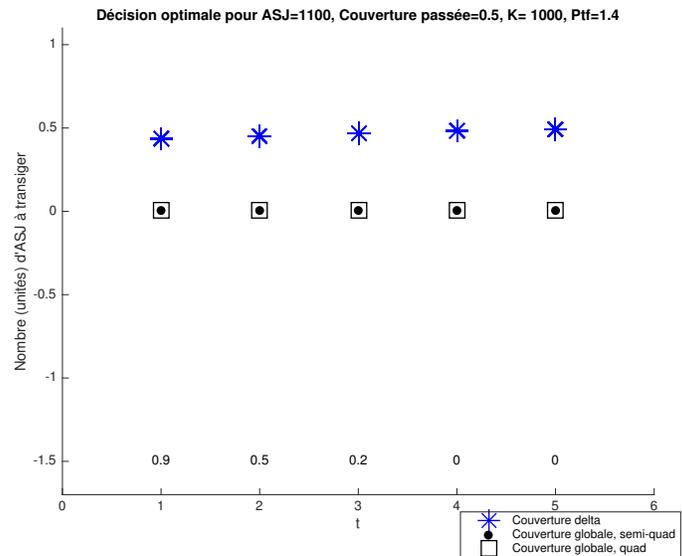


FIGURE 95 – Option dans la monnaie, portefeuille faible, couverture partielle.

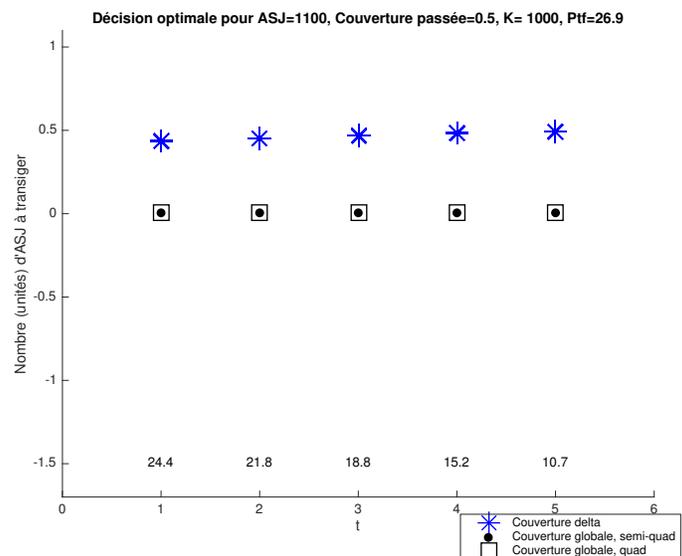


FIGURE 96 – Option dans la monnaie, portefeuille neutre, couverture partielle.

Option hors de la monnaie

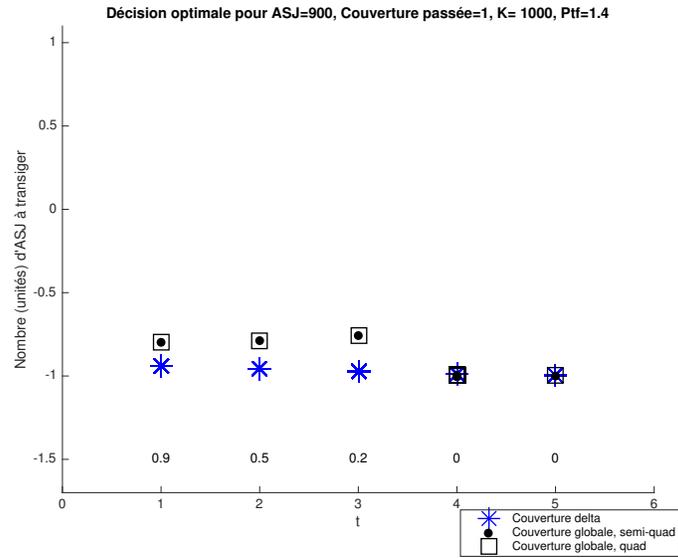


FIGURE 97 – Option hors de la monnaie, portefeuille faible, couverture totale.

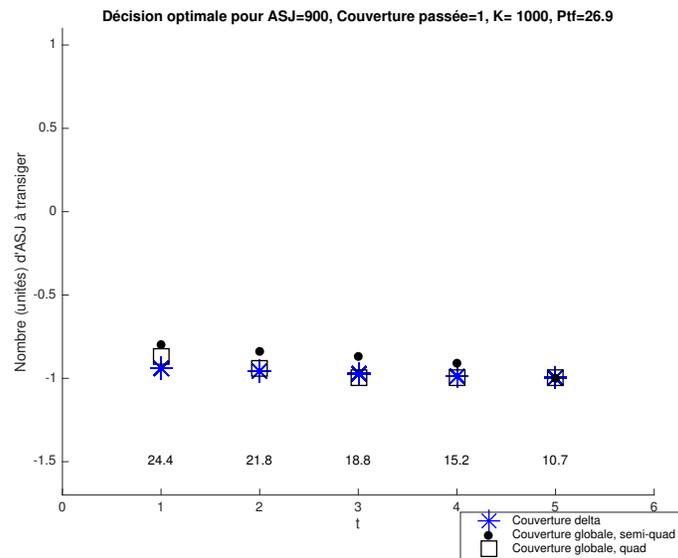


FIGURE 98 – Option hors de la monnaie, portefeuille neutre, couverture totale.

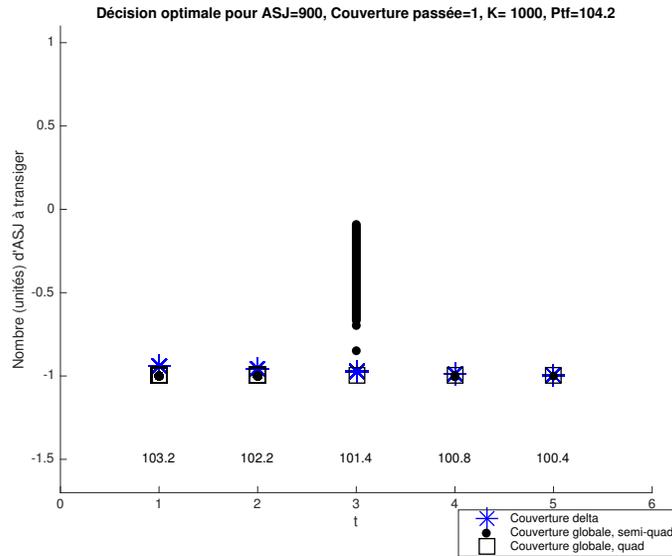


FIGURE 99 – Option hors de la monnaie, portefeuille élevé, couverture totale.

Option dans la monnaie

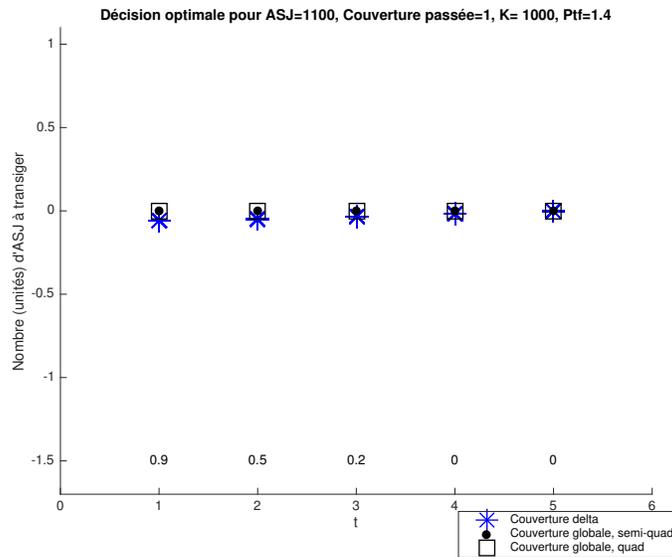


FIGURE 100 – Option dans la monnaie, portefeuille faible, couverture totale.

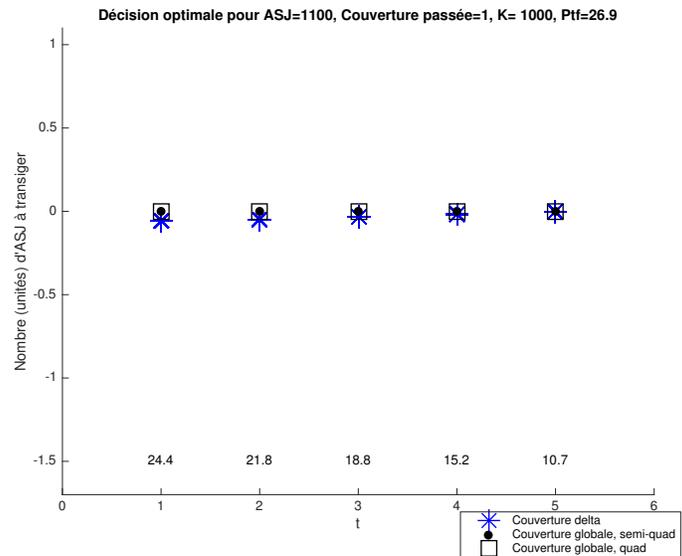


FIGURE 101 – Option dans la monnaie, portefeuille neutre, couverture totale.

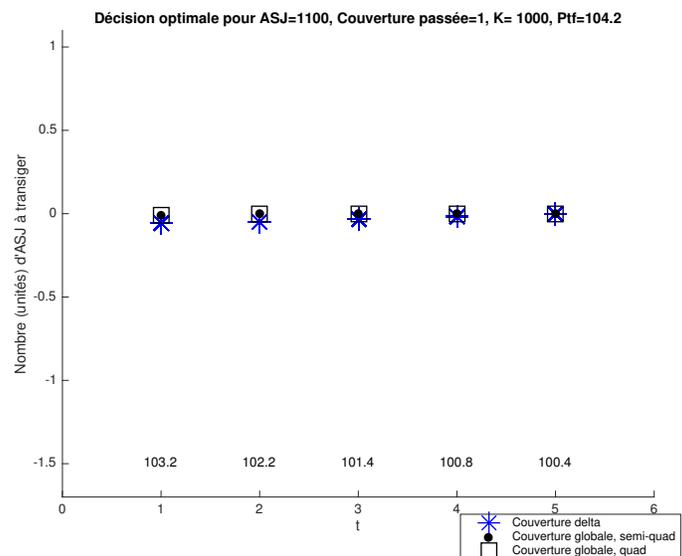


FIGURE 102 – Option dans la monnaie, portefeuille élevé, couverture totale.