

HEC MONTRÉAL

**Ingénierie de distribution de rendements dans un contexte
d'investissement basé sur les objectifs**

par

Christophe Faucher-Courchesne

**Sciences de la gestion
(Option Ingénierie financière)**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences
(M. Sc.)*

Juillet 2020

© Christophe Faucher-Courchesne, 2020

Résumé

Ce mémoire aborde l'impact de l'ingénierie de distribution de rendements dans un contexte d'investissement basé sur les objectifs dans le but de réduire le coût de financement d'un objectif. Pour ce faire, un modèle de construction de portefeuille avec contrainte de valeur à risque est adapté à un contexte d'investissement basé sur les objectifs et généralisé à un problème sur plusieurs périodes. L'utilisation de ce modèle permet de déterminer une séquence de portefeuilles optimaux et un montant initial requis pour permettre à l'investisseur de maintenir constante la probabilité d'atteindre l'objectif.

Afin de réduire l'investissement initial requis, la vente d'une option d'achat ayant comme actif sous-jacent l'investissement dans la séquence de portefeuilles optimaux et un prix d'exercice supérieur ou égal à la valeur de l'objectif est proposée. Différentes variables significatives sont considérées et des indicateurs qui permettent d'évaluer l'impact de cette réduction du coût de financement sont évalués.

Les résultats présentés montrent que la méthode proposée réduit le coût de financement de façon non significative. De plus, il est démontré que les désavantages attendus à l'échéance surpassent les bénéfices obtenus au temps initial.

Mots-clés

Construction de portefeuille, investissement basé sur les objectifs, tarification d'options, valeur à risque.

Table des matières

Résumé	i
Liste des tableaux	v
Liste des figures	vii
Remerciements	ix
Introduction	1
Revue de la littérature	3
1 Modèle	7
1.1 Modèle à une période	7
1.2 Adaptation du modèle	10
1.3 Modèle à plusieurs périodes	12
2 Calibration	15
2.1 Hypothèses	16
2.2 Portefeuilles	18
3 Ingénierie de distribution de rendements	21
3.1 Réduction du coût de financement	22
3.2 Indicateurs et cas étudiés	24

4 Analyse des résultats	27
4.1 Investissements initiaux égaux	28
4.2 Investissements initiaux différents	33
4.3 Analyse de sensibilité	35
4.4 Limites des hypothèses de tarification	36
Conclusion	41
Bibliographie	45
Annexe A – Tableaux	i
Annexe B – Figures	xi
Annexe C – Développement du modèle	xvii
Développement du modèle à une période	xvii
Développement de l’adaptation du modèle	xx
Développement du modèle à plusieurs périodes	xxi
Annexe D – Calibration du modèle	xxiii
Développement des hypothèses	xxiii
Développement des portefeuilles	xxv
Annexe E – Développement des résultats	xxvii
Détermination de la valeur de l’option	xxvii
Séquences de portefeuilles optimaux	xxviii

Liste des tableaux

1	Valeur de l'option d'achat et marge d'erreur de l'estimateur Monte Carlo . . .	ii
2	Comparaison des prix Monte Carlo et des prix Black-Scholes	iii
3	Pourcentage de réduction du coût de financement	iii
4	Espérance de la valeur finale de l'investissement	iv
5	Écart-type de la distribution de valeurs finales de l'investissement	v
6	Probabilité estimée d'atteindre l'objectif	vi
7	CVaR de l'investissement à l'échéance	vii
8	Pourcentage de réduction du coût de financement avec rendements inférieurs .	viii
9	Pourcentage de réduction du coût de financement avec volatilités supérieures .	viii
10	Rendements et volatilités annuels des actifs	ix
11	Matrice de corrélation des actifs	ix
12	Investissement initial requis	x
13	Prix d'exercice	x

Liste des figures

1	Profits et pertes à l'échéance de la structure proposée	xi
2	Frontière efficiente et profil rendement-risque des actifs accessibles	xii
3	Ratio de Sharpe des portefeuilles se trouvant sur la frontière efficiente	xii
4	Séquences de portefeuilles optimaux pour des objectifs avec une maturité de 5 ans et différentes probabilités cibles	xiii
5	Séquences de portefeuilles optimaux pour des objectifs avec une maturité de 10 ans et différentes probabilités cibles	xiv
6	Séquences de portefeuilles optimaux pour des objectifs avec une maturité de 20 ans et différentes probabilités cibles	xv

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mes codirecteurs, Pierre Laroche et Christian Dorion, pour leur précieuse collaboration tout au long de la réalisation de ce mémoire. Je remercie Pierre pour sa grande disponibilité, son expertise et sa gentillesse ainsi que Christian pour son intérêt, pour ses conseils pertinents et pour m’ avoir accordé toute l’ autonomie dont je désirais profiter. Tous deux ont contribué à rendre l’ expérience fort positive. Je désire aussi remercier famille et amis pour qui le niveau de compréhension du thème de recherche n’ était pas corrélé aux encouragements fournis.

Introduction

La majorité des modèles de construction de portefeuilles utilisés dans l'industrie pour les investisseurs particuliers reposent sur un cadre théorique qui fait abstraction des biais comportementaux pourtant bien présents chez ces investisseurs. Ces modèles qui reposent sur le risque de marché ignorent aussi que les investisseurs sont autant sinon davantage préoccupés par le risque d'atteindre des objectifs financiers, un risque lié, mais tout de même distinct du risque de marché. De plus, la tolérance au risque de marché d'un investisseur particulier est autrement plus difficile à déterminer de façon exacte, puisque les investisseurs ont rarement une conception adéquate des distributions de probabilité des rendements inhérentes aux marchés financiers.

En réponse à ces désavantages, d'autres modèles de construction de portefeuilles ont été développés au cours des dernières décennies par des académiciens et ont plus récemment commencé à faire leur apparition dans l'industrie. Ce cadre de construction de portefeuilles centré sur le risque d'atteindre des objectifs se nomme l'investissement basé sur les objectifs. Les modèles de la famille d'investissement basé sur les objectifs (IBO) visent à établir un portefeuille ou une séquence de portefeuilles optimaux de façon à atteindre un objectif avec une probabilité désirée. Ceux-ci ne sont toutefois pas exempts de leurs propres désavantages. Bien que différentes approches existent, ces modèles partagent la caractéristique de requérir des investissements initiaux considérables pour pouvoir espérer atteindre un objectif avec une probabilité donnée, surtout lorsque cette probabilité est élevée. D'autre part, ces modèles font abstraction du fait que les investisseurs se retrouvent souvent avec une richesse finale supérieure à la valeur de l'objectif. L'objectif de ce mé-

moire est de proposer et d'évaluer l'impact d'une ingénierie de distribution de probabilité de rendements à l'échéance dans le but de réduire l'investissement initial requis.

Ce mémoire commence par une revue de littérature des différents modèles de construction de portefeuilles qui sont applicables au contexte d'investissement basé sur les objectifs. Les deux chapitres suivants présentent le modèle retenu et sa calibration. Par la suite, la méthode d'ingénierie de distribution de rendements et les cas étudiés sont discutés avant de présenter et d'analyser les résultats. La dernière section résume le travail et propose des avenues de recherche. Finalement, les annexes présentent les tableaux, les figures ainsi que le détail des calculs.

Revue de la littérature

La construction de portefeuille consiste à répartir du capital entre différentes classes d'actifs dans l'objectif de le faire croître au fil du temps. Les actifs se classent typiquement en quatre catégories : les actions, les obligations, les liquidités ainsi que les actifs alternatifs comme l'immobilier et les marchandises. Plus particulièrement, la construction de portefeuille implique d'évaluer le comportement prospectif de ces classes d'actifs et leurs interrelations de façon à créer un portefeuille qui correspond aux préférences des investisseurs. La construction de portefeuille est aussi liée au processus de gestion de portefeuille puisque le portefeuille créé est un reflet du gestionnaire. En effet, le niveau de gestion active et les styles qui s'y rapportent influencent les actifs détenus au sein de chaque classe d'actifs. Malgré la grande diversité dans les approches de gestion de portefeuille, les gestionnaires de portefeuille font face au même défi fondamental : celui d'établir un portefeuille maximisant la richesse d'un investisseur sous certaines contraintes de risque. En raison de la nature aléatoire du prix des actifs impliqués dans le processus et du comportement des investisseurs face aux aléas des marchés, plusieurs travaux ont été réalisés pour tenter d'identifier les meilleures approches de construction de portefeuille.

Les fondements de la théorie moderne de portefeuille sont établis par Markowitz (1952). Celui-ci montre que des portefeuilles plus optimaux du point de vue de la relation rendement-risque sont obtenus en observant un univers d'investissement, puis combinant les actifs de cet univers de façon à maximiser le rendement espéré pour différents niveaux de variance. L'exercice crée une frontière efficiente de portefeuilles. Quelques années auparavant, von Neumann et Morgenstern (1944) proposent que les individus qui

se retrouvent devant des situations avec des résultats incertains choisissent l'option qui maximise leur utilité espérée. Ainsi, le portefeuille sur la frontière le plus adapté à l'investisseur est déterminé en maximisant l'utilité espérée de l'investisseur par l'entremise de son aversion au risque. En théorie, cette aversion est modélisée par une fonction d'utilité absolue ou relative comme le proposent Arrow (1965) ainsi que Pratt *et al.* (1964). En guise d'approximation pratique, la tolérance au risque d'un investisseur particulier est typiquement déterminée à l'aide d'un questionnaire de tolérance au risque comme le décrivent notamment Ardehali *et al.* (2005) ainsi que Engle-Warnick *et al.* (2016).

Quelques années plus tard, Kahneman et Tversky (1980) proposent la théorie des perspectives comme une alternative au paradigme de l'utilité espérée en démontrant empiriquement que la façon dont une situation est présentée influence la décision des individus en raison de leurs préférences et de leurs biais comportementaux. Ce changement de conceptualisation des investisseurs particuliers auparavant considérés purement rationnels est en partie responsable de l'apparition d'une nouvelle technique de construction de portefeuille adaptée aux investisseurs particuliers dans l'industrie. Cette méthode inspirée des approches institutionnelles se nomme la construction de portefeuille dans un contexte d'investissement basé sur les objectifs. Bien que cette approche soit relativement récente dans l'industrie, elle trouve plusieurs précédents dans la littérature académique. Notamment, Roy (1952) offre une équation qui permet de déterminer l'allocation de capital dans un portefeuille de façon à minimiser la probabilité qu'un événement indésirable d'une certaine ampleur minimale spécifiée se produise dans un cadre de moyenne-variance. Au fil du temps, les modèles se sont sophistiqués de sorte qu'il y a maintenant trois grandes familles de modèles d'investissement basé sur les objectifs qui sont distinguables dans la littérature : les modèles basés sur l'optimisation numérique, les modèles basés sur la gestion actif-passif et les modèles basés sur la valeur à risque.

Das *et al.* (2010) proposent un modèle basé sur l'optimisation numérique. Ils s'intéressent au portefeuille optimal dans un contexte où l'investisseur est davantage préoccupé par le risque de ne pas atteindre son objectif que par le risque de marché typiquement mesuré par l'écart-type des rendements. En l'absence de contrainte de vente à découvert, ils

démontrent que l'optimisation de portefeuille en considérant les deux premiers moments de la distribution où la richesse est maximisée sous contrainte d'obtenir un certain rendement avec une certaine probabilité est mathématiquement équivalente à l'optimisation dans le cadre de la frontière efficiente de Markowitz. Dans le cas de contrainte de vente à découvert, il est démontré que les portefeuilles obtenus ont un rendement légèrement inférieur pour un même niveau de risque. Les auteurs avancent toutefois que la perte est limitée en comparaison des pertes produites par un investisseur n'étant pas en mesure de bien représenter son aversion au risque et que cette perte décline à mesure que l'investisseur devient plus averse au risque. De plus, il est montré que le problème d'optimisation est analogue à une contrainte de valeur à risque (VaR). Parker (2016) reprend ces travaux pour évaluer le modèle à l'aide de données historiques. Il propose aussi que les objectifs soient catégorisés à l'aide de critères qualitatifs plutôt que quantitatifs pour aider les investisseurs à faire des choix. Dans la même optique d'optimisation numérique, Mulvey et Shetty (2004) proposent un modèle d'optimisation stochastique sur plusieurs périodes avec une fonction objective qui tient compte des passifs de l'investisseur. Les auteurs soulignent toutefois le grand temps de calcul nécessaire pour un tel modèle, ce qui le rend moins adapté à une utilisation concrète. Nystrup *et al.* (2019) présentent un autre modèle d'optimisation sur plusieurs périodes avec un modèle de Markov caché multivarié dans le but de contrôler les baisses dans la valeur du portefeuille. Ils démontrent qu'une fois la tolérance au risque adaptée en fonction des baisses de marché réalisées, le modèle permet de limiter les pertes sans impact majeur sur l'efficience au sens moyenne-variance.

Martellini et Milhau (2017) proposent un modèle orienté vers les objectifs de retraite qui s'apparente à la construction de portefeuille dans un contexte de gestion actif-passif. Dans ce modèle, l'objectif monétaire est transformé en pouvoir d'achat à l'aide du ratio entre la richesse initiale de l'investisseur et l'annuité désirée. Deux niveaux par objectifs sont définis : le niveau d'ambition et le niveau essentiel. Le niveau d'ambition correspond au pouvoir d'achat désiré pour atteindre l'objectif, tandis que le niveau essentiel correspond au pouvoir d'achat minimal requis en tout temps pour atteindre l'objectif. Les auteurs proposent l'utilisation de deux portefeuilles distincts qui sont associés à chacun des

deux niveaux. Le modèle vise la répartition optimale entre les deux portefeuilles. À mesure que l'allocation augmente dans le portefeuille d'ambition, la probabilité d'atteindre le niveau d'ambition augmente. En contrepartie, le risque de ne pas atteindre l'objectif essentiel augmente. Une barrière est définie en fonction du niveau de risque toléré pour le niveau essentiel, de la valeur agrégée des portefeuilles, des contributions futures et de l'annuité désirée. Cette barrière correspond à la valeur minimale du portefeuille du niveau essentiel. À mesure que la valeur agrégée des portefeuilles s'éloigne positivement de la barrière, l'allocation au portefeuille du niveau d'ambition augmente. Si le niveau d'ambition est atteint, tous les fonds sont investis dans le portefeuille sécurisant l'objectif.

Campbell *et al.* (2001) présentent un modèle de construction de portefeuille qui distribue le capital de façon optimale entre différents actifs de façon sous une contrainte de VaR en s'inspirant des travaux de Arzac et Bawa (1977) sur les portefeuilles sous contrainte de manque à gagner (*shortfall*). Ce modèle à une période peut être adapté à plusieurs périodes et tenir compte des cotisations futures des investisseurs en plus d'être agnostique aux modèles utilisés pour générer les portefeuilles parmi lesquels le capital est distribué. De plus, le modèle qui repose sur la VaR a l'avantage de demander moins de ressources computationnelles que les modèles basés sur l'optimisation numérique et est plus simple à conceptualiser que les modèles basés sur la gestion actif-passif. Ces avantages font en sorte que ce modèle est particulièrement adapté à une utilisation concrète. Par contre, tous les modèles souffrent du désavantage de requérir un investissement initial élevé, un phénomène qui est d'autant plus manifeste lorsque la tolérance au risque de ne pas atteindre l'objectif est faible. Le modèle basé sur la VaR est donc celui qui est utilisé pour analyser l'impact de l'ingénierie de distribution de rendements dans le contexte d'investissement basé sur les objectifs.

Chapitre 1

Modèle

L'évaluation de l'impact de l'ingénierie de distribution dans un contexte d'IBO requiert l'utilisation d'un modèle de construction de portefeuille adapté au contexte. Comme mentionné précédemment, le modèle de construction de portefeuille qui repose sur une contrainte de VaR a été retenu en raison du temps de calcul nécessaire et de la complexité du modèle qui sont plus adaptés à une utilisation concrète auprès d'investisseurs particuliers. De plus, comme les sections suivantes le démontrent, un tel modèle peut être adapté pour tenir compte de contraintes supplémentaires auxquelles font face les investisseurs particuliers. Ce chapitre se divise en trois sections : la présentation du modèle dans un problème à une période, son adaptation aux contraintes qui se rattachent au contexte des investisseurs particuliers, puis sa généralisation à plusieurs périodes. Les étapes principales du modèle sont présentées dans les pages suivantes, tandis que les développements intermédiaires se retrouvent à l'annexe C.

1.1 Modèle à une période

Dans sa forme fondamentale, le modèle basé sur la VaR de Campbell *et al.* (2001) suppose qu'une limite de perte maximale sur un investissement initial $W(0)$ est déterminée à un certain niveau de confiance c pour un investissement sur un horizon T . L'investisseur peut prêter ou emprunter un montant B . La somme totale est pleinement

investie selon

$$W(0) + B = \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) \quad (1.1)$$

où γ_i et $P_i(0)$ représentent respectivement le nombre de parts et le prix de l'actif i au temps initial. L'objectif du modèle est de déterminer les nombres de parts γ_i , ou de façon indépendante des prix, les poids de chaque actif, de façon à respecter la contrainte de VaR tout en maximisant la richesse de l'investisseur au temps T . Cette contrainte est définie comme

$$\mathbb{P}_0 [W(T) \leq W(0) - \text{VaR}_c] \leq 1 - c \quad (1.2)$$

où \mathbb{P}_0 désigne la probabilité au temps initial et VaR_c la VaR associée à la probabilité $(1 - c)$. Cette VaR peut être négative dans le cas où le portefeuille doit nécessairement croître avec une probabilité $(1 - c)$. L'équation (1.2) est analogue à la capacité à prendre du risque de l'investisseur, car elle met en relation la valeur minimale tolérée du portefeuille au temps T et un certain niveau de confiance. Le portefeuille prescrit par le modèle soumis à cette contrainte est donc un reflet de cette capacité.

Sans perte de généralité, si $r(p)$ est une variable aléatoire qui décrit le rendement d'un portefeuille risqué p et r_f est le rendement sans risque, alors la valeur finale du portefeuille s'écrit comme

$$W(T) = (W(0) + B)(1 + r(p)) - B(1 + r_f) \quad (1.3)$$

où $B > 0$ dans le cas d'un emprunt au taux sans risque et $B < 0$ dans le cas d'un prêt au même taux sans risque. En substituant B par son expression dans l'équation (1.1),

$$W(T) = W(0)(1 + r_f) + \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) \right) (r(p) - r_f) \quad (1.4)$$

L'espérance de la valeur finale de l'investissement est donc

$$\mathbb{E}_0 [W(T)] = W(0)(1 + r_f) + \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) \right) (r_p - r_f) \quad (1.5)$$

où r_p est l'espérance au temps initial du rendement du portefeuille risqué. L'équation (1.5) établit que l'investisseur investira une partie de sa richesse dans le portefeuille risqué tant

que la prime de risque $r_p - r_f$ est positive. Pour relier la valeur finale du portefeuille à la condition de VaR, il suffit d'insérer l'équation (1.4) dans l'équation (1.2), de sorte que la distribution de rendement du portefeuille doit satisfaire l'équation

$$\mathbb{P}_0 \left[r(p) \leq r_f - \frac{W(0)r_f - \text{VaR}_c}{\sum_{i=1}^n \gamma_i P_i(0)} \right] \leq 1 - c \quad (1.6)$$

L'équation (1.6) définit un quantile qui correspond à la probabilité $(1 - c)$. Soit $q(c, p)$ ce quantile, alors les développements en annexe montrent que la valeur du portefeuille peut être exprimée selon

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) = \frac{\text{VaR}_c + W(0)r_f}{r_f - q(c, p)} \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) peut être substituée dans l'équation (1.5) pour obtenir la valeur finale espérée du portefeuille exprimée en fonction du quantile

$$\mathbb{E}_0 [W(T)] = W(0)(1 + r_f) + \frac{(r_p - r_f)}{r_f - q(c, p)} (\text{VaR}_c + W(0)r_f) \quad (1.8)$$

Ainsi, le problème de maximisation de la richesse se simplifie à trouver le portefeuille p' qui maximise l'équation suivante

$$p' : \max_p S(p) = \frac{r_p - r_f}{W(0)r_f - W(0)q(c, p)} \quad (1.9)$$

où la variable de décision p décrit le vecteur des nombres de parts γ_i ou, de façon indépendante des prix, les poids des actifs. L'équation (1.9) a quelques particularités intéressantes. D'abord, cette équation est pleinement générale et jusqu'ici encore exempte d'hypothèses sur la distribution des rendements. Ensuite, le portefeuille optimal proposé par le modèle avec contrainte de VaR est indépendant de la valeur de l'investissement initial dans les actifs risqués ou de l'espérance de la valeur finale du portefeuille. En effet, la richesse initiale au dénominateur n'est qu'une constante multiplicative, de sorte qu'elle peut être omise du processus d'optimisation. Par contre, la conserver permet d'exprimer le problème sous une autre forme, puisque $W(0)q(c, p)$ correspond à la VaR du portefeuille p pour un niveau de confiance $(1 - c)$ dénotée $\text{VaR}(c, p)$. Donc,

$$p' : \max_p S(p) = \frac{r_p - r_f}{W(0)r_f - \text{VaR}(c, p)} \quad (1.10)$$

L'allocation qui maximise la richesse tout en respectant la contrainte de VaR spécifiée dépend du rendement des portefeuilles risqués et de leur VaR estimée. Cela signifie que dans ce modèle, la VaR du portefeuille optimal n'est pas nécessairement la VaR de la contrainte. L'investisseur trouve d'abord le portefeuille optimal selon l'équation (1.10), puis prête ou emprunte le montant optimal B' pour atteindre la contrainte de VaR selon

$$B' = \frac{W(0) (\text{VaR}_c - \text{VaR}(c, p'))}{W(0)r_f - \text{VaR}(c, p')} \quad (1.11)$$

Ainsi, le montant optimal à prêter ou emprunter est fonction de l'écart entre la VaR de la contrainte et la VaR du portefeuille optimal.

1.2 Adaptation du modèle

La section 1.1 montre qu'un portefeuille optimal sous contrainte de VaR est obtenu en déterminant la répartition des actifs risqués à l'aide d'un ratio qui dépend du rendement du portefeuille et de sa VaR. Pour combler l'écart entre la VaR du portefeuille et la VaR de la contrainte, l'investisseur prête ou emprunte un certain montant. Cette démarche a été effectuée sans émettre d'hypothèses sur la distribution des rendements des actifs risqués. Bien qu'intéressant, ce modèle présente deux caractéristiques qui nécessitent une adaptation dans le cadre de ce mémoire pour une utilisation dans le contexte concret des investisseurs particuliers. D'abord, les investisseurs particuliers doivent aussi tenir compte de leur tolérance au risque, de sorte qu'il ne leur est pas toujours possible de bénéficier de l'effet levier qui se produit lors d'un emprunt d'un montant supplémentaire pour rétablir la contrainte de VaR. Ensuite, l'objectif dans le cadre de ce mémoire est d'évaluer l'impact de l'ingénierie de distribution de rendements dans le but de réduire le coût de financement des objectifs, c'est-à-dire le montant $W(0)$ minimal requis pour pouvoir atteindre l'objectif VaR_c avec une probabilité $(1 - c)$. Or, l'approche présentée dans la section 1.1 ne permet pas nécessairement à l'investisseur d'obtenir un portefeuille convenable pour ses objectifs dans un contexte d'IBO ni d'évaluer facilement la variation du coût de financement des objectifs. Une adaptation est donc nécessaire.

Une modification à la façon d’aborder le problème permet de régler les deux limites énoncées précédemment. Ces deux limites sont une conséquence du montant B' variable. En effet, un emprunt n’est pas nécessairement possible pour l’investisseur. Aussi, il est possible de mesurer l’impact d’une variation du coût de financement en observant le comportement de la variable B' , mais une mesure plus claire consiste à regarder la valeur $W(0)$ requise pour atteindre la VaR. L’adaptation consiste donc à renverser le problème en imposant au modèle que le portefeuille optimal possède une VaR égale à la VaR de la contrainte, puis en déterminant la somme minimale $W(0)$ requise sans prêt ou emprunt pour atteindre la VaR. Concrètement, cette VaR correspond à la valeur de l’objectif devant être atteint selon la probabilité $(1 - c)$. Comme les emprunts ne sont plus permis, cette modification au problème ne garantit pas que l’investisseur ait une richesse initiale suffisante, mais permet tout de même de déterminer un portefeuille optimal dans le contexte restreint. L’impact de l’ingénierie de distribution peut alors être évalué en observant la variation du montant $W(0)$ requis pour atteindre l’objectif.

Précédemment, il a été démontré que le portefeuille optimal sous contrainte de VaR ne dépend pas de la valeur initiale ni de la valeur finale espérée. L’adaptation du problème sous la forme présentée respecte aussi cet énoncé. En effet, le problème dans sa nouvelle forme se résume à trouver le portefeuille optimal risqué parmi un ensemble de portefeuilles qui minimise le ratio

$$p' : \min_p W(0) = \frac{\text{VaR}_c}{q(c, p)} \quad (1.12)$$

En d’autres termes, le problème consiste à trouver le portefeuille avec le plus grand quantile $(1 - c)$. En effet, dans l’équation (1.12), l’investissement initial requis correspond à la valeur de l’objectif actualisée par un facteur qui correspond au quantile de probabilité $(1 - c)$. Les développements intermédiaires pour obtenir cette équation sont présentés à l’annexe C. Comme mentionné ci-dessus, il n’est pas assuré que la solution soit atteignable. Il est possible que la richesse initiale de l’investisseur soit plus petite que la valeur prescrite et qu’il n’existe donc pas de portefeuille avec un ratio rendement-risque suffisamment grand pour lui permettre d’atteindre l’objectif avec les contraintes imposées.

Dans le cas où l'investisseur ne posséderait pas le montant $W(0)$ prescrit, cela signifierait que l'objectif est trop ambitieux. Dans l'équation (1.12), il est possible de constater que la modification de l'approche du problème et le retrait de la variable B ont comme effet d'éliminer la dépendance explicite au rendement. Plutôt que de maximiser un ratio de rendement-risque comme à l'équation (1.10), le problème est de trouver le portefeuille avec le plus grand quantile $(1 - c)$, de sorte que $W(0)$ est minimisé. La considération du rendement n'est toutefois pas perdue, puisque le quantile $(1 - c)$ d'un portefeuille dépend de sa distribution de rendements et donc de son profil rendement-risque. Plus de détails à cet effet suivront dans le chapitre 2.

1.3 Modèle à plusieurs périodes

Dans un contexte d'IBO, la section 1.2 a montré que le portefeuille optimal au temps $t = 0$ pour un objectif au temps $t = T$ en tenant compte des contraintes applicables aux investisseurs particuliers est obtenu en minimisant l'investissement initial requis pour atteindre un objectif de valeur VaR_c avec une probabilité $(1 - c)$. Or, à mesure que le temps passe, le portefeuille optimal varie. En effet, le portefeuille optimal dépend du quantile $q(c, p)$, ce qui suggère aussi une dépendance au temps $(T - t)$ avant de parvenir à la maturité de l'objectif. Le but est donc de déterminer une séquence de n portefeuilles optimaux sur la période $[0, T]$ discrétisée en n sous-périodes de durée Δ_t . Ainsi, il faut identifier les portefeuilles optimaux aux temps de rééquilibrage $t_i \in \{0, \Delta_t, 2\Delta_t, \dots, n\Delta_t\}$ avec $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ et $n\Delta_t = T - \Delta_t$.

Le modèle présenté peut être généralisé à un problème d'optimisation sur plusieurs périodes. Cette généralisation permet de définir une séquence de portefeuilles optimaux et d'introduire des contributions de l'investisseur lors des périodes intermédiaires. Chaque période, le portefeuille est rééquilibré pour atteindre les poids cibles du nouveau portefeuille optimal. Pour établir la séquence de portefeuilles optimaux dénotée $\mathbf{p} = \{p'_{t_i}\}_{\forall t_i}$, il suffit d'appliquer l'équation (1.12) à chacun des temps t_i . Le problème d'optimisation

devient donc

$$p_{t_i}' : \min_{p_{t_i}} W(t_i) = \frac{\text{VaR}_c}{q(c, p_{t_i})} \quad \forall t_i \in \{0, \Delta_t, 2\Delta_t, \dots, n\Delta_t\} \quad (1.13)$$

où $W(t_i)$ est la richesse nécessaire au temps t_i pour atteindre l'objectif avec une probabilité $(1 - c)$ et $q(c, p_{t_i})$ est le quantile $(1 - c)$ du portefeuille p_{t_i} s'il était détenu sur l'horizon $(T - t_i)$. Sur la base de l'information disponible au temps initial, cette séquence de portefeuilles permet de maintenir approximativement constante la probabilité $(1 - c)$ d'atteindre l'objectif tout au long de l'horizon d'investissement, car un rééquilibrage en continu serait nécessaire pour maintenir parfaitement constante la probabilité d'atteindre l'objectif. Néanmoins, cette approche induit une prise de risque dynamique qui permet à l'investisseur de voir son allocation migrer vers des classes d'actifs qui sont moins exposées au risque de marché à mesure que le moment T approche. Il est possible de constater à nouveau que les portefeuilles optimaux suggérés par l'équation (1.13) dépendent uniquement du quantile $(1 - c)$ des portefeuilles. Plus particulièrement, cela signifie que tous les objectifs associés à une même probabilité qui se trouvent à j périodes de leur maturité sont reliés au même portefeuille optimal. En d'autres termes, un objectif avec une maturité T_1 possède exactement la même séquence de n portefeuilles optimaux que les n derniers portefeuilles de la séquence de $m > n$ portefeuilles d'un objectif de même probabilité avec une maturité $T_2 > T_1$. Bref, la généralisation du problème d'optimisation à plusieurs périodes n'entraîne pas une dépendance à une nouvelle variable.

Une fois la séquence de portefeuilles optimaux déterminée, le coût de financement de l'objectif sans contributions futures est donné par

$$W(0) = \frac{\text{VaR}_c}{q(c, \mathbf{p})} \quad (1.14)$$

où $q(c, \mathbf{p})$ représente le quantile $(1 - c)$ de la séquence de portefeuilles optimaux. Ce quantile global agit comme un facteur d'actualisation de probabilité $(1 - c)$. Cependant, l'investisseur n'est pas contraint de déboursier la somme entière au temps initial puisqu'il est possible de planifier des contributions à chacun des temps de rééquilibrage. Si C_{t_i} désigne une contribution au temps t_i , alors la valeur au temps T de l'ensemble des

contributions avec une probabilité $(1 - c)$ est donnée par

$$C(T) = \sum_{i=0}^n C_{t_i} q(c, \{p'_{t_i}\}) \quad (1.15)$$

où $q(c, \{p'_{t_i}\})$ est le quantile $(1 - c)$ de la séquence de portefeuilles optimaux débutant au temps t_i et se terminant au temps T . Cette équation correspond à la capitalisation de chacune des contributions avec un facteur de capitalisation correspondant au quantile $(1 - c)$ de la séquence de portefeuilles associés. L'intuition derrière ce facteur de capitalisation est détaillée en annexe. Ainsi, l'investissement initial pour financer un objectif de valeur VaR_c en présence de contributions futures devient

$$W(0) = \frac{\text{VaR}_c - C(T)}{q(c, \mathbf{p})} \quad (1.16)$$

L'annexe C démontre toutefois que l'investisseur a avantage à ne pas recourir à des contributions futures si le montant prescrit sans contributions par l'équation (1.14) est atteignable.

Ce chapitre a présenté le modèle utilisé dans un contexte d'IBO pour déterminer le coût de financement initial d'un objectif devant être réalisé avec une probabilité $(1 - c)$. Afin de quantifier l'investissement initial prescrit par l'équation (1.16) et parvenir à évaluer la réduction du coût de financement, il est nécessaire d'obtenir une valeur numérique pour le quantile $q(c, \mathbf{p})$, ce qui implique d'émettre des hypothèses sur l'univers d'investissement et la distribution des rendements. Le prochain chapitre aborde ce sujet.

Chapitre 2

Calibration

Le chapitre 1 a démontré que l'utilisation d'un modèle de construction de portefeuilles qui repose sur une contrainte de VaR permet de déterminer une séquence de portefeuilles optimaux dans un contexte d'IBO. Cette séquence est obtenue en imposant au modèle que la VaR de probabilité $(1 - c)$ de la séquence de portefeuille soit égale à la valeur de l'objectif qui doit être atteint avec une probabilité $(1 - c)$, puis en trouvant les portefeuilles qui minimisent l'investissement requis à toutes les périodes. Il a été établi que cette séquence de portefeuilles est indépendante de l'investissement initial et de la valeur de l'objectif. Par ailleurs, l'équation pour déterminer l'investissement initial requis a été adaptée pour tenir compte de contributions monétaires lors de périodes intermédiaires.

Les équations ont été obtenues sans émettre d'hypothèses sur les actifs qui forment les portefeuilles et leur distribution de rendements associée. Le modèle tel qu'il a été présenté choisit les portefeuilles optimaux dans un ensemble de possibilités qui lui est présenté. Toutefois, afin de parvenir à évaluer l'impact de l'ingénierie de distribution de rendements dans un contexte d'IBO, il est nécessaire de pouvoir calculer l'investissement initial requis pour atteindre un objectif avec une probabilité $(1 - c)$. Pour ce faire, il faut émettre des hypothèses sur l'univers d'investissement accessible et les distributions de rendements des actifs qui le composent. Ce chapitre présente donc les hypothèses liées à la distribution des rendements et l'univers d'investissement avant d'aborder la création de

portefeuilles parmi lesquels le modèle d'IBO effectue l'optimisation. L'annexe D contient les développements mathématiques complémentaires.

2.1 Hypothèses

L'univers d'investissement accessible aux investisseurs particuliers se décompose typiquement en quatre grandes classes d'actifs : les actions, les obligations, les liquidités et les actifs alternatifs. Il est possible de créer des sous-catégories au sein de ces classes d'actifs. Par exemple, les actions peuvent être divisées en régions géographiques, en styles ou en tailles de capitalisation boursière, tandis que les obligations sont typiquement divisées en fonction de la cote de crédit de l'émetteur ou de leur échéance. Quant aux actifs alternatifs, ils correspondent à une classe d'actifs très vaste qui englobe généralement tous les actifs qui ne correspondent pas à l'une des autres classes d'actifs. Les marchandises et l'immobilier sont deux exemples de catégories d'actifs alternatifs.

Pour représenter ces catégories d'actifs au sein des portefeuilles qui seront créés, quelques indices ont été sélectionnés. Ces indices sont eux-mêmes représentatifs d'un portefeuille diversifié au sein d'une catégorie d'actifs. L'hypothèse sous-jacente est que l'investisseur a accès à des actifs qui répliquent ces indices, par exemple par l'entremise de fonds négociés en bourse. Les indices *S&P 500 Composite*, *MSCI EAFE* et *MSCI EM* ont été utilisés pour les actions américaines, internationales et émergentes. Les indices *ICE BofA US High Yield*, *ICE BofA US Corporate* et *ICE BofA US Treasury* ont été sélectionnés pour les obligations à rendement élevé, les obligations corporatives de première qualité (abrégées obligations corporatives) et les obligations gouvernementales. Pour les liquidités, l'indice utilisé est le *IA SBBI US 30 Day TBill TR USD*. Pour les actifs alternatifs, l'indice *S&P GSCI Precious Metal* a été utilisé pour les métaux précieux, tandis que l'indice *FTSE Nareit US Real Estate* a été employé pour l'immobilier. Tous ces indices sont libellés en dollars américains.

L'analyse de l'impact de l'ingénierie de distribution de ce mémoire s'effectue dans un cadre de moyenne-variance. De plus, l'hypothèse de log-rendements normalement dis-

tribués est effectuée. Une section de l'analyse discutera de l'impact sur les résultats de l'emploi de cette distribution qui est connue pour sous-estimer les ailes des distributions observées. Dans ce contexte, un mouvement brownien géométrique permet de représenter la valeur d'un actif au fil du temps. Dans le cadre du problème à plusieurs périodes, la valeur de l'investissement au temps t_i où $i \leq n$ peut donc être modélisée par

$$W(t_i) = W(0) \exp \left(\sum_{j=0}^{i-1} \left(r_{p_{t_j}} - \frac{\sigma_{p_{t_j}}^2}{2} \right) \Delta_t - \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{p_{t_j}} \sqrt{\Delta_t} \varepsilon_j \right) \quad (2.1)$$

où $r_{p_{t_j}}$ décrit le rendement espéré du portefeuille détenu au temps t_j , $\sigma_{p_{t_j}}$ sa volatilité et ε_j une variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée réduite. Le quantile de probabilité $(1 - c)$ de la séquence de portefeuilles optimaux est donc

$$q(c, \mathbf{p}) = \exp \left(\sum_{j=0}^n \left(r_{p_{t_j}} - \frac{\sigma_{p_{t_j}}^2}{2} \right) \Delta_t - \sum_{j=0}^n \sigma_{p_{t_j}} q(c, \phi) \right) \quad (2.2)$$

où $q(c, \phi)$ décrit le quantile de probabilité $(1 - c)$ de la distribution normale centrée réduite. L'équation 2.2 et l'équation 1.16 permettent de déterminer l'investissement initial requis pour atteindre l'objectif avec une probabilité $(1 - c)$.

Il convient de remarquer que la valeur de l'investissement initial, son évolution et la valeur de l'objectif ne tiennent pas compte de la fiscalité. Si l'investissement était effectué dans un véhicule au sein duquel les gains sont imposables à l'échéance ou lors des rééquilibrages, alors la valeur visée VaR_c devrait être majorée. La considération de la charge fiscale consisterait à émettre des hypothèses sur les taux d'imposition marginaux et inclure une ou plusieurs constantes multiplicatives conséquentes, ce qui aurait comme effet d'accroître l'investissement initial. Or, il a été déterminé que la séquence de portefeuilles optimaux est indépendante de la valeur finale désirée. Pour alléger la lecture, il est supposé sans perte de généralité que l'investissement initial et les contributions sont effectués dans un compte où les gains sont non imposables.

2.2 Portefeuilles

Pour minimiser l'investissement initial, les portefeuilles dont dispose le modèle sont choisis sur une frontière efficiente obtenue par l'entremise d'une optimisation de moyenne-variance. Ce choix méthodologique est cohérent avec les hypothèses précédemment énoncées, assure des profils rendement-risque espérés optimaux et est cohérent avec le parallèle entre l'optimisation sous contrainte de VaR et dans un cadre de frontière efficiente tel qu'établi dans la littérature. Une telle optimisation requiert une calibration de l'espérance de rendement, de la variance des rendements et de la corrélation entre les différents actifs.

Afin de calibrer les paramètres utilisés dans le cadre de l'optimisation, les valeurs des indices susmentionnés entre les années 1990 et 2019 ont été utilisées. Une distribution pour chacun de ces indices a été créée en calculant le rendement annuel mois après mois sur cette période. Par souci de réalisme, dix points de base ont été retranchés du rendement moyen calculé pour simuler les frais qui accompagnent les fonds négociés en bourse qui répliqueraient ces indices. L'annexe D présente le rendement moyen annuel par actif et la volatilité associée.

Pour limiter les biais vers les valeurs extrêmes qui se glissent dans l'estimation de la matrice de covariance comme discuté par Jobson et Korkie (1980) ainsi que Michaud (1989), celle-ci a été rétrécie à l'aide de la méthode proposée par Ledoit et Wolf (2004). La matrice de covariance rétrécie Ψ est définie par la combinaison linéaire

$$\Psi = \hat{\delta}F + (1 - \hat{\delta})S \quad (2.3)$$

où S est la matrice de covariance observée dans l'échantillon, F une cible de rétrécissement et $\hat{\delta}$ le coefficient optimal de rétrécissement tel que $0 \leq \hat{\delta} \leq 1$. L'annexe D définit mathématiquement les termes F et $\hat{\delta}$. Le coefficient obtenu à l'aide de l'équation 2.3 est $\hat{\delta} = 0.0376$. Cette faible valeur s'explique par le fait que le nombre d'indices (9) est largement inférieur au nombre de mois (348) qui couvrent la période choisie. Or, les biais dans la covariance observée deviennent plus importants à mesure que le nombre d'actifs dépasse le nombre d'observations. La matrice de corrélation induite de la matrice de covariance rétrécie est présentée à l'annexe D.

La calibration obtenue montre qu'aucun actif ne possède une volatilité nulle, ce qui signifie que l'univers d'investissement est dépourvu d'un réel actif sans risque de marché. Toutefois, lorsque nécessaire, les liquidités peuvent agir comme approximation du rendement sans risque étant donné leur faible volatilité. De plus, étant donné la nature de l'actif sous-jacent à l'indice, le rendement moyen peut-être approximé comme le taux sans risque de défaut.

L'optimisation dans un cadre de moyenne-variance s'effectue en minimisant la variance d'un portefeuille pour un rendement donné sous les contraintes applicables au cas des investisseurs particuliers

$$\min_w \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} \quad (2.4)$$

$$\text{sujet à} \quad \sum_{i=1}^N w_i r_i = R, \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad (2.6)$$

$$w_i \geq 0. \quad (2.7)$$

où w_i décrit le poids de l'actif i parmi les N actifs disponibles, $\rho_{i,j}$ la corrélation entre les actifs i et j obtenue de la matrice de covariance rétrécie et r_i le rendement attendu de l'actif i . L'équation 2.4 correspond à la variance d'un portefeuille qui possède N actifs. L'équation 2.5 est la contrainte de rendement établie à une certaine constante R . La minimisation de la variance pour chaque rendement désiré est responsable de la création de la frontière efficiente. Les deux autres contraintes se rapportent au contexte des investisseurs particuliers. D'abord, l'équation 2.6 contraint le portefeuille à être pleinement investi. Ensuite, l'équation 2.7 s'assure qu'aucun actif n'est vendu à découvert. L'annexe D présente la frontière efficiente produite avec les actifs disponibles. De plus, l'annexe D présente le ratio de Sharpe des différents portefeuilles sur la frontière efficiente. Le rendement des liquidités a été utilisé comme approximation du rendement sans risque pour calculer le ratio de Sharpe, un ratio qui est défini comme le rapport entre le rendement excédentaire espéré au rendement sans risque et la volatilité du portefeuille.

Pour résumer, des portefeuilles efficients sont générés. Les hypothèses effectuées permettent de déterminer une valeur au quantile de probabilité $(1 - c)$ pour chacun des portefeuilles. Ces valeurs et l'équation 1.13 permettent de sélectionner certains portefeuilles de façon à créer une séquence de portefeuilles optimaux. La valeur du quantile de probabilité $(1 - c)$ pour la séquence de portefeuilles est alors trouvée grâce à l'équation 2.2. Finalement, ce quantile global est inséré dans l'équation 1.16 qui se simplifie à l'équation 1.14 s'il n'y a pas de contributions futures. Cette dernière opération permet de déterminer l'investissement initial $W(0)$ requis pour atteindre un objectif de valeur VaR_c avec une probabilité $(1 - c)$.

Chapitre 3

Ingénierie de distribution de rendements

Les chapitres 1 et 2 ont présenté le modèle utilisé et les hypothèses pour déterminer l'investissement initial requis afin de financer un objectif de valeur VaR_c à réaliser au temps T avec une probabilité $(1 - c)$. Comme expliqué, le modèle consiste à trouver la séquence de portefeuilles qui minimise l'investissement initial tout en ayant une VaR du seuil de confiance $(1 - c)$ égale à la valeur de l'objectif. De plus, la distribution des rendements a été supposée normale et donc symétrique. Ainsi, à mesure que la probabilité d'atteindre l'objectif spécifié par l'investisseur augmente, la VaR de niveau $(1 - c)$ s'éloigne de l'espérance de la valeur finale. Sous forme mathématique, l'investissement $W(0)$ dans la séquence de portefeuilles est tel que $\mathbb{E}[W(T)] > \text{VaR}_c$. L'investisseur doit donc déboursier un montant initial qui, en moyenne, lui rapporte davantage que la somme dont il a besoin. De façon générale, tout investissement pour atteindre un objectif avec une probabilité $(1 - c)$ rapportera à l'investisseur un montant supérieur à ses besoins avec une même probabilité $(1 - c)$.

Cette observation et la remarque du chapitre 1 concernant la possibilité que la richesse initiale de l'investisseur soit inférieure au montant $W(0)$ requis justifient l'intérêt d'évaluer l'impact de la modification de la distribution de valeurs finales de façon à réduire

la somme devant être déboursée par l'investisseur. En effet, l'investisseur qui renonce au temps initial à une partie des profits potentiels jugés excédentaires doit être rémunéré. Cette rémunération peut être considérée comme une contribution qu'il est possible d'investir dans la séquence de portefeuilles optimaux et ainsi réduire la valeur de l'investissement prescrit. Ce chapitre présente la façon d'établir la juste valeur de la renonciation, puis les variables étudiées.

3.1 Réduction du coût de financement

Comme mentionné précédemment, une réduction de l'investissement initial $W(0)$ dans un contexte d'IBO pourrait notamment bénéficier aux investisseurs qui ne disposeraient pas de la richesse initiale nécessaire pour atteindre un objectif avec une probabilité désirée. Une telle réduction pourrait s'obtenir en renonçant au temps initial à une partie des profits qui surviendraient à l'échéance de la séquence de portefeuilles optimaux, c'est-à-dire au temps T . Cette renonciation correspond en fait à vendre une option d'achat européenne de maturité T qui porte sur la séquence de portefeuilles optimaux. La combinaison de la position longue des investissements dans la séquence de portefeuilles et de la vente de l'option d'achat crée alors une option d'achat couverte, de sorte que l'investisseur bénéficie d'une prime initiale en échange d'une limite sur les gains potentiels. Cette limite est liée à la valeur d'exercice de l'option vendue qui doit donc être supérieure ou égale à la valeur de l'objectif. La figure 1 qui se trouve à l'annexe B schématise les gains et les pertes d'un investisseur détenant une telle position pour une valeur d'exercice quelconque. Dans le cas présent, le sous-jacent correspond à la valeur accumulée grâce à l'investissement dans la séquence de portefeuilles optimaux.

La valeur de la renonciation se détermine en évaluant la juste valeur d'une option d'achat européenne de maturité T et de valeur d'exercice K qui a comme actif sous-jacent la séquence de portefeuilles optimaux. Cette évaluation doit se faire sous une mesure neutre au risque. En effet, les actifs qui composent chacun des portefeuilles optimaux sont nécessairement accessibles. Il existe donc un portefeuille de réplique qui permet

de neutraliser localement le risque de l'option. En absence d'arbitrage, une stratégie autofinancée comportant l'option et le portefeuille de réplication doit rapporter le taux sans risque, ce qui signifie que ce même taux doit être utilisé pour déterminer la valeur de l'option.

Sous certaines hypothèses, notamment celle d'une volatilité constante, Black et Scholes (1973) proposent une solution analytique pour déterminer le juste prix d'une option européenne. Cependant, le problème d'optimisation à plusieurs périodes implique que le portefeuille détenu au temps t_i n'est pas nécessairement le même portefeuille que celui qui est détenu au temps t_{i+1} , ce qui signifie que la volatilité du sous-jacent n'est pas constante. Recourir à une simulation Monte Carlo sous une mesure martingale \mathbb{Q} au sein de laquelle le facteur d'actualisation stochastique correspond à la courbe des taux supposée constante à la valeur du taux des liquidités, soit 2.66%, permet de s'affranchir de cette contrainte. Lorsque Z trajectoires sont simulées, la moyenne des flux monétaires à l'échéance engendrés par l'option d'achat est donnée par

$$\bar{g} = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z \left(W_i^{\mathbb{Q}}(T) - K \right)^+ \quad (3.1)$$

où

$$W_i^{\mathbb{Q}}(T) = W(0) \exp \left(\sum_{j=0}^n \left(r_f - \frac{\sigma_{p_{r_j}}^2}{2} \right) \Delta_t - \sum_{j=0}^n \sigma_{p_{r_j}} \sqrt{\Delta_t} \varepsilon_j \right) \quad (3.2)$$

L'estimateur Monte Carlo de la valeur de l'option d'achat correspond à la valeur actualisée de la moyenne des flux monétaires de l'équation 3.1

$$\hat{V} = e^{-r_f T} \bar{g} \quad (3.3)$$

Une institution financière pourrait agir à titre de contrepartie en échange d'un frais f exprimé en pourcentage de la valeur de l'option, de sorte que l'investisseur recevrait

$$V = \hat{V}(1 - f) \quad (3.4)$$

Dans le cadre de ce document, ce frais est de 3% par hypothèse. Cette valeur est plausible dans un contexte où l'écart entre la valeur intrinsèque et le cours acheteur ou vendeur est

d'environ 1% pour un marché d'options liquides. Toutefois, comme l'option est émise sur une séquence de portefeuille et que la maturité de l'option est élevée, il est réaliste d'imaginer que la contrepartie transfère le coût de la couverture plus complexe à réaliser à l'investisseur. Il est possible de constater que l'équation 3.2 n'inclut pas les contributions futures, et donc que la valeur de l'option ne reflète pas ces contributions. Il serait facilement possible d'adapter l'équation pour ajouter chacune des contributions lors des périodes intermédiaires. Cependant, pour divers enjeux, il apparaît peu probable que la contrepartie s'engage à rémunérer au temps initial l'investisseur qui promet des contributions futures. Il convient de noter que les hypothèses entourant le modèle de Black-Scholes qui sont reprises dans ce mémoire limitent la précision des résultats obtenus. Une section de l'analyse discutera des conséquences du choix méthodologique et de l'impact potentiel de l'utilisation de modèles plus sophistiqués.

Les équations 1.16 et 3.4 permettent de déterminer la somme initiale requise de la part de l'investisseur en présence d'une stratégie de réduction du coût de financement. Lorsque \hat{V} est obtenu par la renonciation à une partie des gains potentiels, l'investisseur doit déboursier un montant initial réduit $W_r(0)$ tel que

$$W_r(0) = \frac{\text{VaR}_c - C(T)}{q(c, \mathbf{p})} - V \quad (3.5)$$

Une comparaison entre les montants $W(0)$ et $W_r(0)$ ainsi que des observations sur des indicateurs clés des distributions de richesse de l'investisseur à l'échéance permettent d'évaluer l'impact de l'ingénierie de distribution de rendements dans un contexte d'IBO. La section suivante présente les indicateurs observés et les cas étudiés.

3.2 Indicateurs et cas étudiés

Deux séries d'indicateurs permettent d'évaluer l'impact de l'ingénierie de distribution de probabilité des rendements de la solution d'IBO. D'abord, il y a les indicateurs pour des investissements totaux initiaux égaux obtenus de deux façons différentes, c'est-à-dire en considérant un investissement de $W(0)$ entièrement déboursé par l'investisseur ou un

investissement de $W_r(0)$ de l'investisseur complété par un investissement V obtenu par la vente de l'option d'achat. Ensuite, il y a les indicateurs pour des investissements initiaux différents, soit un investissement de $W(0)$ comparé à un investissement $W_r(0)$.

Dans le cas des investissements initiaux égaux, un des indicateurs clés est l'amplitude de la réduction du coût de financement possible. Au temps initial, cette mesure s'effectue en calculant le rapport entre V et $W(0)$. À l'échéance, l'espérance de la richesse finale et l'écart-type associé permettent d'évaluer l'impact de la renonciation d'une partie des gains. La seconde série d'indicateurs consiste à considérer un investisseur qui ne disposerait que de $W_r(0)$ au temps initial et qui n'aurait pas accès à la possibilité de renoncer à une partie des gains potentiels, de sorte qu'il ne peut pas investir $W_r(0) + V$ et ainsi espérer atteindre l'objectif avec la probabilité désirée. La comparaison entre les probabilités d'atteindre l'objectif pour des investissements initiaux différents, $W_r(0)$ et $W(0)$, permet d'évaluer le gain engendré par l'accès à la réduction du coût de financement. Un second indicateur pour ce scénario est l'observation de la valeur à risque conditionnelle associée à la probabilité $(1 - c)$ dénotée $CVaR_c$, c'est-à-dire la richesse moyenne à l'échéance uniquement lorsque l'objectif n'est pas atteint. Un investisseur qui considère avant tout le risque de ne pas atteindre un objectif préfère une probabilité et une valeur à risque conditionnelle plus élevées.

Afin d'obtenir une évaluation juste de l'impact de l'ingénierie de distribution de rendements, il est nécessaire de calculer ces indicateurs pour différentes valeurs de variables significatives. Ces variables sont l'échéance T , la probabilité $(1 - c)$, la valeur d'exercice K et la présence de contributions. La valeur de l'objectif n'est pas une variable significative, puisque les résultats en sont indépendants. En effet, comme démontré précédemment, la séquence de portefeuilles est indépendante de la valeur de l'objectif. De plus, bien que la valeur d'une option européenne varie en fonction de la valeur du prix d'exercice et du prix initial de l'actif sous-jacent, la proportion entre la valeur de l'option et l'investissement initial demeure constante lorsque ces deux valeurs sont multipliées par un même facteur. Les résultats sont donc tous indépendants du choix de la valeur de l'objectif. Pour alléger la lecture, une valeur d'objectif nominale de 100\$ à l'échéance T est supposée.

Pour les deux séries d'indicateurs, des échéances de 5 ans, 10 ans et 20 ans sont considérées. Pour chacune de ces échéances, des probabilités $(1 - c)$ de 90%, 75% et 50% sont envisagées. Deux prix d'exercice K sont considérés. Le premier prix K_1 est à la valeur $W(0)q(c, \mathbf{p})$, ce qui correspond à la valeur de l'objectif. Le second prix K_2 est à la valeur $W(0)q(c + 0.25, \mathbf{p})$, c'est-à-dire au quantile 25% plus élevé que le quantile visé, de sorte que l'investisseur peut bénéficier d'une certaine partie des gains excédentaires à la valeur de l'objectif. Pour les indicateurs à investissements initiaux égaux, ces cas sont étudiés en l'absence de contribution et en présence de contributions distribuées également entre les périodes à une hauteur totale de 20% de la valeur de l'objectif. Dans le cas des investissements initiaux différents, les contributions ne sont pas une variable significative et sont donc omises pour cette raison. Finalement, une analyse de sensibilité des résultats à la calibration du modèle est proposée. Le chapitre suivant présente ces résultats.

Chapitre 4

Analyse des résultats

Le chapitre 3 a proposé une méthode de réduction du coût de financement des objectifs dans un contexte d'IBO en renonçant à une partie des profits potentiels à l'échéance, ce qui se traduit par la vente d'une option d'achat qui porte sur le montant $W(0)$ investi dans une séquence de portefeuilles optimaux. Les indicateurs clés pour évaluer l'impact de cette modification de la distribution de rendements et les variables pertinentes ont été identifiés. Une première série d'indicateurs dans un cas d'investissements initiaux égaux permet d'évaluer les avantages et les désavantages de la vente d'une option d'achat pour un investisseur qui disposerait de l'investissement initial requis. Une seconde série d'indicateurs à investissement initiaux différents permet d'évaluer l'impact de la vente de l'option d'achat pour un investisseur qui ne disposerait pas de l'investissement initial requis et qui aurait donc un manque à gagner. Ce chapitre présente et analyse ces résultats.

La première section se concentre sur les indicateurs dans le cas où les investissements initiaux sont égaux, tandis que la deuxième section expose les valeurs des indicateurs pertinents lorsque les investissements initiaux diffèrent. Le chapitre se conclut avec une analyse de sensibilité à la calibration du modèle et une discussion sur les limites des hypothèses entourant la tarification des options. Les tableaux de résultats se trouvent à l'annexe A. L'annexe E discute des valeurs préalables à l'obtention de ces résultats et des répartitions d'actifs pour les différentes séquences de portefeuilles optimaux prescrites

par le modèle d'IBO. Ces portefeuilles optimaux ont été sélectionnés par le modèle parmi cent portefeuilles de la frontière efficiente. Des sous-périodes mensuelles ont été utilisées pour discrétiser les horizons d'investissement et chacune des simulations Monte Carlo a comporté un million de trajectoires.

4.1 Investissements initiaux égaux

Le tableau 1 présente la valeur V de l'option d'achat pour les différentes maturités, probabilités cibles et prix d'exercice. La marge d'erreur de l'estimateur Monte Carlo pour un seuil de confiance de 95% accompagne chacune des valeurs. À titre de rappel, $K_1 = W(0)q(c, \mathbf{p})$ et $K_2 = W(0)q(c + 0.25, \mathbf{p})$. Le prix d'exercice K_1 correspond donc à la valeur de l'objectif, tandis que le prix K_2 est supérieur à la valeur de l'objectif. En pratique, le prix d'exercice K_2 permettrait donc à l'investisseur de bénéficier d'une partie des gains excédentaires à la valeur de l'objectif. Bien qu'il ne s'agisse pas d'un des indicateurs clés pour évaluer l'impact de la réduction du coût de financement, une brève analyse de certains des prix d'option est pertinente puisqu'elle permet de les valider et ainsi assurer la qualité des résultats subséquents qui découlent de ces prix. En effet, pour tous les scénarios où la probabilité $(1 - c)$ d'atteindre l'objectif est de 50%, la séquence de portefeuilles optimaux recommandée par le modèle est uniquement composée du portefeuille de la frontière efficiente ayant la plus haute volatilité. Ainsi, la volatilité est constante tout au long de l'horizon d'investissement. Comme les log-rendements ont été supposés normalement distribués, il est possible d'appliquer le modèle de Black-Scholes à ces cas pour valider les prix obtenus.

Le tableau 2 présente la comparaison pour les scénarios sans contributions avec un prix d'exercice K_1 . Les valeurs obtenues par le modèle de Black-Scholes ($V_{K_1,BS}$) qui sont présentées tiennent compte du frais de contrepartie de 3%. Il est possible de constater que tous les prix Black-Scholes sont compris au sein de l'intervalle formé par l'estimateur Monte Carlo et la marge d'erreur correspondante, ce qui confirme que les prix obtenus sont cohérents avec les hypothèses formulées.

Le tableau 3 présente le premier indicateur clé, soit le taux de réduction $V/W(0)$ du coût de financement pour toutes les variables étudiées. Autrement dit, ce tableau indique le pourcentage de l'investissement initial requis que l'investisseur n'aurait pas à assumer s'il renonçait à une partie des gains futurs en vendant une option d'achat. Ces résultats indiquent que le pourcentage de réduction du coût de financement varie entre 0% et 2.81% pour les cas étudiés. Par exemple, un investisseur qui désirerait renoncer à tout gain supérieur à la valeur d'un objectif venant à maturité dans 5 ans et devant se réaliser avec une probabilité de 75% obtiendrait une réduction relative du coût de financement de 1.29% dans le scénario sans contributions futures. Le taux de réduction maximum survient dans le cas d'une maturité de 5 ans, une probabilité d'exercice de 50%, un prix d'exercice K_1 et un scénario sans contributions futures. Il est possible de constater que le faible taux de réduction observé pour l'ensemble des scénarios étudiés est un premier indicateur d'un gain très limité pour un investisseur dans une situation concrète. Quelques remarques supplémentaires s'imposent. D'abord, le taux de réduction est toujours supérieur dans le cas sans contributions. Cela s'explique par le fait que l'investissement initial est plus important dans le cas sans contributions et que la présence de contributions n'affecte pas la séquence de portefeuilles. Ainsi, sans contributions futures, une somme plus grande est investie initialement, ce qui augmente le prix de l'option et donc le taux de réduction. Ensuite, sans surprise, le taux de réduction est plus faible pour le prix d'exercice K_2 que pour le prix d'exercice K_1 . La différence est un peu plus importante pour les objectifs avec une probabilité de 90%, puisque la faible volatilité des portefeuilles qui composent la séquence rendent peu probable que l'option avec un prix d'exercice K_2 soit profondément en jeu à l'échéance.

Il est donc raisonnable d'affirmer que le prix d'exercice K_1 correspond au prix d'exercice optimal pour un investisseur désirant avant tout réduire son coût de financement. En effet, un prix d'exercice inférieur à K_1 condamnerait l'investisseur à ne pas atteindre son objectif, car celui-ci serait inférieur à la valeur de l'objectif financier. Lorsque le prix d'exercice est supérieur à K_1 , la réduction du coût de financement est moindre. Comme la valeur initiale du sous-jacent correspond à l'investissement initial prescrit par le modèle

d'IBO, il est possible de conclure que la *moneyness*, c'est-à-dire le rapport entre la valeur du sous-jacent et le prix d'exercice, est endogène au modèle et qu'il en existe une valeur optimale. Bref, la combinaison du prix d'exercice K_2 supérieur au prix d'exercice optimal K_1 et des contributions futures provoque un taux de réduction presque nul sur l'ensemble des variables étudiées. Or, dans une situation concrète, il apparaît peu probable qu'un investisseur soit en mesure de financer l'entièreté de l'objectif au temps initial et qu'il désire renoncer à toute valeur excédentaire.

La relation entre le taux de réduction et la maturité est plus nuancée. En effet, une plus grande maturité permet au modèle de sélectionner des portefeuilles avec une plus grande volatilité au début de l'horizon d'investissement, ce qui augmente le prix de l'option. En contrepartie, le rendement espéré cumulatif sous la mesure physique augmente, ce qui abaisse l'investissement initial requis. Or, c'est précisément cet investissement initial qui est utilisé comme valeur initiale du sous-jacent pour l'option d'achat. Ainsi, la réduction de l'investissement initial diminue par le fait même le prix de l'option vendue. Ce second effet est d'autant plus important puisque le montant $W(0)$ est calculé selon la mesure de probabilité physique, tandis que l'évaluation de la juste valeur de l'option se fait sous la mesure martingale équivalente \mathbb{Q} au sein de laquelle le portefeuille évolue au taux sans risque. Le plus petit montant $W(0)$ rend donc moins probable que l'option termine sa trajectoire en jeu. Cette dynamique particulière de la relation entre le taux de réduction et la maturité s'observe notamment pour l'objectif avec une probabilité de 75%. Dans un premier temps, le taux de réduction augmente entre les maturités de 5 ans et de 10 ans, puis diminue entre les maturités de 10 ans et de 20 ans. Cela signifie que l'effet de l'augmentation de la volatilité domine l'effet de réduction du coût de financement pour des maturités plus courtes, tandis que c'est l'inverse qui est observé pour des maturités plus éloignées. Cette observation n'est toutefois pas généralisable à l'ensemble des calibrations possibles. En effet, bien que les deux effets contraires agissent sur le taux de réduction lorsque la maturité est modifiée, l'analyse de sensibilité à la section 4.3 montrera que le changement de dominance entre les deux facteurs n'est pas observé pour toutes les calibrations possibles.

La relation entre le taux de réduction et la probabilité ciblée est aussi plus subtile. De façon similaire à la maturité, une baisse de la probabilité entraîne des variations contraires dans la volatilité moyenne de la séquence de portefeuilles optimaux et dans l'investissement initial requis $W(0)$. Par exemple, les résultats montrent que le taux de réduction est inférieur pour un objectif de maturité 5 ans avec une probabilité de 75% que pour l'objectif de maturité équivalente avec une probabilité cible de 50%. Par contre, la conclusion s'inverse dans le cas d'une maturité de 10 ans. Toutes ces observations suggèrent l'existence d'une valeur maximum du taux de réduction qui dépend des variables étudiées, mais aussi de la calibration sous la mesure physique des actifs qui composent les portefeuilles accessibles. La détermination d'un tel maximum excède toutefois le cadre de ce mémoire.

Il a donc été observé que le taux de réduction obtenu pour la vente de l'option d'achat est faible, et ce pour l'ensemble des objectifs étudiés. Ce premier indicateur clé ne milite pas en faveur de l'ingénierie de distribution de rendements dans une situation concrète. Afin d'obtenir un portrait plus complet de la situation, il faut aussi observer la distribution de valeurs finales de l'investissement à maturité de l'objectif. Le tableau 4 présente l'espérance de la valeur finale de l'investissement. Il est possible d'observer que l'espérance de la valeur finale sans vente d'option d'achat est considérablement supérieure à la valeur de l'objectif. Cela s'explique simplement par le fait que les investissements totaux initiaux sont égaux, car la vente de l'option d'achat sert à réduire la portion de l'investissement initial devant être assumée par l'investisseur. Donc, bien que l'investissement initial reste le même, l'ajout de l'option d'achat dans le second cas impose une valeur maximale à la valeur finale. L'espérance de la valeur finale est donc diminuée. Par exemple, l'ajout de l'option d'achat diminue l'espérance de la valeur finale en deçà de la valeur de l'objectif dans le cas du prix d'exercice K_1 , car K_1 est précisément établi à la valeur de l'objectif. La plus petite diminution relative se produit pour l'objectif de maturité 5 ans, probabilité 90%, prix d'exercice K_2 dans un scénario sans contributions futures. Le passage d'une valeur espérée de 114.18\$ à 106.83\$ correspond à une diminution relative de 6.44%. La plus grande diminution relative se produit pour l'objectif de maturité 20 ans, probabilité 75%, prix d'exercice K_1 dans un scénario sans contributions futures. La valeur espérée

diminue de 182.46\$ à 92.76\$, ce qui correspond à une diminution relative de 49.16%. À l'inverse, le tableau 3 montrait que l'investisseur recevait en échange une réduction de 0% à 2.81%. Il y a donc une très forte asymétrie entre les bénéfices obtenus et les pertes attendues qui montre que l'ingénierie de distribution de rendement n'est pas à l'avantage de l'investisseur s'il dispose de l'investissement initial total requis.

Le tableau 5 présente l'écart-type de la distribution de la valeur de l'investissement dans la séquence de portefeuilles à l'échéance. L'écart-type est un indicateur imparfait dans un contexte de distributions hautement asymétriques telles que celles engendrées par la présence de l'option d'achat, mais permet néanmoins certaines observations qui corroborent les explications associées à l'analyse des résultats du tableau 3. En effet, les résultats montrent que l'écart-type de la distribution augmente avec la maturité et la probabilité cible. Les variations non monotones du taux de réduction doivent donc s'expliquer par l'effet d'une seconde variable, soit l'investissement initial qui diminue pour ces mêmes variables.

Bref, les indicateurs clés pour les investissements initiaux égaux montrent que l'investisseur qui opte pour l'ingénierie de la distribution de rendements obtient une faible réduction initiale du coût de financement en échange d'une renonciation espérée beaucoup plus importante à l'échéance. De plus, le taux de réduction devient nul lorsque l'investisseur prévoit des contributions futures et choisit un prix d'exercice supérieur à la valeur de l'objectif. Ces scénarios qui semblent plausibles dans une situation concrète ne sont pas à l'avantage de l'investisseur. Il a aussi été déterminé que l'ampleur du taux de réduction dépend de plusieurs variables et ne varie pas de façon monotone. Par ailleurs, les résultats obtenus suggèrent l'existence d'une combinaison de variables qui induisent une valeur maximum du taux de réduction possible. Dans tous les cas, il est clair que la réduction du coût de financement évaluée sous certaines hypothèses n'est pas bénéfique à un investisseur qui pourrait déboursier la somme requise au temps initial. La section 4.4 discutera d'ailleurs des limites de ces hypothèses et des résultats qui en découlent. Afin de couvrir tous les angles de la question, il faut aussi s'intéresser à un investisseur qui aurait un manque à gagner au temps initial. Cet investisseur pourrait alors opter pour la vente

de l'option d'achat et ainsi s'approcher du montant initial requis. La prochaine section s'intéresse donc aux résultats dans le cas d'investissements initiaux différents.

4.2 Investissements initiaux différents

Cette section vise à analyser les indicateurs clés lorsqu'un investissement $W(0)$ est comparé à un investissement $W_r(0)$. En guise de rappel, $W(0)$ correspond à l'investissement initial requis pour pouvoir espérer atteindre l'objectif avec la probabilité désirée, tandis que $W_r(0) = W(0) - V_{K_i}$, c'est-à-dire l'investissement initial requis lorsqu'un financement supplémentaire est obtenu par la vente de l'option d'achat. L'objectif est de déterminer les conséquences pour un investisseur qui ne disposerait que d'un montant $W_r(0)$ au temps initial et qui n'aurait pas accès à la vente de l'option d'achat d'une valeur V pour combler le manque à gagner. Il lui serait alors impossible d'espérer atteindre l'objectif avec une probabilité $(1 - c)$.

Le tableau 6 présente la probabilité estimée d'atteindre l'objectif en fonction de l'investissement initial. La colonne $\mathbb{P}_0[W(T) \geq \text{VaR}_c]$ correspond à la probabilité estimée d'atteindre la valeur de l'objectif avec un investissement initial $W(0)$ dans la séquence optimale de portefeuilles sans réduction du coût de financement et est donc environ égale à la valeur visée $(1 - c)$. Les colonnes suivantes représentent cette même probabilité pour un investissement moindre $W_r(0)$ pour les deux prix d'exercice. Les résultats suggèrent une baisse minime de la probabilité d'atteindre l'objectif lorsque l'investissement $W(0)$ est remplacé par un des investissements $W_r(0)$. Cette diminution varie entre 0% et 3.11%. La baisse de 3.11% se réalise pour une maturité de 5 ans, une probabilité d'exercice de 50%, un prix d'exercice K_1 et un scénario sans contributions futures. Ce cas particulier est cohérent avec l'observation du maximum du taux de réduction du coût de financement de 2.81% pour ce même cas. Ainsi, l'investisseur qui ne dispose que de $W_r(0)$ ne peut pas espérer atteindre l'objectif avec une probabilité $(1 - c)$, mais sa probabilité n'est pas grandement modifiée. Autrement dit, l'ingénierie de distribution de rendement ne contribue pas de façon significative à rendre atteignable l'objectif pour un investisseur avec un

manque à gagner.

Un portrait de la situation plus complet est obtenu en observant aussi la CVaR de l'investissement avec un seuil établi à la valeur de l'objectif, c'est-à-dire la valeur moyenne de l'investissement à l'échéance dans les cas où l'objectif n'a pas été atteint. Le tableau 7 présente ces valeurs. Bien que la CVaR soit plus petite dans les cas sans ingénierie de distribution de rendement, la différence est non significative. La diminution relative exprimée sous forme de pourcentage se situe entre 0% et 0.94%. Une fois de plus, la plus grande variation se produit dans le cas d'une maturité de 5 ans, d'une probabilité d'exercice de 50%, d'un prix d'exercice K_1 et d'un scénario sans contributions futures. Il convient aussi de mentionner que la CVaR évalue des événements survenant dans l'aile gauche de la distribution des valeurs finales. Or, l'hypothèse des log-rendements normalement distribués sous-estime la probabilité que des événements extrêmes se produisent, ce qui est d'autant plus problématique lorsque la probabilité $(1 - c)$ est élevée. Les limites des hypothèses de tarification seront abordées à la section 4.4.

En résumé, l'étude de la probabilité et de la CVaR démontre que l'investisseur qui ne dispose que de $W_r(0)$ au temps initial a une probabilité similaire d'atteindre son objectif à l'investisseur ayant accès à $W(0)$. De plus, il aura une richesse moyenne à l'échéance environ équivalente à celle de l'investisseur disposant de $W(0)$ lorsque l'objectif n'est pas atteint. Ces observations pour des cas d'investissements initiaux différents ne constituent pas un fort argument en faveur de l'innovation proposée. Tous les indicateurs étudiés de réduction du coût de financement pointent donc vers des gains marginaux au temps initial qui sont largement éclipsés par de lourdes pertes attendues à l'échéance. Pour vérifier la généralité de ces résultats dans le cadre des hypothèses effectuées, la section suivante propose une analyse de sensibilité des résultats au rendement et à la volatilité des actifs composant l'univers d'investissement.

4.3 Analyse de sensibilité

Afin d'évaluer l'impact de la calibration du modèle sur les résultats obtenus dans les deux sections précédentes, les paramètres de moyenne-variance des actifs ont été modifiés. Le rendement de chacun des actifs a été diminué par un facteur relatif de 10%. Le tableau 8 présente le taux de réduction pour le cas où les rendements espérés ont été abaissés. Cette fois, le taux de réduction varie entre 0% à 3.80%. Comme attendu, l'étendue des taux de réduction est plus grande dans ce cas. En effet, la diminution du rendement a pour effet d'augmenter les investissements initiaux requis et donc les valeurs des options. L'augmentation de l'investissement initial impacte aussi le dénominateur du taux de réduction, mais de façon moins significative que le prix de l'option qui varie plus abruptement. Les augmentations par rapport aux valeurs du cas original présenté au tableau 3 sont d'au plus environ 1%, ce qui corrobore les observations générales des sections précédentes. Contrairement au cas original présenté au tableau 1, il est possible de constater que le taux de réduction pour les objectifs avec une probabilité de 75% varie de façon monotone avec la maturité. Cela corrobore les différentes explications précédemment fournies quant à l'impact de la mesure de probabilité physique et la variation dans l'investissement initial requis qui en découle sur les taux de réductions observés.

De façon indépendante, la volatilité de chacun des actifs a été augmentée par un même facteur relatif de 10%. Le tableau 9 présente les taux de réduction obtenus dans ce contexte. Les taux de réduction répertoriés varient entre 0% et 4.05%. Cette augmentation est attendue puisque la hausse de la volatilité entraîne une hausse de la valeur de l'option d'achat vendue. Cependant, les résultats montrent à nouveau que la hausse maximale enregistrée est d'environ 1%. Cela suggère que les observations des sections précédentes quant aux gains marginaux au temps initial s'appliquent à un ensemble de calibrations possibles du modèle, ce qui représente un autre argument contre l'utilisation de la réduction du coût de financement dans une situation concrète.

Globalement, les résultats de ce chapitre ont démontré que le bénéfice obtenu par la réduction de financement est largement inférieur aux pertes prévues à l'échéance et ne

contribue pas à rendre la solution optimale accessible à un plus grand nombre d'investisseurs. En effet, le taux de réduction obtenu est de moins de 5% pour l'ensemble des scénarios étudiés, tandis que les pertes anticipées à l'échéance peuvent atteindre près de 50%. De plus, il a été déterminé que l'investisseur ayant un manque à gagner qui équivaut à la valeur de la réduction du financement n'est pas grandement désavantagé dans sa probabilité d'atteindre l'objectif ou dans la valeur de son investissement en cas d'échec. Une cause importante de cette asymétrie des bénéfices et des pertes provient du fait que l'investisseur évolue dans un monde sous la mesure de probabilité physique et calibre donc l'investissement initial requis sous cette mesure, tandis que l'évaluation de l'option se fait sous une mesure neutre au risque. Ainsi, l'investisseur est rémunéré sur la base d'une option émise profondément hors jeu, ce qui limite grandement la réduction du coût de financement possible dans le modèle de tarification utilisé. Par ailleurs, il a été démontré que la présence de contributions et l'augmentation du prix d'exercice diminuent le taux de réduction, tandis que la modification de maturité ou de la probabilité d'atteindre l'objectif engendre des variations non monotones en raison des variations contraires dans la volatilité et l'investissement initial. Finalement, il a été démontré que les observations sont valides pour un ensemble de calibrations du modèle dans un cadre de moyenne-variance.

Il est toutefois important de souligner que le modèle de tarification qui a été utilisé pour générer les prix des options reprend les hypothèses du modèle de Black-Scholes. Or, il est largement admis que le modèle de Black-Scholes et son hypothèse des log-rendements normalement distribués sous-estiment grandement les ailes des distributions réellement observées. La prochaine section discute de l'impact de ces limitations.

4.4 Limites des hypothèses de tarification

Dans le cadre de ce mémoire, les options ont été tarifées selon les hypothèses du modèle de Black-Scholes. Malgré la variation du portefeuille sous-jacent au cours de la vie de l'option, il demeure que cette volatilité est supposée constante par période trimestrielle. De plus, des volatilités historiques de rendements ont été utilisées pour la tarification.

Toutefois, il est bien documenté que les volatilités implicites des options observées sur les marchés ne sont pas constantes et tendent à excéder les volatilités réalisées.

Notamment, Rubinstein (1985) a démontré que les prix d'options sur les marchés ne peuvent pas être expliqués par le modèle de Black-Scholes. Cet article fait mention de prix observés systématiquement supérieurs aux prix attendus selon le modèle de Black-Scholes et son noyau de tarification (*pricing kernel*) implicitement exponentiellement affine. Cet écart est amplifié pour les options d'achat hors jeu. Une des explications derrière ce phénomène réside dans l'hypothèse de la distribution des rendements selon une loi log-normale. En effet, les distributions observées sur les marchés sont leptokurtiques. Les événements extrêmes, tant à la hausse qu'à la baisse, sont donc sous-estimés dans le noyau de tarification qui a été utilisé. Dans un contexte où la réduction du coût de financement est obtenue par l'émission d'options d'achat profondément hors jeu, il n'est pas surprenant que les prix présentés au tableau 1 et les taux qui en découlent soient faibles.

L'utilisation d'un noyau de tarification plus réaliste qui tiendrait compte de la volatilité stochastique et qui serait calibré sur les observations du marché permettrait d'obtenir un meilleur aperçu du juste prix d'une telle option. En ce sens, Christoffersen *et al.* (2013) ont développé un noyau de tarification qui généralise le modèle de Heston et Nandi (2000). Le modèle incorpore une prime négative sur la variance des rendements de telle sorte que le logarithme du noyau de tarification prend une forme quadratique. Contrairement au noyau de tarification exponentiellement affine, donc monotone, derrière le modèle de Black-Scholes, la forme en U du noyau de tarification permet d'obtenir des prix d'options qui affichent un processus de variance implicite plus grand, persistant et volatile que la variance réalisée. De plus, il est démontré que la distribution neutre au risque sous ce modèle possède une variance plus élevée et des ailes plus épaisses que la distribution physique observée, ce qui a comme effet d'augmenter le prix de toutes les options. Le prix des options hors jeu et qui possède une longue maturité s'apprécie encore davantage.

La différence relative entre les distributions physique et neutre au risque jouerait un rôle significatif dans le cadre de l'émission d'options pour réduire le coût de financement. En effet, il est important de rappeler que la calibration de la distribution physique

influence l'investissement initial requis et que c'est cet investissement qui sert de valeur initiale au sous-jacent de l'option d'achat émise. Si les distributions physique et neutre au risque étaient modifiées de façon identique, il est possible de penser que l'augmentation du prix de l'option grâce à la hausse de la variance pourrait être mitigée par la réduction de l'investissement $W(0)$ prescrit par la distribution physique plus leptokurtique. Cependant, les augmentations plus importantes dans la variance et dans les ailes du côté de la distribution neutre au risque permettent de croire que les taux de réduction obtenus seraient plus encourageants sous ce noyau de tarification. L'amélioration du modèle de tarification à l'aide d'un modèle comme celui de Christoffersen *et al.* (2013) représente donc une approche prometteuse. Le modèle pourrait être calibré à l'aide des prix des options disponibles sur le marché pour différentes maturités de façon à en extraire la surface de volatilité pour les différentes maturités. Toutefois, la calibration d'un tel modèle pour des options avec une longue maturité représenterait un défi supplémentaire. En effet, le faible volume de transactions sur les options avec une longue maturité pourrait rendre imprécise la section désirée de la surface de volatilité. C'est pourquoi une seconde avenue de recherche qui consisterait à utiliser une stratégie impliquant un roulement d'options d'achat de plus courtes maturités pourrait être envisagée. Cette stratégie pourrait être combinée avec l'utilisation d'un modèle plus sophistiqué et calibré sur des contrats avec plus de volume pour refléter pleinement la véritable valeur de l'option d'achat émise.

À défaut d'offrir une réponse définitive sur le taux de réduction obtenu dans un cadre de tarification plus réaliste, il est possible d'appliquer une prime de volatilité *ad hoc* pour approximer les effets des moments d'ordres supérieurs de la distribution qui sont ignorés par les hypothèses de Black-Scholes. Par exemple, dans le scénario d'une maturité de 5 ans, une probabilité d'exercice de 50%, un prix d'exercice K_1 et un scénario sans contributions futures, les tableaux 1 et 3 montrent respectivement que la valeur de l'option émise est de 1.626\$ et que le taux de réduction est de 2.81%. La séquence de portefeuilles optimaux recommandée par le modèle d'IBO pour ce portefeuille est uniquement composée du portefeuille de la frontière efficiente ayant la plus haute volatilité, soit 16.49%. En appliquant une prime de volatilité *ad hoc* qui double cette volatilité et en tenant compte des

frais de contrepartie de 3%, le nouveau prix de l'option d'achat est de 8.789\$, tandis que le taux de réduction se situe à 15.21%. Il convient toutefois de mentionner que cette prime de volatilité est particulièrement généreuse puisqu'elle s'approche de la valeur maximale de l'indice VIX1Y du CBOE lors des événements de mars 2020. Cet indice est similaire à l'indice VIX, mais il représente la volatilité attendue sur une période d'un an sur le marché américain plutôt que la volatilité attendue sur une période d'un mois. Il est donc raisonnable de s'attendre à ce qu'un noyau de tarification plus réaliste produise une prime de volatilité plus faible et donc des taux de réduction inférieurs à 15%. Une réponse précise et définitive nécessiterait toutefois l'implémentation d'un modèle plus sophistiqué et une prime de volatilité mieux calibrée.

Conclusion

Ce mémoire a présenté une adaptation d'un modèle de construction de portefeuille basé sur une contrainte de valeur à risque dans un contexte d'investissement basé sur les objectifs. Le modèle a aussi été modifié de façon à considérer un problème sur plusieurs périodes pour déterminer une séquence de portefeuilles optimaux qui maintiennent approximativement constante la probabilité d'atteindre un objectif. L'utilisation d'un tel modèle permet de déterminer l'investissement initial requis pour pouvoir atteindre un objectif avec une probabilité donnée. Toutefois, ce modèle a l'inconvénient de nécessiter un investissement initial considérable qui ne tient pas compte du surplus potentiel. En effet, tout investissement pour atteindre un objectif avec une certaine probabilité rapportera à l'investisseur un montant supérieur à ses besoins avec cette même probabilité.

Pour tenter de remédier à ce désavantage, une méthode de réduction du coût de financement des objectifs a été proposée. Cette méthode consiste à renoncer à une partie des gains excédentaires à la valeur de l'objectif par l'entremise de la vente d'une option d'achat dans le but d'obtenir une prime au temps initial. Ces observations ont nécessité la calibration du modèle de construction de portefeuille dans un contexte d'investissement basé sur les objectifs. Pour ce faire, les rendements d'indices boursiers représentatifs des classes d'actifs accessibles aux investisseurs particuliers ont été utilisés. Une distribution de rendement pour chacun des indices a été créée en calculant le rendement annuel mois après mois sur la période s'étalant de 1990 à 2019. La matrice de covariance observée lors de cette période a été rétrécie pour limiter les biais vers les valeurs extrêmes. Une frontière efficiente dans un cadre de moyenne-variance a été déterminée de façon à ce que

le modèle puisse allouer le capital entre les portefeuilles résultants.

Pour parvenir à évaluer l'impact de l'ingénierie de distribution proposée, le taux de réduction du coût de financement ainsi que d'autres indicateurs clés ont été observés pour un ensemble de variables significatives telles que la maturité et la probabilité de l'objectif ainsi que la présence de contributions futures. Les résultats montrent que la prime obtenue permet de réduire l'investissement initial requis de façon négligeable. De plus, il a été démontré que les scénarios les plus plausibles dans un contexte concret, soit la présence de contributions futures et l'utilisation d'un prix d'exercice supérieur à la valeur de l'objectif, limitent davantage le taux de réduction. À l'inverse, les résultats suggèrent que les pertes potentielles à l'échéance sont nettement plus considérables. Une brève analyse de sensibilité du modèle indique que les résultats obtenus s'appliquent à un ensemble de calibrations possibles du modèle sous les hypothèses retenues. L'explication générale derrière ces résultats semble provenir entre autres de la différence entre les mesures de probabilité qui sont utilisées dans la tarification d'option et dans la calibration de l'investissement initial requis. Cependant, le modèle de tarification des options qui a été utilisé est reconnu pour sous-estimer les prix des options hors jeu. Cette limite pourrait être responsable des résultats peu favorables obtenus.

En effet, les hypothèses utilisées dans le cadre de ce mémoire pour la tarification des options d'achat font appel à une distribution des rendements selon une loi log-normale. Ce choix méthodologique permet de calibrer les deux premiers moments de la distribution sur les observations du marché, mais ignore l'asymétrie et le kurtosis. En pratique, les rendements affichent une asymétrie négative et un kurtosis beaucoup plus important que la distribution log-normale. Cette mauvaise représentation du kurtosis est particulièrement importante dans le cadre de ce mémoire puisque les options émises sont profondément hors jeu. Une meilleure représentation des ailes de la distribution pourrait potentiellement augmenter le prix des options et donc les taux de réduction obtenus, ce qui ne peut pas être effectué de façon précise avec le noyau de tarification simpliste utilisé. L'utilisation d'un noyau de tarification avec une volatilité stochastique qui reproduit plus fidèlement les prix des options observés sur les marchés permettrait de vérifier si les résultats obtenus

sont réellement une conséquence de l'écart entre les mesures de probabilité physique et neutre au risque ou plutôt une conséquence du choix du noyau tarification. Une calibration plus sophistiquée de la distribution neutre au risque indiquerait donc si les conclusions générales présentées dans ce mémoire demeurent pertinentes lorsque des hypothèses de tarification plus réalistes sont utilisées. Ces considérations sont laissées à titre d'avenues de recherche.

Bibliographie

- Ardehali, P. H., J. C. Paradi et M. Asmild. 2005, «Assessing financial risk tolerance of portfolio investors using data envelopment analysis», *International Journal of Information Technology & Decision Making*, vol. 4, n° 03, p. 491–519.
- Arrow, K. J. 1965, *Aspects of the theory of risk-bearing*, Yrjö Jahnessonin Säätiö.
- Arzac, E. R. et V. S. Bawa. 1977, «Portfolio choice and equilibrium in capital markets with safety-first investors», *Journal of Financial Economics*, vol. 4, n° 3, p. 277–288.
- Black, F. et M. Scholes. 1973, «The pricing of options and corporate liabilities», *Journal of political economy*, vol. 81, n° 3, p. 637–654.
- Campbell, R., R. Huisman et K. Koedijk. 2001, «Optimal portfolio selection in a value-at-risk framework», *Journal of Banking & Finance*, vol. 25, n° 9, p. 1789–1804.
- Christoffersen, P., S. Heston et K. Jacobs. 2013, «Capturing option anomalies with a variance-dependent pricing kernel», *The Review of Financial Studies*, vol. 26, n° 8, p. 1963–2006.
- Das, S., H. Markowitz, J. Scheid et M. Statman. 2010, «Portfolio optimization with mental accounts», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 45, n° 2, p. 311–334.
- Engle-Warnick, J., D. Pulido, M. de Montaignac *et al.*. 2016, *A comparison of survey and incentivized-based risk attitude elicitation*, CIRANO.
- Heston, S. L. et S. Nandi. 2000, «A closed-form garch option valuation model», *The review of financial studies*, vol. 13, n° 3, p. 585–625.

- Jobson, J. D. et B. Korkie. 1980, «Estimation for markowitz efficient portfolios», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 75, n° 371, p. 544–554.
- Kahneman, D. et A. Tversky. 1980, «Prospect theory», *Econometrica*, vol. 12.
- Ledoit, O. et M. Wolf. 2004, «Honey, i shrunk the sample covariance matrix», *The Journal of Portfolio Management*, vol. 30, n° 4, p. 110–119.
- Markowitz, H. 1952, «Portfolio selection», *The Journal of Finance*, vol. 7, n° 1, p. 77–91.
- Martellini, L. et V. Milhau. 2017, «Mass customisation versus mass production in retirement investment management : Addressing a ‘tough engineering problem.’», *EDHEC-Risk Institute Publication*.
- Michaud, R. O. 1989, «The markowitz optimization enigma : Is ‘optimized’ optimal?», *Financial Analysts Journal*, vol. 45, n° 1, p. 31–42.
- Mulvey, J. M. et B. Shetty. 2004, «Financial planning via multi-stage stochastic optimization», *Computers & Operations Research*, vol. 31, n° 1, p. 1–20.
- von Neumann, J. et O. Morgenstern. 1944, *Theory of Games and Economic Behavior*.
- Nystrup, P., S. Boyd, E. Lindström et H. Madsen. 2019, «Multi-period portfolio selection with drawdown control», *Annals of Operations Research*, vol. 282, n° 1-2, p. 245–271.
- Parker, F. J. 2016, «Goal-based portfolio optimization», *The Journal of Wealth Management*, vol. 19, n° 3, p. 22–30.
- Pratt, J. W., H. Raiffa et R. Schlaifer. 1964, «The foundations of decision under uncertainty : An elementary exposition», *Journal of the American statistical association*, vol. 59, n° 306, p. 353–375.
- Roy, A. D. 1952, «Safety first and the holding of assets», *Econometrica : Journal of the econometric society*, p. 431–449.

Rubinstein, M. 1985, «Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active cboe option classes from august 23, 1976 through august 31, 1978», *The Journal of Finance*, vol. 40, n° 2, p. 455–480.

Annexe A – Tableaux

T	$(1 - c)$	V_{K_1}	ΔV_{K_1}	V_{K_2}	ΔV_{K_2}
5	90%	1.108 \$	0.007 \$	0.186 \$	0.004 \$
	75%	0.959 \$	0.006 \$	0.231 \$	0.004 \$
	50%	1.626 \$	0.011 \$	0.400 \$	0.005 \$
10	90%	0.329 \$	0.008 \$	0.033 \$	0.004 \$
	75%	1.097 \$	0.009 \$	0.253 \$	0.006 \$
	50%	0.578 \$	0.007 \$	0.115 \$	0.004 \$
20	90%	0.110 \$	0.008 \$	0.008 \$	0.003 \$
	75%	0.322 \$	0.009 \$	0.060 \$	0.005 \$
	50%	0.070 \$	0.004 \$	0.010 \$	0.002 \$

(a) Sans contributions

T	$(1 - c)$	V_{K_1}	ΔV_{K_1}	V_{K_2}	ΔV_{K_2}
5	90%	0.0013 \$	0.0005 \$	0.0001 \$	0.0001 \$
	75%	0.012 \$	0.001 \$	0.0018 \$	0.0004 \$
	50%	0.197 \$	0.003 \$	0.049 \$	0.002 \$
10	90%	0.0014 \$	0.0009 \$	0.0001 \$	0.0002 \$
	75%	0.092 \$	0.003 \$	0.021 \$	0.002 \$
	50%	0.043 \$	0.002 \$	0.010 \$	0.001 \$
20	90%	0.001 \$	0.001 \$	0.0001 \$	0.0004 \$
	75%	0.012 \$	0.002 \$	0.003 \$	0.001 \$
	50%	0.0000 \$	0.0002 \$	0.000 \$	0.000 \$

(b) Avec contributions

Tableau 1 – Valeur de l’option d’achat et marge d’erreur de l’estimateur Monte Carlo pour chacun des prix d’exercice. V_{K_1} désigne la valeur de l’option d’achat pour le prix d’exercice K_1 , c’est-à-dire le prix d’exercice qui correspond exactement à la valeur de l’objectif. V_{K_2} représente la valeur de l’option d’achat pour le prix d’exercice K_2 , c’est-à-dire le prix d’exercice supérieur à la valeur de l’objectif. ΔV_{K_1} et ΔV_{K_2} désignent les marges d’erreur des estimateurs Monte Carlo. Par exemple, un investisseur qui désirerait renoncer à tout gain supérieur à la valeur d’un objectif de 100\$ venant à maturité dans 5 ans, devant se réaliser avec une probabilité de 75% et sans effectuer de contributions futures obtiendrait environ 0.959\$ au temps initial.

T	$(1 - c)$	V_{K_1}	ΔV_{K_1}	$V_{K_1,BS}$
5	50%	1.626 \$	0.011 \$	1.629 \$
10	50%	0.578 \$	0.007 \$	0.585 \$
20	50%	0.070 \$	0.004 \$	0.072 \$

Tableau 2 – Comparaison des prix des options pour un prix d'exercice K_1 selon la simulation Monte Carlo et le modèle de Black-Scholes ($V_{K_1,BS}$). Les prix tiennent compte de l'ajustement pour les frais de contrepartie de 3%. En tenant compte des marges d'erreur, le tableau montre que les prix obtenus par la simulation Monte Carlo correspondent aux prix obtenus par le modèle de Black-Scholes, ce qui corrobore les résultats.

T	$(1 - c)$	$V_{K_1}/W(0)$	$V_{K_2}/W(0)$	T	$(1 - c)$	$V_{K_1}/W(0)$	$V_{K_2}/W(0)$
5	90%	1.36%	0.23%	5	90%	0.00%	0.00%
	75%	1.29%	0.31%		75%	0.02%	0.00%
	50%	2.81%	0.69%		50%	0.46%	0.12%
10	90%	0.55%	0.06%	10	90%	0.00%	0.00%
	75%	2.18%	0.50%		75%	0.25%	0.06%
	50%	1.73%	0.34%		50%	0.20%	0.05%
20	90%	0.37%	0.03%	20	90%	0.01%	0.00%
	75%	1.59%	0.30%		75%	0.11%	0.03%
	50%	0.63%	0.09%		50%	0.00%	0.00%

(a) Sans contributions

(b) Avec contributions

Tableau 3 – Pourcentage de réduction du coût de financement. Ces taux sont obtenus en divisant le prix de l'option d'achat (tableau 1) par l'investissement initial requis (tableau 12 en annexe). Ces résultats montrent que la réduction obtenue est faible pour l'ensemble des scénarios étudiés. Les taux sont plus élevés pour les scénarios sans contributions, puisque l'investissement initial est plus grand dans ce cas. Des variations non monotones sont observées pour une même maturité et différentes probabilités ou encore pour une même probabilité et différentes maturités. Cela s'explique par l'effet de deux variations contraires. Une hausse de la maturité ou une baisse de la probabilité cible entraîne une hausse dans la volatilité de la séquence de portefeuilles, ce qui augmente le prix de l'option. À l'inverse, le rendement cumulé espéré sous la mesure physique augmente, ce qui diminue l'investissement initial requis. La diminution de l'investissement initial engendre donc une baisse dans la valeur de l'option.

T	$(1 - c)$	$\mathbb{E}_0[W(T)]$	$\mathbb{E}_0[W(T)]_{K_1}$	$\mathbb{E}_0[W(T)]_{K_2}$
5	90%	114.18 \$	99.40 \$	106.83 \$
	75%	112.56 \$	97.51 \$	104.69 \$
	50%	106.97 \$	87.01 \$	97.94 \$
10	90%	125.49 \$	99.21 \$	111.90 \$
	75%	133.84 \$	95.15 \$	111.71 \$
	50%	114.45 \$	83.89 \$	99.53 \$
20	90%	162.22 \$	98.58 \$	125.96 \$
	75%	182.46 \$	92.76 \$	124.71 \$
	50%	130.96 \$	80.04 \$	103.29 \$

(a) Sans contributions

T	$(1 - c)$	$\mathbb{E}_0[W(T)]$	$\mathbb{E}_0[W(T)]_{K_1}$	$\mathbb{E}_0[W(T)]_{K_2}$
5	90%	112.90 \$	99.64 \$	105.62 \$
	75%	111.17 \$	98.24 \$	103.87 \$
	50%	106.11 \$	89.41 \$	97.49 \$
10	90%	122.83 \$	99.44 \$	109.32 \$
	75%	128.97 \$	96.60 \$	109.00 \$
	50%	112.23 \$	86.69 \$	97.40 \$
20	90%	151.82 \$	99.12 \$	117.66 \$
	75%	166.60 \$	95.08 \$	114.04 \$
	50%	123.04 \$	84.40 \$	92.51 \$

(b) Avec contributions

Tableau 4 – Espérance de la valeur finale de l’investissement. $\mathbb{E}_0[W(T)]$ désigne l’espérance de la valeur finale pour un cas sans vente d’option, $\mathbb{E}_0[W(T)]_{K_1}$ pour un cas avec vente d’option avec un prix d’exercice K_1 qui est égal à la valeur de l’objectif et $\mathbb{E}_0[W(T)]_{K_2}$ pour un prix d’exercice K_2 supérieur à la valeur de l’objectif. L’espérance de la valeur finale diminue lorsqu’une option d’achat est vendue, car tous les investissements initiaux sont égaux pour un même objectif. En effet, sans vente d’option d’achat, un investissement de $W(0)$ est assumé par l’investisseur. Dans le cas de la vente d’option d’achat, l’investisseur débourse $W_r(0)$ et reçoit un montant V supplémentaire qu’il investit aussi. Or, $W_r(0)$ est défini tel quel $W_r(0) + V = W(0)$. Ainsi, l’investissement initial est le même, mais la vente de l’option d’achat ajoute une limite sur la valeur maximale possible à l’échéance. La diminution est donc moins marquée pour le prix d’exercice K_2 puisque $K_2 > K_1$. Il est possible d’observer que la vente de l’option d’achat entraîne une diminution de la valeur espérée à l’échéance qui est nettement plus importante que la rémunération obtenue au temps initial qui a été présentée au tableau 1, ce qui désavantage l’investisseur.

T	$(1 - c)$	$\sigma(W(T))$	$\sigma(W(T))_{K_1}$	$\sigma(W(T))_{K_2}$
5	90%	11.41 \$	2.11 \$	4.65 \$
	75%	17.81 \$	5.41 \$	9.04 \$
	50%	40.74 \$	16.65 \$	25.63 \$
10	90%	21.03 \$	3.04 \$	7.75 \$
	75%	47.49 \$	10.41 \$	19.45 \$
	50%	63.74 \$	20.77 \$	35.06 \$
20	90%	55.73 \$	5.45 \$	16.14 \$
	75%	123.07 \$	15.51 \$	34.45 \$
	50%	110.77 \$	25.40 \$	48.33 \$

(a) Sans contributions

T	$(1 - c)$	$\sigma(W(T))$	$\sigma(W(T))_{K_1}$	$\sigma(W(T))_{K_2}$
5	90%	10.00 \$	1.50 \$	3.56 \$
	75%	15.20 \$	4.21 \$	7.19 \$
	50%	35.68 \$	14.39 \$	21.42 \$
10	90%	18.02 \$	2.35 \$	5.74 \$
	75%	38.86 \$	7.96 \$	14.63 \$
	50%	53.60 \$	17.88 \$	27.39 \$
20	90%	43.33 \$	3.81 \$	10.00 \$
	75%	92.64 \$	11.54 \$	21.49 \$
	50%	80.67 \$	20.92 \$	27.61 \$

(b) Avec contributions

Tableau 5 – Écart-type de la distribution de valeurs finales de l'investissement. $\sigma(W(T))$ désigne l'écart-type de la valeur finale pour un cas sans vente d'option, $\sigma(W(T))_{K_1}$ pour un cas avec vente d'option avec un prix d'exercice K_1 qui est égal à la valeur de l'objectif et $\sigma(W(T))_{K_2}$ pour un prix d'exercice K_2 supérieur à la valeur de l'objectif. L'écart-type de la distribution augmente avec la maturité et la probabilité cible, ce qui augmente le prix de l'option. Cette observation corrobore donc l'explication d'une seconde variable, soit l'investissement initial, qui agit en sens contraire sur le prix de l'option et qui engendre les variations non monotones observées au tableau 1.

T	$(1 - c)$	$\mathbb{P}_0[W(T) \geq \text{VaR}_c]$	$\mathbb{P}_0[W_r(T) \geq \text{VaR}_c]_{K_1}$	$\mathbb{P}_0[W_r(T) \geq \text{VaR}_c]_{K_2}$
5	90%	89.97%	87.35%	89.57%
	75%	74.96%	72.27%	74.33%
	50%	49.96%	46.85%	49.21%
10	90%	89.98%	89.40%	89.93%
	75%	74.95%	72.87%	74.48%
	50%	49.99%	48.65%	49.73%
20	90%	90.01%	89.81%	89.99%
	75%	74.97%	74.13%	74.81%
	50%	49.92%	49.59%	49.88%

(a) Sans contributions

T	$(1 - c)$	$\mathbb{P}_0[W(T) \geq \text{VaR}_c]$	$\mathbb{P}_0[W_r(T) \geq \text{VaR}_c]_{K_1}$	$\mathbb{P}_0[W_r(T) \geq \text{VaR}_c]_{K_2}$
5	90%	90.86%	90.86%	90.86%
	75%	76.07%	76.04%	76.06%
	50%	50.32%	49.90%	50.22%
10	90%	91.07%	91.06%	91.07%
	75%	76.38%	76.18%	76.34%
	50%	50.66%	50.55%	50.63%
20	90%	91.75%	91.75%	91.75%
	75%	77.33%	77.29%	77.32%
	50%	51.60%	51.60%	51.60%

(b) Avec contributions

Tableau 6 – Probabilité estimée d’atteindre l’objectif. $\mathbb{P}_0[W(T) \geq \text{VaR}_c]$ représente la probabilité d’atteindre l’objectif de valeur VaR_c en investissant un montant initial $W(0)$. $\mathbb{P}_0[W_r(T) \geq \text{VaR}_c]_{K_1}$ et $\mathbb{P}_0[W_r(T) \geq \text{VaR}_c]_{K_2}$ désignent respectivement les probabilités d’atteindre l’objectif pour des investissements initiaux réduits $W(0) - V_{K_1}$ et $W(0) - V_{K_2}$. Ce tableau permet donc d’évaluer l’impact du manque à gagner qui serait comblé par la vente de l’option d’achat sur la probabilité d’atteindre l’objectif. Comme les variations entre les différentes colonnes sont minimales, il est possible d’affirmer que l’ingénierie de distribution de rendement ne contribue pas de façon significative à rendre un objectif plus atteignable dans un scénario de manque à gagner.

T	$(1 - c)$	CVaR $[W(T)]$	CVaR $[W_r(T)]_{K_1}$	CVaR $[W_r(T)]_{K_2}$
5	90%	95.48 \$	95.25 \$	95.44 \$
	75%	91.31 \$	91.03 \$	91.24 \$
	50%	76.27 \$	75.56 \$	76.10 \$
10	90%	92.63 \$	92.54 \$	92.62 \$
	75%	82.52 \$	82.11 \$	82.43 \$
	50%	69.00 \$	68.63 \$	68.93 \$
20	90%	86.13 \$	86.08 \$	86.12 \$
	75%	72.23 \$	72.00 \$	72.19 \$
	50%	60.52 \$	60.41 \$	60.50 \$

(a) Sans contributions

T	$(1 - c)$	CVaR $[W(T)]$	CVaR $[W_r(T)]_{K_1}$	CVaR $[W_r(T)]_{K_2}$
5	90%	95.48 \$	95.25 \$	95.44 \$
	75%	91.31 \$	91.03 \$	91.24 \$
	50%	76.27 \$	75.56 \$	76.10 \$
10	90%	92.63 \$	92.54 \$	92.62 \$
	75%	82.52 \$	82.11 \$	82.43 \$
	50%	69.00 \$	68.63 \$	68.93 \$
20	90%	86.13 \$	86.08 \$	86.12 \$
	75%	72.23 \$	72.00 \$	72.19 \$
	50%	60.52 \$	60.41 \$	60.50 \$

(b) Avec contributions

Tableau 7 – CVaR de l’investissement à l’échéance. Cette mesure correspond à la valeur moyenne de l’investissement à l’échéance dans les cas où l’objectif n’a pas été atteint. Les trois investissements initiaux différents $W(0)$, $W(0) - V_{K_1}$ et $W(0) - V_{K_2}$ sont comparés. Le tableau montre qu’il n’y a pas de différence significative dans la CVaR. Ainsi, la vente de l’option d’achat qui permettrait de combler un manque à gagner d’une valeur V_{K_1} ou V_{K_2} a peu d’impact sur la valeur du portefeuille lorsque l’objectif n’est pas atteint.

T	$(1 - c)$	$V_{K_1}/W(0)$	$V_{K_2}/W(0)$	T	$(1 - c)$	$V_{K_1}/W(0)$	$V_{K_2}/W(0)$
5	90%	2.43%	0.53%	5	90%	0.01%	0.00%
	75%	1.56%	0.41%		75%	0.02%	0.00%
	50%	3.80%	1.02%		50%	0.76%	0.20%
10	90%	1.29%	0.18%	10	90%	0.01%	0.00%
	75%	2.46%	0.61%		75%	0.25%	0.06%
	50%	2.82%	0.64%		50%	0.48%	0.13%
20	90%	0.66%	0.06%	20	90%	0.01%	0.00%
	75%	2.84%	0.63%		75%	0.37%	0.11%
	50%	1.43%	0.25%		50%	0.04%	0.01%

(a) Sans contributions

(b) Avec contributions

Tableau 8 – Pourcentage de réduction du coût de financement avec rendements espérés diminués d'un facteur relatif de 10%. La diminution du rendement espéré a comme effet d'augmenter l'investissement initial requis qui agit comme dénominateur du taux de réduction. Cependant, cette augmentation affecte davantage le numérateur puisque la valeur de l'option dépend de l'investissement initial effectué. C'est pourquoi les valeurs observées sont légèrement supérieures au scénario original présenté au tableau 3.

T	$(1 - c)$	$V_{K_1}/W(0)$	$V_{K_2}/W(0)$	T	$(1 - c)$	$V_{K_1}/W(0)$	$V_{K_2}/W(0)$
5	90%	2.01%	0.39%	5	90%	0.01%	0.00%
	75%	1.28%	0.31%		75%	0.02%	0.00%
	50%	4.05%	1.08%		50%	0.90%	0.25%
10	90%	0.89%	0.10%	10	90%	0.01%	0.00%
	75%	1.83%	0.41%		75%	0.16%	0.03%
	50%	2.96%	0.67%		50%	0.52%	0.15%
20	90%	0.35%	0.03%	20	90%	0.00%	0.00%
	75%	2.16%	0.44%		75%	0.21%	0.06%
	50%	1.46%	0.25%		50%	0.02%	0.01%

(a) Sans contributions

(b) Avec contributions

Tableau 9 – Pourcentage de réduction du coût de financement avec des volatilités augmentées d'un facteur relatif de 10%. Les valeurs observées dans ce tableau sont supérieures aux valeurs documentées dans le scénario original, mais demeurent faibles. L'augmentation du taux de réduction s'explique par l'augmentation de la volatilité qui entraîne une hausse de la valeur de l'option.

Actif	Rendement	Volatilité
Actions américaines	0.1229	0.1650
Actions internationales	0.0702	0.1776
Actions émergentes	0.1183	0.2773
Obligations gouvernementales	0.0565	0.0492
Obligations corporatives	0.0692	0.0634
Obligations à rendement élevé	0.0913	0.1182
Liquidités	0.0256	0.0218
Immobilier	0.1035	0.2034
Métaux précieux	0.0560	0.1545

Tableau 10 – Rendements et volatilités annuels des actifs obtenus par les données historiques de 1990 à 2019.

	Actions américaines	Actions internationales	Actions émergentes	Obligations gouvernementales	Obligations corporatives	Obligations à rendement élevé	Liquidités	Immobilier	Métaux précieux
Actions américaines	1.0000	0.6923	0.4191	-0.1099	0.3332	0.6214	0.1909	0.4751	-0.1470
Actions internationales	0.6923	1.0000	0.7363	-0.3819	0.1440	0.5476	-0.0409	0.7348	0.2430
Actions émergentes	0.4191	0.7363	1.0000	-0.2875	0.1807	0.5777	-0.0058	0.6613	0.4060
Obligations gouvernementales	-0.1099	-0.3819	-0.2875	1.0000	0.5866	0.0672	0.4665	-0.2202	0.0175
Obligations corporatives	0.3332	0.1440	0.1807	0.5866	1.0000	0.7156	0.1724	0.3285	0.1425
Obligations à rendement élevé	0.6214	0.5476	0.5777	0.0672	0.7156	1.0000	-0.0050	0.5498	0.1681
Liquidités	0.1909	-0.0409	-0.0058	0.4665	0.1724	-0.0050	1.0000	-0.0816	-0.1287
Immobilier	0.4751	0.7348	0.6613	-0.2202	0.3285	0.5498	-0.0816	1.0000	0.3296
Métaux précieux	-0.1470	0.2430	0.4060	0.0175	0.1425	0.1681	-0.1287	0.3296	1.0000

Tableau 11 – Matrice de corrélation des actifs lors de la période allant de 1990 à 2019 induite de la matrice de covariance rétrécie.

T	$(1 - c)$	W(0) sans contributions	W(0) avec contributions
5	90%	81.41 \$	63.76 \$
	75%	74.42 \$	57.39 \$
	50%	57.80 \$	42.41 \$
10	90%	59.85 \$	44.78 \$
	75%	50.31 \$	36.33 \$
	50%	33.40 \$	21.27 \$
20	90%	30.07 \$	19.11 \$
	75%	20.22 \$	10.91 \$
	50%	11.16 \$	3.07 \$

Tableau 12 – Investissement initial requis.

T	$(1 - c)$	K_1	K_2 sans contributions	K_2 avec contributions
5	90%	100.00 \$	109.35 \$	107.32 \$
	75%	100.00 \$	111.19 \$	108.63 \$
	50%	100.00 \$	128.18 \$	120.67 \$
10	90%	100.00 \$	116.09 \$	112.04 \$
	75%	100.00 \$	126.16 \$	118.89 \$
	50%	100.00 \$	142.06 \$	126.78 \$
20	90%	100.00 \$	134.93 \$	122.19 \$
	75%	100.00 \$	151.26 \$	127.67 \$
	50%	100.00 \$	164.30 \$	117.68 \$

Tableau 13 – Prix d'exercice de l'option d'achat vendue.

Annexe B – Figures

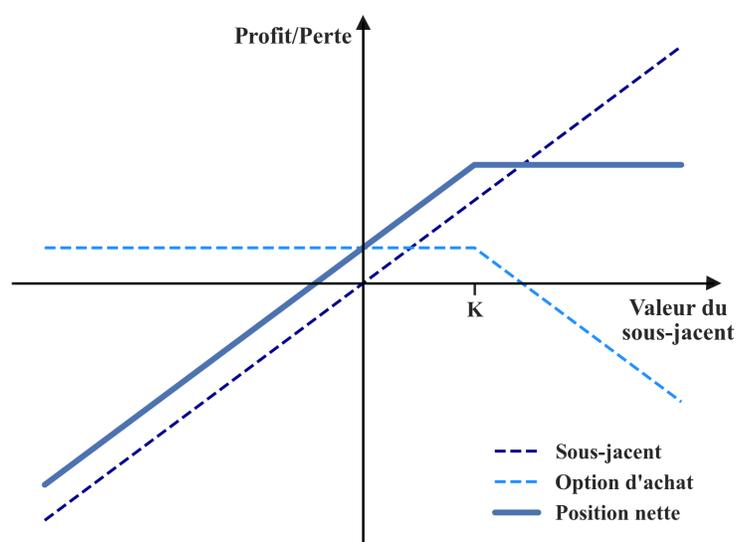


FIGURE 1 – Profits et pertes à l'échéance de la structure proposée. L'ordonnée à l'origine correspond à la valeur initiale de l'investissement.

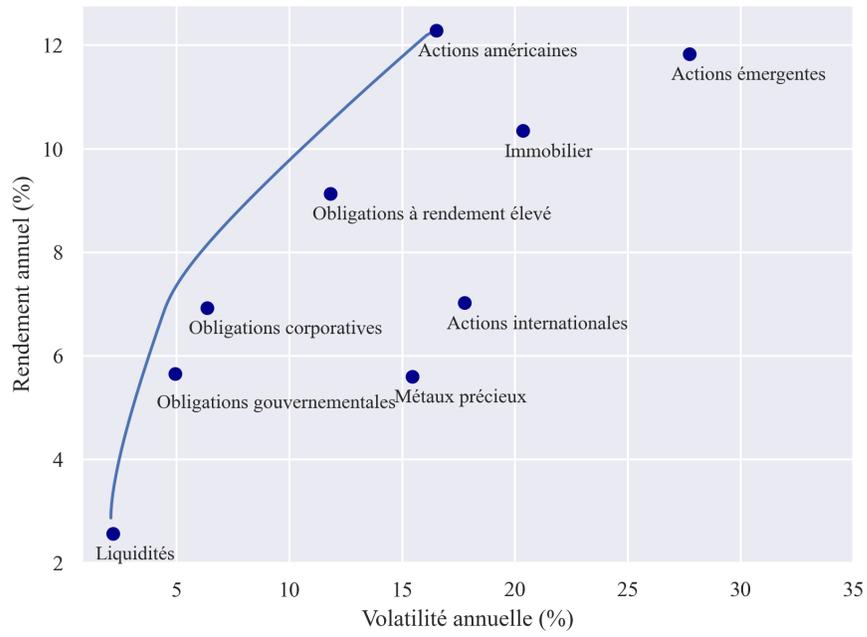


FIGURE 2 – Frontière efficiente et profil rendement-risque des actifs accessibles.

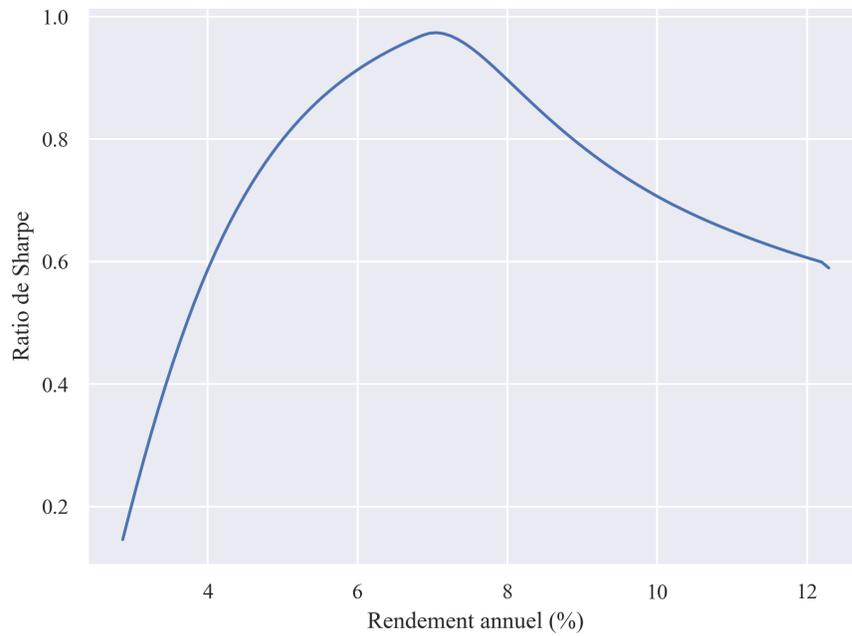
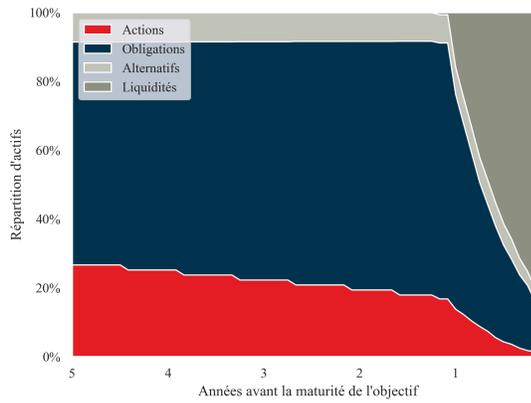
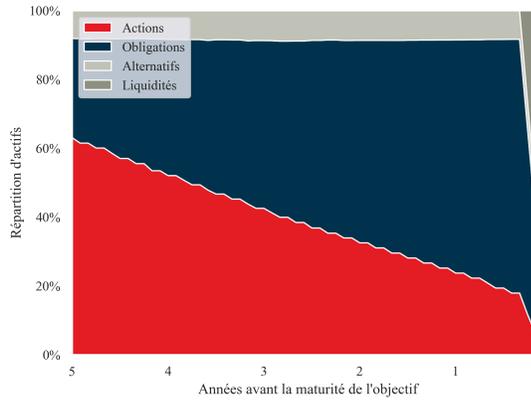


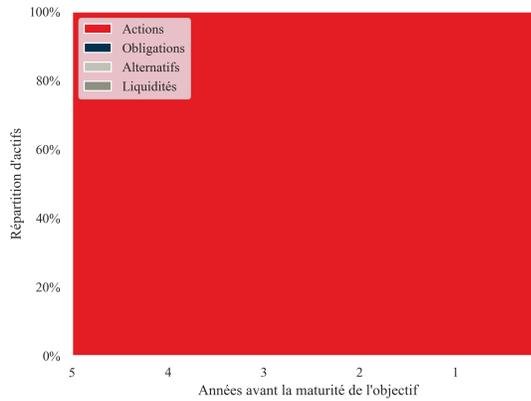
FIGURE 3 – Ratio de Sharpe des portefeuilles se trouvant sur la frontière efficiente.



(a) Probabilité $(1 - c) = 90\%$.

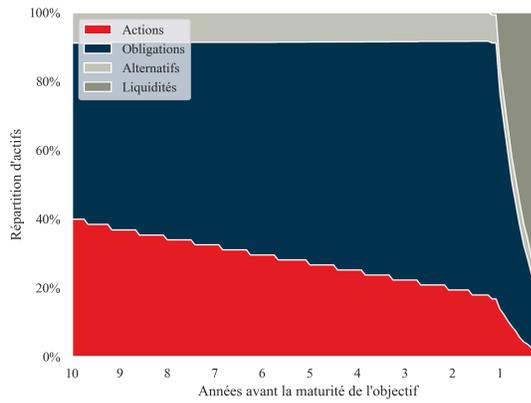


(b) Probabilité $(1 - c) = 75\%$.

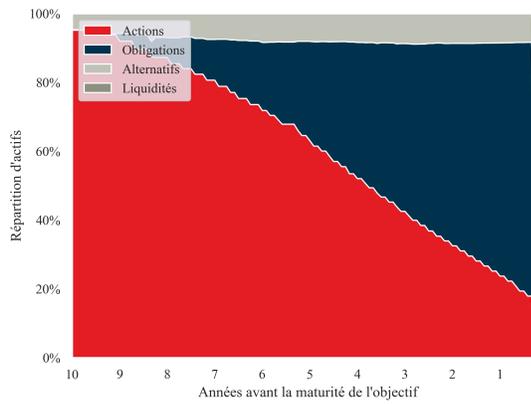


(c) Probabilité $(1 - c) = 50\%$.

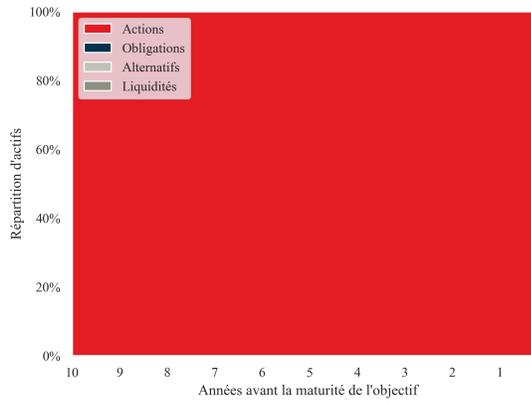
FIGURE 4 – Séquences de portefeuilles optimaux pour des objectifs avec une maturité de 5 ans et différentes probabilités cibles.



(a) Probabilité $(1 - c) = 90\%$.

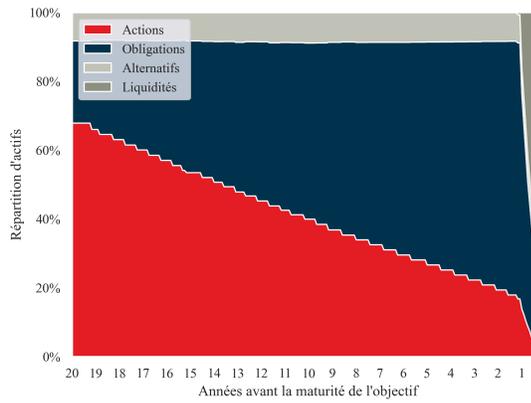


(b) Probabilité $(1 - c) = 75\%$.

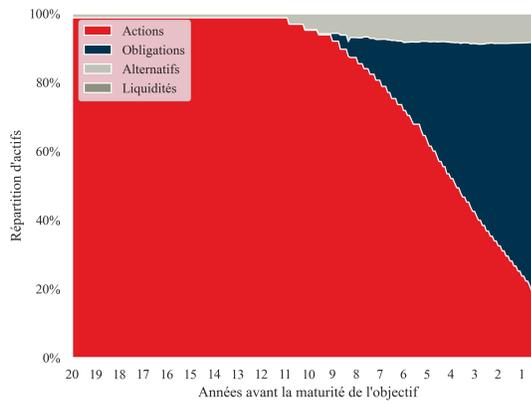


(c) Probabilité $(1 - c) = 50\%$.

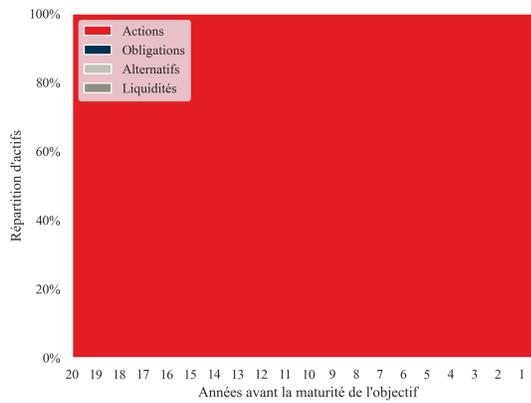
FIGURE 5 – Séquences de portefeuilles optimaux pour des objectifs avec une maturité de 10 ans et différentes probabilités cibles.



(a) Probabilité $(1 - c) = 90\%$.



(b) Probabilité $(1 - c) = 75\%$.



(c) Probabilité $(1 - c) = 50\%$.

FIGURE 6 – Séquences de portefeuilles optimaux pour des objectifs avec une maturité de 20 ans et différentes probabilités cibles.

Annexe C – Développement du modèle

Développement du modèle à une période

Cette section présente les développements de la section 1.1. L'équation 1.4 nécessite d'abord d'isoler B dans l'équation 1.1

$$\begin{aligned}W(0) + B &= \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) \\ B &= \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) - W(0)\end{aligned}$$

Puis de remplacer B dans l'équation 1.3

$$\begin{aligned}W(T) &= (W(0) + B)(1 + r(p)) - B(1 + r_f) \\ &= \left(W(0) + \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) - W(0) \right) (1 + r(p)) - \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) - W(0) \right) (1 + r_f) \\ &= \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) (1 + r(p)) + \left(W(0) - \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) \right) (1 + r_f) \\ &= W(0)(1 + r_f) + \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) (1 + r(p)) - \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) (1 + r_f) \\ &= W(0)(1 + r_f) + \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) \right) (r(p) - r_f)\end{aligned}$$

L'équation 1.5 est simplement une conséquence de l'application de l'espérance sur la

valeur du portefeuille à l'échéance de l'équation 1.4

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0[W(T)] &= \mathbb{E}_0 \left[W(0)(1+r_f) + \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) \right) (r(p) - r_f) \right] \\
&= W(0)(1+r_f) + \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) \right) (\mathbb{E}_0[r(p)] - r_f) \\
&= W(0)(1+r_f) + \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) \right) (r_p - r_f)
\end{aligned}$$

où $r_p \equiv \mathbb{E}_0[r(p)]$.

L'équation 1.6 s'obtient en substituant $W(T)$ de l'équation 1.2 par son expression de l'équation 1.3

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0[W(T) \leq W(0) - \text{VaR}_c] &\leq 1 - c \\
\mathbb{P}_0 \left[W(0)(1+r_f) + \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) \right) (r(p) - r_f) \leq W(0) - \text{VaR}_c \right] &\leq 1 - c \\
\mathbb{P}_0 \left[W(0) + W(0)r_f + \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)r_p - \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)r_f \leq W(0) - \text{VaR}_c \right] &\leq 1 - c \\
\mathbb{P}_0 \left[W(0)r_f + \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)r_p - \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)r_f \leq -\text{VaR}_c \right] &\leq 1 - c \\
\mathbb{P}_0 \left[\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)r_p \leq \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)r_f - \text{VaR}_c - W(0)r_f \right] &\leq 1 - c \\
\mathbb{P}_0 \left[r(p) \leq r_f - \left(\frac{\text{VaR}_c + W(0)r_f}{\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)} \right) \right] &\leq 1 - c
\end{aligned}$$

L'équation 1.7 est obtenue à partir d'un quantile relié à l'équation 1.6. Un quantile q de probabilité p retourne la valeur de x telle que

$$\mathbb{P}[X \leq x] = p$$

où X est une variable aléatoire. Dans le cas de l'équation 1.6, en choisissant la probabilité $(1 - c)$, alors le quantile correspondant d'un portefeuille dénoté $q(c, p)$ est

$$q(c, p) = r_f - \frac{\text{VaR}_c + W(0)r_f}{\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)}$$

Cette équation permet d'obtenir une expression pour la répartition du portefeuille qui dépend du quantile

$$q(c, p) = r_f - \frac{\text{VaR}_c + W(0)r_f}{\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)}$$

$$r_f - q(c, p) = \frac{\text{VaR}_c + W(0)r_f}{\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)}$$

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) = \frac{\text{VaR}_c + W(0)r_f}{r_f - q(c, p)}$$

L'équation 1.9 est obtenue en divisant l'équation 1.8 par $W(0)$

$$\mathbb{E}_0 [W(T)] = W(0)(1 + r_f) + \frac{(r_p - r_f)}{r_f - q(c, p)} (\text{VaR}_c + W(0)r_f)$$

$$\mathbb{E}_0 \left[\frac{W(T)}{W(0)} \right] = 1 + r_f + \frac{(r_p - r_f)}{W(0)(r_f - q(c, p))} (\text{VaR}_c + W(0)r_f)$$

Comme les constantes sont indépendantes du choix du portefeuille, il en découle que le portefeuille qui maximise la richesse dans un contexte de contrainte de VaR est

$$p' : \max_p S(p) = \frac{r_p - r_f}{W(0)r_f - W(0)q(c, p)}$$

L'équation 1.11 est une conséquence de la combinaison des équations 1.1 et 1.7 pour un portefeuille optimal avec les nombres de parts γ'_i

$$\sum_{i=1}^N \gamma'_i P_i(0) = \frac{\text{VaR}_c + W(0)r_f}{r_f - q(c, p')}$$

$$W(0) + B' = \frac{\text{VaR}_c + W(0)r_f}{r_f - q(c, p')}$$

$$B' = \frac{\text{VaR}_c + W(0)r_f}{r_f - q(c, p')} - W(0)$$

$$B' = \frac{\text{VaR}_c + W(0)r_f - W(0)r_f - W(0)q(c, p')}{r_f - q(c, p')}$$

$$B' = \frac{\text{VaR}_c - W(0)q(c, p')}{r_f - q(c, p')}$$

$$B' = \frac{\text{VaR}_c - \text{VaR}(c, p')}{r_f - q(c, p')}$$

$$B' = \frac{W(0)}{W(0)} \frac{\text{VaR}_c - \text{VaR}(c, p')}{r_f - q(c, p')}$$

$$B' = \frac{W(0) (\text{VaR}_c - \text{VaR}(c, p'))}{W(0)r_f - \text{VaR}(c, p')}$$

Développement de l'adaptation du modèle

Cette section présente les étapes intermédiaires pour retrouver l'équation 1.12. D'abord, le problème est modifié de sorte que $B = 0$. L'équation 1.1 devient

$$W(0) = \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)$$

Dans le cadre d'IBO, l'objectif est d'obtenir une valeur minimale $W(T)$ supérieure à la valeur de l'objectif financier sous une probabilité $(1 - c)$. La VaR est donc définie comme une valeur positive qui correspond à la valeur de l'objectif financier et l'équation 1.2 est modifiée pour devenir

$$\mathbb{P}_0 [W(T) \leq \text{VaR}_c] \leq 1 - c$$

L'espérance de valeur finale de l'équation 1.5 devient

$$\mathbb{E}_0[W(T)] = \mathbb{E}_0[W(0)(1 + r(p))]$$

$$\mathbb{E}_0[W(T)] = W(0)(1 + \mathbb{E}_0[r(p)])$$

$$\mathbb{E}_0[W(T)] = W(0)(1 + r_p)$$

de sorte qu'il est possible d'exprimer la probabilité sous la forme

$$\mathbb{P}_0 [W(T) \leq \text{VaR}_c] \leq 1 - c$$

$$\mathbb{P}_0 [W(0)(1 + r(p)) \leq \text{VaR}_c] \leq 1 - c$$

$$\mathbb{P}_0 \left[1 + r(p) \leq \frac{\text{VaR}_c}{W(0)} \right] \leq 1 - c$$

$$\mathbb{P}_0 \left[1 + r(p) \leq \frac{\text{VaR}_c}{\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)} \right] \leq 1 - c$$

Dans ce contexte, le quantile $(1 - c)$ est

$$q(c, p) = \frac{\text{VaR}_c}{\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0)}$$

et l'allocation définie par ce quantile est

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) = \frac{\text{VaR}_c}{q(c, p)}$$

Tout comme dans la section 1.1, plusieurs allocations peuvent respecter cette équation issue du cas particulier où $B = 0$. Toutefois, il est nécessaire de choisir l'allocation qui maximise la richesse de l'investisseur au temps T pour un certain montant $W(0)$. Une formulation équivalente de cette contrainte de rendement espéré consiste à trouver l'investissement initial minimal qui permet d'atteindre le montant VaR_c au temps T avec une probabilité $(1 - c)$. Une simple substitution de $W(0)$ dans l'équation précédente permet de trouver une expression pour $W(0)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \gamma_i P_i(0) &= \frac{\text{VaR}_c}{q(c, p)} \\ W(0) &= \frac{\text{VaR}_c}{q(c, p)} \end{aligned}$$

Le problème est de choisir un portefeuille qui minimise l'investissement initial $W(0)$ requis pour atteindre la valeur VaR_c avec probabilité $(1 - c)$

$$p' : \min_p W(0) = \frac{\text{VaR}_c}{q(c, p)}$$

Le quantile agit comme un facteur d'actualisation de probabilité $(1 - c)$.

Développement du modèle à plusieurs périodes

Cette section présente les développements de la section 1.3. Comme attendu, l'équation 1.13 pour un problème d'optimisation à plusieurs périodes se simplifie à l'équation 1.12 si le nombre de périodes est $n = 1$

$$\begin{aligned} p'_t : \min_{p_t} W(t) &= \frac{\text{VaR}_c}{q(c, p_t)} \quad \forall t \in \{0\} \\ p'_0 : \min_{p_0} W(0) &= \frac{\text{VaR}_c}{q(c, p_0)} \\ p' : \min_p W(0) &= \frac{\text{VaR}_c}{q(c, p)} \end{aligned}$$

L'équation 1.14 est une conséquence directe de l'équation 1.12 qui découle elle-même de l'ajout de la contrainte $\text{VaR}(c, p) = \text{VaR}_c$ qui devient $\text{VaR}(c, \mathbf{p}) = \text{VaR}_c$ dans le cadre d'un problème à plusieurs périodes. En effet

$$\begin{aligned}\text{VaR}(c, \mathbf{p}) &= \text{VaR}_c \\ W(0)q(c, \mathbf{p}) &= \text{VaR}_c \\ W(0) &= \frac{\text{VaR}_c}{q(c, \mathbf{p})}\end{aligned}$$

L'équation 1.15 est une généralisation de l'équation $W(0)q(c, \mathbf{p}) = \text{VaR}_c$ à tous les temps t_i accessibles et à toutes les valeurs possibles. Comme il a été montré que $W(0)q(c, \mathbf{p})$ est la valeur de liquidation avec probabilité $(1 - c)$ au temps T , alors $C_i q(c, \{p'_i\})$ est la valeur de liquidation avec probabilité $(1 - c)$ au temps T d'une contribution C effectuée au temps t_i qui est investie dans les $(n - i)$ derniers portefeuilles de la séquence optimale.

Finalement, l'équation 1.16 est simplement l'actualisation par un facteur associé au quantile $(1 - c)$ de la valeur de l'objectif qui n'est pas financée par des contributions futures. Il est possible de démontrer qu'il est cependant plus avantageux pour l'investisseur de financer la totalité de l'objectif au temps initial. En effet, la séquence optimale implique que $q(c, \mathbf{p}) > q(c, \{p'_i\}) \forall i \neq 0$, c'est-à-dire que le quantile $(1 - c)$ pour la période totale $[0, T]$ est supérieur au quantile équivalent pour une période $[t_i, T]$ si $i \neq 0$. Si C_0 est une contribution effectuée au temps initial et C_i une contribution de même valeur effectuée à un temps $t_i \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}q(c, \mathbf{p}) &> q(c, \{p'_i\}) \\ C_0 q(c, \mathbf{p}) &> C_i q(c, \{p'_i\})\end{aligned}$$

Ainsi, sans surprise, l'impact attendu d'un investissement est plus important s'il survient plus tôt dans la séquence de portefeuilles optimaux. Un investisseur qui dispose d'une somme C a donc avantage à l'investir au temps initial pour diminuer le coût total de financement de l'objectif.

Annexe D – Calibration du modèle

Développement des hypothèses

Cette section présente les développements de la section 2.1. De façon générale, si la valeur S d'un actif évolue selon le mouvement brownien géométrique

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$$

où μ représente la tendance de l'actif, σ sa volatilité et $B(t)$ un mouvement brownien, alors la valeur de l'actif au temps t est donnée par

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t - \sigma B(t) \right)$$

Une application du lemme d'Itô au processus $X(t) = f(S(t)) = \ln(S(t))$ démontre ce résultat.

$$\begin{aligned} dX(t) &= df(S(t)) \\ dX(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(S(t))dt + \frac{\partial f}{\partial S}(S(t))dS(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S(t))d\langle S(t) \rangle^2 \\ dX(t) &= \frac{1}{S(t)}dS(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{(S(t))^2}d\langle S(t) \rangle^2 \\ dX(t) &= \frac{1}{S(t)}(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)) - \frac{1}{2} \frac{1}{(S(t))^2} \sigma^2 (S(t))^2 dt \\ dX(t) &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB(t) \end{aligned}$$

Comme $X(t) = \ln(S(t))$, alors $S(t) = e^{X(t)}$, ce qui donne

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t - \sigma B(t) \right)$$

Dans le cas du problème considéré, S correspond à l'investissement W , μ correspond à l'espérance de rendement du portefeuille r_p et σ correspond à la variance du portefeuille σ_p , de sorte que

$$W(t) = W(0) \exp \left(\left(r_p - \frac{\sigma_p^2}{2} \right) t - \sigma_p B(t) \right)$$

Or, le problème d'optimisation comporte plusieurs périodes et une séquence de portefeuilles, ce qui signifie que r_p et σ_p dépendent de la période et que le processus brownien est discrétisé. La valeur de l'investissement au temps de rééquilibrage t_i telle que présentée à l'équation 2.1 est obtenue par des applications successives de l'équation ci-dessus pour chacune des périodes de durée Δ_t jusqu'au temps t_i . Le processus brownien est discrétisé de façon conséquente. La variable r_p devient $r_{p_{t_j}}$ pour désigner le portefeuille détenu lors de la période $[t_j, t_{j+1})$. La notation de la volatilité suit la même logique. Ainsi,

$$W(t_i) = W(0) \prod_{j=0}^{i-1} \exp \left(\left(r_{p_{t_j}} - \frac{\sigma_{p_{t_j}}^2}{2} \right) \Delta_t - \sigma_{p_{t_j}} \sqrt{\Delta_t} \varepsilon_j \right)$$

$$W(t_i) = W(0) \exp \left(\sum_{j=0}^{i-1} \left(r_{p_{t_j}} - \frac{\sigma_{p_{t_j}}^2}{2} \right) \Delta_t - \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{p_{t_j}} \sqrt{\Delta_t} \varepsilon_j \right)$$

L'équation 2.2 décrit le quantile associé à la probabilité $(1 - c)$ de la séquence de portefeuilles optimaux. Comme le mouvement brownien repose sur une distribution normale centrée réduite, il suffit de remplacer le processus brownien discrétisé dans l'équation 2.1 par la valeur du quantile $(1 - c)$ de la distribution normale centrée réduite et de considérer l'ensemble de la séquence

$$\text{VaR}(c, \mathbf{p}) = W(0) \exp \left(\sum_{j=0}^n \left(r_{p_{t_j}} - \frac{\sigma_{p_{t_j}}^2}{2} \right) \Delta_t - \sum_{j=0}^n \sigma_{p_{t_j}} q(c, \phi) \right)$$

$$q(c, \mathbf{p}) = \exp \left(\sum_{j=0}^n \left(r_{p_{t_j}} - \frac{\sigma_{p_{t_j}}^2}{2} \right) \Delta_t - \sum_{j=0}^n \sigma_{p_{t_j}} q(c, \phi) \right)$$

Cette équation correspond donc au quantile de probabilité $(1 - c)$ de la distribution produite par la totalité de la séquence de portefeuilles optimaux.

Développement des portefeuilles

Cette section présente les développements complémentaires à la section 2.2. Dans l'équation 2.3, la cible de rétrécissement F proposée dans la littérature est une matrice de même dimension que la matrice de covariance de l'échantillon qui possède les éléments

$$f_{ii} = s_{ii} \quad \text{et} \quad f_{ij} = \bar{\rho} \sqrt{s_{ii}s_{jj}}$$

où s_{ij} correspond à la valeur de la matrice de covariance en position ij et $\bar{\rho}$ à la corrélation moyenne entre les N actifs de l'univers d'investissement. Le coefficient optimal de rétrécissement est tel que

$$\hat{\delta} = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\hat{\kappa}}{M}, 1 \right\} \right\}$$

où M désigne la période d'observation totale et

$$\begin{aligned} \hat{\kappa} &= \frac{\hat{\pi} - \hat{\rho}}{\hat{\gamma}} \\ \hat{\pi} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^M \frac{1}{M} ((r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j) - s_{ij})^2 \\ \hat{\rho} &= \sum_i^N \hat{\pi}_{ii} + \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{\bar{\rho}}{2} \left(\sqrt{\frac{s_{jj}}{s_{ii}}} \hat{\nu}_{ii,ij} + \sqrt{\frac{s_{ii}}{s_{jj}}} \hat{\nu}_{jj,ij} \right) \\ \hat{\nu}_{ii,ij} &= \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M ((r_{i,t} - \bar{r}_i)^2 - s_{ii}) ((r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j) - s_{ij}) \\ \hat{\nu}_{jj,ij} &= \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M ((r_{j,t} - \bar{r}_j)^2 - s_{jj}) ((r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j) - s_{ij}) \\ \hat{\gamma} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (f_{ij} - s_{ij})^2 \end{aligned}$$

Une fois la matrice de covariance rétrécie, il est possible d'induire une matrice de corrélation, ce qui permet de présenter de façon un peu plus claire les hypothèses du cadre d'analyse. La matrice de covariance est

$$S = D_{\sigma} \rho D_{\sigma}$$

où D_σ représente la matrice diagonale des volatilités et ρ la matrice de corrélation. La matrice de corrélation induite par la matrice de covariance rétrécie est donc

$$\rho = D_\Psi^{-1/2} \Psi D_\Psi^{-1/2}$$

Le tableau 10 montre le rendement et la volatilité des différents actifs, tandis que le tableau 11 présente la matrice de corrélation induite. La frontière efficiente est illustrée à la figure 2 et le ratio de Sharpe des différents portefeuilles sur cette frontière est présenté à la figure 3.

Annexe E – Développement des résultats

Détermination de la valeur de l'option

Cette section vise à présenter les valeurs préalables à l'obtention des résultats des sections 4.1 et 4.2. Ces résultats nécessitent le calcul du prix de l'option d'achat pour les différentes variables sélectionnées. Ce prix obtenu par simulation Monte Carlo requiert la détermination de l'investissement initial $W(0)$ ainsi que des prix d'exercices exprimés sous forme de quantile au chapitre 3.

La première série de résultats préalables correspond donc au montant initial $W(0)$ devant être investi afin de pouvoir espérer réaliser l'objectif désiré au temps T avec une probabilité $(1 - c)$. Le tableau 12 à l'annexe A présente l'investissement requis pour un objectif de valeur VaR_c de 100\$ en l'absence de contributions futures et en présence de contributions futures réparties uniformément entre les périodes à une hauteur totale de 20% de la valeur de l'objectif. De façon attendue, une augmentation de la maturité T ou une diminution de la probabilité $(1 - c)$ réduit l'investissement initial requis. De plus, il est observé que l'ajout de contributions futures pour un total de 20% de la valeur de l'objectif, donc 20\$, diminue de moins de 20\$ l'investissement initial requis. Cela est dû au fait que les cotisations futures ont moins d'impact qu'un investissement de valeur nominale équivalente effectué au temps initial. La démonstration de l'annexe C permet de justifier cette affirmation.

Le tableau 13 présente les prix d'exercices pour les différentes maturités et probabilités cibles. En guise de rappel, $K_1 = W(0)q(c, \mathbf{p})$ et $K_2 = W(0)q(c + 0.25, \mathbf{p})$. La considération des contributions donne lieu à une autre distribution de valeurs finales, de sorte que le prix d'exercice K_2 diffère selon la présence de contributions. La combinaison des tableaux 12 et 13 ainsi que les séquences de portefeuilles dont il est question à la section suivante permettent de déterminer le prix de l'option dans chacun des scénarios tel que présenté au tableau 1.

Séquences de portefeuilles optimaux

Les figures 4, 5 et 6 à l'annexe B illustrent la répartition d'actifs au sein des séquences de portefeuilles optimaux des différentes maturités et probabilités. Afin de faciliter la lecture, les actifs ont été regroupés en classes d'actifs. Pour les objectifs avec une probabilité cible $(1 - c)$ de 50%, il est possible de constater que la répartition d'actifs est entièrement constituée d'actions, et ce pour l'ensemble des périodes.

