HEC MONTRÉAL

Techniques de simulation pour la recherche sur le perfectionnement de la méthode AHP

Par
Robin Rivest

Sciences de la décision
(Option Science des données et analytique d'affaires)

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences en gestion
(M. Sc.)

Dépôt : Mai 2019
Révision finale : Août 2019

© Robin Rivest, 2019

Registrariat
3000, chemin de la Côte-Sainte-Catherine
Montréal (Québec), Canada H3T 2A7

HEC MONTRÉAL

Recherche ne nécessitant pas l'approbation du CER

Ce formulaire est requis pour les thèses, mémoires ou projets supervisés correspondant à une des deux situations suivantes :

1) un cas pédagogique;
2) une recherche menée auprès d'employés d'une organisation spécifique et qui servira exclusivement à des fins d'évaluation, de gestion ou d'amélioration de cette organisation.

Ou, la thèse, le mémoire ou le projet supervisé n'implique aucune des trois situations suivantes :

1) une collecte de données impliquant des sujets humains (par entrevue, groupe de discussion, questionnaire, observation ou toute autre méthode de collecte);
2) l'utilisation de données déjà collectées impliquant de l'information sur des sujets humains qui n'est pas accessible au public;
3) le couplage de plusieurs des données impliquant de l'information sur des sujets humains, que celle-ci soit publique ou non (le couplage est un recoupement de deux ensembles de données distincts qui permet de lier des données particulières entre elles).

Titre de la recherche : Techniques de simulation pour la recherche sur le perfectionnement de la méthode AHP

Nom de l'étudiant : Robin Rivest

Signature : Robin Rivest

Date : 2019-05-24

Nom du directeur : Érick Delage

Signature : Erick Delage

Date : 24 mai 2019

Veuillez remettre ce formulaire dûment complété et signé lors de votre dépôt initial

Pour toute question, veuillez vous adresser à cer@hec.ca

Imprimer

Ce mémoire est dédié à mon petit-fils, Antoine.

Résumé

Le besoin de génération de données de simulation est omniprésent dans les recherches effectuées sur le perfectionnement de la méthode d'aide à la décision multicritère AHP. Ces données servent à mettre à l'épreuve et à évaluer le bien-fondé des améliorations proposées. En particulier, dans les recherches sur la réduction du nombre de comparaisons requises, sur le choix de l'échelle numérique appropriée et sur le calcul de la pondération.

Le présent mémoire explore la représentation des domaines de valeurs couverts dans les simulations effectuées. Il considère aussi deux éléments complémentaires qui ont un rôle important dans ces recherches. Ces éléments sont le choix de la mesure de proximité des vecteurs de pondérations estimés et la limite de précision atteignable.

Bien qu'elles aient certains points en commun, les méthodes de génération sont différentes d'une étude à l'autre. De plus, l'appariement entre la couverture requise et la couverture obtenue n'est pas expliqué. On constate, par ailleurs, la même disparité et la même absence d'explications dans les mesures de proximité utilisées et on remarque particulièrement que la limite de précision est soit établie de façon arbitraire ou demeure tout simplement indéterminée.

Ce mémoire propose des réponses à ces trois préoccupations : couverture, proximité et limite. Les justifications de ces propositions reposent en majeure partie sur une combinaison d'interprétations géométriques et de résultats de simulation de type Monte Carlo. Le point culminant est une illustration de leurs mises en œuvre pour la comparaison de deux procédés de réduction et pour la comparaison de trois méthodes de calculs du vecteur de priorité dans un même cadre pour la première fois.

Mots clés : AHP, techniques de simulation, réduction du nombre de comparaisons, mesure de similarité, similarité de Ruzicka, distance angulaire, interprétation géométrique, puissance de discrimination d'un critère, caractérisation des vecteurs de priorité, limite de précision en quantification des préférences.

Abstract

The need to generate simulation data is widespread in the research for the betterment of the Analytic Hierarchy Process (AHP) method. This data is used to test and evaluate the soundness of proposed improvements. This is particularly true in the research aimed at reducing of the number of required pairwise comparisons, on the appropriateness of alternative numerical scales and on the derivation of the priority vector.

This present dissertation explores the representation of the value domains covered in simulations conducted for such purposes. It also considers two complementary elements that play a key role in these research endeavors. These elements are the choice of a proximity measure for determining how close is the estimation of sought vectors and the precision threshold attainable.

Even though they have certain points in common, the generation methods employed differ from one study to the next. We also find that the proper match between the coverage effected and the coverage needed is not explained. Finally, we also note the same disparity and the same absence of explanatory arguments for the proximity measures used and most particularly the fact that the limit of precision is either established in an arbitrary (subjective) manner or remains undetermined.

This dissertation proposes answers to these three preoccupations: coverage, proximity and threshold. The justifications for these propositions rest, for the most part, on a combination of geometric interpretations and Monte Carlo style simulation results. The study is completed by an illustration of the techniques applied to two pairwise reduction processes and three priority vector derivation procedures in the same simulation framework for the first time.

Keywords: AHP, simulation techniques, pairwise comparison reduction, similarity measures, Ruzicka similarity, angular distance, geometric interpretation, criteria discriminating power, priority vector characterization, preference quantification accuracy threshold.

Avant-Propos

La méthode d'aide à la décision multicritère « Analytic Hierarchy Process (AHP) » utilise la comparaison par paires. Le nombre de comparaisons requises devient rapidement excessif lorsque le nombre de facteurs considérés grandit. De nombreux procédés de réduction ont été proposés au cours des 30 dernières années mais aucun ne peut être considéré comme concluant. Le sujet demeure donc d'actualité. L'intention de départ de la présente étude était de faire une revue de plusieurs procédés de réduction et d'en dégager des pistes d'amélioration.

Après un premier examen, j'ai rapidement noté la disparité des cadres d'évaluation utilisés. Mon attention s'est donc portée sur cet aspect en priorité. Dans l'espoir d'identifier lequel des différents cadres d'évaluation serait le plus approprié, j'ai d'abord effectué plusieurs reproductions des essais rapportés dans les différents articles.

J'en suis rapidement venu au constat que tous les cadres proposés comportaient des lacunes importantes. Ces lacunes affectent particulièrement la représentation des domaines de valeurs, la mesure de la proximité entre les pondérations estimées et la limite de précision de l'instrument comme tel. Bref, tout ceci explique en bonne partie pourquoi on ne peut tirer de conclusion définitive sur les procédés de réduction proposés.

Par ailleurs, ces mêmes lacunes sont présentes dans d'autres sujets de recherche connexes sur le perfectionnement de l'AHP. Notamment dans la façon de traduire les jugements qualitatifs en pondération, ainsi que dans l'adéquation des échelles numériques alternatives proposées.

La portée de l'étude a donc évolué naturellement vers les trois éléments en question, soit : la couverture des domaines de valeurs, la mesure de proximité des pondérations obtenues et la détermination d'une limite objective de précision.

Ce travail de recherche s'est déroulé entre 2016 et 2019. Durant cette période, j'ai eu l'occasion d'aller présenter mes idées et d'échanger sur les pistes à explorer avec certains des principaux tenants de la recherche et de l'évolution de la méthode AHP.

En 2016, j'ai eu l'opportunité de présenter mes premières idées par le biais d'une présentation avec affiche ("poster presentation") lors du Symposium international de l'AHP qui avait lieu à Londres, Angleterre (ISAHP 2016). L'année suivante, j'ai été en mesure de faire des présentations en salle lors de MCDM 2017 à Ottawa et de IFORS 2017 à Québec.

Lors de ces événements, j'ai eu la chance d'échanger avec, notamment: Rozann Whitaker Saaty, Luis Vargas, Claudio Garuti, Birken Kirpak, James Dolan, Oliver Meixner, Alessio Ishizaka, Sarah Ben Amor, Sandor Bozoki et Nina Begicevic. Ces gens sont tous très impliqués dans la recherche du domaine de l'aide à la décision multicritère et de l'AHP. J'ai aussi eu plusieurs correspondances par courriel avec William Wedley et Claudio Garuti. Tous ces échanges m'ont permis de mieux comprendre les enjeux et les concepts derrière les pistes de solution.

La littérature sur l'AHP est majoritairement anglophone et il n’existe pas de traduction francophone établie pour plusieurs des termes courants utilisés pour traiter du sujet. À titre indicatif, l’appellation de l’AHP est souvent traduite incorrectement en français par l'expression "analyse hiérarchique des procédés", alors qu'il s'agit plutôt d’un « procédé d'analyse » et non pas d’une « analyse de procédés ».

Remerciements

Je remercie d'abord mon directeur de recherche, Érick Delage, pour sa patience à m'écouter lui faire part de mes trouvailles et pour m'avoir bien orienté. Ses conseils m'auront été d'une aide précieuse. Je remercie aussi particulièrement les personnes mentionnées dans l'avant-propos, qui ont été chacune à leur façon, une source d'inspiration et d'encouragement. Je suis très reconnaissant d'avoir eu ces opportunités d'échanges et de partage d'idées.

Je remercie aussi les membres du jury d'évaluation du mémoire pour leurs suggestions judicieuses, qui m'a permis de produire cette version finale améliorée. Toute erreur résiduelle, le cas échéant, demeure mon entière responsabilité.

Au-delà de tout, je n'aurais pu compléter ce travail sans l'appui indéfectible de ma conjointe, Nathalie Chartier, qui a su trouver les mots pour m'encourager à poursuivre ma démarche quand je doutais de ma capacité à achever ce travail dans les délais imposés. Je la remercie du fond du cœur.

Table des matières

(1) Introduction 1
(1.1) Aide à la décision multicritère 1
(1.2) La méthode AHP 4
(1.3) Un exemple d'utilisation 21
(1.4) L'état de la recherche sur l'AHP 25
(1.5) Les intérêts de recherche du mémoire 26
(1.6) Les contributions du mémoire 27
(2) Revue de littérature 29
(2.1) Génération de données de simulation 29
(2.2) Mesures de proximité 32
(2.3) Inventaire d'études sur les sujets ciblés par la simulation 33
(2.4) Bilan de la revue 37
(3) Problématiques et pistes de solutions 38
(3.1) Exigences de couverture des domaines de valeur 38
(3.2) Puissance de discrimination 39
(3.3) Génération des vecteurs présumés 46
(3.4) Mesures de proximité 51
(3.5) Limite de précision 55
(4) Nouvelles approches 59
(4.1) Couverture avec distribution altérée 59
(4.2) Génération des matrices NSI 63
(4.3) Mesures de proximité 65
(4.4) Limite de précision 68
(5) Comparaison de procédés de réduction et de calcul de priorité 70
(5.1) Comparaison de procédés de réduction 70
(5.2) Résultats de réduction 73
(5.3) Comparaison de procédés de calcul de priorité 75
(5.4) Résultats de calcul de priorité 76
(6) Analyse des résultats 78
(6.1) Observations principales sur les procédés de réduction 78

(6.2) Observations additionnelles 80
(7) Conclusion 84
Bibliographie 86
Annexe A – Limites de la puissance de discrimination 89

(1) Introduction

Ce chapitre présente les notions de base de la méthode AHP et une illustration de son utilisation avec quelques exemples simples. Il donne d'abord un bref aperçu du domaine de l'aide à décision multicritère afin de bien situé l'AHP dans ce contexte.

Il donne ensuite un bref aperçu de l'état de la recherche sur le perfectionnement de la méthode, avec une emphase sur les intérêts spécifiques de recherche traités ici. Il termine avec un énoncé des contributions de ce mémoire.

(1.1) Aide à la décision multicritère

Le présent mémoire concerne spécifiquement la recherche sur le perfectionnement de la méthode AHP. Toutefois, avant de décrire cette méthode, nous allons d'abord la positionner dans le domaine de l'aide à la décision multicritère.

L'aide à la décision multicritère (ADMC) est une branche d'application de la recherche opérationnelle qui s'intéresse particulièrement aux situations de choix (décision) parmi plusieurs alternatives dans lesquelles on doit tenir compte de critères subjectifs, telles que les préférences ou les perceptions d'importance relative du décideur.

Au cours des 70 dernières années, de nombreuses méthodes ADMC ont été élaborées. Le survol historique de l'approche multicritère de Köksalan *et al* (2011, préface) mentionne que les principaux fondements de ces méthodes ont été développés au cours des années 1950s et 1960s. Dans la décennie qui a suivi, des travaux séminaux ont été réalisés. Puis, le champ d'application a commencé à prendre de la maturité au cours des années 1980. Depuis ce temps, il connaît une croissance exponentielle en termes de publications de résultats de mise en œuvre et de recherche.

Soulignons aussi que Ferreira et al (2011) présentent un tour d'horizon des éléments distinctifs de l'approche multicritère, qu'ils décrivent comme un « paradigme souple », face au *credo* traditionnel de la recherche opérationnelle qu'ils qualifient de « paradigme endurci ». L'élément principal qu'ils soulignent est que l'approche multicritère vise plus intimement à intégrer les préférences et les valeurs des décideurs, plutôt que de mettre l'emphase de façon prédominante sur la détermination d'une solution jugée supérieure uniquement par ses qualités optimales.

Les méthodes ADMC diffèrent de plusieurs façons. La différence que l'on souligne ici sert à positionner la méthode AHP dans ce vaste *corpus* en relation plus directe avec ce qui fait l'objet du présent mémoire.

Face à un ensemble de choix, les méthodes ADMC vont, de manière générale, viser un des trois buts suivants :

- #1 Identifier la meilleure option
- #2 Identifier les options les plus appropriées (*top-k*)
- #3 Établir un classement complet :
    - #3i Classement sans pondération (ordinal)
    - #3ii Classement avec pondération (cardinal)

Le cas #1 peut être une situation dans laquelle l'organisation ne peut pas se permettre de développer plus d'une option et doit donc en choisir une seule (ex. localisation d'une centrale énergétique).

Le cas #2 représente la situation dans laquelle il est envisagé d'approfondir les options les plus prometteuses avant de procéder au choix final (ex. sélection d'un nouveau système informatique).

Le cas #3 représente la situation dans laquelle il est impératif de connaître la performance relative de chacun des choix (ex. détermination des priorités de l'organisation face à un portefeuille de projets). On distingue ici deux cas de figures : soit, l'ordonnancement simple (#3i) qui fixe la séquence dans laquelle les choix seront mis en œuvre; et, la pondération (#3ii) qui servira, par exemple, de base à une répartition budgétaire. Dans ce dernier cas, il est en général pertinent que la pondération obtenue reflète le plus précisément possible les préférences exprimées.

Bien qu'elle puisse servir à traiter l'ensemble des cas mentionnés ci-haut, l'AHP est une des ADMC qui ciblent plus spécifiquement le dernier cas de figure. Un soin particulier a été apporté par Saaty (1980) dans l'élaboration des fondements mathématiques de l'AHP pour que la méthode permette d'obtenir les pondérations les plus exactes et précises possibles.

<u>Comparaison par paires</u>

La comparaison par paires est un des piliers sur lequel s'appuie de nombreuses ADMC. Le but principal d'utiliser la comparaison par paires en analyse multicritère est d'alléger la charge cognitive imposée à la personne devant faire l'évaluation du mérite relatif des options à évaluer. Elle consiste à procéder par des comparaisons entre deux options seulement, à la fois.

On la retrouve non seulement dans l'AHP, mais aussi dans plusieurs autres méthodes, telles : ELECTRE, MACBETH, PROMETHEE, LINMAP, MAVT, QUALIFLEX, REMBRANDT, ou UTA (Belton & Stewart, 2002; Barba-Romero & Pomerol, 2000; Dodgson *et al*, 2009).

Le champ d'application de la comparaison par paire est en fait beaucoup plus large si on considère, par exemple, son utilisation dans le développement de modèles probabilistes en statistiques (Kendall & Smith, 1940; Thompson & Remage, 1964) ou dans l'apprentissage automatique (Heckel *et al*, 2018).

Et pour compléter la perspective historique, on peut souligner qu'on attribue généralement les premières utilisations de la comparaison par paires comme instrument d'aide à la décision à Ramon Llul, un philosophe ayant vécu au 13ème siècle (Koczkodaj *et al*, 2016).

<u>Réduction du nombre de comparaisons requises</u>

Quel que soit le domaine d'utilisation, la comparaison par paire présente le désavantage du nombre de comparaisons qui croît très rapidement, soit avec un facteur d'ordre $\mathcal{O}(n^2)$ pour n options à évaluer. Pour cinq options, dix comparaisons suffisent. Mais avec seulement trois options additionnelles, il faut 28 comparaisons, soit presque trois fois plus.

La problématique du trop grand nombre de comparaisons requises est un sujet de perfectionnement faisant l'objet d'une recherche soutenue, et ce, dans la plupart des domaines dans lesquels elle est mise à contribution. Le défi à relever dans ces travaux de recherche est d'assurer que le résultat obtenu n'excède pas un certain niveau d'imprécision qui serait inacceptable en regard du but visé.

À titre d'exemples, on peut souligner les travaux de Ciomek et al (2017a et 2017b) qui présentent des heuristiques pour choisir et pour ordonnancer les comparaisons à éliciter dans le contexte de la méthode MAVT; ainsi que le travail de Triantaphyllou (1999) qui présente une

approche de réduction par dualité dont l'application est illustrée avec la méthode AHP, mais qui est conçue de façon à s'appliquer tout aussi bien à d'autres méthodes ADMC.

On peut aussi souligner les travaux de Heckel *et al* (2018) dans le domaine de l'apprentissage automatique qui visent à établir un ordre approximatif des meilleures options (*top-k*) avec un minimum de comparaisons possible. Leur procédé s'applique à des contextes très variés allant du choix de formules d'échantillonnage pour sonder l'opinion publique en regard de propositions devant être soumises au vote par la population, à celui de l'identification des préférences dans les systèmes de recommandations basées sur le filtrage collaboratif (ex. catalogue d'achats en ligne).

Et pour compléter ce bref éventail d'exemples, ajoutons-en un très récent, soit Alrasheedi (2019) qui présente une approche inspirée partiellement de l'AHP, qui exploite la différence entre les poids des éléments plutôt que leur *ratio*. La méthode qu'il décrit pourrait, selon son analyse, réduire le nombre de comparaisons requises à un facteur d'ordre $O(n)$.

En particulier, dans la revue de littérature (ch. 2), nous présentons une brève description d'un certain nombre de procédés qui ont été proposés pour réduire le nombre de comparaisons requises dans le contexte spécifique de l'AHP dans sa forme traditionnelle.

(1.2) La méthode AHP

La méthode d'aide à la décision multicritère AHP a été conçue par Thomas Saaty (1977, 1980) au cours des années 70s. Elle est utilisée dans un vaste éventail de domaines d'application aux quatre coins de la planète et de façon soutenue depuis son introduction il y a 40 ans. Vaidya & Kumar (2006) ont effectué l'analyse d'un échantillon de 150 articles dans le but précis d'illustrer cet éventail d'applications. Les quatre graphiques suivants (fig. 1.1) sont tirés de cet article (p.20-21).

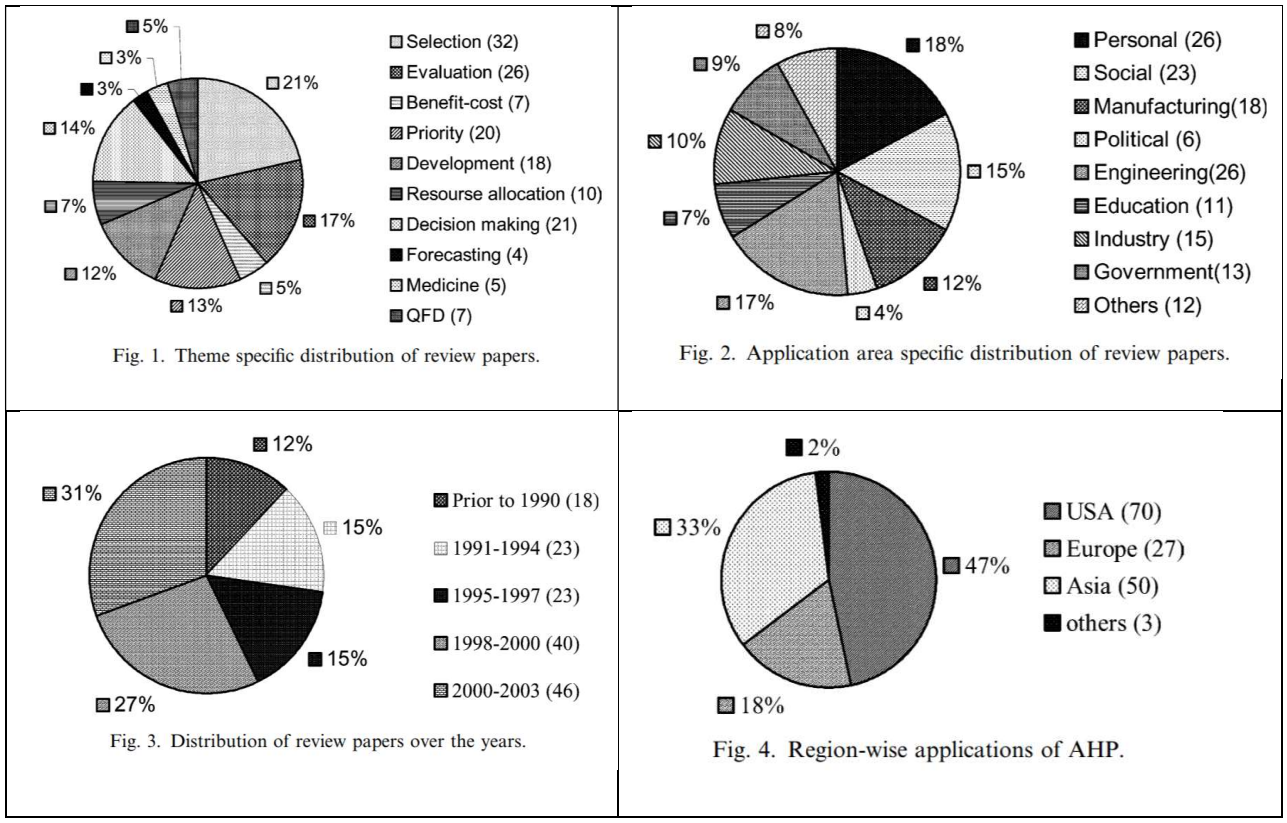


Figure 1.1 - Graphiques de répartition des articles revus dans Vaidya & Kumar (2006, p.20-21)

La méthode AHP permet à des individus, seuls ou en groupes, d'analyser des décisions complexes. Son mécanisme principal repose sur la comparaison par paires de chacune des alternatives entre elles, et non pas en leur attribuant une pondération arbitraire (ex. par le biais d'un vote) ou simplement en les classant par ordre d'importance.

La démarche de l'AHP permet d'élaborer un modèle composé d'une hiérarchie de critères dans le but d'évaluer des alternatives considérées pour l'atteinte d'un objectif spécifique. Mettre en œuvre l'AHP consiste à représenter un problème de décision par une structure hiérarchique reflétant les interactions entre les divers facteurs (objectif, critères et alternatives) du problème. Cette méthode est privilégiée lorsque le nombre de critères est adéquat, et lorsque l'utilisateur est en mesure d'évaluer l'importance relative des éléments de son problème par paires, particulièrement face aux critères retenus.

La notion de hiérarchie dans l'AHP est manifestée par le fait que les critères d'évaluation qui sont comparés entre eux sont du même ordre d'importance. Les principaux critères composent le premier niveau de la hiérarchie, alors que les critères d'importance moindre (appelés sous-

critères) sont logés à des niveaux inférieurs dans l'arborescence. Le but de cette structuration est de permettre de comparer entre eux des critères ayant un ordre d'importance relative de même envergure.

Avec l'AHP, les valeurs telles que le prix, le poids, ou toute autre quantité reposant sur des échelles de mesures établies peuvent être analysées conjointement avec des critères subjectifs tels que les préférences, la satisfaction ou les perceptions. Pour Saaty (2008, p.273) un jugement est l'expression d'une opinion à propos de la dominance (importance, préférence, vraisemblance) d'un facteur en regard d'un autre. C'est cette capacité de quantifier les aspects généralement qualifiés d'intangibles qui lui confère sa grande pertinence pour l'aide à la décision.

Une fois la hiérarchie de critères établie, les valeurs relatives des alternatives peuvent être quantifiées face à chacun des critères. Puis, l'agrégation du modèle complet permet d'obtenir la valeur relative de chaque alternative face à l'objectif de la décision en tenant compte de l'ensemble des critères.

Il est important de souligner que les pondérations ainsi obtenues doivent être comprises et interprétées en tant que ratio d'importance relative et non pas comme des valeurs absolues. Le poids attribué à une alternative face à un critère donné lui permettra d'aller recueillir une portion du poids du critère en question lors de l'agrégation du modèle complet.

Dans les prochaines sous-sections nous verrons les principales notions de base de l'AHP. Notamment, l'utilisation d'une échelle verbale pour l'expression des jugements du décideur, la comparaison par paires des facteurs considérés (critères ou alternatives), le calcul de la pondération, l'évaluation de la cohérence des jugements exprimés. La mise en pratique de ces notions ainsi que celles de la hiérarchisation des critères et de la synthèse du modèle global seront couvertes avec un exemple.

(1.2.1) L'utilisation d'une échelle verbale

Saaty s'inspire des travaux de Thurstone, de Weber et de Fechner sur la mesure des perceptions sensorielles pour établir une échelle verbale d'expression des jugements ayant cinq degrés principaux et quatre degrés intermédiaires. Cette échelle (fig. 1.2) est présentée dans le tableau suivant avec l'explication attribuée à chacune des expressions de dominance.

Expression (Sigle)	Explication
Importance égale (E)	Les deux activités contribuent à l'objectif de façon équivalente
Importance modérée (M)	L'expérience et le jugement favorisent une activité plutôt que l'autre
Importance forte (S)	L'expérience et le jugement favorisent fortement une activité plutôt que l'autre
Importance très forte (V)	Une activité est fortement favorisée et sa dominance est démontrée dans la pratique
Importance extrême ou absolue (A)	L'évidence favorisant une activité plutôt que l'autre est du plus haut ordre d'affirmation possible
Valeur intermédiaire entre deux expressions adjacentes (E-M, M-S, S-V, V-A)	Lorsqu'un compromis entre deux expressions est requis

Figure 1.2 - Traduction libre de l'échelle verbale des jugements (Saaty, 1980 p. 54).

La prochaine section explique le fonctionnement de la comparaison par paire.

(1.2.2) La comparaison par paire avec l'AHP

Avant de poursuivre, introduisons la définition mathématique usuelle d'une matrice de comparaisons par paires de dimensions n x n, dans laquelle la case à l'intersection de la rangée i et de la colonne j est identifiée par la paire i, j.

Soit, A = $\{a(i,j)\}$ tel que $a(i,j)$ est un nombre positif réel exprimant un ratio de dominance du facteur i sur le facteur j, et ce $\forall\ i, j \in \{1, .., n\}$.

Dans l'AHP, lorsque l'on compare deux facteurs et qu'on assigne une valeur numérique $a(i,j)$ à cette comparaison, celle-ci représente une évaluation de la préférence relative entre le facteur i et le facteur j. Si le facteur i est préféré au facteur j, on aura $a(i,j) > 1$, sinon on aura $0 < a(i,j) < 1$ à moins que les deux facteurs soient jugés équivalents, auquel cas nous aurons $a(i,j) = 1$.

Une telle matrice A est considérée comme étant :

- *Réciproque*, si $a(i,j) = 1/a(j,i),\ \forall\ i, j \in \{1, n\}$;

- *Parfaitement cohérente*, si pour toutes les triades (i, j, k), telles que $i, j, k \epsilon \{1, \dots, n\}$, on a $a(i,k) * a(k,j) = a(i,j)$. Cette condition porte aussi le nom de *transitivité cardinale*.

On notera que les éléments $a(i,i)$, $i \epsilon \{1, \dots, n\}$ prennent la valeur 1 puisqu'ils correspondent au facteur *i* comparé avec lui-même.

Donc sur les n^2 cellules de la matrice, les *n* cellules de la diagonale sont égales à 1. Sur les (n^2 - *n*) ou *n**(*n*-1) restantes, la moitié peuvent être déterminées par la règle de réciprocité. Donc, un ensemble complet de jugements sur *n* facteurs donne lieu à $n * (n-1)/2$ comparaisons.

Les expressions de jugement sont assemblées dans ce qu'on appelle une matrice de jugements. À titre d'exemple le tableau suivant (fig. 1.3) tiré de Saaty (1980, p.60) montre la disposition des expressions obtenues lors d'une expérimentation sur l'évaluation de la distance entre quelques grandes villes internationales, …). Notons que les cases marquées avec un tiret ont un lien de réciprocité avec une case qui est renseignée.

	Le Caire	**Tokyo**	**Chicago**	**San Francisco**	**Londres**	**Montréal**
Le Caire	E	--	V-A	M	M	V
Tokyo	M	E	A	M	M	A
Chicago	--	--	E	--	--	E-M
San Francisco	--	--	S-V	E	--	S-V
Londres	--	--	S	M	E	S-V
Montréal	--	--	--	--	--	E

Figure 1.3 - Matrice des jugements de la distance relative entre quelques grandes villes internationales (Saaty, 1980. p.60)

L'échelle numérique correspondante à l'échelle verbale originale établie par Saaty (fig. 1.4) est la plus fréquemment utilisée.

Expression (Sigle)	**Valeur numérique pour $a(i,j)$ (lorsque *i* domine *j*)**
Importance égale (E)	1
Importance modérée (M)	3
Importance forte (S)	5

Importance très forte (V)	7
Importance extrême ou absolue (X ou A)	9
Valeur intermédiaire entre deux expressions adjacentes	2, 4, 6, 8
Réciproque	Si *j* domine *i*, prendra la valeur réciproque

Figure 1.4 - Traduction libre de l'échelle numérique originale (Saaty, 1980, p.54)

Pour établir cette correspondance, Saaty (1980, p.55-60) a procédé à des expérimentations au cours desquelles les participants avaient à évaluer à l'aide de l'échelle verbale, des grandeurs relatives liées à des phénomènes dont les mesures étaient connues (ex. la surface de formes géométriques, la distance entre quelques grandes villes internationales, …). Whitaker (2007) présente un survol des expérimentations originales et d'une dizaine d'autres exercices similaires de validation rapportés dans le cadre de divers articles de 1980 à 2002.

Saaty a ensuite mis en correspondance les jugements exprimés par les participants avec 27 échelles numériques différentes (fig. 1.5 a et b) et calculé l'erreur d'estimation (RMS) avec les distances réelles.

	(É)quiva-lent	entre	(M)odéré	entre	(F)orte-ment	entre	(T)rès fortement	entre	(A)bsolu-ment
Échelle	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
(1) 1-3	1	2	2	2	2	3	3	3	3
(2) 1-5	1	2	2	3	3	4	4	5	5
(3) 1-7	1	2	2	3	4	5	6	6	7
(4) 1-9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(5) 1-11	1	3	4	5	7	8	8	10	11
(6) 1-13	1	3	4	6	7	9	10	12	13
(7) 1-15	1	3	5	7	8	9	11	13	15
(8) 1-17	1	3	5	7	9	11	13	15	17
(9) 1-18	1	4	6	8	10	12	14	16	18
(10) 1-26	1	5	8	11	14	17	20	23	26
(11) 1-90	1	20	30	40	50	60	70	80	90
(12) 0,9α	1	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2	8,1
(13) 0,7α	1	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3
(13) 0,5α	1	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
(13) 0,3α	1	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7
(13) 0,1α	1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
(17) 1+0,1α	1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
(18) 2+0,1α	1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
(19) 3+0,1α	1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
(20) 4+0,1α	1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
(21) $\alpha^{½}$	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3
(22) α^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
(23) α^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729
(24) α^4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
(25) α^5	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
(26) $2^{(\alpha-1)/2}$	1	1,41	2	2,83	4	5,66	8	11,31	16
(27) $9^{(\alpha-1)/8}$	1	1,32	1,73	2,28	3	3,95	5,20	6,84	9

Figure 1.5(a) - Les échelles numériques explorées par Saaty (1980, p.56).

Échelle	Vecteur de priorité						RMS
1	0,234	0,296	0,083	0,150	0,175	0,062	0,043
2	0,247	0,320	0,058	0,150	0,180	0,045	0,027
3	0,253	0,334	0,045	0,151	0,183	0,035	0,019
4	0,262	0,397	0,033	0,116	0,164	0,027	0,018
5	0,265	0,437	0,027	0,098	0,154	0,019	0,036
6	0,267	0,443	0,024	0,099	0,152	0,016	0,038
7	0,265	0,483	0,020	0,080	0,138	0,014	0,057
8	0,266	0,482	0,017	0,082	0,140	0,012	0,056
9	0,264	0,506	0,016	0,073	0,131	0,010	0,067
10	0,259	0,550	0,011	0,058	0,116	0,007	0,087
11	0,210	0,707	0,002	0,019	0,061	0,001	0,159
12	0,259	0,380	0,037	0,124	0,169	0,030	0,013
13	0,251	0,340	0,047	0,143	0,178	0,042	0,018
14	0,236	0,286	0,062	0,168	0,187	0,062	0,044
15	0,202	0,210	0,091	0,201	0,190	0,107	0,086
16	0,113	0,064	0,156	0,227	0,154	0,266	0,183
17	0,203	0,227	0,117	0,165	0,178	0,110	0,082
18	0,233	0,321	0,085	0,131	0,172	0,065	0,038
19	0,247	0,371	0,066	0,110	0,163	0,045	0,024
20	0,253	0,414	0,053	0,094	0,153	0,033	0,032
21	0,229	0,282	0,083	0,153	0,181	0,073	0,049
22	0,254	0,591	0,004	0,048	0,101	0,003	0,106
23	0,198	0,736	0,000	0,015	0,050	0,000	0,172
24	0,138	0,837	0,000	0,004	0,022	0,000	0,219
25	0,089	0,901	0,000	0,001	0,009	0,000	0,250
26	0,257	0,385	0,029	0,138	0,166	0,025	0,014
27	0,248	0,342	0,044	0,151	0,175	0,039	0,019
Réel	0,278	0,361	0,032	0,132	0,177	0,019	

Figure 1.5(b) - Vecteurs de priorité obtenus avec différentes échelles numériques pour l'évaluation des distances relatives (fig. 1.3) entre les villes (Saaty, 1980, p.60).

À la suite de ces expérimentations, Saaty a retenu l'échelle que l'on appelle *linéaire* constituée des nombres de 1 à 9 (résultat #4 dans la fig. 1.5(b)) pour les raisons suivantes. D'une part, cette échelle se distingue favorablement dans de nombreuses expériences du même type. D'autre part, ce résultat semble indiquer une forte affinité de l'humain à mettre en correspondance des nuances d'expression avec les nombres de 1 à 9.

Pour effectuer la collecte des jugements, la pratique suggérée par Saaty (1980, p.35) est d'utiliser un formulaire comme celui montré dans l'exemple suivant (fig. 1.6).

Circle one number per row below using the scale:
1 = Equal 3 = Moderate 5 = Strong 7 = Very strong 9 = Extreme
2, 4, 6 and 8 are intermediate values

Experience	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Flexibility
Experience	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Security
Experience	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Resilience
Experience	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Environment
Flexibility	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Security
Flexibility	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Resilience
Flexibility	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Environment
Security	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Resilience
Security	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Environment
Resilience	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Environment

Figure 1.6 - Exemple de formulaire pour effectuer la collecte des jugements, tiré de Ishizaka *et al* (2012a, p.4775)

Pour passer de la collecte des jugements à la matrice numérique, on peut procéder comme suit :

Pour chaque jugement correspondant à la case de rangée i, colonne j, on forme la matrice numérique en assignant les valeurs

- $a(i,j)$ = la valeur numérique correspondant au jugement;
- $a(j,i) = 1/a(i,j)$, qui est la valeur réciproque.

Puis, on complète avec la valeur 1 sur la diagonale.

Toutefois, la plupart des praticiens utilisent un logiciel conçu par le traitement et le calcul de l'AHP. Cette étape est alors effectuée automatiquement à partir de la saisie effectuée dans le formulaire électronique de collecte. Plusieurs logiciels sont énumérés dans Brunelli (2014, p.66).

Voici (fig. 1.7 a et b) la transformation du formulaire de collecte ci-haut (fig. 1.6) sous la forme « matrice de jugements » et sous la forme « matrice numérique ».

	Experience	Flexibility	Security	Resilience	Environment
Experience		V	M-S	V	V-X
Flexibility	-		-	E	M
Security	-	M-S		M-S	S
Resilience	-	-	-		M
Environment	-	-	-	-	

(a) Matrice de jugements

	Experience	Flexibility	Security	Resilience	Environment
Experience	1	7	4	7	8
Flexibility	1/7	1	1/4	1	3
Security	1/4	4	1	4	5
Resilience	1/7	1	1/4	1	3
Environment	1/8	1/3	1/5	1/3	1

(b) Matrice numérique

Figure 1.7 - Transformation en matrices du formulaire de collecte de la fig. 1.6

Maintenant que nous avons expliqué comment préparer la matrice numérique, nous passons au calcul de la pondération.

(1.2.3) Le calcul de la pondération

Dans la terminologie de l'AHP, le résultat du calcul de la pondération est appelé le *vecteur de priorité*. Dans la méthode originale de Saaty, le vecteur de priorité est le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre de la matrice numérique mis à l'échelle en le divisant par la somme de ses éléments, de sorte que la somme des éléments du vecteur de priorité soit égale à 1. Dans ce qui suit on désigne la plus grande valeur propre d'une matrice par sa notation mathématique usuelle, λ_{max}. Cette normalisation de la somme des éléments à la valeur 1 est essentielle à certaines des manipulations algébriques effectuées par la méthode de calcul des pondérations. Elle est aussi la base de ce qui est appelé le *mode distributif*. Il y plusieurs modes possibles dans l'utilisation de l'AHP. Le mode distributif est le mode original proposé par Saaty. On peut dire du mode distributif qu'il implémente le concept du vote. C'est-à-dire que le total du « pointage » disponible pour un ensemble de facteurs comparés est réparti (ou distribué) entre les facteurs de façon similaire à une élection. Ce mode étant utilisé le plus souvent, notre étude se concentre sur celui-ci. Le sujet des différents modes est mentionné à la section 1.4 qui traite de l'état de la recherche sur l'AHP.

Considérons d'abord le cas général avec le vecteur

$$\boldsymbol{w} = [\, w_1 \;\; w_2 \;\; \dots \;\; w_n \,]^T$$

Et la matrice $\boldsymbol{W}$ formée avec les ratios entre les éléments du vecteur $\boldsymbol{w}$

$$\boldsymbol{W} = \left\{\frac{w_i}{w_j}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

Si on pose le vecteur $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W} * \boldsymbol{w}^{\mathbf{T}}$, on obtient pour le 1er élément de $\boldsymbol{x}$:

$$x_1 = \frac{w_1}{w_1} * w_1 + \frac{w_1}{w_2} * w_2 + \cdots + \frac{w_1}{w_n} * w_n = n * w_1$$

On a alors $\boldsymbol{x} = n * \boldsymbol{w}$.

Et donc, dans le cas où les jugements sont parfaitement cohérents :

- Toutes les colonnes de $W = \{w(\cdot, j)\}$ sont équivalentes entre elles et avec le vecteur propre $\boldsymbol{w}$ à une transformation scalaire près (multiplication par une constante);

- La valeur propre maximale $\boldsymbol{\lambda_{max}}$ de la matrice $\boldsymbol{W}$ est égale à n.

Considérons maintenant l'exemple de la matrice numérique parfaitement cohérente formée avec les ratios 1, 2, 4 et 8 entre les alternatives A1 à A4.

	A1	*A2*	*A3*	*A4*
A1	1	2	4	8
A2	1/2	1	2	4
A3	1/4	1/2	1	2
A4	1/8	1/4	1/2	1

On constate que les colonnes sont effectivement toutes égales entre elles à un multiplicateur près. Dans ce contexte, on sait que l'on peut prendre n'importe quelle colonne pour calculer le vecteur de priorité. Si on prend, $\boldsymbol{x} = [8, 4, 2, 1]^T$ et qu'on le divise par $S(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i = 15$, on obtient $\boldsymbol{v}$**,** le vecteur de priorité des alternatives A1 à A4. Soit,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}/S(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{8}{15} \quad \frac{4}{15} \quad \frac{2}{15} \quad \frac{1}{15}\right] \text{ ou } [0{,}533 \;\; 0{,}267 \;\; 0{,}133 \;\; 0{,}067]$$

En fait, on peut vérifier qu'en divisant chaque colonne de la matrice par la somme de ses éléments on obtient un résultat identique. Par exemple, le vecteur $\boldsymbol{v}$ peut tout aussi bien être obtenu en divisant la première colonne par $\frac{15}{8}$.

Ceci complète l'exemple où la cohérence parfaite est maintenue.

Considérons maintenant de former une nouvelle matrice en modifiant quelques ratios. Voici la matrice de comparaison des alternatives B1 à B4.

	B1	*B2*	*B3*	*B4*
B1	1	3	4	8
B2	1/3	1	3	5
B3	1/4	1/3	1	3
B4	1/8	1/5	1/3	1

En normalisant les colonnes par leur somme, on obtient.

	B1	*B2*	*B3*	*B4*
B1	0,585	0,662	0,480	0,471
B2	0,195	0,221	0,360	0,294
B3	0,146	0,074	0,120	0,176
B4	0,073	0,044	0,040	0,059

Un examen rapide permet de constater que les colonnes ne sont plus équivalentes entre elles. On observe aussi que la condition de cohérence n'est pas maintenue pour la plupart des cellules. Par exemple, pour la triade 1-2-4 on a : $a(1,2) = 3; a(2,4) = 5;$ et, $a(1,4) = 8$. La condition de cohérence ne peut être atteinte qu'en modifiant une des trois valeurs comme suit. Soit, $a(1,2) = \frac{8}{5}, a(2,4) = \frac{8}{3} ou\ a(1,4) = 15$.

Étant donné que l'échelle linéaire ne permet aucune de ces valeurs, il apparaît clairement que même dans les cas où les jugements exprimés sont le plus précis possible, il y aura un certain niveau d'incohérence dans la matrice numérique. Le calcul du vecteur propre permet d'obtenir une pondération qui est un compromis entre les colonnes de la matrice. Le calcul du vecteur propre relève du domaine du calcul matriciel et n'est pas expliqué ici. Tout bon manuel d'algèbre peut fournir cette information. La prochaine section explique comment on détermine le niveau d'incohérence acceptable.

Avant de passer à l'évaluation de l'incohérence, nous complétons cette section avec une interprétation géométrique de la relation entre le vecteur propre et les colonnes de la matrice par le biais d'une illustration avec un cas de dimension 3. Le fait de se limiter à trois dimensions permet une représentation graphique intuitive d'un vecteur de priorité par sa projection sur une surface à deux dimensions. La surface de projection est le triangle qui réunit les points correspondants à la valeur 1 sur chacun des axes d'un système à trois dimensions. En mathématiques, on nomme ce triangle le *2-simplex régulier*. Sa définition est l'ensemble des

points (x_1, x_2, x_3) tel que $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1, avec\ x_i \geq 0$. Le schéma suivant (fig. 1.8) est une représentation graphique d'un 2-simplex régulier.

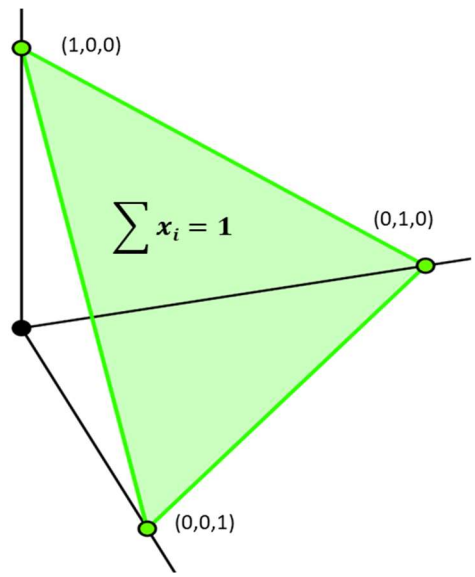


Figure 1.8 - Représentation graphique du 2-simplex régulier.

Prenons le cas où la matrice est

1	3	5
1/3	1	3
1/5	1/3	1

En normalisant ses colonnes avec leur somme respective, elle devient

0,652	0,692	0,556
0,217	0,231	0,333
0,130	0,077	0,111

Le vecteur de priorité obtenu par la méthode du vecteur propre est v = [0,637 0,258 0,105].

En projetant ses 4 points sur une vue orthogonale du 2-simplex (aussi appelée *graphe ternaire*), on peut observer que le vecteur propre est une estimation qui combine l'information des trois colonnes en déterminant un point à l'intérieur de la zone convexe formée par elles. Le graphique 1.9 montre cette projection.

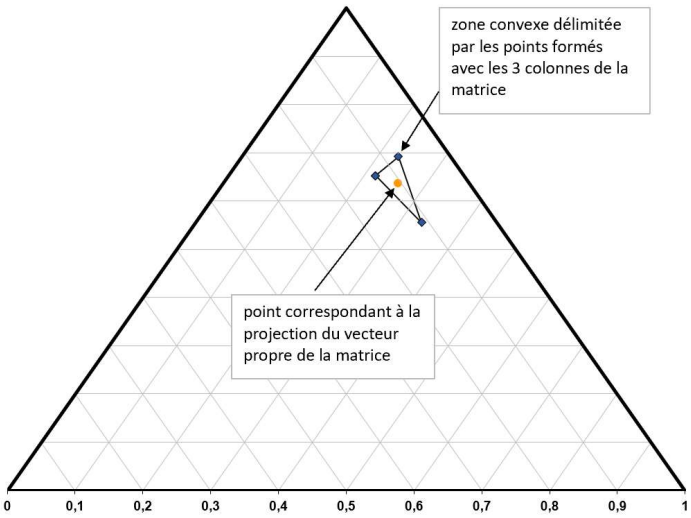


Figure 1.9 - Projection des colonnes de la matrice et du vecteur de priorité sur le 2-simplex

(1.2.4) L'évaluation de la cohérence des jugements exprimés

Nous poursuivons avec l'exemple des alternatives B1 à B4 de la section précédente. Le tableau suivant (fig. 1.10) présente le résultat du calcul des valeurs propres et des vecteurs propres pour cette matrice.

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
	4,099	*-0,377*	*0,357*	*-0,079*
B1	0,881	0,565	0,885	0,934
B2	0,422	0,741	-0,454	-0,282
B3	0,198	-0,327	-0,040	0,187
B4	0,084	-0,161	0,090	-0,114

Figure 1.10 - Valeurs propres et vecteurs propres pour les alternatives B1 à B4.

On note ici que λ_1 a la plus grande valeur. Pour établir le vecteur de priorité, on utilisera donc la colonne correspondante à λ_1.

On pose $\boldsymbol{x}$ = [0,881 0,422 0,198 0,084] et obtient $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}/\boldsymbol{S(x)}$ = [0,556 0,259 0,122 0,052] .

Nous allons voir maintenant pourquoi on peut qualifier cette matrice de légèrement incohérente et que le calcul du vecteur de priorité est acceptable.

Considérons d'abord que la matrice A = { $a(i,j)$} = { $\frac{w_i}{w_j} * e(i,j)$ } où $e(i,j)$, représente une erreur multiplicative (appelée perturbation) liée d'une part à l'incohérence de l'expression des jugements offerte par le décideur et d'autre part à l'écart du ratio obtenu par rapport aux valeurs disponibles dans l'échelle numérique utilisée.

Saaty (1980, p.50-51) explique qu'on peut observer que les petites perturbations dans les valeurs $a(i,j)$ sont reflétées par de petites variations dans la valeur de $\boldsymbol{\lambda_{max}}$. Le calcul du vecteur propre pour obtenir la pondération demeure une solution valide en autant que l'incohérence demeure légère. Il choisit donc d'utiliser l'écart entre $\boldsymbol{\lambda_{max}}$ et $\boldsymbol{n}$ pour créer les mesures de cohérence originales de l'AHP. Ces mesures s'appellent l'indice de cohérence (CI), le ratio de cohérence (CR) et l'indice aléatoire (RI). Le calcul s'effectue comme suit,

$$CR = \frac{CI}{RI(n)}$$

Avec,

$$CI = \frac{\lambda max - n}{n - 1}$$

Et *RI(n)* provient du tableau suivant (fig. 1.11)

n	3	4	5	6	7	8	9	10
RI(n)	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Figure 1.11 - Indices *RI* pour calculer le ratio de cohérence (Saaty, 1977)

La règle proposée par Saaty énonce que si la valeur de CR est moindre que 10%, la matrice peut être considérée comme étant suffisamment cohérente pour appliquer le calcul du vecteur propre pour obtenir la pondération. Herman et Koczkodaj (1996, p.26) qualifient de telles matrices de « *Not-So-Inconsistent* (NSI) ».

Pour comprendre la logique qui soutient cette proposition, il faut expliquer ce que représente la valeur de CI et celle de RI(n).

La justification mathématique de la valeur de CI s'appuie sur un ensemble de théorèmes démontrés dans (Saaty 1980 ch.7). Ce complément théorique dépasse largement la portée du présent exposé. Le lecteur est référé à la source pour de plus amples détails. Pour parvenir à l'explication visée ici, les deux énoncés suivants sont suffisants. Le premier est tiré de la théorie générale du calcul matriciel. Le deuxième s'appuie sur la base théorique mentionnée ci-haut.

Énoncé 1 : La somme des valeurs propres d'une matrice est égale à sa trace, laquelle est définie comme la somme des valeurs sur sa diagonale. Donc, pour une matrice de comparaisons AHP de dimensions n x n, la somme des valeurs propres est $n * 1 = n$.

Énoncé 2 : Si une matrice n x n est positive, parfaitement cohérente et réciproque, la valeur propre maximale prend la valeur n et les autres valeurs propres sont égales à 0.

Pour illustrer l'utilité de ces énoncés dans la validation de la cohérence d'une matrice AHP, considérons le calcul des valeurs propres pour les alternatives B1 à B4 présenté à la section 1.2.3 (fig. 1.10).

On constate que $\lambda_{max} = \lambda_1$ et que la somme des autres valeurs propres ($\lambda_2, \lambda_3, et\ \lambda_4$) est égale à l'inverse de la différence entre λ_{max} et n. En fait, nous avons

$$\lambda_{max} + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = n$$

Et donc,

$$\lambda_{max} - n = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$$

En le formulant ainsi, on comprend facilement que la valeur de CI est la moyenne des autres valeurs propres multipliée par –1. Soit,

$$\mathrm{CI} = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} = \frac{-(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)}{n-1}$$

Afin d'établir une borne pour la valeur de *CR*, Saaty a généré un grand nombre de matrices de dimensions 3 à 10 de façon aléatoire en tirant d'une distribution uniforme des valeurs de l'échelle numérique et en calculant *RI* pour chaque matrice comme étant la moyenne des *CI* obtenus que l'on retrouve ci-avant (fig. 1.11).

On peut maintenant compléter le calcul de CR pour la matrice des facteurs B1 à B4.

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} = \frac{4{,}099-4}{3} = 0{,}033$$

Et $CR = CI / RI(4) = 0{,}033 / 0{,}9 = 0{,}03 < 0{,}1$

On peut alors statuer que la matrice est suffisamment cohérente et que le vecteur de priorité qu'on obtient $\boldsymbol{v}$ = [0,556 0,259 0,122 0,052] est acceptable.

Notons que le calcul de *RI* original est limité à la dimension 10. D'autres chercheurs ont répliqué cette façon de procéder pour des matrices de dimensions plus grandes aux fins de soutenir la pratique de l'AHP pour les cas où plus de 10 facteurs font l'objet d'une comparaison par paires. Une des expériences les plus récentes (Alonso & Lamata, 2006) a permis d'établir une formule donnant directement la limite de $\underline{\lambda_{max}}$ pour des dimensions allant bien au-delà de 10 et pour un seuil de cohérence fourni en paramètre. Le but de disposer d'une telle formule est de simplifier la pratique de l'AHP en éliminant le calcul de *CI* et *CR*. Cette formule est

$$\text{Limite} = n + \alpha * (1{,}7699n - 4{,}3513)$$

Où α est le seuil et *n* est le nombre de facteurs comparés

La formule précédente et le tableau suivant (fig. 1.12) sont tirés de (Alonso & Lamata, 2006 p.456)

n	**3**	**5**	**10**	**15**	**20**	**50**	**100**	**500**
α								
0.01	3.0096	5.0450	10.1335	15.2220	20.3104	50.8414	101.7264	508.8060
0.05	3.0478	5.2248	10.6673	16.1098	21.5523	54.2071	108.6319	544.0299
0.08	3.0765	5.3597	11.0677	16.7756	22.4836	56.7314	113.8110	570.4478
0.10	3.0957	5.4497	11.3346	17.2196	23.1045	58.4142	117.2637	588.0597
0.20	3.1913	5.8993	12.6692	19.4391	26.2090	66.8284	134.5274	676.1194
0.50	3.4784	7.2483	16.6730	26.0978	35.5225	92.0710	186.3185	940.2985

Figure 1.12 - Limite pour λ_{max} selon le niveau de cohérence α et la dimension *n* (Alonso & Lamata, 2006, p.456)

La présentation des deux dernières notions, la hiérarchisation des critères et la synthèse du modèle global, est plus simple à l'aide d'un exemple.

(1.3) Un exemple d'utilisation

Antoine joue de la basse et avec un groupe d'amis musiciens, ils viennent de décrocher une entente pour une série de concerts. Le répertoire visé comporte des pièces pour lesquelles son instrument actuel ne convient pas tout à fait. Antoine décide donc que c'est le bon moment pour lui de procéder à l'acquisition d'une nouvelle basse.

Antoine a trois critères pour choisir son nouvel instrument. Le premier critère concerne la construction de l'instrument. Les modèles de basse disponibles diffèrent de façon significative au niveau de leurs caractéristiques physiques. Les spécifications telles que l'espacement entre les cordes, l'épaisseur et la largeur du manche, ainsi que l'accès plus ou moins facile aux plus hautes notes peuvent faire la différence entre un instrument qu'on adore ou dont on se lasse rapidement. Son second critère est la sonorité. Sa nouvelle basse devra offrir suffisamment de flexibilité dans ses contrôles pour lui permettre de produire les timbres qui seront requis par le nouveau répertoire à interpréter. Le dernier est l'esthétique. Il lui faut une basse qui aura fière allure.

Antoine va utiliser la méthode AHP pour mieux comprendre sa décision d'achat.

La première version du modèle de décision d'achat d'Antoine est:

Objectif : Choix d'une basse, selon
  Crit 1 - Construction (Const)
  Crit 2 - Sonorité (Sono)
  Crit 3 - Esthétique (Esth)

Il doit d'abord établir le poids relatif de chacun des trois critères. Pour procéder, il effectue la comparaison par paires et exprime son jugement de préférence selon échelle verbale originale de Saaty.

Ces jugements sont :
    Const vs Sono --> M --> 3
    Const vs Esth --> F --> 5
    Sono vs Esth --> Eq-M --> 2

Les jugements sont disposés dans la matrice comme suit

	Const	Sono	Esth
Const	-	3	5
Sono	-	-	2
Esth	-	-	1

Sur la diagonale, il inscrit la valeur 1, et par l'axiome de réciprocité, la matrice numérique devient ceci:

	Const	Sono	Esth
Const	1	3	5
Sono	1/3	1	2
Esth	1/5	1/2	1

Le vecteur propre principal de cette matrice qui est $[0{,}928\ 0{,}329\ 0{,}175]^T$, une fois normalisé à la somme 1, nous donne la pondération $[0{,}648\ 0{,}230\ 0{,}122]^T$. CR = 0,003 < 0.1 pour cette matrice.

La hiérarchie est pondérée comme suit

Objectif : Nouvelle basse
- Crit 1 - Construction (0,648)
- Crit 2 - Sonorité (0,230)
- Crit 3 - Esthétique (0,122)

Saaty suggère plusieurs principes pour l'établissement de la hiérarchie et en particulier pour ce qui concerne les regroupements par niveau. Les deux énoncés suivants sont inspirés de ces principes et sont illustrés par l'exemple du modèle pour la décision d'Antoine.

Énoncé 1 : Les critères d'un même niveau ont avantage à être d'un même ordre d'importance (Saaty, 1980, p.13) de sorte qu'on puisse tirer une information pertinente des comparaisons effectuées;

Énoncé 2 : Que les éléments regroupés aux fins de comparaisons dans une branche de la hiérarchie contribuent de façon similaire en lien avec leur point commun au niveau supérieur immédiat (Saaty, 1980, p.11).

Pour l'énoncé 1, on constate qu'Antoine a effectivement choisi des critères pour le premier niveau qui sont similaire en termes d'ordre de grandeur.

Ce qui suit mène à une illustration de l'énoncé 2.

Pour Antoine, l'esthétique se compose vraiment de deux dimensions qui sont la forme et la couleur. Il ajoute donc deux sous-critères à sa hiérarchie. Une seule comparaison est requise pour distribuer le poids de l'esthétique entre la forme et la couleur. Antoine juge que la forme est fortement plus importante que la couleur.

	Forme	Couleur
Forme	1	5
Couleur	1/5	1

Ceci donne un vecteur [5/6 1/6] ou [0,833 0,167] avec CR = 0

La hiérarchie complète est donc:

Objectif : Nouvelle basse
- Crit 1 - Construction (0,648)
- Crit 2 - Sonorité (0,230)
- Crit 3 - Esthétique (0,122)
  - Crit 3.1 - Forme (0,102)
  - Crit 3.2 - Couleur (0,020)

Ici on se doit d'expliquer que les poids des critères à un niveau hiérarchique inférieur sont calculés en fonction du poids du critère parent. Le poids du critère *3.1-Forme* est le produit du poids de l'esthétique (0,122) et du poids de la forme dans sa comparaison avec la couleur (0,833) qui donne 0,102 = 0,122 * 0,833. Idem pour le poids de *3.2-Couleur*, soit 0,020 = 0,122 * 0,167.

Si on retourne maintenant à la réflexion sur l'énoncé 2, on peut imaginer qu'Antoine aurait pu choisir de remplacer le critère d'esthétique directement par ceux de la couleur et de la forme. Il se serait alors retrouvé avec quatre critères à comparer. Toutefois, aurait-il été en mesure de comparer la couleur avec la construction ? ou, la forme avec la sonorité ? Probablement pas. Cet exemple simple permet d'illustrer la pertinence des principes qui guident la structuration de la hiérarchie.

Maintenant qu'Antoine a la pondération des critères, il porte son attention sur les alternatives. Trois modèles attirent son attention: La 44-02 au fini « érable piqué » de Lakland, la Precision (PB) de Fender au fini « sunburst » et la BTB au fini de « frêne naturel » de Ibanez.

Il compare donc les instruments entre eux face à chacun des critères. Puis, il traduit les jugements en valeurs numériques et obtient ceci

	----- Const -----			----- Sono ------			----- Forme ------			---- Couleur ----		
	44-02	PB	BTB	44-02	PB	BTB	44-02	PB	BTB	44-02	PB	BTB
44-02	1	5	2	1	2	1/2	1	1/5	3	1	3	5
PB	1/5	1	1/3	1/2	1	1/5	5	1	9	1/3	1	3
BTB	1/2	3	1	2	5	1	1/3	1/9	1	1/5	1/3	1
Pondération :	(,582 ,109 ,309)			(,276 ,128 ,595)			(,178 ,751 ,070)			(,637 ,258 ,105)		
CR :	0,003 < 0,1			0,005 < 0,1			0,025 < 0,1			0,033 < 0,1		

Antoine a maintenant toutes les informations pour procéder à l'évaluation finale. L'agrégation s'effectue par une combinaison linéaire de la priorité des alternatives avec la pondération des critères. On illustre ici les deux dernières étapes d'Antoine pour obtenir le résultat global.

La première consiste à former une matrice des priorités dont les colonnes sont chacune des vecteurs de priorité obtenus pour chaque critère. La deuxième consiste à effectuer le produit entre la matrice des priorités et le vecteur de pondération des critères.

$$\begin{array}{c} 44\text{-}02 \\ PB \\ BTB \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}582 & 0{,}276 & 0{,}178 & 0{,}637 \\ 0{,}109 & 0{,}128 & 0{,}751 & 0{,}258 \\ 0{,}309 & 0{,}595 & 0{,}070 & 0{,}105 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}648 \\ 0{,}230 \\ 0{,}102 \\ 0{,}020 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \textit{Const} \\ \textit{Sono} \\ \textit{Forme} \\ \textit{Couleur} \end{array}$$

Notons que la représentation dans une table de contingence est souvent utilisée, car elle est plus conviviale pour une personne moins familière avec le calcul matriciel. En combinant les pondérations des alternatives obtenues pour chaque critère avec le poids des critères, on obtient le résultat global suivant:

	Const	*Sono*	*Forme*	*Couleur*		
Modèle	*0,648*	*0,23*	*0,102*	*0,02*		Global
44-02	0,582	0,276	0,178	0,637		0,471
PB	0,109	0,128	0,751	0,258	=	0,182
BTB	0,309	0,595	0,070	0,105		0,346

Le modèle 44-02 serait donc le meilleur choix pour Antoine en fonction de ses préférences.

En tout, Antoine a effectué seize comparaisons: trois pour le premier niveau de critères, un pour le sous-niveau de l'esthétique et douze pour comparer les instruments.

(1.4) L'état de la recherche sur l'AHP

L'état de la recherche sur l'AHP est présenté de façon étendue dans Ishizaka & Labib (2011) et dans Brunelli (2014). Ces deux ouvrages présentent, chacun à leur façon, un bilan de la recherche sur le perfectionnement de l'AHP. Les recherches effectuées ont donné lieu à un vaste répertoire d'idées et de pistes d'améliorations. Certains articles portent sur les fondements théoriques et font rarement usage de données de simulation.

En particulier, le sujet de l'inversion possible du rang des alternatives lors de l'introduction d'une alternative indistincte (doublon) a donné lieu à des controverses et fait l'objet de plusieurs débats. De ces débats a émergé l'utilisation du mode appelé « idéal » par lequel les vecteurs de priorité sont obtenus non pas en divisant le vecteur propre par la somme de ses éléments, mais plutôt par la valeur de l'élément ayant la plus grande valeur. Conceptuellement, ce mode offre la possibilité que la meilleure alternative puisse recueillir la pleine valeur du critère. Ceci contraste avec le mode distributif qui fait plutôt la répartition du poids du critère entre les alternatives. Le lecteur intéressé trouvera une discussion élaborée sur l'usage des différents modes dans Schoner *et al* (1993).

Les points suivants résument les principaux sujets ayant capté l'attention de nombreux chercheurs et qui font (ou auraient avantage à faire) un usage extensif de données de simulation.

- Le choix de l'échelle linéaire proposée par Saaty est retenu par la majorité des praticiens. Toutefois, plusieurs autres échelles ont été explorées (Ishizaka & Labib, 2011, section 2.2; Brunelli, 2014, p.19);

- Le choix du vecteur propre pour effectuer le calcul du vecteur de priorité est aussi retenu par une majorité de praticiens. Toutefois, la méthode de la moyenne géométrique est aussi populaire auprès des praticiens qui n'utilisent pas un logiciel facilitant le calcul matriciel. D'autres approches ont aussi été proposées (Ishizaka & Labib, 2011, section 2.4 ; Brunelli, 2014, section 2.1);

- L'évaluation de la cohérence est généralement effectuée avec la méthode proposée par Saaty. Toutefois, elle aussi fait l'objet de propositions alternatives (Ishizaka & Labib, 2011, section 2.5; Brunelli, 2014, section 2.1);

- Et, la recherche de procédés visant à réduire le nombre de comparaisons requises donne lieu à plusieurs propositions qui sont toutefois jugées incomplètes ou insatisfaisantes (Ishizaka & Labib, 2011, section 2.6; Brunelli, 2014, section 3.1). Notons que des propositions additionnelles ont fait surface depuis 2015. Ces dernières sont référées dans l'inventaire présenté plus loin dans la revue de littérature.

(1.5) Les intérêts de recherche du mémoire

L'intérêt scientifique envers l'utilisation et le perfectionnement de l'AHP est florissant depuis ses débuts. L'article de Emrouznejad & Marra (2017) présente un survol exhaustif des publications sur l'AHP de 1979 à 2017 en s'appuyant sur un inventaire de 8 441 publications. Le graphique suivant (fig. 1.13) tiré de cet article montre le nombre de publications par année de cet inventaire.

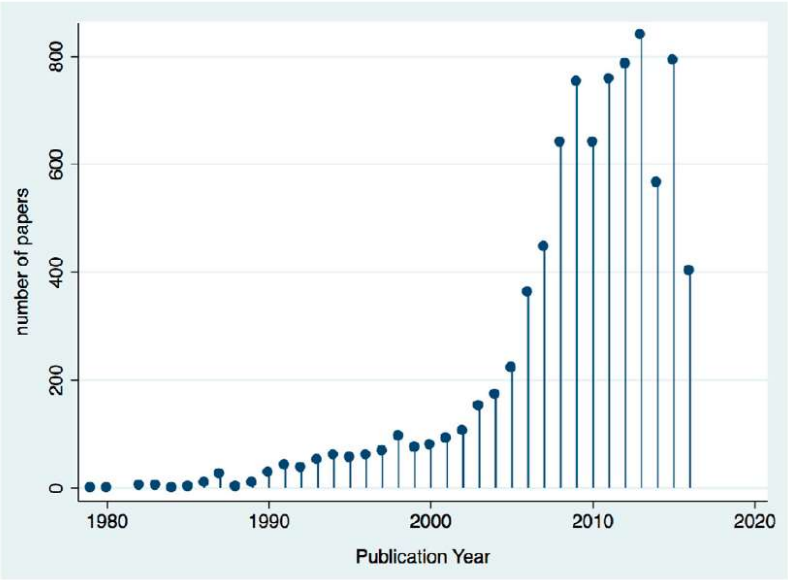


Figure 1.13 - Distribution annuelle des publications inventoriées
(Emrouznejad & Marra, 2017, p.6656)

À première vue, il apparaît paradoxal qu'étant donné un si grand nombre de publications, que des questions fondamentales comme l'accès à des données de simulation soit toujours une denrée rare.

Dans son livret d'introduction à la recherche sur l'AHP, Brunelli (2014, p.69) émet une mise en garde au sujet de la surabondance de publications sur l'AHP qui peut se résumer comme suit :

« Contrairement à d'autres sphères des mathématiques appliquées et de la modélisation mathématique, de nouveaux procédés, de nouveaux indices et des extensions de l'AHP sont introduits de façon heuristique et sans résultats concrets venant appuyer leur validité. Cette pratique génère une surabondance de matériel. Pour le futur, il est hautement désirable que de nouvelles études numériques ou axiomatiques clarifient ou raffinent ce qui a déjà été présenté. Et, lorsqu'un nouvel élément est introduit, que l'étude présente des évidences claires de son originalité et de sa faisabilité ».

Ce dernier énoncé explique en grande partie la motivation à la base de ce mémoire.

Les intérêts de recherche du mémoire sont basés sur les constats suivants:

- L'évaluation des différents procédés de réduction du nombre de comparaisons requises qui sont proposés est effectuée dans des cadres disparates. L'évaluation porte sur seulement quelques cas isolés ou est effectuée avec des données de simulation sans justification de couverture du domaine de valeur.

- De plus, dans certains cas, la proposition demeure incomplète et aucun moyen de vérification n'est considéré. Brunelli (2014, p.40) mentionne spécifiquement qu'on peut affirmer avec assurance qu'il y a un besoin et encore beaucoup de place pour poursuivre l'investigation de ce volet de recherche.

- Les évaluations utilisent un méli-mélo de mesures de proximité ayant, en général, très peu de lieu commun. Il est donc très difficile de comparer les résultats obtenus d'un procédé à l'autre;

- Une autre grande lacune est l'absence d'un seuil de précision objectif qui permettrait d'avoir une idée de la performance de ces procédés et d'établir s'ils sont près ou loin du but.

C'est sur ces bases que ce mémoire propose les contributions énumérées à la section suivante.

(1.6) Les contributions du mémoire

Ce mémoire propose une nouvelle méthode pour générer des données de simulation qui pourra être utilisée pour les trois volets suivants :

- Effectuer l'évaluation des procédés de réduction proposés;
- Explorer les échelles numériques;
- Et, comparer les solutions alternatives au calcul des vecteurs de priorité.

Il propose aussi deux éléments essentiels et complémentaires aux données de simulation:

- Le choix d'une mesure de proximité ayant certaines propriétés pertinentes et pouvant servir d'autant à l'analyse des procédés de réduction qu'aux deux autres volets ci-haut mentionnés;
- Une limite objective pour le seuil de précision des vecteurs de priorité permettant de juger de la pertinence des résultats des trois volets visés.

Les contributions sont d'abord complétées par une comparaison de deux procédés de réduction pour une première fois sur cette base commune qui met en œuvre les trois éléments nommés ci-haut (données de simulation, mesure de proximité et seuil de précision). Et pour finir, le mémoire apporte aussi un nouvel éclairage sur le débat académique concernant la proximité des vecteurs de priorité obtenus avec deux formules alternatives proposées pour effectuer ce calcul.

(2) Revue de littérature

Herman & Koczkodaj (1996, p.26) énoncent les deux questions fondamentales qui animent ce mémoire :

- Comment peut-on générer des matrices suffisamment cohérentes ?
- Comment évaluer l'exactitude des solutions proposées ?

Ce chapitre présente les éléments les plus pertinents sur la recherche à ce jour concernant ces deux questions qui sont en ligne avec les intérêts de recherche mentionnés précédemment à la section 1.5.

Son but est de faire le point sur les principales méthodes de génération de données de simulation proposées à ce jour et d'inventorier les mesures de proximité utilisées.

(2.1) Génération de données de simulation

Cinq catégories de méthodes de génération utilisées dans huit articles sont présentées de façon sommaire. Elles visent toutes à créer des matrices suffisamment cohérentes que (Herman & Koczkodaj, 1996, p.26) surnomment « Not-So-Inconsistent » ou NSI. Elles partagent toutes un même principe de base qui consiste à débuter avec un vecteur de priorité, soit prédéterminé, soit généré de façon aléatoire, puis de déployer les valeurs dans la matrice en se basant sur les ratios obtenus avec le vecteur initial en introduisant généralement une perturbation de façon aléatoire.

La grille suivante (fig. 2.1) regroupe les huit articles selon la variante utilisée et montre que l'on a cinq catégories de méthodes.

	Vecteur initial aléatoire	**Vecteur initial fixe**
Sans perturbation	Catégorie 1 Triantaphyllou & Mann, 1990 Dong *et al*, 2008	s/o
Perturbation aléatoire sur tous les éléments de la	Catégorie 2	Catégorie 4

matrice	Williams & Crawford, 1980 Golany & Kress, 1993 Herman & Koczkodaj, 1996 Carmone *et al*, 1997	Choo & Wedley, 2004 (cas #1)
Perturbation aléatoire sur un sous-ensemble des éléments de la matrice	<u>Catégorie 3</u> Ishizaka & Lusti, 2006	<u>Catégorie 5</u> Choo & Wedley, 2004 (cas #2)

Figure 2.1 - Catégories de méthodes de simulation

Pour les catégories 1 et 2, la méthode comporte les étapes suivantes :

i. Génération d'un vecteur de priorité « présumé » en tirant n valeurs d'une distribution aléatoire uniforme et en les normalisant pour obtenir la somme de 1;

ii. Soit $\boldsymbol{w}$, le vecteur ainsi généré. La matrice est formée en utilisant les ratios relatifs entre les éléments de $\boldsymbol{w}$, de la même façon que la matrice $\boldsymbol{W}$ à la section 1.2.3;

iii. Les éléments de la matrice sont ensuite mis en correspondance avec une des valeurs de l'échelle numérique pour créer ce que Triantaphyllou & Mann (1990, p.297) appellent la matrice discrète la plus proche (« Closest Discrete Pairwise matrix » ou CDP)

Pour la catégorie 2, la méthode comporte une étape additionnelle visant à impartir une perturbation au vecteur entre les étapes ii et iii:

- Des perturbations sont imparties aux valeurs de la matrice qui devient = $\{ \frac{w_i}{w_j} * e(i,j) \}$, où $e(i,j)$ représente une erreur multiplicative provenant de différentes distributions aléatoires avec certains paramètres qui ont été calibrés pour faire en sorte que le ratio de cohérence maximal demeure en deçà ou dépasse très peu 10%.

Le tableau suivant (fig. 2.2) présente les méthodes de génération des perturbations pour la catégorie 2.

Référence	Méthode de génération des perturbations
Williams & Crawford, 1980	Le terme multiplicateur a la forme (1 + *e*) et *e* est généré avec deux procédés aléatoires de sorte de maintenir l'écart-type aux valeurs σ= 0,1; 0,4; 0,8; 1,0; et, 2,0. Les deux procédés sont : • Avec une loi log normale (centrée à 0) • Avec le ratio de deux variables de loi uniforme
Golany & Kress, 1993	Au lieu d'un terme multiplicateur, la méthode puise une valeur d'une loi uniforme dans un intervalle autour de a(i,j) (on a donc dans ce cas l'équivalent mathématique d'une perturbation additive)
Herman & Koczkodaj, 1996	Le terme multiplicateur a la forme (1 ± *e*). L'addition ou la soustraction est aléatoire. Le terme *e* est le produit de *x* * D où *x* est tiré d'un distribution uniforme et D est une borne (appelée « déviation ») qui prend les valeurs 0,1; 0,2; 0,3; 04; et, 0.5.
Carmone *et al*, 1997	Le terme multiplicateur provient de quatre distributions • Uniforme • Exponentielle • Log normale • Weibull (shape = 3,3) Les paramètres des distributions sont tels que l'écart-type du terme multiplicateur a les valeurs sigma = 0,2; 0,3; et, 0,4:

Figure 2.2 - Méthodes de génération de la catégorie 2

Pour la catégorie 3, on a les particularités suivantes :

- La matrice est générée en disposant sous la première diagonale supérieure (*n - 1)* valeurs tirées au hasard dans l'échelle complète de 1/9 à 9. La matrice est complétée en appliquant les règles de réciprocité et transitivité cardinale. Si une des entrées obtenues n'appartient pas à l'échelle de base, la matrice est rejetée;

- La perturbation survient après que la matrice soit formée en appliquant un décalage additif de ± 1 à 4 positions dans l'échelle numérique à un nombre d'entrées choisies de façon aléatoire;

- Les matrices résultantes ayant un CR > 10% sont rejetées

Pour les catégories 4 et 5, on a les particularités suivantes :

- Le vecteur initial est fixé à $[1 \quad 2{,}5 \quad 4 \quad 5{,}5 \quad 7 \quad 8{,}5\,]^T$;
- Deux simulations sont effectuées :
    - La première utilise un terme multiplicateur $(1 + e)$ avec e tiré d'une loi normale centrée à 0 avec écart-type = 0,1 dont on ne retient que les valeurs situées dans l'intervalle ±85%;
    - La deuxième applique le multiplicateur 1,9 sur une seule entrée de la matrice au hasard dans le but de provoquer une incohérence atypique.

(2.2) Mesures de proximité

La deuxième question fondamentale sur la pertinence des simulations exprimée dans Herman & Koczkodaj (1996, p.26) est : **Comment évaluer l'exactitude des solutions proposées ?**

La première observation est qu'aucune convention n'a été établie. Dans les huit études revues ici, les mesures de proximité utilisées sont tout aussi disparate que les méthodes de génération. Ces mesures peuvent être regroupées en quatre familles, comme suit : La différence dans les rangs (rang), les variantes de la norme 1 (N1), les variantes de la norme 2 (N2) et la corrélation. Le tableau suivant (fig. 2.3) énumère les mesures et les références à la source d'utilisation. La mesure est identifiée par son nom habituel ou par le sigle mentionné dans la référence, selon le cas.

Mesure (famille)	**Utilisée dans …**
Spearman ou SRC (rang)	Carmone *et al*, 1997; Williams & Crawford, 1980
Kendall ou Tau (rang)	Carmone *et al*, 1997
Theil (corrélation)	Carmone *et al*, 1997
Rank crossing (rang) Nombre ou pourcentage	Carmone *et al*, 1997; Golany & Kress, 1993; Triantaphyllou & Mann, 1990; Ishizaka & Lusti, 2006
Erreur carrée moyenne ou MSE (norme 2)	Carmone *et al*, 1997
Racine carrée moyenne des	Dong *et al*, 2008

erreurs ou RMS (norme 2)	
Déviation totale ou distance euclidienne moyenne sur les entrées de la matrice (norme 2)	Herman & Koczkodaj, 1996; Golany & Kress, 1993
Moyenne de déviation absolue ou MAD (norme 1)	Choo & Wedley, 2004
Tchebychef (norme 1)	Herman & Koczkodaj, 1996

Figure 2.3 - Mesures utilisées dans les articles mis en référence.

Aucune justification n'est fournie sur la raison de choisir telle ou telle mesure. De plus, les comparaisons effectuées, le cas échéant, entre les résultats obtenus avec une mesure versus une autre, n'apportent rien pour améliorer la compréhension de la pertinence des mesures comme telles.

(2.3) Inventaire d'études sur les sujets ciblés par la simulation

Nous avons mentionné précédemment (section 1.6), les trois principaux sujets de recherche sur l'AHP qui sont ciblés pour l'usage de simulation (réduction des comparaisons, calcul des priorités et échelles numériques).

Pour compléter la revue, les tableaux suivants (fig. 2.4 et 2.5) présentent une sélection des principaux articles sur ces sujets. Le premier (fig. 2.4) répertorie les motivations et la dimension des matrices simulées pour les études mentionnées à la section précédente (section 2.2), c'est-à-dire celles ayant fait usage de simulation. Le deuxième (fig. 2.5) répertorie les méthodes de vérification utilisées dans un échantillon de quelques études sur les procédés de réduction.

Source	**Motivation**	**Dimensions des matrices**
Williams & Crawford, 1980	Compare deux méthodes de calcul du vecteur de priorité	5, 7 et 10
Triantaphyllou & Mann, 1990	Explore l'écart entre le vecteur présumé et celui obtenu avec la matrice CDP	3 à 30
Golany & Kress, 1993	Compare trois méthodes de calcul du vecteur de priorité	5, 6 et 7
Herman & Koczkodaj, 1996	Compare trois méthodes de calcul du vecteur de priorité	4 à 7
Carmone *et al*, 1997	Explore l'impact de cinq règles de choix initial pour la réduction du nombre de comparaisons	10, 15 et 20

Choo & Wedley, 2004	Compare 18 méthodes de calcul du vecteur de priorité	6
Ishizaka & Lusti, 2006	Compare quatre méthodes de calcul du vecteur de priorité	4 à 7
Dong *et al*, 2008	Explore la calibration du paramètre de l'échelle géométrique	3 à 9

Figure 2.4 - Études mentionnées à la section 2.2 et leur motivation d'utiliser la simulation.

Nous soulignons ici que l'entrée la plus récente dans le premier tableau (fig. 2.4) remonte à 2008. Ceci peut être interprété de deux façons. Soit que les méthodes proposées par le passé sont considérées comme satisfaisantes, soit qu'il s'agit d'une diminution de l'intérêt pour le sujet de la simulation dans le contexte où les études plus récentes utilisent d'autres méthodes de vérification.

Le commentaire de Brunelli (2014) que nous avons souligné au début de la section 1.5 apporte une réponse partielle à la dernière question. Ce commentaire soulève le point que de nombreuses publications sur le perfectionnement de l'AHP sont marquées par un manque d'évidences claires sur la faisabilité des approches proposées et que même certaines se limitent à présenter une heuristique sans plus.

La deuxième liste (fig. 2.5) vise à illustrer ce commentaire de Brunelli en soulignant, à titre indicatif, les lacunes générales observées au niveau des méthodes d'évaluation utilisées pour explorer certaines des propositions de procédés visant à solutionner la problématique de réduction.

Source	**Approche de réduction en bref**	**Méthode d'évaluation**
Shen *et al*, 1992	1-L'idée est de séparer les options à évaluer en k sous-matrices en maintenant une option commune; 2-Évaluer les sous-matrices 3-Multiplier les vecteurs obtenus par un facteur scalaire de sorte que le poids de l'alternative commune soit 1 4-Assembler le vecteur de l'ensemble des alternatives Ex. avec 5 options et 2 sous matrices 1-sous-mat A avec options 1, 2 et 5 sous-mat B avec options 3, 4 et 5 2- poids de 1, 2 et 5 = [0,5 0,4 0,1] poids de 3, 4 et 5 = [0,5 0,3 0,2] 3- poids de 1, 2 et 5 (x10) = [5,0 4,0 1,0]	Données : un seul exemple Mesures : aucune Limite : aucune

	poids de 3, 4 et 5 (x5) = [2,5 1,5 1,0] 4- poids de 1, 2, 3, 4 et 5 = [5,0 4,0 2,5 1,5 1,0] Ou normalisé [5/14 2/7 5/28 3/28 1/14] Il termine en posant les questions suivantes : (1) Peut-on orienter le choix de l'option commune de sorte d'obtenir le meilleur résultat? (2) Il y a de nombreuses façons de former des sous-matrices. Peut-on en identifier certaines de sorte d'obtenir les meilleurs résultats?	
Ishizaka, 2012b	Idée similaire à celle de Shen *et al*, mais les sous-matrices regroupent les options par ordre de grandeur. On forme des sous-matrices, mais au lieu d'avoir la même option commune partout, les options sont partagées entre les sous-groupes, de sorte que la plus petite dans un est la plus grande dans l'autre.	Données : quelques exemples Mesures : aucune Limite : aucune
Fedrizzi & Giove, 2013	Le début du processus de comparaisons n'est pas spécifié. Le procédé proposé démarre après qu'un certain nombre de comparaisons (non précisé) aient été effectuées. On procède en boucle : 1- Estimation de la cohérence prévue 2- Prochaine comparaison = celle qui satisfait le mieux une combinaison de deux critères : a. Répartir les comparaisons le plus uniformément possible sur les options b. Offre le meilleur potentiel pour réduire l'incohérence 3- Prochaine itération La boucle se termine quand une clause d'arrêt est satisfaite. Le choix de la clause d'arrêt demeure une piste de recherche future.	Données : un exemple partiel Mesures : aucune Limite : aucune
Rezaei, 2015-2016	Débute par le pré-ordonnancement des options. Utilise seulement les comparaisons avec la meilleure option (B) et la moins bonne (W). N.B. requiert seulement 2*n*-3 comparaisons. Le vecteur de priorité est obtenu en minimisant l'écart maximal de $\left\lvert a_{B,j} - \frac{w_B}{w_j} \right\rvert et \left\lvert a_{j,W} - \frac{w_j}{w_W} \right\rvert, j = 1..n.$	Données : collecte avec 46 participants Mesures : - différence de rangs - déviation totale - EUD Limite : aucune
Pamučar *et al*, 2018	Débute par le pré-ordonnancement des options. Utilise seulement les comparaisons avec la meilleure option. N.B. requiert seulement *n*-1 comparaisons.	Données : Quelques exemples Mesures : aucune Limite : aucune

	Le vecteur de priorité est obtenu en minimisant l'écart maximal $\left\lvert a_{i,j} - \frac{w_i}{w_j} \right\rvert$ pour chaque option avec ses deux suivantes, soit $$\left\lvert a_{i,i+1} - \frac{w_i}{w_{i+1}} \right\rvert, i = 1..(n-1)\ et$$ $$\left\lvert a_{i,i+1} * a_{i+1,i+2} - \frac{w_i}{w_{i+2}} \right\rvert, i = 1..(n-2)$$	
Abastante *et al*, 2019	Débute par une évaluation directe de la pondération des options. Les « options » évaluées sont des figures géométriques dont on veut déterminer l'aire. Puis, un sous-ensemble des options est choisi pour effectuer la comparaison par paires. Ceci permet d'obtenir le vecteur de priorité du sous-ensemble. Ensuite, le vecteur de priorité de l'ensemble est obtenu en intégrant vecteur de priorité du sous-ensemble avec les évaluations directes par interpolation linéaire. Finalement, un test est mené avec un modèle ayant 10 options dont un sous-ensemble de 5 sont traités en matrice partielle. Ce test est répliqué avec 46 participants. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus avec les mêmes 10 options mais en matrice complète (sans évaluation directe) avec 52 participants. La mesure utilisée est le MSE. Toutefois, les vecteurs comparés ne sont pas normalisés à la somme égale à 1.	Données : 98 participants Mesures : Utilise le MSE entre les vecteurs non-normalisés Limite : aucune

Figure 2.5 - Études sur les procédés de réduction et leur approche d'évaluation.

Notons qu'on trouve tout autant des articles traitant des deux autres problèmes (calcul du vecteur de priorité et du choix de l'échelle numérique) dans des publications récentes. À titre d'exemples, soulignons Kou & Lin (2014) ainsi que Meesariganda & Ishizaka (2017).

Kou & Lin introduisent la méthode de la maximisation du cosinus de l'angle entre les colonnes de la matrice et le vecteur de priorité recherché.

Meesariganda & Ishizaka pour leur part, explorent la possibilité que l'échelle numérique la plus appropriée n'est possiblement pas la même pour tous. Ils proposent donc une procédure de calibrage qui pourrait améliorer la précision du calcul basé sur les jugements exprimés.

La faisabilité de leurs approches respectives se limite à une illustration avec quelques exemples (Kou & Lin) ou à une expérience menée auprès de 15 participants (Meesariganda et Ishizaka).

Cette section confirme que les problèmes à résoudre qui ont été mentionnés à la section 1.4.1 sont toujours d'actualité (réduction, calcul du vecteur de priorité, échelles numériques). Ce sont les méthodes de simulation et les mesures d'évaluation qui n'ont pas évolué, car elles n'ont pas été remises en question comme le soulève Brunelli. **C'est sur cet argument que s'appuie la pertinence du présent mémoire qui vise à jeter de nouvelles bases pour procurer de tels outils d'exploration et d'évaluation.**

(2.4) Bilan de la revue

Le bilan de cette revue peut se résumer avec les observations suivantes :

- L'usage de la simulation n'est pas systématique;
- Il n'y a pas de convention sur les dimensions des matrices à vérifier;
- Il n'y a pas de convention sur les mesures de proximité à utiliser;
- Le seuil de précision requis pour juger de la performance des procédés n'est pas défini;
- Il n'y a pas de caractéristiques attribuées aux vecteurs de priorité utilisées pour valider si la couverture des cas possibles est complète ou non;
- Toutefois, un fait positif peut être signalé : l'approche de création de matrices NSI basée sur un vecteur initial « présumé » imparti de perturbations contrôlées permet de générer des matrices adéquates du point de vue de la cohérence.

Ce bilan alimente le bien-fondé de mieux définir les problématiques de simulation afin d'identifier des pistes de solutions. C'est ce que le prochain chapitre propose.

(3) Problématiques et pistes de solutions

Dans ce chapitre nous allons déterminer les exigences envers les données de simulation générées, identifier une façon pratique de mesurer la proximité entre deux vecteurs de priorité et jeter les bases d'une définition objective de la limite de précision. Nous décrivons tour-à-tour les problématiques à résoudre et les pistes de solutions envisagées pour définir de nouvelles approches pour résoudre la problématique.

La problématique générale se résume aux questions que l'on pose ici:

- #1 Les données de simulation sont-elles représentatives des domaines de valeur ?
- #2 Si les données ne sont pas représentatives, comment doit-on procéder pour satisfaire cette condition ?
- #3 Quelle mesure de proximité faut-il utiliser pour évaluer l'écart entre les vecteurs ?
- #4 Dans le cas des trois sujets de recherche principalement ciblés pour l'usage de simulation (réduction du nombre de comparaisons, calcul des priorités, proposition d'échelles numériques), comment peut-on juger de la précision de l'estimation obtenue ?

(3.1) Exigences de couverture des domaines de valeur

Pour évaluer la justesse de la couverture des données de simulation, il nous faut choisir une façon de caractériser les données qui va permettre de guider le processus de génération pour assurer que les données représentent bien la zone délimitée par les bornes des domaines de valeurs qui sont pertinents en fonction du but visé.

On parle ici de caractéristiques des vecteurs de priorité et des matrices de comparaisons qui servent de points d'ancrage avec la réalité d'utilisation. La première est le niveau d'incohérence des matrices générées qui doit demeurer raisonnable (CR<10%). La deuxième est l'intervalle de dimensions des matrices et des vecteurs. La troisième réfère au concept de puissance de discrimination qui est expliqué à la prochaine section (section 3.2).

Pour chacune des caractéristiques, les questions suivantes guident notre réflexion:

- Les données générées font-elles partie du domaine de valeur requis ?
- Est-ce que le domaine de valeur est représenté de façon suffisamment soutenue par l'ensemble des données générées ?

Pour contrôler le niveau d'incohérence, nous avons vu à la section 2.1 que des façons de faire sont déjà bien établies. La façon répandue d'obtenir une matrice NSI est de la construire avec un vecteur « présumé » à laquelle on ajoute un certain niveau de bruit de façon aléatoire pour simuler une incohérence réaliste. Le bruit aléatoire représente l'erreur dans la perception des jugements exprimés par le décideur.

Pour les dimensions requises, la question suivante guide la réflexion : Est-il réaliste d'utiliser le mode distributif de la comparaison par paires pour un ensemble de 20 alternatives? On se retrouve alors avec 190 comparaisons pour chaque critère. Avec seulement six critères, on excède déjà 1 000 comparaisons à effectuer pour pondérer le modèle global. D'autres approches sont surement plus appropriées pour ce type de situations. Par exemple, le mode absolu (Saaty, 1990, p.14) qui consiste à établir une grille de pointage avec les critères pour évaluer les alternatives sur une base individuelle (et non via la comparaison par paires) a été élaboré spécifiquement pour les situations où le nombre d'alternatives à évaluer est très grand.

Par ailleurs, si on considère qu'une des cibles de simulation est l'évaluation des procédés de réduction du nombre de comparaisons requises, les dimensions en dessous de 6 présentent peu de potentiel de réduction. Il apparaît dès lors raisonnable de cibler les matrices de dimensions 6 à 16. Afin de présenter les résultats de façon concise les résultats d'expérimentation sont rapportés pour les dimensions 6, 11 et 16.

La troisième exige une explication plus élaborée qui est décrite à la prochaine section.

(3.2) Puissance de discrimination

Notons d'abord le commentaire mentionné dans Ishizaka *et al* (2012a, p.4769) qui peut se résumer comme suit.

> *« Le poids d'un critère n'a pas le monopole de discrimination sur une ensemble d'alternatives. En effet, son poids doit être multiplié par la performance des*

alternatives face au critère. Une différence importante dans les performances respectives des alternatives peut être hautement discriminante même si le poids du critère est peu élevé. »

On fait référence ici à la *puissance de discrimination* de l'ensemble des alternatives en regard d'un critère spécifique. Il y a deux autres cas de vecteurs de pondération à considérer. Le premier est le vecteur de priorité obtenu pour des critères dans la hiérarchie et le deuxième est celui du vecteur de pondération global qui résulte de l'agrégation de tous les vecteurs de priorité des critères obtenus dans l'ensemble de la hiérarchie.

Pour le vecteur de priorité de critères, la notion de puissance de discrimination ne s'applique pas. On peut considérer qu'un vecteur de priorité pour 3 alternatives qui prend la valeur [1/3 1/3 1/3] pour un critère donné n'apporte aucune information. Cet argument ne s'applique pas au vecteur de priorité d'un groupe de critères. Pour illustrer, on peut prendre le critère de l'esthétique de l'exemple que nous avons vu à la section 1.3. Si la *couleur* et la *forme* obtiennent chacun 50% du poids, cela demeure une information légitime et utile. Il n'y a aucune raison pour laquelle les poids des critères doivent différer entre eux, autre que leur importance relative. Par ailleurs, la même logique s'applique au vecteur de pondération global.

Ce qui suit s'applique donc d'abord à la génération des vecteurs de priorité relatifs à des ensembles d'alternatives, mais demeure pertinent pour tous les cas de vecteurs obtenus par le biais d'une matrice de comparaisons. Pour ce qui est des vecteurs de pondération globale, à première vue, il apparaît raisonnable de procéder simplement en tirant des valeurs d'une distribution uniforme, à défaut d'avoir une justification valide pour faire autrement.

(3.2.1) Configurations représentatives

Ce qui suit est orienté pour caractériser le domaine de valeur des vecteurs de priorité en fonction de leur puissance de discrimination.

Considérons les trois configurations suivantes que nous nommerons : type I, type II et type III.

- Le type I est le cas où la performance de la meilleure alternative dépasse de loin celles des autres. C'est le cas du « meneur incontesté ».

- Le type II est le cas où un sous-groupe restreint d'alternatives est constitué de celles qui performent mieux que la plupart des autres. C'est le cas du « peloton de tête ».

- Le type III est le cas où aucune alternative ne se distingue fortement des autres. C'est le cas de la « mêlée générale ».

L'énoncé de ces trois types ne vise pas la création de catégories disjointes ayant chacune leur règle d'inclusion. Il vise uniquement à illustrer la gradation dans la puissance de discrimination du vecteur de priorité; Le type I sera plus discriminant que le type II et ce dernier sera plus discriminant que le type III.

Prenons les trois vecteurs de priorité de dimension 6 suivants, qui sont proposés en exemple représentatif de chacun des trois types.

	Type I	Type II	Type III
Option 1	0,417	0,277	0,209
Option 2	0,266	0,234	0,190
Option 3	0,141	0,213	0,184
Option 4	0,073	0,106	0,154
Option 5	0,057	0,096	0,143
Option 6	0,047	0,074	0,121

On peut analyser les trois types de façon préliminaire avec nos vecteurs représentatifs dans un même graphique comme celui-ci (fig. 3.1).

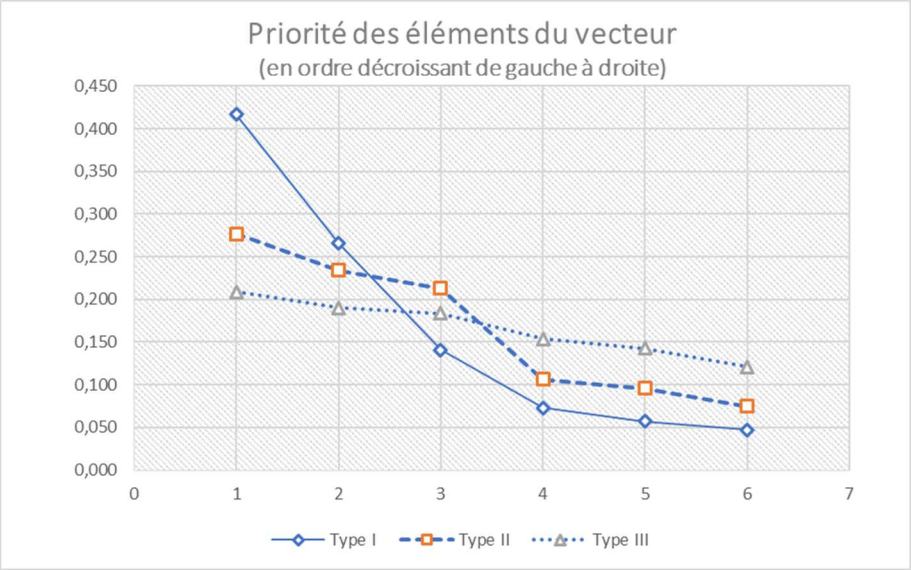


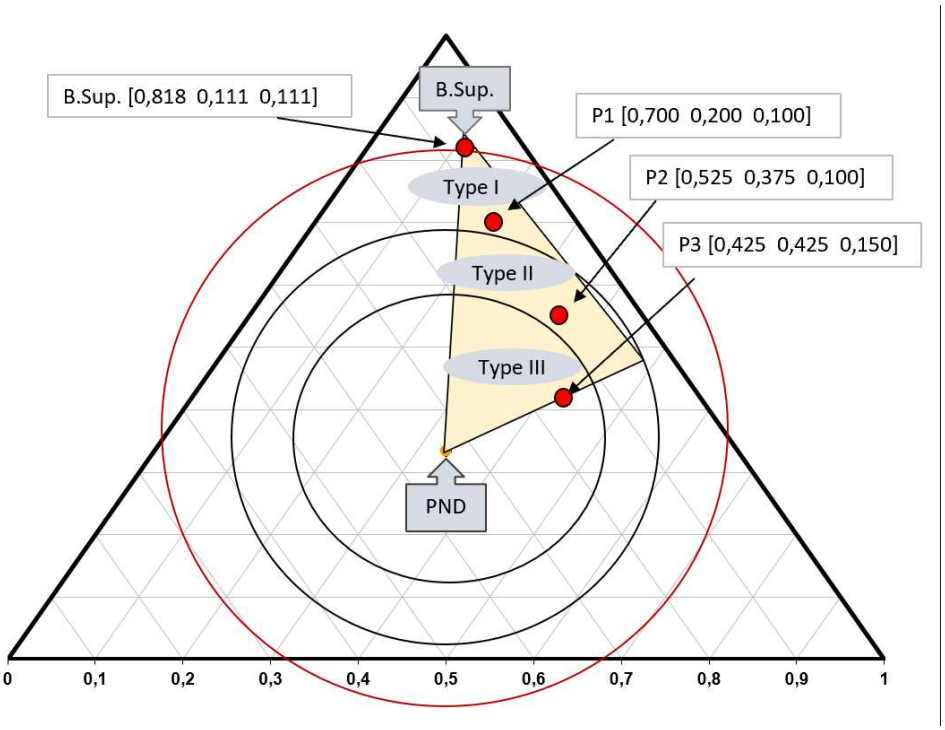
Figure 3.1 - Illustration des vecteurs représentatifs des trois types liés à la caractérisation de la puissance de discrimination.

En examinant ce graphique on peut formuler les hypothèses suivantes :

- La hauteur relative du meilleur poids en rapport avec celles des autres est représentative du potentiel de discrimination de la configuration;
- Le degré de compression/expansion entre les poids est aussi représentatif du potentiel de discrimination de la configuration.

(3.2.2) Interprétation géométrique

Prenons par exemple, les trois points P1 = [0,700 0,200 0,100], P2 = [0,525 0,375 0,100] et P3 = [0,425 0,425 0,150]. Ces points sont proposés comme étant respectivement représentatifs des types I, II et III. Notons que P3 peut être confondu avec la configuration d'un type II. Ce qui le distingue ici est que ses éléments sont plus compressés que ceux de P2. En effet, le ratio max/min des éléments de P2 est 5,25 alors que celui de P3 est 2,83. Ces points sont illustrés sur une vue orthogonale du simplex dans le graphique suivant (fig. 3.4).



N.B. La sous-zone en jaune (ou gris pâle) indique la portée approximative des vecteurs de priorité possibles avec l'AHP (dimension 3) et la condition que les éléments du vecteur sont en ordre décroissant.

Figure 3.4 - Les points PND, P1, P2 et P3 projetés sur une vue orthogonale du simplex régulier de dimension 3.

Notons qu'en étant restreint aux valeurs de l'échelle numérique, les vecteurs de priorité ne peuvent pas se retrouver n'importe où sur la surface du simplex. Par exemple, un point comme (1, 0, 0) ne peut pas faire partie du domaine de valeur. L'emplacement approximatif de la zone des vecteurs possibles est illustré par un triangle en jaune (ou gris pâle) dans le graphique de la figure 3.4. Quelle que soit la mesure qui sera retenue pour caractériser le vecteur de priorité, cette dernière aura nécessairement une borne inférieure et une borne supérieure situées à l'intérieur du simplex.

On trouve au centre du simplex le point [1/3 1/3 1/3]. Selon le commentaire mentionné au début de la présente section, le vecteur de priorité correspondant à ce point n'a aucune puissance de discrimination, car il attribue la même valeur à chacune des options. Nous allons l'appeler le point de non-différence (PND). Les points P1, P2 et P3 qui sont représentatifs des trois types de

configuration sont chacun logé dans une des trois zones circulaires graduellement plus distantes du PND.

Une configuration qui peut servir de borne supérieure dans ce contexte est le point qui correspond au cas où la meilleure option est absolument plus importante que toutes les autres, ces dernières étant par ailleurs équivalentes entre elles. Avec trois options, on obtient la matrice suivante, qui nous donne le point B.Sup. = [0,818 0,111 0,111].

1	9	9
1/9	1	1
1/9	1	1

Pour la borne inférieure (B.Inf.), le PND est tout indiqué. Toutefois, il faut noter que le voisinage du PND forme une zone dans laquelle on retrouve rarement des vecteurs de priorité. Cette particularité est engendrée par l'utilisation d'une échelle numérique discrète. Cet effet qu'on appelle *discrétisation* est expliqué en détail à la section 3.5.2.

Pour illustrer la limite de cette zone qu'on peut appeler le *1er pas de discrétisation*, on peut choisir la configuration où toutes les options sont équivalentes entre elles à l'exception de la meilleure qui est entre modérément préférable et équivalente aux autres. Avec trois options, ce point est [0,400 0,400 0,200]. La matrice correspondante est.

1	1	2
1	1	2
1/2	1/2	1

Bien que relativement précise, cette façon de calculer les limites (1er pas et B.Sup.) n'est en fait qu'une approximation rudimentaire. Nous verrons un peu plus loin, à la section 3.3.2, comment on peut déterminer ces limites de façon plus rigoureuse.

(3.2.3) Mesures de la puissance de discrimination

En s'appuyant sur nos interprétations géométriques précédentes, nous pouvons considérer que la distance entre les points qui représentent le vecteur et le PND comme une première piste de solution pour caractériser le vecteur de priorité. Cette distance peut être quantifiée en utilisant la *distance angulaire* entre le vecteur et le PND. Cette idée est inspirée de Kou & Lin (2014) qui

utilise la formule de similarité du cosinus pour minimiser l'écart entre les colonnes de la matrice de comparaison (fixe) et un vecteur (variable) afin de déterminer le vecteur de priorité.

Soit ***v*** et ***v'*** deux vecteurs de priorité, l'*angle* entre eux est obtenu par la formule bien connue suivante,

$$\begin{array}{r}\text{Distance angulaire en degrés } (\angle^\circ) \\ \text{entre deux vecteurs } v \text{ et } v'\end{array} = \frac{180}{\pi} \cdot cos^{-1}\left(\frac{v \circ v'}{\sqrt{v \circ v} \cdot \sqrt{v' \circ v'}}\right)$$

On peut aussi interpréter la situation en prenant la perspective utilisée dans le domaine de l'apprentissage automatique et plus particulièrement dans celui des arbres de classification qui a donné naissance à des mesures qui s'apparentent à la notion de puissance de discrimination.

Dans ce domaine les mesures en question portent le nom d'indice d'impureté et servent à décider quelles variables vont permettre d'effectuer un classement le plus efficace possible en vue de développer un modèle de prédiction ou d'effectuer des regroupements. Les deux mesures les plus utilisées dans ce domaine sont l'indice de Gini et l'indice du gain d'information. Raileanu & Stoffel (2004) nous renseignent sur le fait que ces deux indices performent généralement de la même façon (98% des cas). Nous allons donc retenir l'indice du gain d'information comme autre piste de solution. Notons que la formule du gain d'information est basée sur la mesure d'entropie qui, pour un vecteur ***v*** de dimension *n*, a la forme suivante :

$$entropy(v) = -\sum_{i=1}^{n} v_i * \ln(v_i)$$

La formule du gain d'information pour le vecteur ***v*** de dimension *n* est,

$$InfoG(v, PND) = entropy(PND) - entropy(v),$$

qui après les manipulations algébriques suivantes,

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} * \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \left(-\sum_{i=1}^{n} v_i * \ln(v_i)\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} * (-\ln(n)) + \sum_{i=1}^{n} v_i * \ln(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} * \ln(n) + \sum_{i=1}^{n} v_i * \ln(v_i)$$

prend la forme,

$$InfoG(v, PND) = \ln(n) + \sum_{i=1}^{n} v_i * \ln(v_i)$$

Nous avons identifié des pistes de solutions pour la caractérisation de la puissance de discrimination des vecteurs de priorité. Ces pistes comprennent une façon d'établir les bornes du domaine de valeur et deux mesures possibles pour quantifier cette caractéristique. Ces pistes vont être mise à contribution dans la prochaine section.

(3.3) Génération des vecteurs présumés

En général, les expérimentations sont effectuées par échantillonnage de 250 ou de 500 vecteurs générés de façon aléatoire. La majorité des générations sont effectuées avec la version 2016 du tableur Microsoft Excel ®. Les valeurs des nombres aléatoires utilisés ont été conservées (via les commandes copier-coller des valeurs) afin de faciliter la reproduction. Le complément Excel *RealStats2010.xlam* disponible gratuitement sur le site de Charles Zaiontz (http://www.real-statistics.com/free-download/) a été utilisé pour effectuer le calcul des vecteurs propres.

(3.3.1) Une première simulation

Nous posons d'abord l'hypothèse que l'angle entre le vecteur généré et le PND est une mesure adéquate pour caractériser la puissance de discrimination du vecteur dans son domaine de valeur. Puis nous menons une simulation qui nous permet de faire un premier pas pour obtenir une réponse à la question #1. La simulation consiste à générer des vecteurs de dimension 6 en utilisant la distribution uniforme (celle qui a été privilégiée à ce jour, tel que vu à la section 2.1) et d'effectuer le calcul des deux mesures de discrimination identifiées à la section précédente.

Le graphique suivant (fig. 3.5) présente le résultat de cette simulation. Il permet d'une part d'observer la concordance des deux mesures et d'autre part, il montre quelle partie de l'intervalle entre les bornes est couvert. De plus, il permet de discerner les résultats qui sont en ligne avec le concept de comparer des objets d'un même ordre de grandeur (i.e. ratio Max/Min ≤ 9).

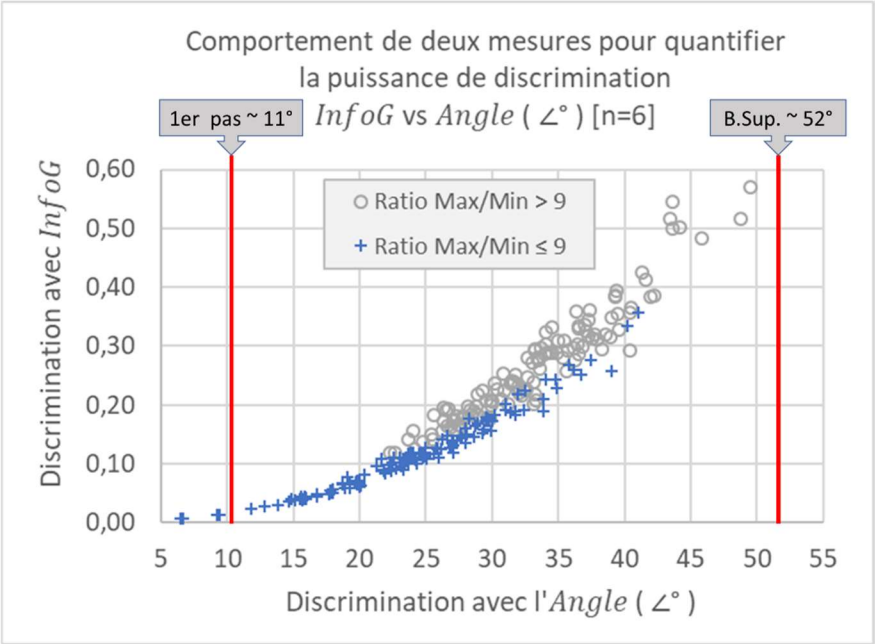


Figure 3.5 - Mesures de discrimination avec distribution uniforme (dimension 6)

Cette simulation nous apprend trois choses :

- Les mesures de l'angle et du gain d'information (InfoG) sont concordantes.

- L'utilisation de la loi uniforme entraîne la production d'une grande proportion de vecteurs ayant un ratio Max/Min > 9. Il s'agit d'un artefact de cette méthode de génération. Notons que Carmone *et al* (1997, p.542) avait observé ce comportement et opté de rejeter les vecteurs pour lesquels le ratio maximal excédait 75. Pourquoi 75 ? Cette limite n'est pas expliquée et sans information additionnelle, elle ne peut être rattachée à aucun concept.

- Le domaine de valeur couvert par les vecteurs générés à partir de la distribution uniforme ne concordent pas avec l'intervalle formé avec les bornes. Les vecteurs de type I ne sont

pas bien représentés, car ils n'atteignent pas la zone près de la borne supérieure et les vecteurs de type III vont en dessous de la limite du 1er pas de discrétisation.

(3.3.2) Lacunes de couverture

Deux autres simulations pour les dimensions 11 et 16 donnent les deux graphiques suivants (fig. 3.6).

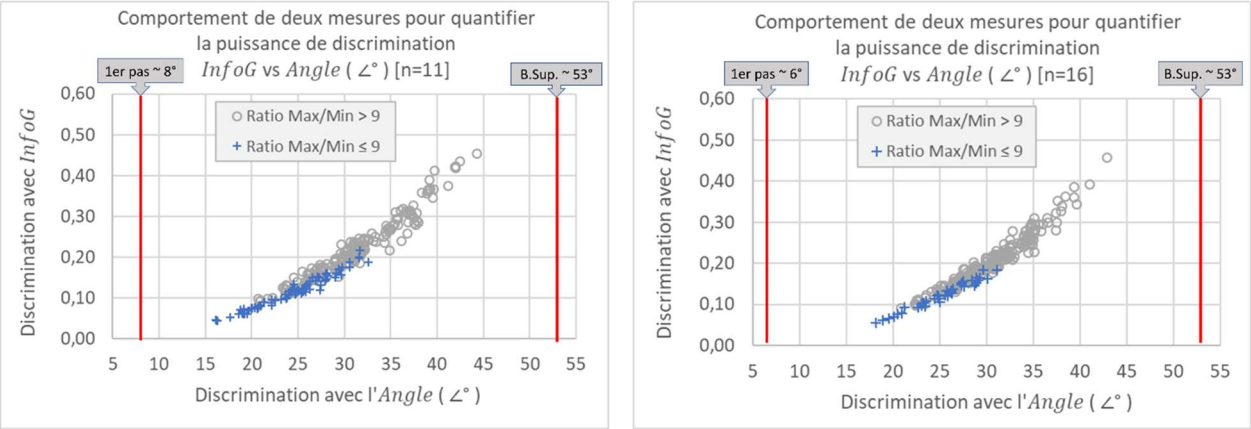


Figure 3.6 - Mesures de discrimination avec distribution uniforme (dimensions 11 et 16)

Cette simulation additionnelle nous confirme la concordance de la mesure de l'angle avec celle du gain d'information. Il est donc raisonnable d'utiliser la mesure de l'angle. D'abord pour sa concordance avec une mesure éprouvée, mais surtout pour sa simplicité de compréhension étant donné l'interprétation géométrique que l'on n'en fait. Par ailleurs, nous pouvons observer que certaines zones du domaine de valeur sont largement délaissées par cette méthode de génération. Les vecteurs présents sont majoritairement du type II. Ceux du type I et du type III n'émergent pas dans les dimensions 11 ou 16, et sont très peu présents dans la dimension 6.

Les graphiques suivants (fig. 3.7 (a) et (b)) illustrent la problématique de couverture que nous venons de décrire. Les triangles marquent les bornes supérieures et les losanges marquent le 1er pas de discrétisation. Ces deux repères sont obtenus avec le calcul mentionné à la section 3.2.2, dont les détails sont présentés à l'annexe A. Les lignes de tendance représentent respectivement une approximation des limites supérieures et inférieures qu'on peut atteindre en utilisant la distribution uniforme sans altération. Ces dernières sont basées sur des valeurs maximales et minimales obtenues par les échantillonnages effectués aux dimensions 6, 11 et 16.

Il y a donc une partie importante du domaine de valeur qui demeure inatteignable par cette méthode de génération. Nous devons donc trouver une façon d'altérer la génération des points pour obtenir un meilleur appariement.

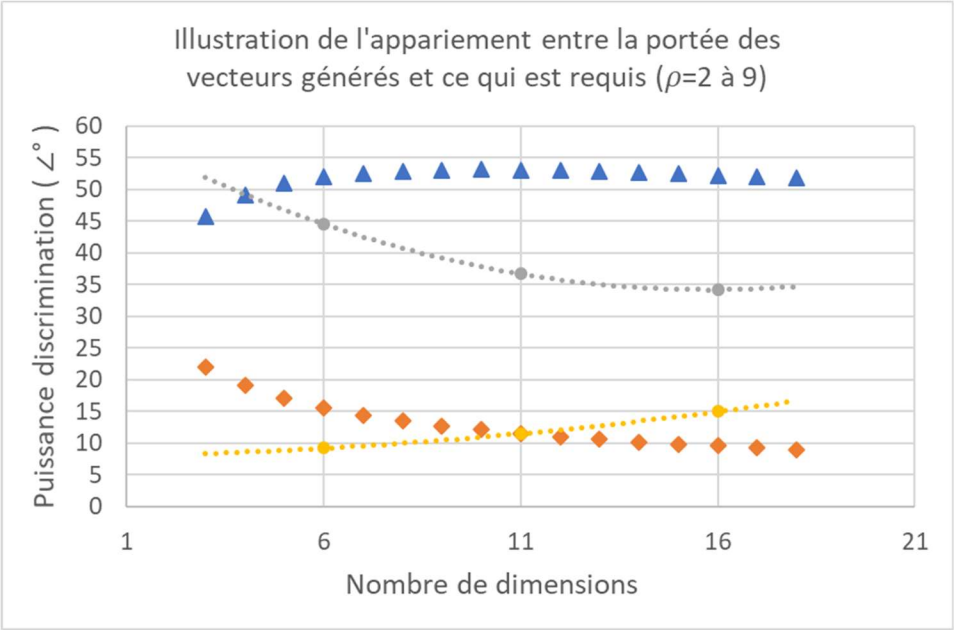


Figure 3.7(a) - Comparaisons des limites cibles (i.e. marqueurs) de la mesure de discrimination en degrés d'angle avec les minima et maxima (i.e. pointillés) atteints par échantillonnage avec la distribution uniforme.

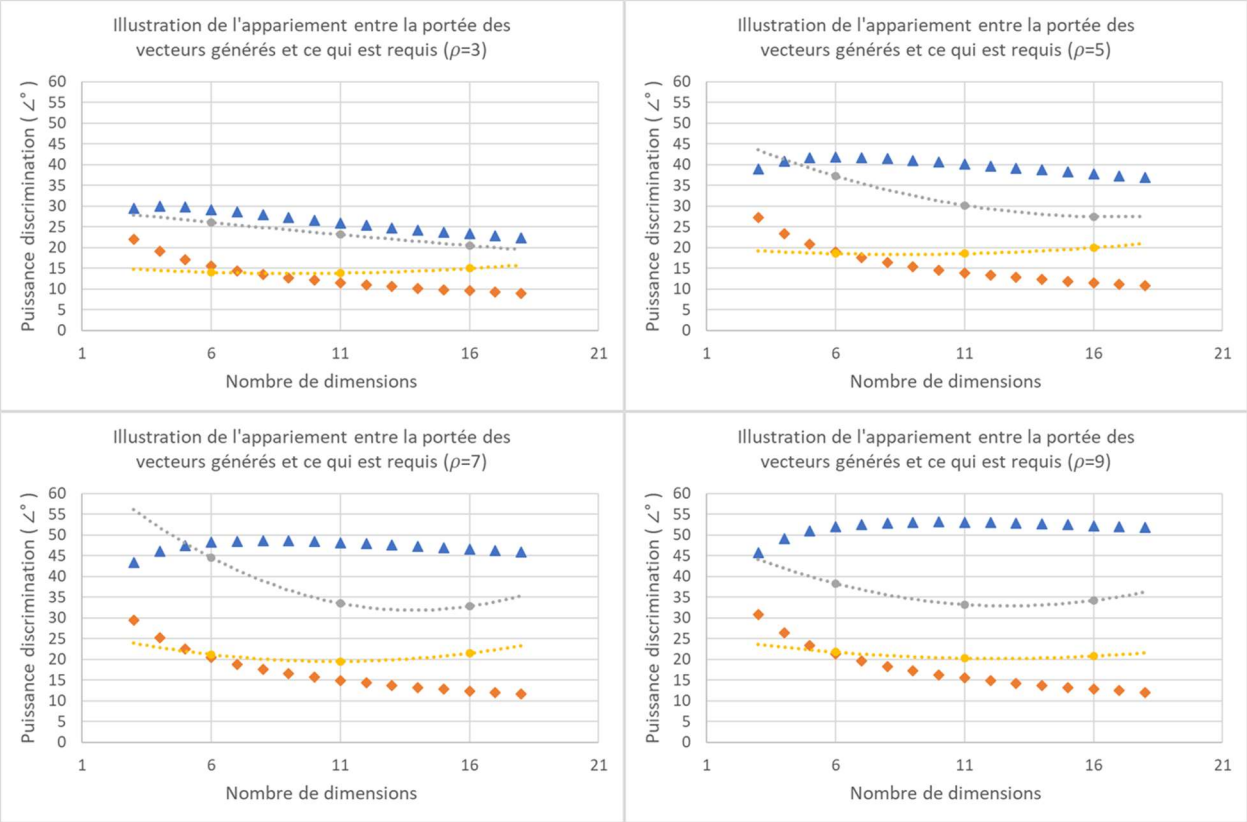


Figure 3.7(b) - Comparaisons de limites cibles (i.e. marqueurs) de la mesure de discrimination en degrés d'angle avec les minima et maxima (i.e. pointillés) atteints par échantillonnage avec la distribution uniforme, ventilées par les valeurs de potentiel (ρ) 3, 5, 7 et 9.

(3.3.3) Exploiter les caractéristiques

Ici, nous reprenons les caractéristiques associées aux types I, II et III que nous avons décrit à la section 3.2.1 pour remédier aux lacunes du processus de génération.

La première considération est le potentiel de discrimination. Si on considère que la valeur maximale présente dans une matrice de comparaison est en lien avec le ratio du poids de la meilleure option avec la moins bonne, il apparaît pertinent de contrôler ce paramètre de génération. La deuxième considération est le niveau de compression/expansion du poids des alternatives. Les valeurs tirées de la distribution uniforme, une fois mises en ordre, ont une espérance mathématique qui fait en sorte que l'ensemble des ratios obtenus comprendra seulement un petit nombre de grandes valeurs. Toutefois, il y en aura toujours un certain nombre.

Si on considère que la densité respective de grandes et de petites valeurs permet d'atteindre les configurations du type I et du type III, nous proposons d'exercer aussi un contrôle sur cet aspect de la génération pour assurer une meilleure couverture.

En principe, le paramètre du potentiel permet de contrôler la possibilité d'obtenir des grandes valeurs. Et, un facteur additionnel doit être conçu pour permettre de contrôler la densité des grandes et des petites valeurs.

Le résultat d'une série d'essais visant à mettre au point la formule de génération, puis à la calibrer est présenté à la section 4.1.

(3.4) Mesures de proximité

Dans un premier temps, nous examinons les mesures de proximité utilisées dans les contextes de simulation que nous avons vues au chapitre 2. Ensuite, nous considérons aussi quelques mesures candidates ayant été élaborées dans d'autres domaines de recherche. Puis, nous complétons cette section en résumant la sélection des mesures avec lesquelles des expérimentations sont menées en expliquant pourquoi elles sont retenues.

(3.4.1) Première sélection

D'emblée, les mesures qui utilisent la différence de rangs doivent être éliminées simplement sur la base de l'interprétation géométrique.

Prenons par exemple les trois vecteurs de dimension 3 suivants P4 = [0,700 0,160 0,140], P5 = [0,675 0,250 0,075] et P6 = [0,400 0,350 0,250], représentés dans le diagramme ternaire suivant (fig. 3.8). Toutes les mesures d'inversion de rang vont nous indiquer que les trois vecteurs sont tout aussi près les uns des autres en donnant une distance égale à 0. Ce qui est insensé, car P6 n'a presqu'aucune puissance de discrimination et est, à toutes fins pratiques, relativement loin des deux autres.

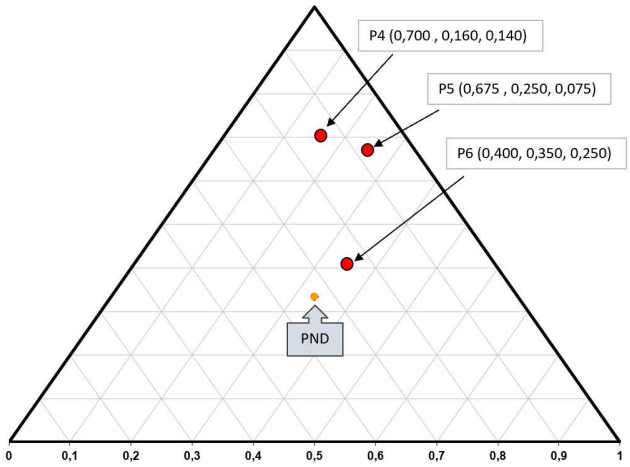


Figure 3.8 - Illustration de la non-pertinence de la distance basée sur les rangs.

Les mesures de norme 2 telles RMS et MSE sont des variantes de la distance euclidienne (EUD). Cette distance est pertinente à la vue de l'interprétation géométrique possible de la notion de proximité ciblée par cette étude.

Les mesures de norme 1 sont habituellement utilisées en statistiques pour évaluer la dispersion dans un ensemble de mesures. Leur pertinence dans un contexte d'évaluation de proximité est difficile à interpréter. Pour sa part, la corrélation, elle aussi utilisée en statistiques, sert à détecter si deux ensembles de points ont des facteurs explicatifs en commun. Encore ici, il est difficile de prêter une interprétation à une telle mesure dans le contexte d'évaluer la proximité de deux vecteurs.

Pour toutes les raisons mentionnées, de l'ensemble des mesures répertoriées dans la revue de littérature, nous ne conservons uniquement que la distance EUD comme candidate.

(3.4.2) Autres mesures candidates

La notion de proximité peut s'interpréter de deux façons. D'une part, on peut s'intéresser à la notion de distance. D'autre part, on peut s'intéresser à leur similarité. Dans les deux cas, plus les deux points sont près l'un de l'autre, plus la distance est petite et plus ils sont similaires.

Dans l'encyclopédie des distances de Deza & Deza (2009) on trouve une section sur les mesures de similarité dans laquelle on explique que, par convention, les mesures de similarité donnent une valeur entre 0 et 1. Et que la similarité vaut 1 quand les deux points sont identiques. On

explique aussi qu'une mesure de similarité peut donner lieu à une mesure de distance avec une transformation adéquate et *vice versa*.

Plus formellement, Deza & Deza (2009, p.3) présentent l'explication du lien entre les mesures de similarité et de distance comme suit.

> Soit l'ensemble X. Une fonction $sim : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une similarité sur X si sim est non-négative, symétrique et si $sim(x, y) \leq sim(x, x), \forall\, x, y \in X,$ avec l'égalité ne survenant exclusivement que si $x = y$.

Ils mentionnent aussi que les principales transformations τ_i, utilisées pour une obtenir une distance (dissimilarité) dis à partir d'une similarité sim, soit $dis = \tau_i(sim)$ sont:

$$dis = 1 - sim \qquad (\tau_1)$$

$$dis = \frac{1 - sim}{sim} \qquad (\tau_2)$$

$$dis = \sqrt{1 - sim} \qquad (\tau_3)$$

$$dis = \sqrt{2 \cdot (1 - sim^2)} \qquad (\tau_4)$$

$$dis = cos^{-1}(sim) \qquad (\tau_5)$$

$$dis = -\ln(sim) \qquad (\tau_6)$$

Notons que pour la majorité de telles mesures, il n'existe pas de convention universelle pour les nommer, qu'il s'agisse de mesures de distance ou de similarité. Une mesure de distance que Deza & Deza (2009, p.308) nomment *semi-métrique angulaire* ou que Van Dongen & Enright (2012, p.1) appellent ***distance angulaire*** est basée sur la *similarité du cosinus (SimCos)*.

> Soit a et b, deux vecteurs de même dimension, la valeur de *SimCos* est obtenue avec l'expression suivante,

$$SimCos = \frac{a \circ b}{\sqrt{a \circ a} \cdot \sqrt{b \circ b}}$$

et la *distance angulaire*, telle que mentionnée ci-haut, correspond à la transformation (τ_5) de *SimCos*. Dans l'ensemble du mémoire, on utilise le terme *Angle* pour représenter cette quantité qui a été définie préalablement à la section 3.2.3.

Warrens (2016) mentionne que le choix d'une mesure de similarité appropriée n'est pas une science exacte, mais que l'exploration et la comparaison des résultats de différentes mesures peut aider à mieux comprendre le phénomène sous étude et la pertinence des mesures entre elles en fonction du besoin.

Un fait pertinent qui apparaît dans l'article de Warrens est que plusieurs mesures de similarité ont été élaborées aux fins de comparer des fonctions de densité de probabilités qui sont aussi, par leur définition, des points dans un espace vectoriel. Dans cet article, il établit des inégalités entre sept mesures de similarités inventoriées par Deza & Deza. Il démontre en particulier que la mesure de **similarité de Ruzicka** donne toujours un résultat plus petit ou égal à celui des six autres. Cette mesure a une définition très simple qui la rend attrayante. Pour chaque paire d'éléments respectifs des vecteurs comparés, on prend la somme des poids minimaux qu'on divise par la somme des poids maximaux. On peut transformer cette formule de similarité en une mesure de distance en soustrayant son résultat de 1. Soit deux vecteurs de priorité $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v'}$ de dimension *n*, la formule de **distance de Ruzicka** est obtenue en appliquant la transformation τ_1, soit

$$Ruz(v, v') = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \min(v_i, v'_i)}{\sum_{i=1}^{n} \max(v_i, v'_i)}$$

Par exemple, si on l'applique aux vecteurs P4 et P5 présentés à la section précédente, on aura :

$$Ruz(P4, P5) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \min(P4, P5)}{\sum_{i=1}^{n} \max(P4, P5)}$$

$$= 1 - \frac{0{,}675 + 0{,}160 + 0{,}075}{0{,}700 + 0{,}250 + 0{,}140}$$

$$= 1 - \frac{0{,}910}{1{,}090} = 1 - 0{,}834 = 0{,}165$$

Cette mesure est retenue comme candidate.

La dernière mesure candidate est l'angle formé entre les deux vecteurs comparés. Nous l'ajoutons à la sélection, d'une part parce que son interprétation géométrique est évidente, et d'autre part, parce que sa pertinence a été illustrée précédemment dans le contexte de la mesure de la puissance de discrimination des vecteurs de priorité. Sa formule a déjà été présentée à la section 3.2.3.

Finalement, trois mesures sont retenues (EUD, Ruzicka et l'angle) pour être mises à l'épreuve dans la section 4.3.

(3.5) Limite de précision

Dans cette section nous proposons une façon de fixer la limite de précision qui s'appuie sur des commentaires formulés dans Triantaphyllou & Mann (1990 p.297) et Salo & Hämäläinen (1997 p.313).

Nous expliquons d'abord la pertinence d'avoir une limite de précision pour enrichir la capacité d'analyse des résultats obtenus par les différents procédés élaborés par les recherches sur le perfectionnement de la méthode AHP. Nous expliquons le choix de l'erreur de discrétisation pour établir la limite proposée et portons une attention particulière à un facteur influent.

(3.5.1) Pourquoi est-elle pertinente ?

La raison pour laquelle une limite de précision est pertinente peut être expliquée comme suit. Supposons que deux procédés donnent les résultats respectifs R1 et R2 qui sont ici des écarts d'estimation. Plus l'écart est petit, meilleur est le procédé. Le seul constat possible avec cette information est que, soit l'un des deux est meilleur, soit ils sont équivalents. D'une façon ou d'une autre, en l'absence d'une référence, on ne peut pas statuer s'ils sont satisfaisants ou non.

Considérons maintenant que nous connaissons la limite de précision L et que R1 est meilleur que R2. On aura nécessairement l'un des 3 cas de figures suivants.

- $L < R1 < R2$: les deux résultats sont au-dessus de la limite. Ceci nous indique que les deux procédés peuvent faire l'objet de perfectionnement

- R1 < L < R2 : le premier procédé a atteint la cible, mais pas le deuxième
- R1 < R2 < L : les deux résultats sont en deçà de la limite et le but est atteint pour chacun des deux procédés

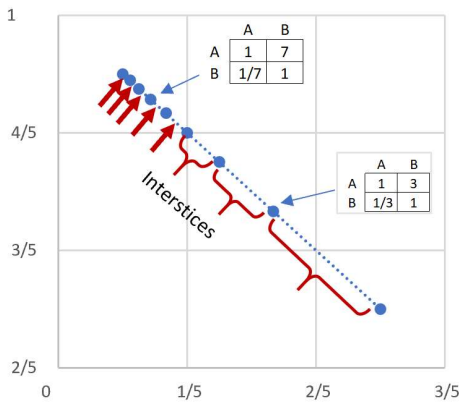
Ce raisonnement motive la détermination d'une limite de précision pour l'estimation des vecteurs de priorité pour permettre de juger de la performance des procédés qui font l'objet de recherche de perfectionnement pour l'AHP. Plus particulièrement, pour les trois familles de procédés dont il est fait mention dans la section 2.3, qui sont : la réduction du nombre de comparaisons requises, la méthode de calcul du vecteur de priorité à partir de la matrice numérique et l'évaluation de l'efficacité des échelles numériques alternatives.

(3.5.2) Erreur de discrétisation

Dans Triantaphyllou & Mann (1990) et Salo & Hämäläinen (1997), on y explique que l'utilisation d'une échelle discrète entraîne une erreur de quantification. Triantaphyllou & Mann utilisent le terme « *forward error* » que nous traduisons ici par l'expression *erreur de discrétisation*. Cet article analyse la précision de la méthode de calcul pour obtenir les priorités. Salo & Hämäläinen notent que la dispersion des vecteurs obtenus avec l'échelle originale est loin d'être uniforme. Il présente une nouvelle échelle numérique qui fait en sorte que les vecteurs obtenus ont une distribution plus uniforme. Cette idée a aussi été reprise dans Dong *et al* (2008) pour, entre autres, explorer l'échelle géométrique.

Ce que l'on doit retenir est qu'avec toute échelle numérique prédéterminée, les vecteurs de priorité qu'il est possible d'obtenir forment un ensemble discret et fini. Il y a donc des vecteurs de priorité qui ne pourront pas être obtenus avec la méthode AHP. On note que des échelles numériques différentes permettront d'obtenir des ensembles distincts. Néanmoins, il y aura toujours des interstices d'ampleur diverses.

Le graphique suivant (fig. 3.9(a)), inspiré de l'article de Salo & Hämäläinen (1997, p.313), permet d'illustrer ce phénomène particulier. Les points sur la ligne représentent les combinaisons de priorités (fig. 3.9(b)) que l'on peut obtenir avec des matrices 2x2 et l'échelle numérique originale de Saaty. On y voit bien les interstices entre les points pour lesquels aucune combinaison de priorités disponible ne correspond.



(a)

Liste des combinaisons de priorités disponibles avec matrices 2x2
(1/2, 1/2)
(1/3, 2/3)
(1/4, 3/4)
(1/5, 4/5)
(1/6, 5/6)
(1/7, 6/7)
(1/8, 7/8)
(1/9, 8/9)
(1/10, 9/10)

(b)

Figure 3.9 - Illustration de la dispersion des vecteurs de dimension 2

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, on note que tout point en deçà de la limite de précision peut être considéré comme une estimation légitime puisque que l'écart avec le calcul de la matrice complète est plus petit que l'erreur de discrétisation.

Si l'on considère, par exemple, la recherche sur les procédés de réduction du nombre de comparaisons, laquelle vise à établir quel est le plus petit nombre de comparaisons essentiel, nous pouvons illustrer le concept de la limite avec le graphique suivant (fig. 3.10).

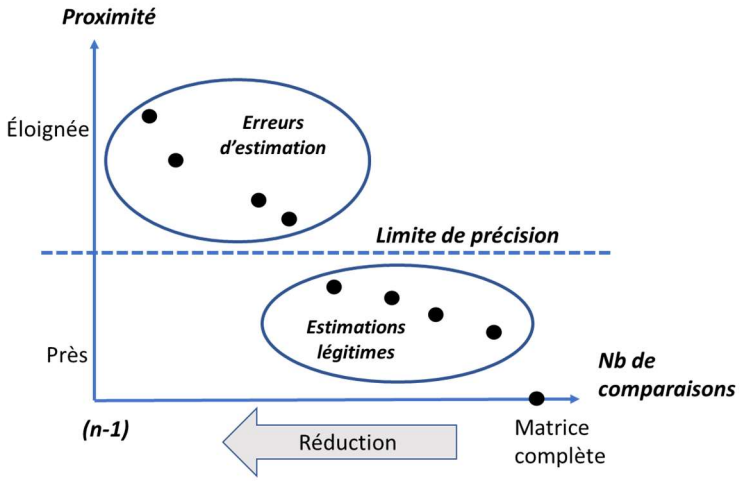


Figure 3.10 - Représentation graphique du concept de limite de précision appliqué à la réduction du nombre de comparaisons requises

Cette approche est considérée adéquate et alignée avec notre objectif qui consiste à établir une limite de précision objective.

(3.5.3) Facteur à considérer

Dans Salo & Hämäläinen (1997, section 4) il est soulevé que l'*erreur de discrétisation* est plus grande avec les valeurs plus petites, lesquelles sont, par ailleurs, plus abondantes dans les vecteurs de type III. Si l'on considère qu'on ne peut présumer d'avance de la puissance de discrimination d'un vecteur de façon générique, il sera requis de retenir une valeur limite (ex. 95e ou 99e percentile) basée sur un échantillon couvrant l'ensemble du domaine de valeur.

(4) Nouvelles approches

(4.1) Couverture avec distribution altérée

Dans cette section nous visons remédier aux lacunes de couvertures décrites aux sections 3.3.1 et 3.3.2. Pour se faire, nous allons exploiter les observations mentionnées à la section 3.2.2 sur le raisonnement qui a mené à l'établissement des limites de la puissance de discrimination, soit la borne supérieure et le 1er pas de discrétisation.

Si le vecteur à la borne supérieure est formé avec quelques valeurs maximales (égales à ρ, le coefficient de potentiel) et de plusieurs valeurs minimales (égales à 1), on peut intuitivement faire l'hypothèse que les vecteurs de type I auront une configuration s'en approchant. Ils auront donc un petit nombre de valeurs plus hautes et plusieurs valeurs plus petites. On peut alors imaginer que si les valeurs sont tirées d'une distribution qui a une plus grande densité près de la valeur de probabilité 0, on aura une meilleure possibilité d'obtenir des vecteurs de ce type.

Par ailleurs, si on considère la configuration du vecteur au 1er pas de discrétisation, un raisonnement similaire nous laisse penser qu'une distribution ayant une densité plus grande près de la valeur de probabilité 1 permettra d'obtenir des vecteurs de type III. Quelques expérimentations exploratoires ont permis de supporter empiriquement cette hypothèse.

La distribution la plus simple qui permet d'accomplir ceci est une mixture de deux distributions uniformes qui permet de former la fonction de densité « génératrice » que nous appelons $Gen(p, \beta)$. Le diagramme suivant (fig. 4.1(a)) illustre un cas de densité accrue près de la valeur 0 avec un point de coupure à β = 1/5.

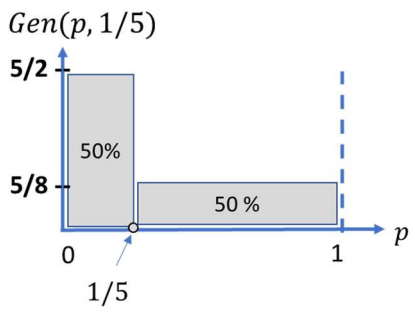


Figure 4.1(a) - Illustration d'une fonction de densité permettant de générer un plus grand nombre de valeurs près de 0.

Il restait ensuite à trouver une façon d'alterner entre les trois sources génératrices requises, soit : une première distribution plus dense près de 0, une deuxième distribution plus dense près de 1 et une troisième avec une densité proche de la distribution uniforme. La distribution βeta « symétrique » présente des caractéristiques idéales pour satisfaire ce requis. Le diagramme suivant (fig. 4.1(b)) présente la forme de la fonction de densité pour la distribution βeta « symétrique » avec des paramètres $\alpha = \beta \leq 1$.

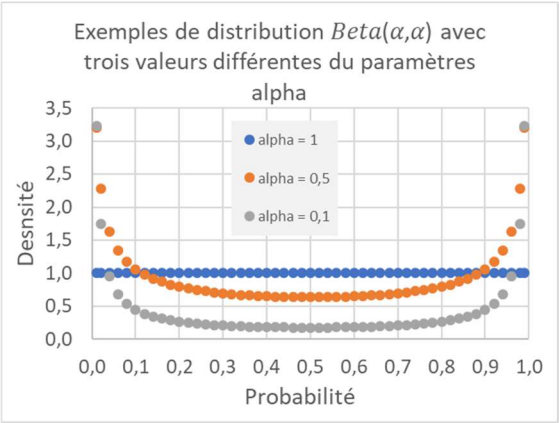


Figure 4.1(b) - Formes de la fonction de densité pour la distribution βeta « symétrique » avec des paramètres α = β ≤ 1. On note qu'avec α=1, on obtient la distribution uniforme.

Le schéma suivant (fig. 4.1(c)) permet d'expliquer la nouvelle séquence complète de génération. La première étape consiste à tirer une valeur aléatoire de la distribution Beta. Cette valeur obtenue sert alors de point de coupure pour établir la mixture à la deuxième étape. Puis, la troisième étape consiste simplement à tirer des valeurs de la mixture établie à l'étape deux. Notons que les valeurs du point de coupure au-dessus de ½ ont tendance à produire des vecteurs avec une puissance de discrimination moindre et *vice versa* pour les valeurs sous ½.

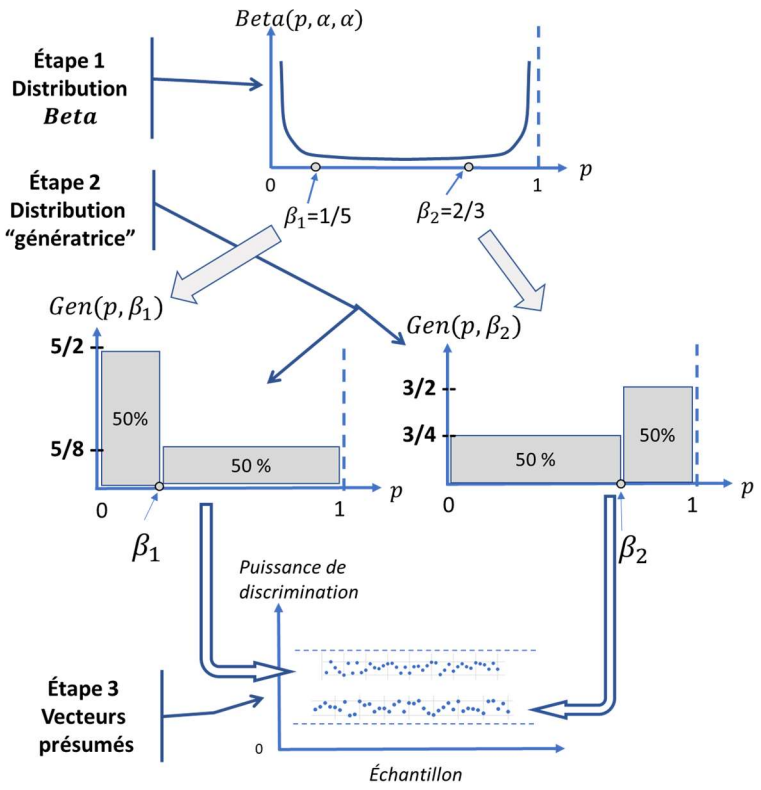


Figure 4.1(c) - Schéma présentant la séquence complète de génération de vecteurs présumés.

Le dernier point à prendre en considération est le fait que le potentiel doit être dans l'intervalle qui correspond à l'échelle numérique utilisée. Dans le cas de l'échelle *linéaire*, on voudra des valeurs pour ρ allant de 2 (1er pas) à 9 (max). Une valeur tirée d'une distribution uniforme permet de varier les valeurs à utiliser dans la procédure de génération. Ce point est résolu par la procédure de construction suivante qui est illustrée avec un exemple (fig. 4.1(d)).

Posons les définitions suivan es :

- La variable du potentiel ρ est tirée de l'ensemble des nombres de 2 9 :
  $\rho \leftarrow U\ \{2, \ldots, 9\}$

- Le facteur α est un paramètre pour contrôler la forme de la distribution βeta.

- La variable β est tirée de la distribution βeta pour établir le point de coupure de mixture.

- Le vecteur souche s de dimension (n-2) est tiré de la loi unifo me :
  s(i) ← U [0, ..., 1], i = 1, ..., (n-2)

- Le vecteur souche ajusté s' de dimension (n-2) est tiré de la mixture formée avec le point de coupure β et les valeurs du vecteur sou che:
  s'(i) ← $Gen\ (\beta, s(i))$, i = 1, ..., (n-2)

- Le vecteur de construction $\boldsymbol{q}$ de dimension n est obtenu comme s it :
  - $\boldsymbol{q}(1) = \rho$
  - $\boldsymbol{q}(n) = 1$
  - $\boldsymbol{q}(i+1) = 1 + (\rho - 1) * s'(i), i = \cdots \ldots, (n-2)$

Puis, le vecteur présumé $\boldsymbol{v}$ est calculé en divisant les éléments de $\boldsymbol{q}$ par leur somme

	EXEMPLE DE GÉNÉRATION D'UN VECTEUR PRÉSUMÉ AVEC LA DIMENSION 6							
Pas	**Description**	**Variable(s)**	**Valeur(s)**					
1	Générer une valeur pour le potentiel	ρ	5,763					
2	Paramètre de calibration pour la fonction Beta	α	0,1					
3	Générer une valeur pour le point de coupure de la mixture	β	0,353					
4	Tirer (n -2) valeurs d'une distribution uniforme	*s(1) .. s(4)*	0,076	0,088	0,229	0,971		
5	Transformer des valeurs de s(1) .. s(4) en tirant des valeurs de la mixture	*s'(1) .. s'(4)*	0,004	0,005	0,012	0,944		
6	Mettre les données à l'échelle du potentiel	*q(1) .. q(6)*	5,763	1,019	1,022	1,056	5,497	1
7	Normaliser q(1) .. q(6) à la somme 1	*v(1) .. v6)*	0,375	0,066	0,067	0,069	0,358	0,065

Figure 4.1(d) - Exemple pas-à-pas de génération d'un vecteur de dimension 6.

Les graphiques suivants (fig. 4.2) montrent les résultats de génération obtenus avec cette formule pour les dimensions 6, 11 et 16 avec les valeurs de potentiel 3, 5, 7 et 9.

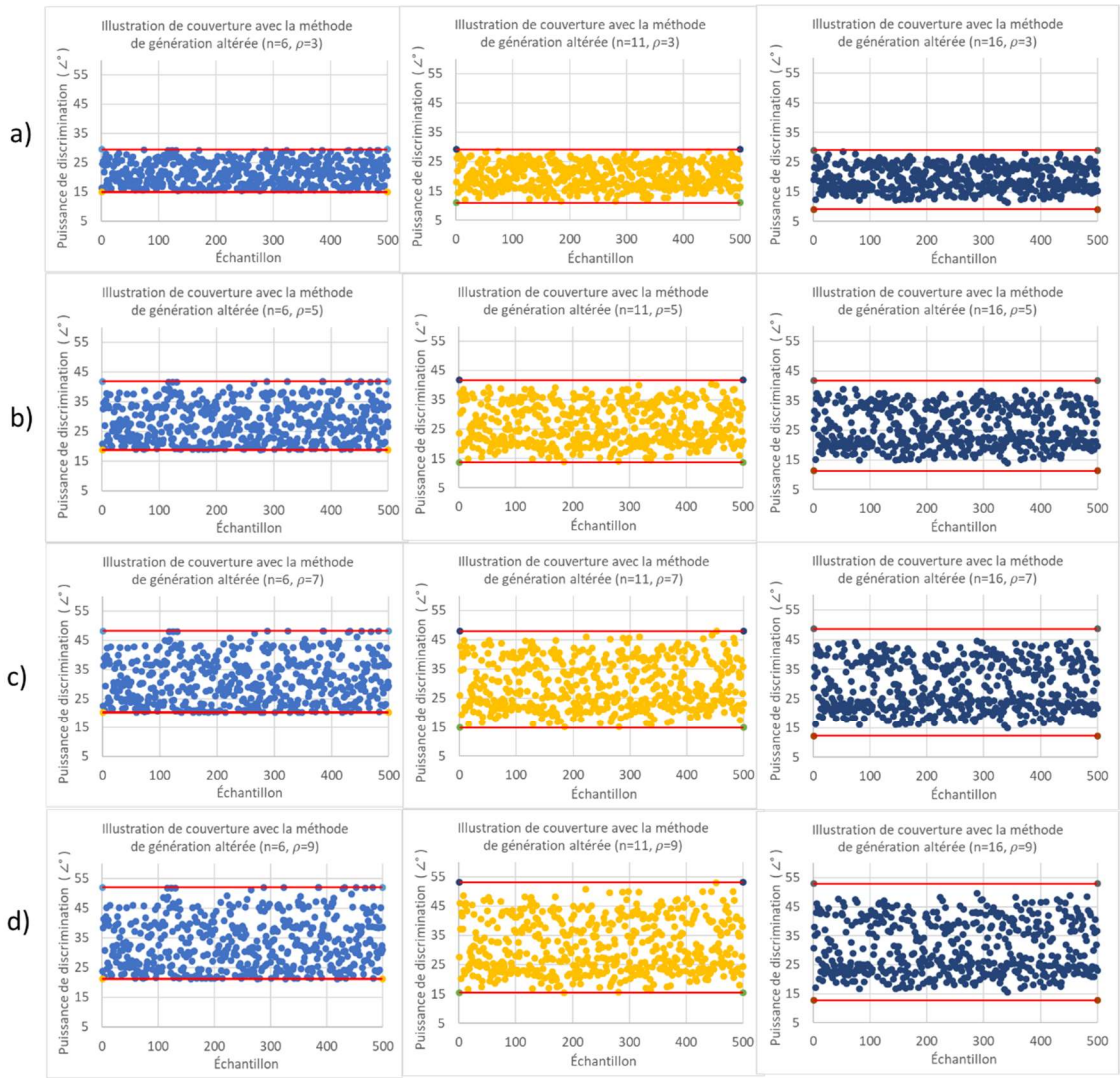


Figure 4.2 - Performance de la formule de génération altérée pour les dimensions 6, 11 et 16 avec les valeurs de potentiel 3, 5, 7 et 9 présentée dans a), b), c) et d) respectivement.

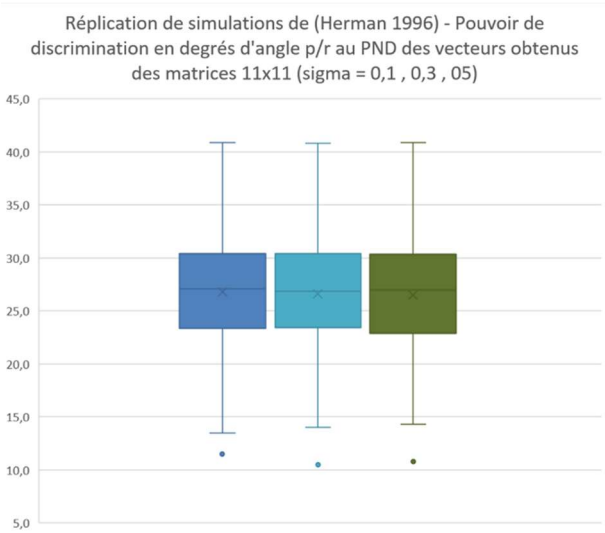
Les graphiques montrent bien que les vecteurs générés sont répartis adéquatement dans la zone cible entre les repères de limite.

(4.2) Génération des matrices NSI

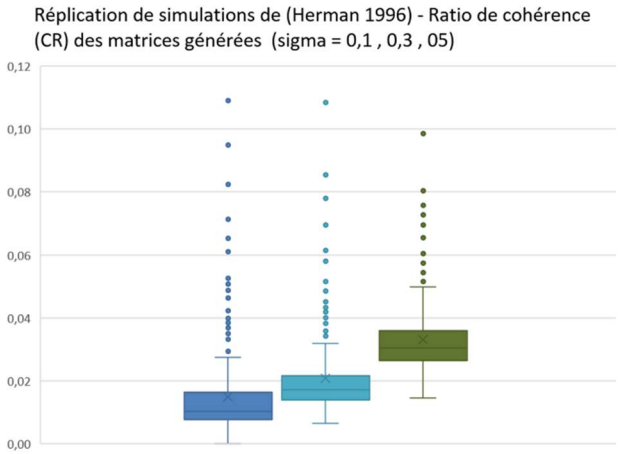
Nous avons vu à la section 2.1 que l'approche la plus commune pour générer des matrices légèrement incohérentes (NSI) est de d'abord construire une matrice parfaitement cohérente à partir du ratio par paires des poids d'un vecteur présumé. Ensuite, une perturbation calibrée via un terme multiplicateur aléatoire est impartie à chaque élément de la matrice avant d'effectuer la discrétisation au niveau de l'échelle numérique le plus près. Une réplication des simulations de

Herman & Koczkodaj (1996) et de Carmone *et al* (1997) a permis de confirmer que le ratio de cohérence des matrices peut être contrôlé adéquatement. Toutefois, peu importe la variante utilisée pour générer des vecteur présumés, les résultats obtenus ont tous le même défaut au niveau de ne pas bien couvrir la portée en termes de puissance de discrimination.

Dans les graphiques suivants (fig. 4.4 (a) et (b)), on voit respectivement la distribution de la puissance de discrimination et le ratio de cohérence (CR) avec la méthode de Herman & Koczkodaj (1996) qui utilise la distribution uniforme pour générer les perturbations.



Graphique 4(a)



Graphique 4(b)

Figure 4.4 - Réplication de simulations antérieures

Les résultats obtenus avec les autres lois de probabilités utilisées dans Carmone *et al* (1997) ont un comportement identique. Le choix de la distribution pour impartir les perturbations n'a pas d'effet notable. On retient donc la méthode de perturbation de Herman & Koczkodaj (fig. 2.2) qui est la plus simple.

Nous avons maintenant une solution de génération de données qui permet de bien couvrir le domaine de valeur des vecteurs présumés et d'en générer des matrices NSI de dimensions adéquates.

(4.3) Mesures de proximité

À la section 3.4.2 nous avons identifié 3 mesures de proximité candidates : EUD, Ruzicka et l'angle du cosinus.

Pour finaliser la sélection nous allons comparer le comportement des mesures dans des circonstances pertinentes à leur utilisation cible. Celle-ci est de quantifier la proximité entre deux vecteurs dont un est une estimation de l'autre. Pour effectuer cette comparaison il nous fallait d'abord être en mesure de générer des vecteurs présumés représentatifs du domaine de valeur. Nous avons maintenant cet outillage que nous mettons à contribution en effectuant les étapes de simulation suivantes.

- Générer un vecteur présumé
- Remplir les premiers $\frac{n*(n-1)}{2}$ éléments de la matrice avec le ratio des poids du vecteur présumé en le remplaçant par la valeur de l'échelle numérique la plus proche
- Compléter la matrice (mettre des 1 sur la diagonale et calculer les réciproques)
- Calculer le vecteur de priorité correspondant à la matrice
- Calculer les 3 mesures de proximité entre le vecteur présumé et le vecteur obtenu
- Répéter 250 fois
- Faire cette simulation pour les dimensions 6, 11 et 16.

Le diagramme suivant (fig. 4.5) illustre le flot de la simulation.

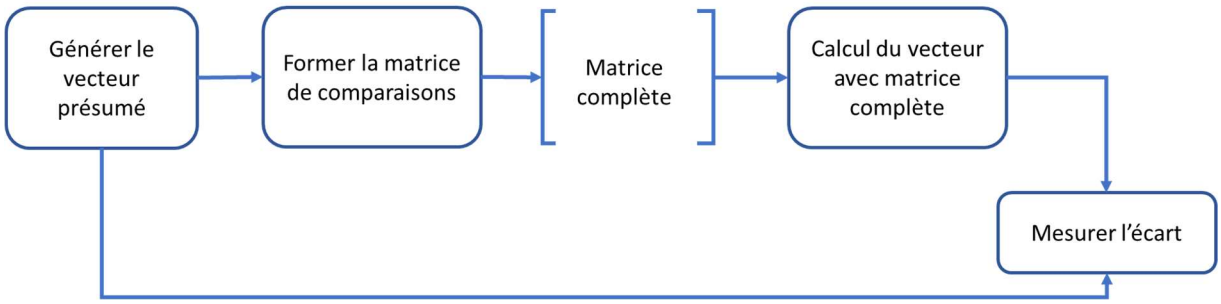


Figure 4.5 - Flot de la simulation pour évaluer l'impact de la discrétisation.

Les graphiques suivants (fig. 4.6 et 4.7) présentent le résultat de ces simulations.

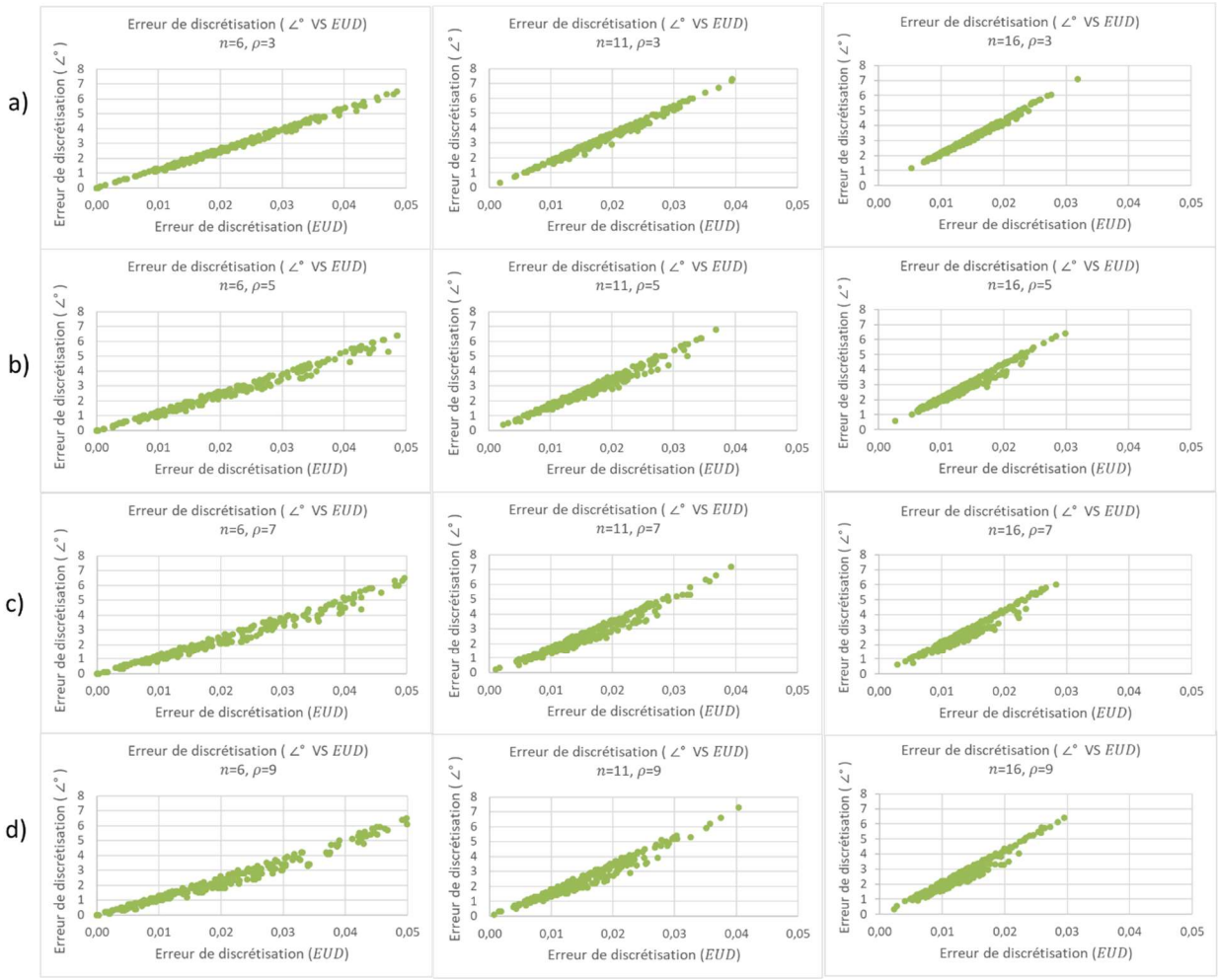


Figure 4.6 - Comparaison du comportement des mesures d'angle vs EUD pour évaluer l'erreur de discrétisation pour les dimensions 6, 11 et 16 avec les valeurs de potentiel 3, 5, 7 et 9 présentée dans a), b), c) et d) respectivement.

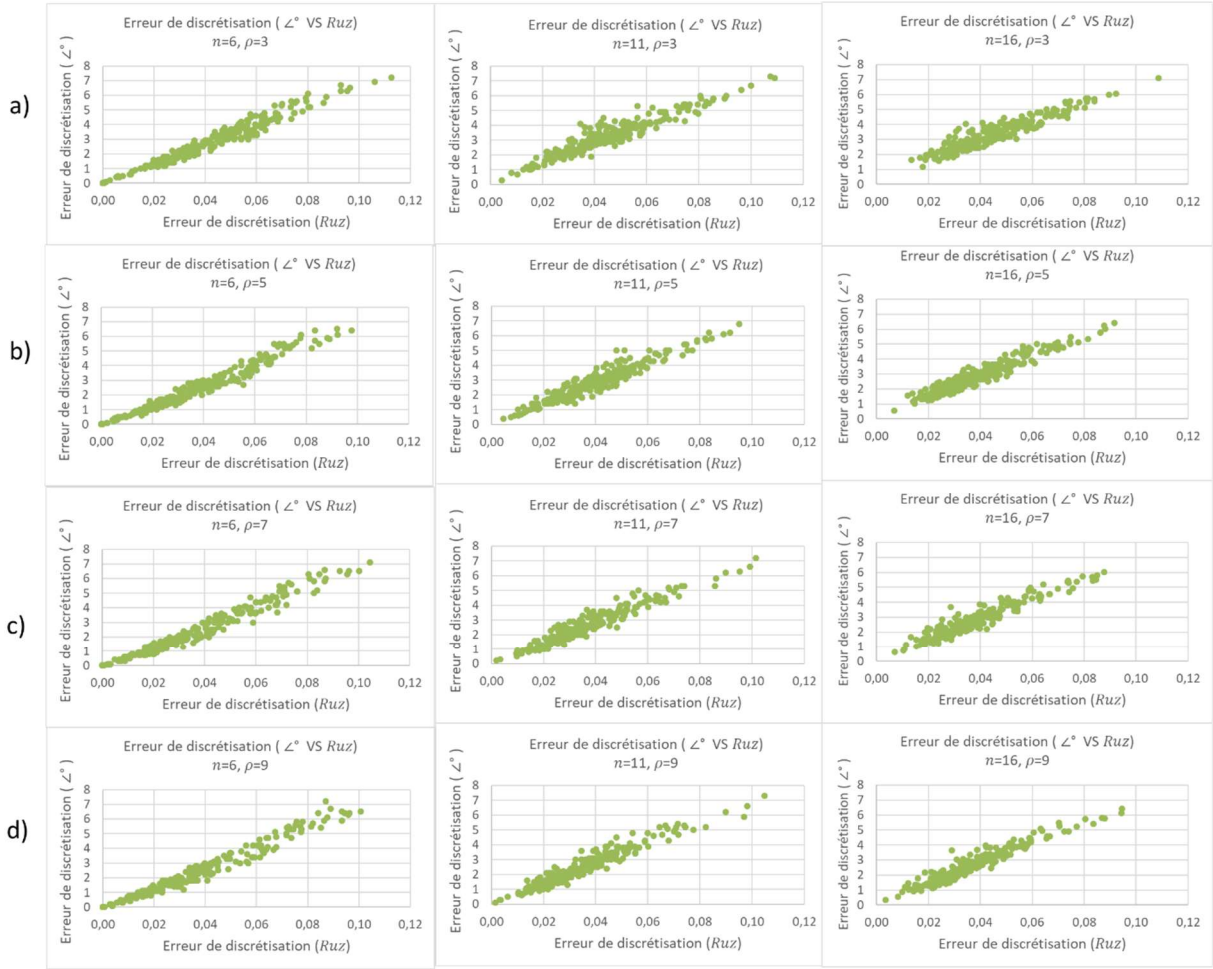


Figure 4.7 - Comparaison du comportement des mesures Angle vs Ruz pour évaluer l'erreur de discrétisation pour les dimensions 6, 11 et 16 avec les valeurs de potentiel 3, 5, 7 et 9 présentée dans a), b), c) et d) respectivement.

On en fait les observations suivantes :

- Les trois mesures comparées entre elles concordent dans les trois dimensions présentées. Toutes les trois mesurent le même phénomène avec une envergure équivalente, à un facteur multiplicateur près, à ce niveau de proximité;

- La relation entre l'angle et la distance euclidienne (EUD) est plus stable, surtout dans les plus grandes dimensions;

- La limite mesurée avec l'angle se situe entre 6° et 7° alors qu'avec l'EUD, elle décline graduellement de 0,05 (6x6), à 0,04 (11x11) à 0,03 (16x16).

En se basant sur ces observations, le choix de l'angle apparaît naturel pour sa simplicité de compréhension autant que pour la familiarité du concept étant donné l'interprétation géométrique du sujet dans son ensemble. Un autre facteur favorable à ce choix est le fait que la limite mesurée avec l'angle demeure stable dans toutes les dimensions considérées. On ne parle pas ici d'invariance au sens mathématique, mais cette stabilité en fait un artefact intéressant dans le contexte.

(4.4) Limite de précision

Les graphiques suivants (fig. 4.8) présentent l'erreur de discrétisation en fonction de la puissance de discrimination. On y observe que l'erreur est moindre lorsque la puissance est plus grande. Toutefois, on voit aussi que, bien que le potentiel (ρ) apparaisse garant de la limite supérieure de puissance, on retrouve toujours des points qui peuvent avoir une puissance moindre.

On ne peut donc pas se baser sur le potentiel (qui peut être obtenu au tout début du processus d'élicitation) pour juger de la précision qu'il est possible d'atteindre. Il faut donc accepter à ce stade que la limite de précision raisonnable ne peut être plus basse que 6°.

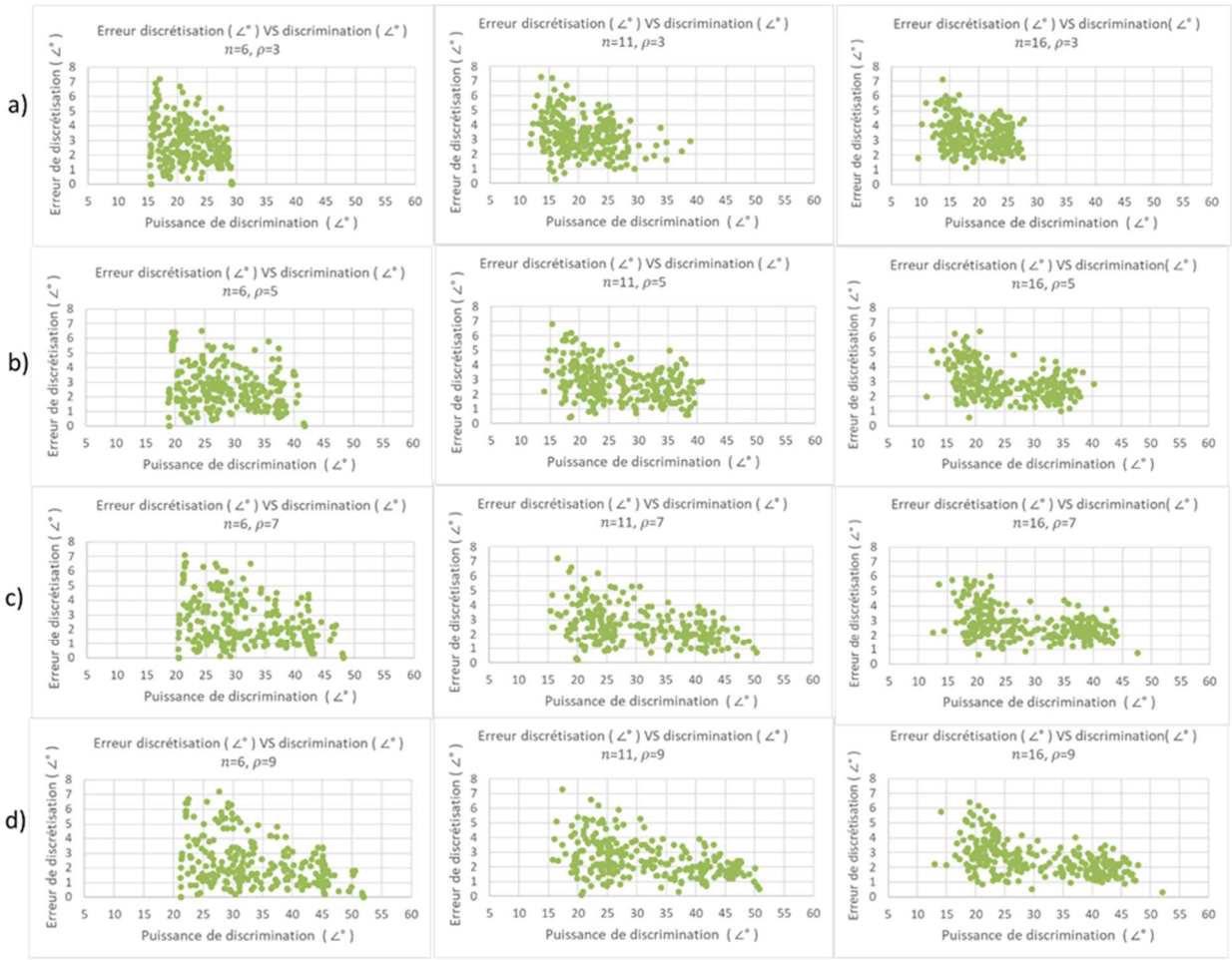


Figure 4.8 - Comportement de l'erreur de discrétisation en fonction de la puissance de discrimination pour les dimensions 6, 11 et 16 avec les valeurs de potentiel 3, 5, 7 et 9 présentée dans a), b), c) et d) respectivement.

Bien qu'il soit soutenu par des évidences claires et qu'il soit raisonnable, ce choix demeure tout de même contestable pour les raisons suivantes :

- Toute simulation, quelle qu'elle soit, ne pourra nous assurer que tous les points possibles du domaine de valeurs ont été couverts. Il demeure peut-être des zones non explorées qui pourraient présenter des particularités affectant la mesure de la limite de façon inusitée;

- Cette limite est fixe et conservatrice. En tenant compte de la distribution des écarts, on pourrait déterminer une limite variable avec un niveau paramétré par une valeur de percentile. Toutefois, l'utilité ou la pertinence d'un tel raffinement n'a pas été établie.

(5) Comparaison de procédés de réduction et de calcul de priorité

(5.1) Comparaison de procédés de réduction

De nombreux procédés de réduction du nombre de comparaisons ont été proposés depuis 30 ans. Deux procédés en particulier attirent notre attention aux fins d'évaluer leur niveau de précision respectif. Ce sont celui de la sélection aléatoire de 50% des comparaisons (Carmone *et al*, 1997) et celui appelé « Best-Worst » (Rezaei, 2015, 2016).

(5.1.1) Choix des procédés de réduction

Pour le premier, Ishizaka & Labib (2011, p.14339) en font mention en relatant qu'on peut éliminer jusqu'à 50% des comparaisons de façon aléatoire sans obtenir une erreur d'estimation significative. Nous avons déjà mentionné le fait à la section 2.2 que cette étude utilisait une distance basée sur les différences de rangs. Par ailleurs, nous avons présenté à la section 3.4.1 les raisons pour lesquelles cette mesure de distance était déficiente. Ceci rend ce procédé intéressant comme candidat à évaluer.

Pour le deuxième, Rezaei propose une solution avec laquelle seulement (2n-3) comparaisons sont requises. Cette propriété rend ce procédé attrayant et justifie de le soumettre à la présente évaluation.

Le diagramme suivant (fig. 5.1) illustre le flot de la simulation. Notons que certains procédés de réduction proposent que le nombre réduit de comparaisons soient présentes dans ce qui est appelée une matrice incomplète. Ceci est le cas pour le procédé proposé par Carmone *et al*. D'autres ne requièrent pas de former une matrice, comme c'est le cas du procédé de Rezaei. C'est pourquoi le *nombre réduit de comparaisons* n'est pas représenté par une matrice dans le diagramme suivant.

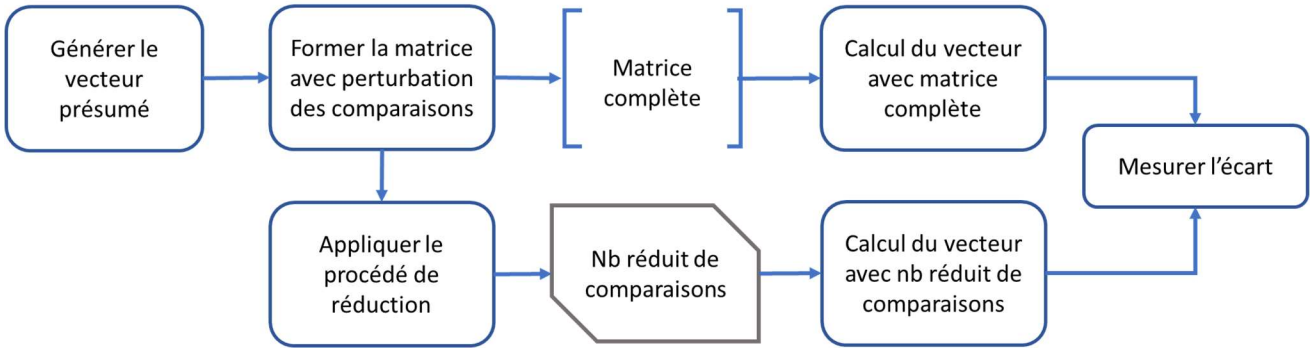


Figure 5.1 - Flot de la simulation pour évaluer l'impact de la réduction.

Nous avons établi préalablement qu'afin que les simulations soient pertinentes, il faut induire un certain niveau d'incohérence dans les matrices générées. Nous le faisons avec la méthode de perturbation mentionnée à la section 4.2. Le graphe suivant (fig. 5.2) fait état de la distribution du ratio de cohérence (CR) dans les matrices générées pour les simulations qui suivent.

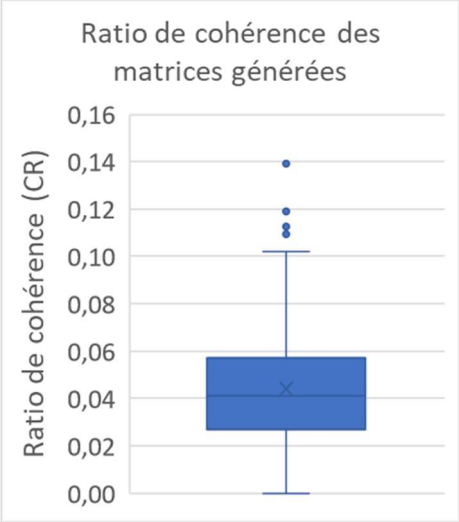


Figure 5.2 - Distribution du ratio de cohérence (CR) en appliquant la méthode de perturbation retenue qui est en ligne avec le principe de ne pas excéder indûment le seuil recommandé de 10%.

(5.1.2) Notes techniques sur ces procédés

<u>Carmone et al (50% au hasard)</u>

Une condition qui doit être maintenue est que le graphe représentant la matrice doit être connecté. C'est-à-dire qu'il doit y avoir un moyen de rejoindre n'importe quel sommet du graphe à partir de tous les autres. Autrement, toutes les alternatives doivent être comparées au moins une

fois et il ne doit pas y avoir de sous-groupes d'alternatives qui ne partagent aucune comparaison. Il faut alors exercer un contrôle sur cette condition et rejeter les cas où elle se manifeste.

Un autre point à considérer est qu'en retirant (ou omettant) certaines entrées de la matrice, on modifie certaines propriétés mathématiques qui sont requises pour que le calcul du vecteur propre donne un résultant adéquat. Takeda & Yu (1995) expliquent une façon simple de permettre à la matrice incomplète de satisfaire aux conditions requises. Il s'agit de mettre zéro pour les comparaisons manquantes (et leur réciproque) et de remplacer la valeur un dans la diagonale par la valeur un plus le nombre de zéros sur la ligne (ou sur la colonne).

Rezaei (Best-Worst)

Le procédé de Rezeai consiste à limiter les comparaisons à obtenir, à celles qui impliquent la meilleure option et à celles avec la moins bonne. Ceci implique de d'abord déterminer la meilleure et la moins bonne parmi les options possibles. On peut faire (n-1) comparaisons avec la première option, puis (n-2) avec la deuxième pour un total de (2n-3). Avec cet ensemble de comparaisons, Rezaei propose de produire deux vecteurs qui ont sensiblement le même rôle que les colonnes de la matrice dans le calcul du vecteur propre, chacun d'eux étant une estimation du vecteur de priorité. La prochaine étape consiste à déterminer une estimation utilisant ces informations. Rezaei suggère de résoudre un programme linéaire (PL) visant à minimiser une fonction de distance entre les éléments du vecteur cible et les ratios exprimés (voir son entrée dans la liste des procédés de réduction, fig. 2.5). Une façon simple est de former les termes du vecteur recherché avec la moyenne géométrique des termes respectifs, puis de normaliser ce résultat pour obtenir le vecteur de priorité estimé. Le graphe suivant (fig.5.3) semble indiquer que les résultats ainsi obtenus avec un échantillon d'une cinquantaine de cas sont, en fait, légèrement meilleurs.

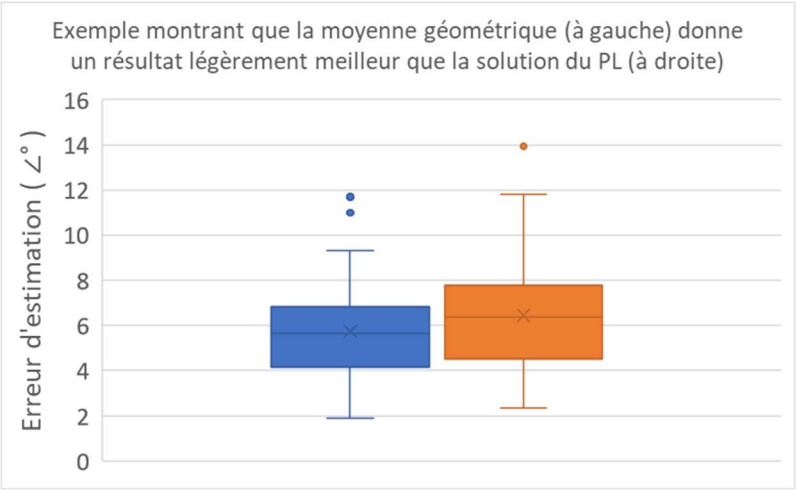
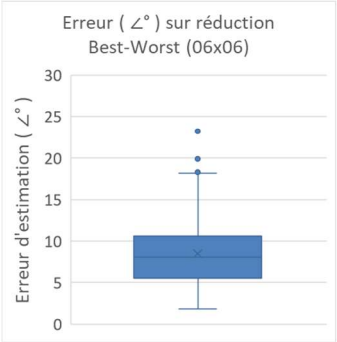
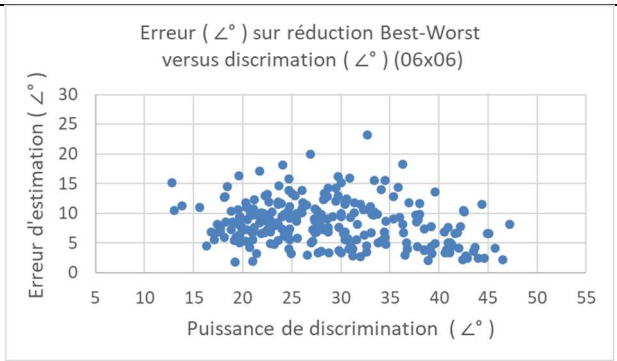
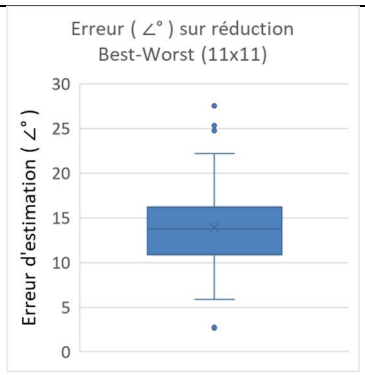


Figure 5.3 - Comparaison de l'erreur obtenue avec le calcul basé sur moyenne géométrique versus celui de la solution du programme linéaire (PL) suggéré par Rezaei.

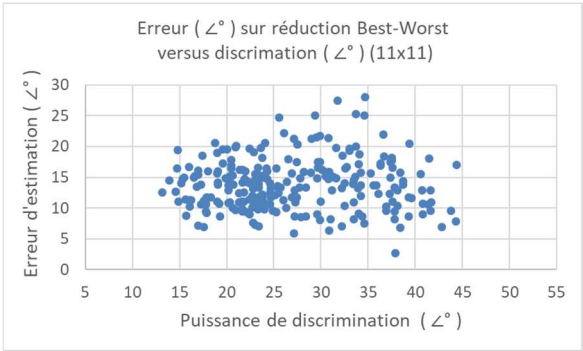
(5.2) Résultats de réduction

L'exécution des simulations a donné les résultats présentés dans les graphiques suivants (fig. 5.4 et 5.5).

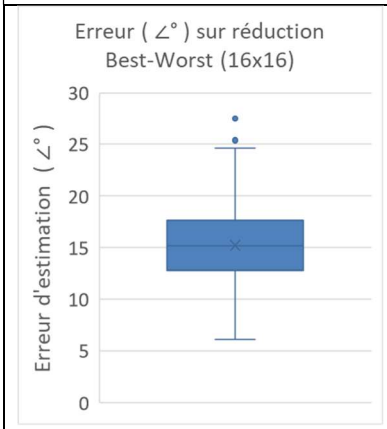
Distribution de l'écart avec la solution de la matrice complète	Distribution de l'écart en fonction de la puissance de discrimination
 (a) Best-Worst (6x6)	 (b) Best-Worst (6x6)



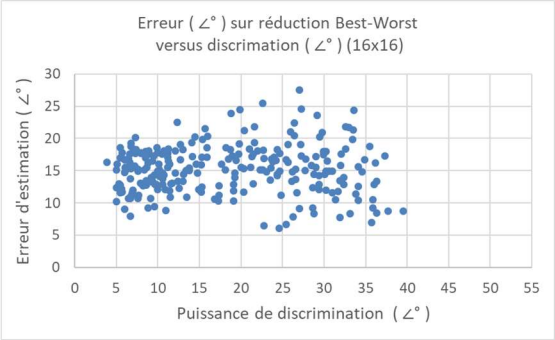
(c) Best-Worst (11x11)



(d) Best-Worst (11x11)

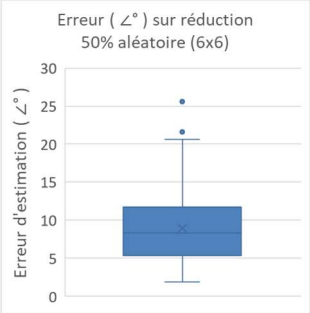
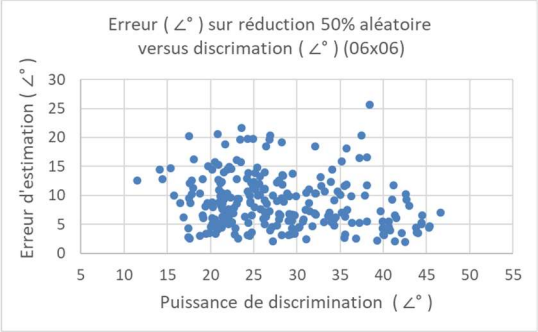


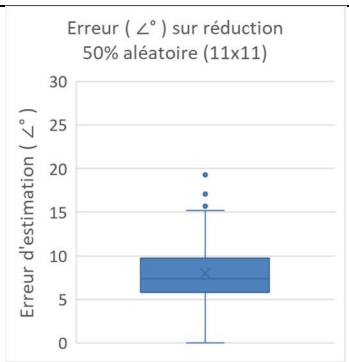
(e) Best-Worst (16x16)



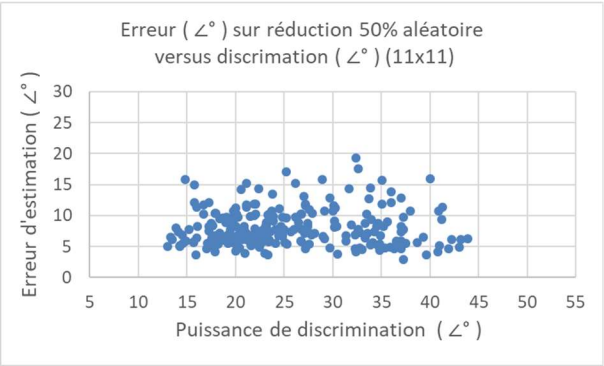
(f) Best-Worst (16x16)

Figure 5.4 - Résultats de simulation avec le procédé Best-Worst

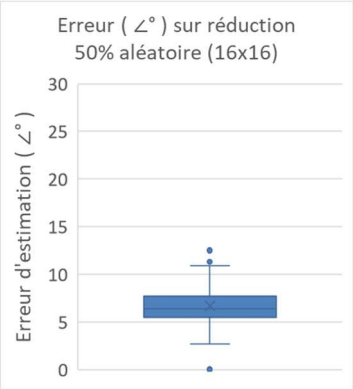
Distribution de l'écart avec la solution de la matrice complète	Distribution de l'écart en fonction de la puissance de discrimination
 (a) Carmone *et al* 50% (6x6)	 (b) Carmone *et al* 50% (6x6)



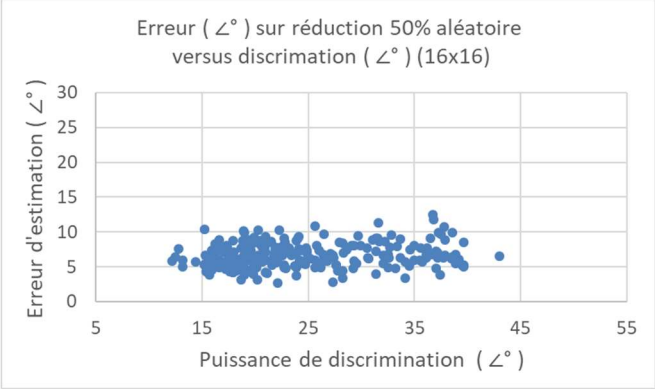
(c) Carmone *et al* 50% (11x11)



(d) Carmone *et al* 50% (11x11)



(e) Carmone *et al* 50% (16x16)



(f) Carmone *et al* 50% (16x16)

Figure 5.5 - Résultats de simulation avec le procédé de 50% des comparaisons choisies de façon aléatoire

N.B. LA GÉNÉRATION POUR LA DIMENSION 6x6 A REJETÉ 12 CAS POUR CAUSE DE GRAPHE NON CONNECTÉ.

(5.3) Comparaison de procédés de calcul de priorité

De nombreux travaux ont été publiés sur la façon d'effectuer le calcul du vecteur de priorité avec la matrice construite à partir des jugements exprimés par le décideur. Les articles de Williams & Crawford (1980) et de Saaty & Vargas (1984) qui comparent les résultats obtenus avec le calcul du vecteur propre versus d'autres traitements mathématiques, dont celui de la moyenne géométrique, sont parmi les premiers à disserter sur le sujet de la façon la plus appropriée d'obtenir le vecteur de priorité.

Depuis, le débat académique se poursuit et n'a toujours pas été tranché. Les tenants de l'école de Saaty continuent de faire valoir des arguments théoriques sur le mérite du calcul basé sur le vecteur propre. De leur côté, les praticiens qui opèrent souvent sans utiliser un logiciel spécialisé trouvent plus simple de procéder avec le calcul basé sur la moyenne géométrique. Ce dernier se code facilement dans un chiffrier Excel alors que le premier requiert l'ajout de compléments, tel celui utilisé dans le contexte du présent mémoire (voir section 3.3) et exige une certaine connaissance du calcul matriciel, ce qui n'est probablement pas le cas pour certains utilisateurs.

Ce cas de figure est un bel exemple d'application des techniques mises de l'avant ici. Nous allons donc comparer les résultats du calcul du vecteur propre (Saaty, 1977) avec celui de la moyenne géométrique (Williams & Crawford, 1980) pour approfondir la question de ce débat qui perdure. Nous allons aussi inclure le calcul de la maximisation du cosinus (Kou & Lin, 2014) puisqu'il est intuitif et aligné sur les idées véhiculées dans ce mémoire et qu'il n'a pas été exploré en profondeur (seulement 15 exemples selon l'article).

(5.4) Résultats de calcul de priorité

Les diagrammes suivants (fig. 5.6) montrent les écarts entre les vecteurs obtenus par le biais des deux calculs alternatifs et résultants du calcul du vecteur propre. De même que dans les cas précédents, les simulations ont été faites à en utilisant des vecteurs générés avec les valeurs de potentiel (ρ) 3, 5, 7 et 9 pour les dimensions 6, 11 et 16.

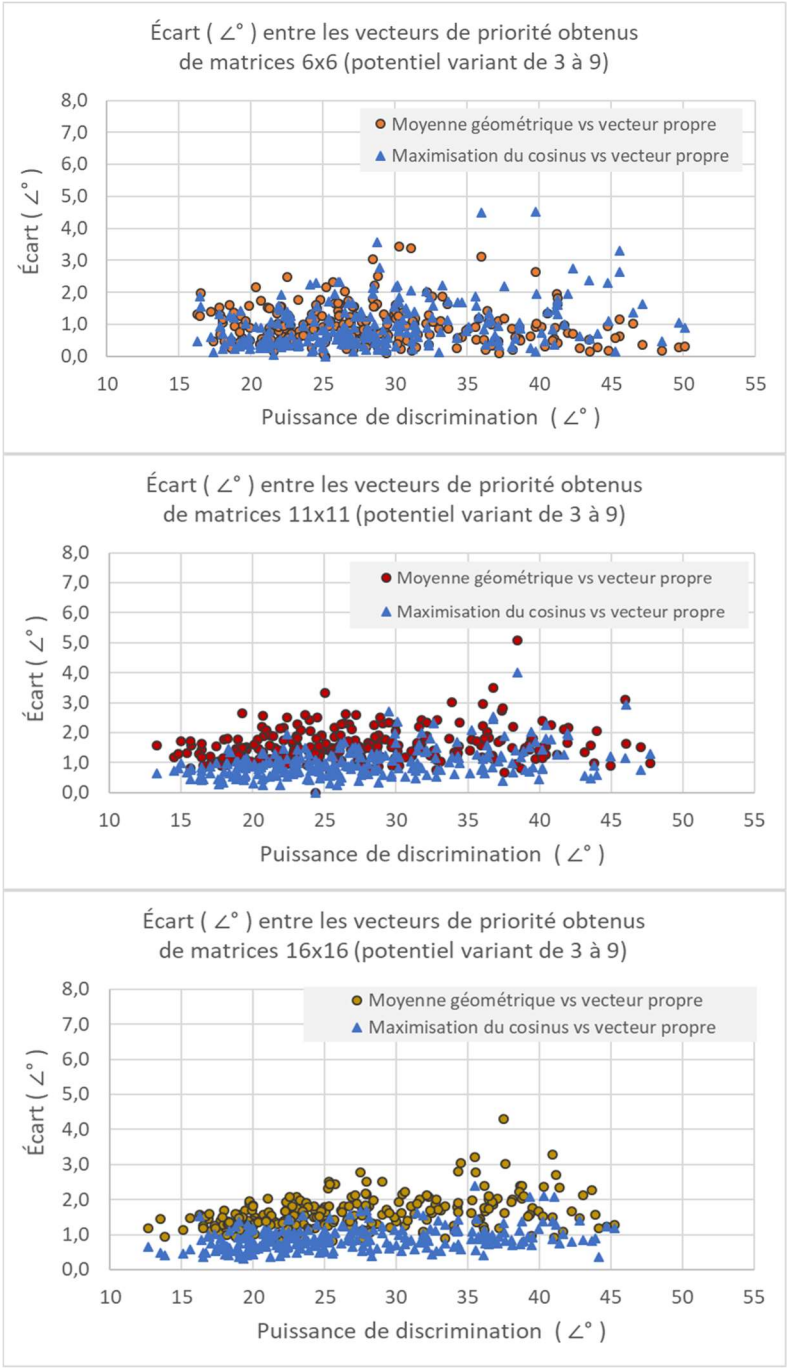


Figure 5.6 – Écarts en degrés d'angle entre les vecteurs de priorité obtenus avec trois calculs différents. Essais comparatifs réalisés aux dimensions 6, 11 et 16.

Force est de constater que les écarts observés sont en deçà de la limite de précision, dans tous les échantillons. Ce résultat peut donc être interprété comme une indication que le débat sur le mérite d'un calcul de priorité versus l'autre est vain, à défaut de trouver de nouveaux arguments.

(6) Analyse des résultats

Nous formulons ici des commentaires qui mettent en valeur les résultats des simulations en les croisant pour faciliter la compréhension des phénomènes observés.

(6.1) Observations principales sur les procédés de réduction

Les graphiques suivants (fig. 6.1) sont obtenus en croisant les résultats présentés à la section 5.2.

On y constate qu'avec la dimension 6 (a), les deux procédés donnent une performance équivalente avec environ seulement 25% des écarts sous la barre de la limite de précision. Par ailleurs, les deux admettent aussi un certain nombre de valeur aberrantes. Notons que les deux procédés utilisent respectivement 8 (50% aléatoire) et 9 (Best-Worst) comparaisons. À l'inverse du premier, les comparaisons avec Best-Worst sont dirigées. Pourtant les deux résultats sont relativement équivalents dans cette dimension.

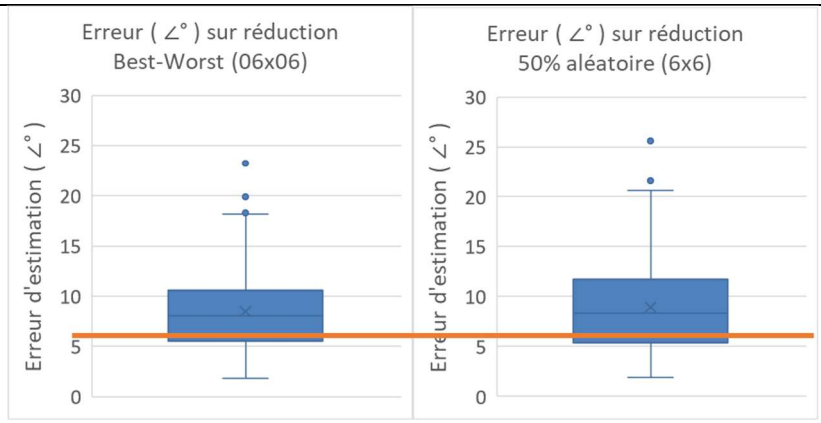
À la dimension 11 (b), le 50% aléatoire se distingue nettement. Notons qu'ici le nombre de comparaisons diffère avec 28 (50% aléa.) versus 19 (Best-Worst). L'information supplémentaire provenant des jugements additionnels apparaît donc pertinente pour obtenir plus de précision.

À la dimension 16 (c), le 50% aléatoire se démarque complétement. Il ne produit toujours que 25% des résultats sous la barre, mais les écarts, dans leur ensemble, sont beaucoup moins prononcés.

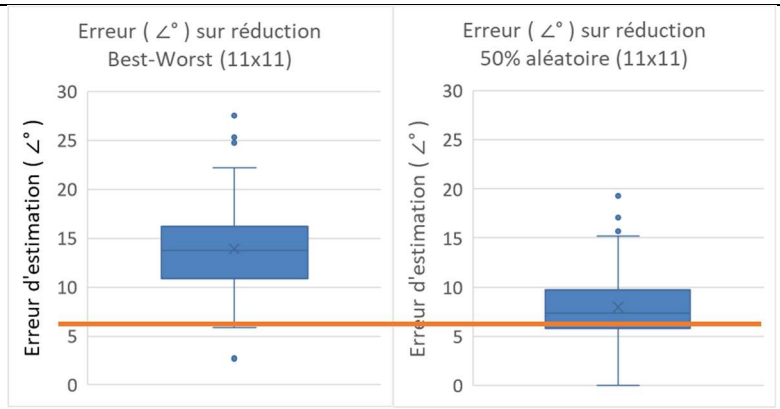
Si on reprend les résultats du procédé avec 50% aléatoire sur les trois dimensions 6, 11 et 16 (d) on constate une nette amélioration sur l'ensemble des écarts. Toutefois, elle ne réussit pas à franchir le cap des 25% sous la limite de précision. Puis, on a le constat inverse pour le procédé Best-Worst (e) qui lui régresse de façon importante avec l'accroissement du nombre de comparaisons manquantes, au point où, à la dimension 16, tous les points sont au-delà de la limite de précision.

On peut alors formuler l'hypothèse suivante. Soit, $\delta(v, v')$ l'écart entre un vecteur v et son estimation v', obtenue via un procédé de réduction, et la limite de précision L pour la mesure de l'écart. Soit r égal au nombre de comparaisons requises pour satisfaire $\delta(v, v') < L$. Si on

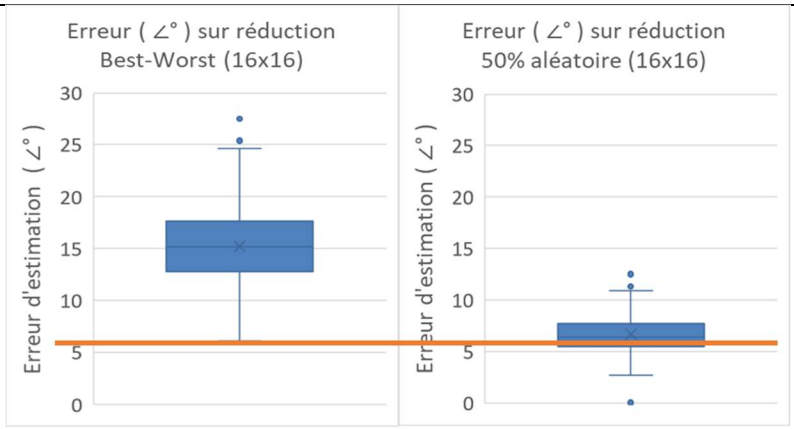
combine les observations des figures 6.2 (d) et (e), on peut entrevoir la possibilité que l'ordre de la réduction $\mathcal{O}(r)$ se situe dans l'intervalle suivant: $\mathcal{O}(n) < \mathcal{O}(r) < \mathcal{O}(n^2)$.



(a) 6x6



(b) 11x11



(c) 16x16

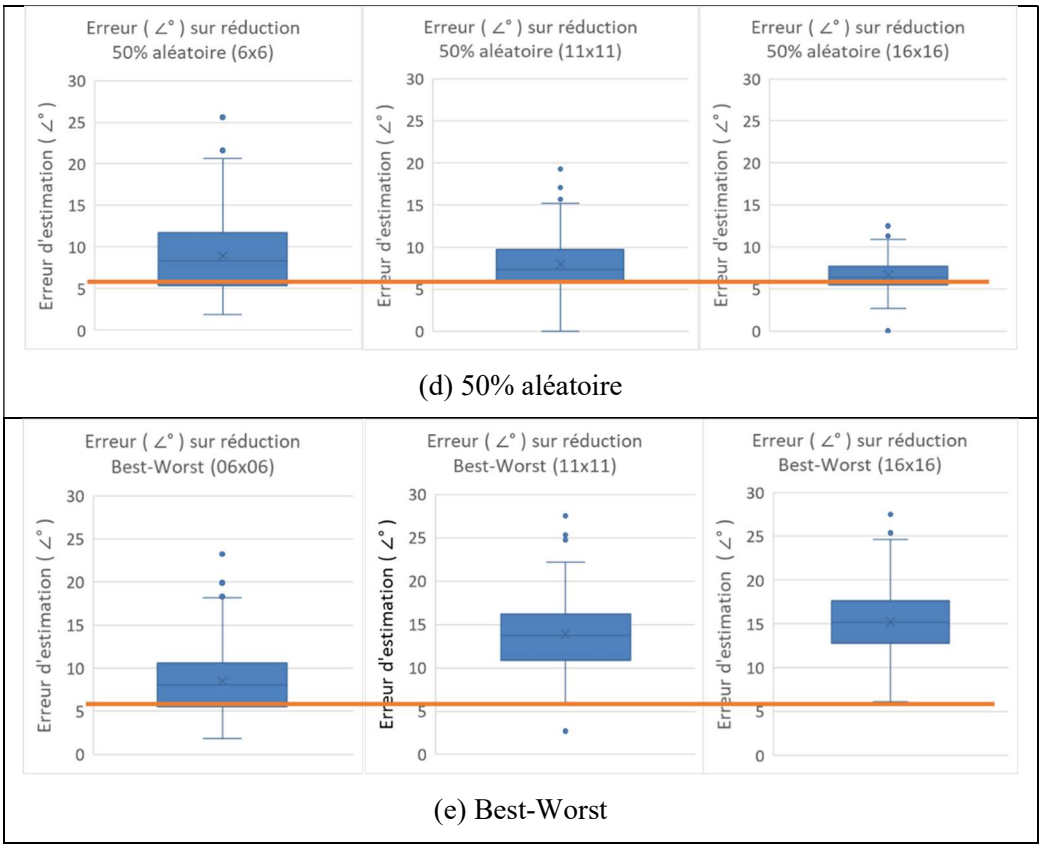


Figure 6.1 - Résultats croisés

(6.2) Observations additionnelles

(6.2.1) Comportement de l'erreur d'estimation

Les graphiques suivants (fig. 6.2) montrent un comportement de l'erreur d'estimation qui ne semble pas lié au procédé de réduction puisqu'il est présent dans les deux séries de résultats.

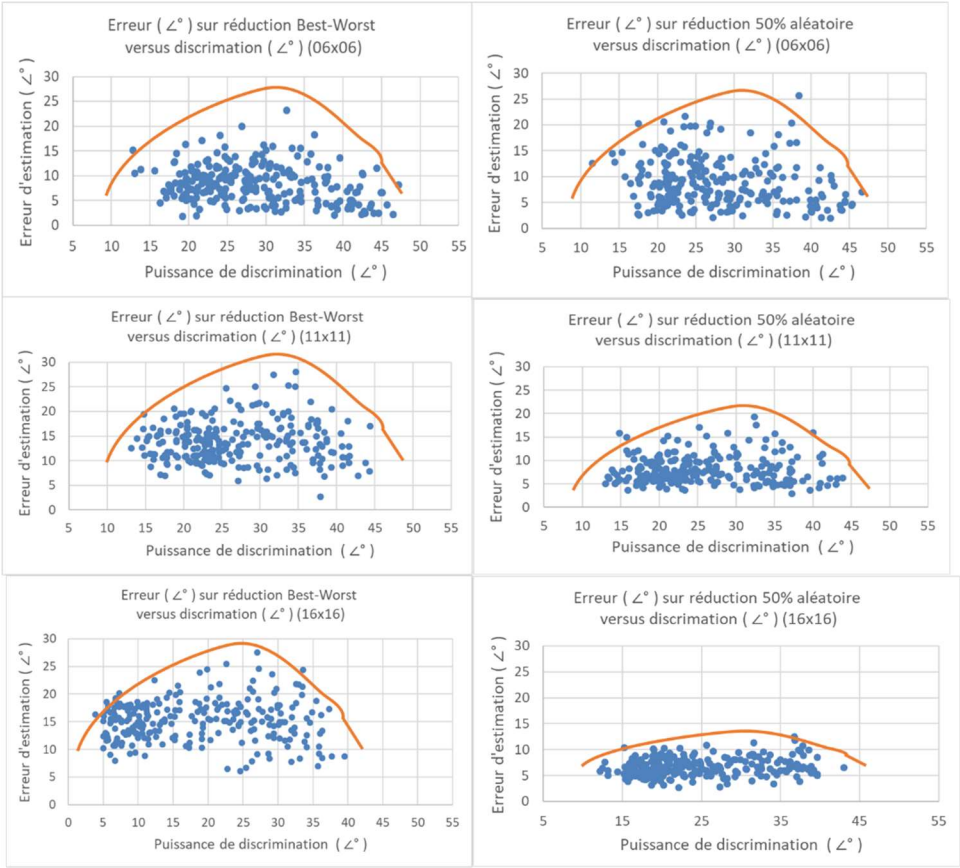


Figure 6.2 - Forme générale de la distribution de l'erreur de réduction en fonction de la puissance de discrimination du vecteur estimé.

On peut commenter la tendance commune observée, en disant que l'étalement de l'erreur grandit de 5° à 30° de discrimination, puis décroit de 30° à la borne supérieure. Nous n'avons pas d'explication formelle pour cette observation. Mais nous signalons son intérêt sur la base qu'elle peut alimenter la réflexion sur la limite de précision ou d'autres aspects de la méthode.

Une possibilité qui pourrait être explorée serait que la présence accrue d'un grand nombre de petites valeurs peut affecter l'estimation de façon significative et que la proportion de petites valeurs présentes dans la matrice est un facteur lié à la puissance de discrimination. En particulier, un point à vérifier serait que lorsque le vecteur s'approche du PND, l'erreur d'arrondi (mentionnée à la section 3.5.2) diminue au fur et à mesure.

Il y a deux façons par laquelle l'erreur d'arrondi se manifeste. La première est quand la valeur est proche d'un point de l'échelle numérique, l'erreur est petite. Par exemple, arrondir 1,05 produit une erreur de 5%. La deuxième est que la valeur en question est plus proche du centre entre deux

points de l'échelle et génère une erreur plus grande, comme c'est le cas avec la valeur 1,45 qui génère une erreur de 45%. Notons que le même écart avec une valeur d'échelle plus élevée aura un impact moindre. Par exemple, l'erreur avec l'arrondi de 7,45 donne une erreur de seulement 6%. Il est possible que la variation de la distribution des cas d'erreurs (proportions) joue un rôle dans ce que l'on observe.

Ce phénomène est peut-être un artefact de l'utilisation de l'échelle numérique *linéaire*. Il est possible qu'il ne soit pas présent avec d'autres échelles dont l'étalement des valeurs est tel que la grandeur des interstices soit moins propice à générer de telles erreurs d'arrondi.

(6.2.2) Traitement avec l'échelle géométrique

À cet effet, le résultat suivant (fig.6.3) obtenu avec l'échelle *géométrique* (voir échelle #26 dans la fig. 1.5(a)) montre que le problème en question n'est pas présent dans ce cas et serait donc un artefact propre à l'échelle *linéaire*.

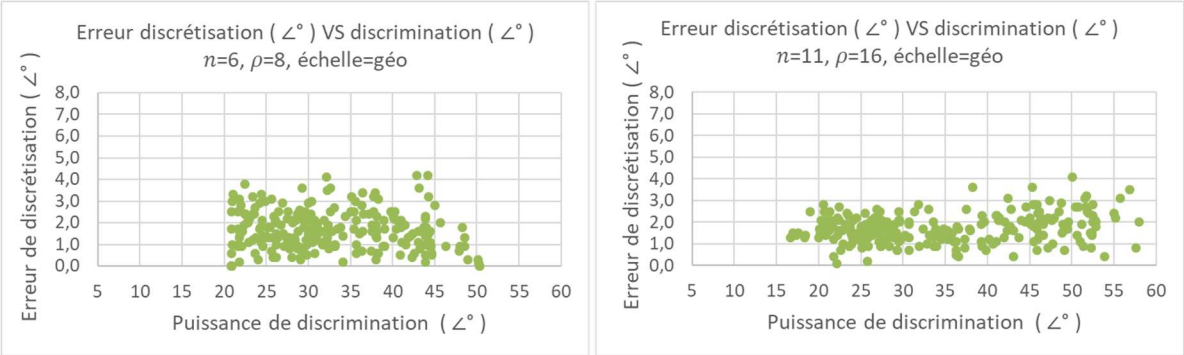


Figure 6.3 - Évaluation de l'erreur de discrétisation pour la dimension 11 avec deux valeurs de potentiel en utilisant l'échelle *géométrique* plutôt que l'échelle *linéaire*.

Pour finir, on pourrait aussi examiner la possibilité d'éliminer les jugements d'équivalence si ces derniers sont vraiment ceux qui entraînent la majeure partie de l'erreur. Cette idée est inspirée de Wedley (2009) qui explique le résultat de recherches qu'il a effectué précédemment à l'effet que la redondance des jugements obtenue avec une matrice complète n'est probablement pas requise et que, par ailleurs, les petites valeurs seraient les premières que l'on devrait omettre.

D’une façon ou d’une autre, une meilleure compréhension de ce qui cause le phénomène devrait amener un nouvel éclairage sur la façon de fixer la limite de précision et préférablement d’obtenir de meilleures estimations.

(7) Conclusion

La contribution principale de ce mémoire est d'offrir un nouvel ensemble intégré de techniques pour appuyer la recherche sur le perfectionnement de la méthode AHP. Cet ensemble comprend :

- Une façon de caractériser les vecteurs de priorité pour en définir le domaine de valeur
- Cette définition du domaine de valeur justifie le bien-fondé d'une nouvelle technique pour générer des données de simulation;
- Une mesure de proximité ayant une interprétation rationnelle pour déterminer l'écart entre un vecteur cible et son approximation par un procédé alternatif (via réduction, calcul différent, via une échelle alternative ou toute combinaison de ces variantes)
- Et, pour compléter, il fournit une façon de déterminer la limite de précision des vecteurs de priorité que l'on peut obtenir en utilisant une échelle discrète d'expression des jugements de préférence. Et cette limite peut être calculée quelle que soit l'échelle numérique.

À titre de de contribution secondaire, nous offrons les points suivants :

- Les essais effectués dans le cadre de la mise au point des éléments de contribution principaux ont permis de constater que les données de simulation utilisées à ce jour délaissent plusieurs zones du domaine de valeur des vecteurs de priorité (section 3.3.2).
- Nous avons été en mesure d'observer et de commenter l'efficacité des deux procédés de réduction du nombre de comparaisons en les comparant avec les mêmes conditions, côte-à-côte. En particulier, nous avons pu établir que l'énoncé que 50% des comparaisons peuvent être omises sans impact significatif sur les priorités obtenues n'est pas tout à fait exact si on considère qu'un certain pourcentage (allant jusqu'à 75%) des échantillons traités donnaient un résultat qui ne peut pas être qualifié d'estimation légitime, si on s'en tient strictement à la définition de précision établie à la section 4.4.

- Nous avons aussi été en mesure de jeter un nouvel éclairage sur le débat concernant la façon de calculer les priorités (section 5.4) en montrant que les deux méthodes les plus utilisées (calcul par le vecteur propre et par la moyenne géométrique) et une troisième (maximisation du cosinus).

Au niveau des pistes de développement additionnel, notons que le champ d'application est vaste. En effet, l'élaboration de procédés pour réduire le nombre de comparaisons, pour calculer les priorités de façon alternative et ceux visant à résoudre la question de l'échelle numérique appropriée, peuvent bénéficier de l'usage de l'ensemble intégré que nous offrons ici. En fait, c'est toute la communauté de l'AHP qui pourra en profiter grâce à des résultats d'évaluation comparables.

Bibliographie

Abastante, F., Corrente, S., Greco, S., Ishizaka, A., & Lami, I. M. (2019). A new parsimonious AHP methodology: assigning priorities to many objects by comparing pairwise few reference objects. *Expert Systems with Applications*.

Alonso, J. A., & Lamata, M. T. (2006). Consistency in the analytic hierarchy process: a new approach. *International journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems*, *14*(04), 445-459.

Alrasheedi, M. (2019). Incomplete pairwise comparative judgments: Recent developments and a proposed method. *Decision Science Letters*, *8*(3), 261-274.

Barba-Romero, S., & Pomerol, J. C. (2000). Multicriterion Decision in Management: principles and practice. *Operations Research Management Science, Massachusetts*.Belton, V., & Stewart, T. (2002). *Multiple criteria decision analysis: an integrated approach*. Springer Science & Business Media.

Brunelli, M. (2014). *Introduction to the analytic hierarchy process*. Springer.

Carmone Jr, F. J., Kara, A., & Zanakis, S. H. (1997). A Monte Carlo investigation of incomplete pairwise comparison matrices in AHP. *European journal of operational research*, *102*(3), 538-553.

Choo, E. U., & Wedley, W. C. (2004). A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices. *Computers & Operations Research*, *31*(6), 893-908.

Ciomek, K., Kadziński, M., & Tervonen, T. (2017a). Heuristics for prioritizing pair-wise elicitation questions with additive multi-attribute value models. *Omega*, *71*, 27-45.

Ciomek, K., Kadziński, M., & Tervonen, T. (2017b). Heuristics for selecting pair-wise elicitation questions in multiple criteria choice problems. *European Journal of Operational Research*, *262*(2), 693-707.

Deza, M. M., & Deza, E. (2009). Encyclopedia of distances. In *Encyclopedia of distances* (pp. 1-583). Springer, Berlin, Heidelberg.

Dodgson, J. S., Spackman, M., Pearman, A., & Phillips, L. D. (2009). Multi-criteria analysis: a manual.

Dong, Y., Xu, Y., Li, H., & Dai, M. (2008). A comparative study of the numerical scales and the prioritization methods in AHP. *European Journal of Operational Research*, *186*(1), 229-242.

Emrouznejad, A., & Marra, M. (2017). The state of the art development of AHP (1979–2017): a literature review with a social network analysis. *International Journal of Production Research*, *55*(22), 6653-6675.

Fedrizzi, M., & Giove, S. (2013). Optimal sequencing in incomplete pairwise comparisons for large-dimensional problems. *International Journal of General Systems*, *42*(4), 366-375.

Ferreira, F., Santos, S., & Rodrigues, P. (2011). From traditional operational research to multiple criteria decision analysis: basic ideas on an evolving field. *Problems and Perspectives in Management*, *9*(3), 114-121.

Golany, B., & Kress, M. (1993). A multicriteria evaluation of methods for obtaining weights from ratio-scale matrices. *European Journal of Operational Research*, *69*(2), 210-220.

Heckel, R., Simchowitz, M., Ramchandran, K., & Wainwright, M. J. (2018). Approximate ranking from pairwise comparisons. *arXiv preprint arXiv:1801.01253*.

Herman, M. W., & Koczkodaj, W. W. (1996). A Monte Carlo Study of Parwise Comparison. *Inf. Process. Lett.*, *57*(1), 25-29.

Ishizaka, A., & Lusti, M. (2006). How to derive priorities in AHP: a comparative study. *Central European Journal of Operations Research*, *14*(4), 387-400.

Ishizaka, A., & Labib, A. (2011). Review of the main developments in the analytic hierarchy process. *Expert systems with applications*, *38*(11), 14336-14345.

Ishizaka, A., Pearman, C., & Nemery, P. (2012a). AHPSort: an AHP-based method for sorting problems. *International Journal of Production Research*, *50*(17), 4767-4784.

Ishizaka, A. (2012b). Clusters and pivots for evaluating a large number of alternatives in AHP. *Pesquisa Operacional*, *32*(1), 87-102.

Kendall, M. G., & Smith, B. B. (1940). On the method of paired comparisons. *Biometrika*, *31*(3/4), 324-345.

Koczkodaj, W. W., Mikhailov, L., Redlarski, G., Soltys, M., Szybowski, J., Tamazian, G., ... & Yuen, K. K. F. (2016). Important Facts and Observations about Pairwise Comparisons (the special issue edition). *Fundamenta Informaticae*, *144*(3-4), 291-307.

Köksalan, M. M., Wallenius, J., & Zionts, S. (2011). *Multiple criteria decision making: from early history to the 21st century*. World Scientific.

Kou, G., & Lin, C. (2014). A cosine maximization method for the priority vector derivation in AHP. *European Journal of Operational Research*, *235*(1), 225-232.

Meesariganda, B. R., & Ishizaka, A. (2017). Mapping verbal AHP scale to numerical scale for cloud computing strategy selection. *Applied Soft Computing*, *53*, 111-118.

Pamučar, D., Stević, Ž., & Sremac, S. (2018). A new model for determining weight coefficients of criteria in mcdm models: Full consistency method (fucom). *Symmetry*, *10*(9), 393.

Raileanu, L. E., & Stoffel, K. (2004). Theoretical comparison between the gini index and information gain criteria. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, *41*(1), 77-93.

Rezaei, J. (2015). Best-worst multi-criteria decision-making method. *Omega*, *53*, 49-57.

Rezaei, J. (2016). Best-worst multi-criteria decision-making method: Some properties and a linear model. *Omega*, *64*, 126-130.

Saaty, T. L. (1977). A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of mathematical psychology*, *15*(3), 234-281.

Saaty, T.L. (1980) The Analytic Hierarchy Process. *McGraw-Hill, New York*.

Saaty, T. L. (2008). Relative measurement and its generalization in decision making why pairwise comparisons are central in mathematics for the measurement of intangible factors the analytic

hierarchy/network process. *RACSAM-Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, *102*(2), 251-318.

Saaty, T. L., & Vargas, L. G. (1984). Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios. *Mathematical modelling*, *5*(5), 309-324.

Salo, A. A., & Hämäläinen, R. P. (1997). On the measurement of preferences in the analytic hierarchy process. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, *6*(6), 309-319.

Schoner, B., Wedley, W. C., & Choo, E. U. (1993). A unified approach to AHP with linking pins. *European Journal of Operational Research*, *64*(3), 384-392.

Shen, Y., Hoerl, A. E., & Mcconnell, W. (1992). An incomplete design in the analytic hierarchy process. *Mathematical and Computer Modelling*, *16*(5), 121-129.

Takeda, E., & Yu, P. L. (1995). Assessing priority weights from subsets of pairwise comparisons in multiple criteria optimization problems. *European journal of operational research*, *86*(2), 315-331.

Thompson, W. A., & Remage, R. (1964). Rankings from paired comparisons. *The Annals of Mathematical Statistics*, *35*(2), 739-747.

Triantaphyllou, E. (1999). Reduction of pairwise comparisons in decision making via a duality approach. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, *8*(6), 299-310.

Triantaphyllou, E., & Mann, S. H. (1990). An evaluation of the eigenvalue approach for determining the membership values in fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, *35*(3), 295-301.

Vaidya, O. S., & Kumar, S. (2006). Analytic hierarchy process: An overview of applications. *European Journal of operational research*, *169*(1), 1-29.

Van Dongen, S., & Enright, A. J. (2012). Metric distances derived from cosine similarity and Pearson and Spearman correlations. *arXiv preprint arXiv:1208.3145*.

Warrens, M. J. (2016). Inequalities between similarities for numerical data. *Journal of Classification*, *33*(1), 141-148.

Wedley, W. C. (2009, July). Fewer comparisons: efficiency via sufficient redundancy. In *10th international symposium on the analytic hierarchy process* (Vol. 29, pp. 1-15).

Whitaker, R. (2007). Validation examples of the analytic hierarchy process and analytic network process. *Mathematical and Computer Modelling*, *46*(7-8), 840-859.

Williams, C., & Crawford, G. (1980). *Analysis of Subjective Judgment Matrices* (No. RAND/R-2572-AF). RAND CORP SANTA MONICA CA.

Annexe A – Limites de la puissance de discrimination

Cette annexe présente la façon dont les limites de la *puissance de discrimination* sont obtenues. Ces calculs sont mentionnés à la section 3.3.2 du mémoire en lien avec les graphes des Fig. 3.7(a) et 3.7(b). On fait référence ici à la *puissance de discrimination* de l'ensemble des alternatives en regard d'un critère spécifique.

Il est mentionné dans Ishizaka *et al* (2012, p.4769) que,

> *« Le poids d'un critère n'a pas le monopole de discrimination sur une ensemble d'alternatives. En effet, son poids doit être multiplié par la performance des alternatives face au critère. Une différence importante dans les performances respectives des alternatives peut être hautement discriminante même si le poids du critère est peu élevé. »*

Nous récapitulons ici les définitions utilisées dans le mémoire et quelques autres qui sont requises aux fins des démonstrations. Soit,

v : le *vecteur de priorité*, est composé d'éléments positifs de dimension n, dont la somme donne 1. Sans perte de généralité, posons $v_1 = \max v_i$, et $v_n = \min v_i$.

x : un vecteur de dimension n, tel que $v_i = x_i \cdot v_n$.
Notons que $\sum x_i = \frac{1}{v_n}$ et que $v_i = \frac{x_i}{\sum x_i}$.

ρ : le potentiel du vecteur v; $\rho = \max v_i / \min v_i = v_1/v_n$, et donc $v_1 = \rho \cdot v_n$. ρ prend les valeurs de l'échelle numérique utilisée pour quantifier les jugements exprimés, e.g. avec l'échelle *linéaire*, il prend les valeurs de 2 à 9.

PND : un vecteur de dimension n, dont les éléments ont tous la valeur $1/n$.

$P(v)$: La *puissance de discrimination de* v qui est l'angle en degrés entre les vecteurs v et PND, soit,

$$\text{Distance angulaire en degrés } (\angle^\circ) \text{ entre les vecteurs } v \text{ et } PND = \frac{180}{\pi} \cdot cos^{-1}\left(\frac{v \circ PND}{\sqrt{v \circ v} \cdot \sqrt{PND \circ PND}}\right)$$

L_{sup} : La limite supérieure de $P(v)$ en fonction d'une valeur ρ donnée.

L_{1er} : La limite du 1er pas de discrétisation de $P(v)$ en fonction d'une valeur ρ donnée.

N.B. La borne inférieure peut être caractérisée par la condition $max\ v_i = min\ v_i$, qui correspond à la situation dans laquelle les alternatives considérées seraient toutes équivalentes entre elles (i.e. $v = PND$), alors que dans le cas du *1er pas de discrétisation*, on a au moins deux éléments de v qui sont différents.

Nous montrons dans ce qui suit, comment sont établies les valeurs de L_{sup} et de L_{1er} pour un vecteur de priorité de dimension n en fonction d'une valeur ρ donnée.

On complète en précisant les formules permettant de calculer la valeur des éléments de v à ces deux points limites.

<u>Rappel</u> : Ces formules sont pertinentes pour la validation adéquate de la génération des données de simulation. Les procédés mis à l'essai avec ces données requièrent qu'elles soient représentatives de l'ensemble du domaine de valeur.

<u>Résultats à démontrer</u>

Cette annexe permet d'établir que $P(\boldsymbol{v})$:

- Atteint sa limite supérieure, L_{sup} lorsque

$$\boldsymbol{v} = \left[\underbrace{\frac{\rho}{k(\rho-1)+n}, \dots, \frac{\rho}{k(\rho-1)+n}}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\frac{1}{k(\rho-1)+n}, \dots, \frac{1}{k(\rho-1)+n}}_{n-k \text{ fois}} \right]$$

  La valeur de k étant une fonction des valeurs de n et de ρ.

- Atteint son 1er pas de discrétisation, L_{1er} lorsque

$$\boldsymbol{x} = \left[\rho, \underbrace{\frac{\rho^2+1}{\rho+1}, \dots, \frac{\rho^2+1}{\rho+1}}_{n-2 \text{ fois}}, 1 \right]$$

Ce qui suit est structuré en trois étapes.

1	Montrer que de maximiser (ou minimiser) $P(v)$ est équivalent à maximiser (ou minimiser) la somme des carrés des éléments du vecteur v.
2	Montrer comment établir la limite supérieure,
3	Montrer comment établir la limite du 1er pas de discrétisation.

Étape 1

La première étape consiste d'abord, à montrer que de maximiser la puissance de discrimination est équivalent à maximiser la somme des carrés des éléments du vecteur.

On note que de maximiser la mesure de l'angle θ entre un vecteur v et le PND est équivalent à minimiser la mesure du cosinus, soit

$$max\ \theta(v, PND) \equiv min \frac{v \circ PND}{\sqrt{v \circ v} \cdot \sqrt{PND \circ PND}}$$

On effectue les transformations algébriques suivantes :

$$min \frac{v \circ PND}{\sqrt{v \circ v} \cdot \sqrt{PND \circ PND}} = min \frac{v_1 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + v_n \cdot \frac{1}{n}}{\sqrt{v_1 \cdot v_1 + \cdots + v_n \cdot v_n} \cdot \sqrt{\underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}_{n \text{ fois}}}}$$

$$= min \frac{\frac{1}{n}(v_1 + \cdots + v_n)}{\sqrt{{v_1}^2 + \cdots + {v_n}^2} \cdot \sqrt{\underbrace{\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{n \text{ fois}}}}$$

$$= min \frac{\frac{1}{n} \cdot 1}{\sqrt{{v_1}^2 + \cdots + {v_n}^2} \cdot \sqrt{n \cdot \frac{1}{n^2}}}$$

$$= min \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{{v_1}^2 + \cdots + {v_n}^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}}$$

$$= min \frac{1}{\sqrt{n \cdot ({v_1}^2 + \cdots + {v_n}^2)}} \qquad \text{(Eq \#1)}$$

qui nous indique que de minimiser la valeur du cosinus est équivalent à maximiser le dénominateur de l'expression précédente, soit

$$min \frac{v \circ PND}{\sqrt{v \circ v} \cdot \sqrt{PND \circ PND}} \equiv max \sqrt{{v_1}^2 + \cdots + {v_n}^2}$$

Et nous avons, par ailleurs que,

$$max \sqrt{{v_1}^2 + \cdots + {v_n}^2} \equiv max\ {v_1}^2 + \cdots + {v_n}^2$$

On obtient alors que de maximiser la mesure de l'angle θ entre les vecteurs v et PND est équivalent à maximiser la somme des carrés des éléments de v.

$$max\ \theta(v, PND) \equiv max \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

En corollaire, le *1er pas de discrétisation* peut être obtenu en minimisant la somme des carrés des éléments de v sous la condition que l'on a au moins deux éléments de v qui sont différents.

Pour ce qui suit, on introduit la définition de fonction suivante

$$g(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

Nous concluons cette étape par la définition des deux problèmes suivants (Pr. #1 et Pr. #2) qui permettront respectivement d'établir les valeurs de L_{sup} et de L_{1er}, soit

$$\boxed{\begin{array}{c} \max_{v} g(v) \\ \text{s.c.} \\ c1: \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \\ c2:\ v_1 = \rho \cdot v_n \\ c3: v_i > 0 \end{array}} \quad \text{(Pr. \#1)}$$

Et

$$\boxed{\begin{array}{c} \min_{v} g(v) \\ \text{s.c.} \\ c1: \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \\ c2: v_1 = \rho \cdot v_n \\ c3: v_i \geq 0 \end{array}} \quad \text{(Pr. \#2)}$$

Étape 2

Pour résoudre le Pr. #1, sans perte de généralité, on peut ajouter le bloc de contraintes suivantes,

$$c4: v_i \geq v_{i+1}, \forall i = 1, \dots, n-1$$

Puis, on note que la fonction objective est *convexe* et que l'on a n variables et $n+2$ contraintes. On aura donc n contraintes à saturation et 2 contraintes non saturées.

On sait que $c1$ et $c2$ sont saturées (par la définition du vecteur v), et que $v_n > 0$ (sinon on aurait $\sum v_i = 0$). Donc $c3$ est non saturée, ce qui nous permet de conclure que les égalités du groupe $c4$ seront alors toutes respectées, sauf une.

On peut donc énoncer que le vecteur v aura la forme suivante :

$$v = [\underbrace{v_1, \dots, v_1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{v_n, \dots, v_n}_{n-k \text{ fois}}]$$

Alors, la fonction objective peut être reformulée comme suit,

$$g(v) = k{v_1}^2 + (n-k)\, {v_n}^2$$

$$g(v|\rho, n) = k\, \rho^2\, {v_n}^2 + (n-k)\, {v_n}^2$$

$$g(v|\rho, n) = (k(\rho^2 - 1) + n)\ v_n^2$$

Puis, par $c1$, on a

$$1 = k\ v_1 + (n - k)\ v_n$$

$$1 = k\ \rho\ v_n + (n - k)\ v_n$$

$$1 = \ (k\ (\rho - 1) + n)\ v_n$$

qui nous donne,

$$v_n = \frac{1}{k\ (\rho - 1) + n}$$

Si on remplace v_n dans la dernière formulation de $g(v|\rho, n)$ par cette expression, on obtient

$$g(v|\rho, n) = h(k|\rho, n) = (k(\rho^2 - 1) + n)\ \cdot \left(\frac{1}{k\ (\rho - 1) + n}\right)^2$$

$$h(k|\rho, n) = \frac{k(\rho^2 - 1) + n}{(k\ (\rho - 1) + n)^2}$$

On peut alors énoncer que le problème suivant, Pr. #1-1, est équivalent au Pr.#1 et permet de calculer L_{sup} en fonction de k étant donné ρ et n.

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{k} h(k|\rho, n) \\ \text{s.c.} \\ \quad c1: k\ entier \\ c2: 1 \leq k \leq n - 1 \end{array}} \quad \text{(Pr. \#1-1)}$$

Notons que par l'équation (Eq. 1), le calcul de $P(\boldsymbol{v})$ peut alors être reformulé comme suit,

$$P(\boldsymbol{v}) = \frac{180}{\pi} \cdot cos^{-1}\left(\frac{v \circ PND}{\sqrt{v \circ v} \cdot \sqrt{PND \circ PND}}\right)$$

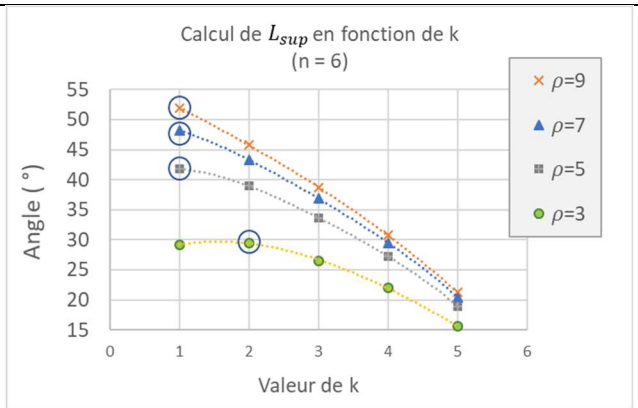
$$P(\boldsymbol{v}) = \frac{180}{\pi} \cdot cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n \cdot ({v_1}^2 + \cdots + {v_n}^2)}}\right)$$

$$P(\boldsymbol{v}) = \frac{180}{\pi} \cdot cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n \cdot g(v)}}\right)$$

$$P(\boldsymbol{v}) = \frac{180}{\pi} \cdot cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n \cdot h(k)}}\right)$$

Les tableaux suivants (fig. A1 a), b) et c)) montrent les solutions pour les dimensions 6, 11 et 16 avec les valeurs de $\rho = 3, 5, 7\ et\ 9$.

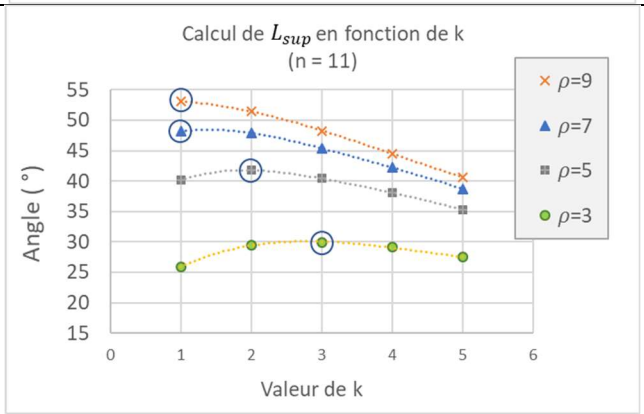
a)



k	ρ=9	ρ=7	ρ=5	ρ=3
1	52,0	48,2	41,8	29,2
2	45,8	43,3	38,9	29,5
3	38,7	36,9	33,7	26,6
4	30,8	29,5	27,2	22,0
5	21,3	20,4	19,0	15,6

Valeurs optimales de k dans les cases foncées.

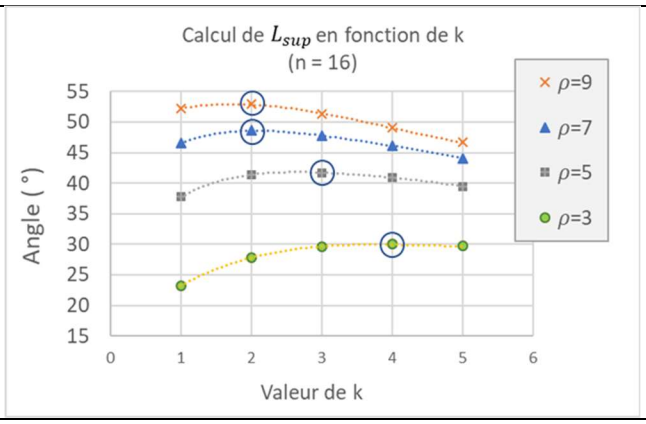
b)



k	ρ=9	ρ=7	ρ=5	ρ=3
1	53,1	48,1	40,1	25,9
2	51,5	47,9	41,8	29,5
3	48,2	45,4	40,4	30,0
4	44,6	42,2	38,1	29,1
5	40,7	38,7	35,3	27,5
6	36,6	35,0	32,0	25,5

Valeurs optimales de k dans les cases foncées.

c)



k	ρ=9	ρ=7	ρ=5	ρ=3
1	52,2	46,6	37,8	23,3
2	**52,9**	**48,6**	41,4	27,9
3	51,3	47,8	**41,7**	29,6
4	49,1	46,1	40,9	**30,0**
5	46,7	44,0	39,5	29,7
6	44,1	41,8	37,8	29,0

Valeurs optimales de k dans les cases foncées.

Figure A1 - Limites supérieures de la puissance de discrimination en fonction de la valeur de k pour les dimensions 6, 11 et 16 présentées respectivement dans a), b) et c), avec $\rho = 3, 5, 7$ et 9.

Étape 3

Pour résoudre le Pr. #2, on utilise d'abord la définition du vecteur x pour le reformuler en Pr. #2-1, comme suit,

$$\min_{x} \min_{v_n} \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot v_n)^2$$

s.c.

$$c1: x_1 = \rho$$
$$c2: x_n = 1$$
$$c3: \sum x_i \cdot v_n = 1$$
$$c4: 1 \leq x_i \leq \rho, \forall i \in \{1, n\}$$

(Pr. #2-1)

Puis, en combinant les contraintes c1, c2 et c3 de Pr. #2-1, on peut inverser l'ordre d'optimisation et obtenir le problème suivant Pr. #2-2,

$$\min_{v_n} \min_{x} {v_n}^2 \left(1 + \rho^2 + \sum_{i=2}^{n-1} {x_i}^2\right)$$

s.c.

$$c1: \sum_{i=2}^{n-1} x_i = \frac{1}{v_n} - \rho - 1$$
$$c2: 1 \leq x_i \leq \rho, \forall i \in \{1, n\}$$

(Pr. #2-2)

On note que la fonction objective du Pr. #2-2 est *symétrique* et *convexe* en x_2 à x_{n-1}. Ceci nous permet d'énoncer qu'à l'optimum, ces $n-2$ variables prennent toutes la même valeur, soit,

$$x_i = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=2}^{n-1} x_i \,, \forall i \in \{2, n-1\}$$

$$x_i = \frac{1}{n-2} \cdot \left(\frac{1}{v_n} - \rho - 1\right), \forall i \in \{2, n-1\} \qquad \text{(Eq \#2)}$$

Ceci nous permet de reformuler Pr. #2-2 en Pr. #2-3 comme suit,

$$\boxed{\begin{aligned} &\min_{v_n} {v_n}^2 \left(1 + \rho^2 + (n-2)\left[\frac{1}{n-2} \cdot \left(\frac{1}{v_n} - \rho - 1\right)\right]^2\right) \\ &\text{s.c.} \\ &\quad c1: 1 \leq \frac{1}{n-2} \cdot \left(\frac{1}{v_n} - \rho - 1\right) \leq \rho, \forall i \in \{1, n\} \end{aligned}} \qquad \text{(Pr. \#2-3)}$$

Nommons la fonction objective de Pr. #2-3 $\varphi(v_n)$. Cette fonction peut être reformulée comme suit,

$$\varphi(v_n) = {v_n}^2 \left(1 + \rho^2 + (n-2)\left[\frac{1}{n-2} \cdot \left(\frac{1}{v_n} - \rho - 1\right)\right]^2\right)$$

$$= {v_n}^2 \left(1 + \rho^2 + \frac{1}{n-2} \cdot \left(\frac{1}{v_n} - (\rho + 1)\right)^2\right)$$

$$= {v_n}^2 \left(1 + \rho^2 + \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{{v_n}^2} - 2\frac{(1+\rho)}{v_n} + (1+\rho)^2\right)\right)$$

$$= {v_n}^2 \left(1 + \rho^2 + \frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{{v_n}^2} - \frac{2}{n-2} \cdot \frac{(1+\rho)}{v_n} + \frac{(1+\rho)^2}{n-2}\right)$$

$$= \left(1 + \rho^2 + \frac{(1+\rho)^2}{n-2}\right){v_n}^2 - \frac{2(1+\rho)}{n-2} \cdot v_n + \frac{1}{n-2}$$

La dérivée première de $\varphi(v_n)$ est

$$\varphi'(v_n) = 2\left(1 + \rho^2 + \frac{(1+\rho)^2}{n-2}\right)v_n - \frac{2(1+\rho)}{n-2}$$

Sa dérivée seconde est

$$\varphi''(v_n) = 2\left(1 + \rho^2 + \frac{(1+\rho)^2}{n-2}\right) > 0$$

La dérivée seconde étant positive, il s'agit bien d'une minimisation.

On pose $\varphi'(v_n) = 0$, qui nous donne,

$$v_n = \frac{(1+\rho)}{n-2} \cdot \frac{1}{1 + \rho^2 + \frac{(1+\rho)^2}{n-2}}$$

$$v_n = \frac{(1+\rho)}{(n-2)(1+\rho^2) + (1+\rho)^2}$$

ou,

$$\frac{1}{v_n} = \frac{(n-2)(1+\rho^2) + (1+\rho)^2}{(1+\rho)}$$

$$\frac{1}{v_n} = \frac{(n-2)(1+\rho^2)}{(1+\rho)} + \frac{(1+\rho)^2}{(1+\rho)}$$

$$\frac{1}{v_n} = \frac{(n-2)(1+\rho^2)}{(1+\rho)} + 1 + \rho$$

Puis, si on remplace cette dernière expression dans l'équation Eq #2, on obtient

$$x_i = \frac{1}{n-2} \cdot \left(\frac{1}{v_n} - \rho - 1\right)$$

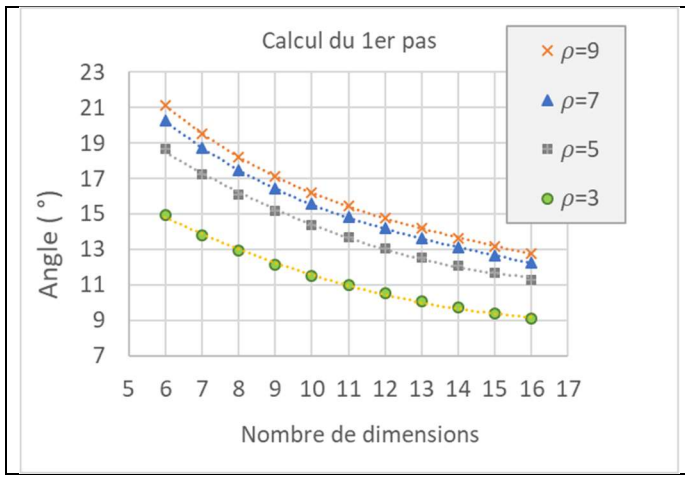
$$x_i = \frac{1}{n-2} \cdot \left(\frac{(n-2)(1+\rho^2)}{(1+\rho)} + 1 + \rho - \rho - 1\right)$$

qui, par simplification devient,

$$x_i = \frac{(1+\rho^2)}{(1+\rho)}$$

Ce qui appuie l'énoncé de départ que l'on atteint la limite L_{1er} avec le vecteur x dont le premier élément a la valeur ρ, le dernier élément a la valeur 1, et les $n-2$ autres ont la valeur $\frac{(1+\rho^2)}{(1+\rho)}$.

Les valeurs ainsi obtenues pour L_{1er} sont présentées dans le tableau suivant (figure A2).



n	ρ=9	ρ=7	ρ=5	ρ=3
6	21,1	20,3	18,7	15,0
7	19,5	18,7	17,2	13,8
8	18,2	17,5	16,1	12,9
9	17,1	16,4	15,2	12,2
10	16,2	15,6	14,4	11,5
11	15,4	14,8	13,7	11,0
12	14,8	14,2	13,1	10,5
13	14,2	13,6	12,6	10,1
14	13,7	13,1	12,1	9,7
15	13,2	12,7	11,7	9,4
16	12,8	12,2	11,3	9,1

Figure A2 - Limites du 1er pas de discrétisation de la puissance de discrimination pour les dimensions 6 à 16, avec $\rho = 3, 5, 7$ et 9.

c.q.f.d.

Référence bibliographique

Ishizaka, A., Pearman, C., & Nemery, P. (2012). AHPSort: an AHP-based method for sorting problems. *International Journal of Production Research*, *50*(17), 4767-4784.