

HEC MONTRÉAL

**Modélisation par chaînes de Markov  
de la gestion des relations clients**

**Par**

**Julien St-Pierre Fortin**

**Sciences de la gestion  
(Analytique d'affaires)**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de maîtrise ès sciences (M. Sc.)*

Décembre 2018



# Résumé

Comprendre et mesurer la relation entre les entreprises et leurs clients est essentiel pour la prise de décision d'affaires optimale dans les environnements actuels basés sur les données. Suite aux récents développements en matière de recherche sur la modélisation des relations clients dans l'industrie du *free-to-play*, nous proposons et testons un cadre de modélisation efficace à base de chaînes de Markov pour évaluer la relation entre une cohorte de clients et un réseau de produits. Nous ciblons l'industrie du jeu *free-to-play* en utilisant des données réelles de 120 jeux développés par une même entreprise. Les chaînes de Markov sont des modèles stochastiques simples, facilement compréhensibles par un public non-expert. Ils sont également suffisamment fiables et génériques pour englober de multiples aspects des relations clients. De plus, ce cadre de modélisation nous permet de généraliser naturellement les concepts de rétention et de taux d'attrition aux taux de migration entre les jeux. Les modèles proposés sont entraînés sur 1 million d'utilisateurs et testés sur 100000 utilisateurs.

**Mots-clés :** Gestion des relations clients, chaînes de Markov, *free-to-play*.

# Abstract

Understanding and measuring the relationship between businesses and their customers is central for optimal decision making in today's data-driven environments. Following recent developments of research in modelling customer relationships in the *free-to-play* industry, we propose and test an efficient Markov framework to assess the relationship between a cohort of customers and a network of products. We target the free-to-play industry by relying on 120 games data from a single company. Markov chains are simple stochastic models that are easily understandable by a non-expert audience. They are also reliable and generic enough to encapsulate multiple aspects of customer relationships. Furthermore, this framework allows us to naturally generalize the concepts of retention and churn rates to migration rates between games. The models proposed are trained on 1 million users and tested on 100000 users.

**Keywords :** Customer relationship management, Markov chains, *free-to-play*.

# Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mes directeurs Gilles Caporossi et Sylvain Perron pour le temps qu'ils ont consacré à ce mémoire et pour m'avoir permis de découvrir des pans du savoir que j'ignorais complètement avant mon entrée à HEC Montréal. J'y ai beaucoup appris et ce fût une étape décisive dans mon parcours professionnel.

Je tiens aussi à remercier tous mes collègues de l'équipe Data Science pour les nombreux échanges directement reliés, indirectement reliés et pas du tout reliés au sujet du présent mémoire.

Je remercie aussi ma famille, pour son support et son amour inconditionnel depuis le début.

Finalement, mes remerciements vont à la femme que j'aime, Sophie. Son amour m'a donné la force nécessaire pour réussir cette grande étape.

# Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Remerciements	iii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte . . . . .	2
1.2 Problématique . . . . .	3
1.3 Contributions . . . . .	6
1.4 Plan du mémoire . . . . .	8
<b>2 État de l’art</b>	<b>9</b>
2.1 Gestion des relations clients . . . . .	9
2.1.1 Acquisition . . . . .	12
2.1.2 Rétention . . . . .	14
2.1.3 Monétisation . . . . .	15
2.2 Analytique d’affaires et jeux <i>free-to-play</i> . . . . .	17
2.3 Modélisation des relations clients . . . . .	19
2.3.1 Modéliser l’attrition et la rétention . . . . .	20
2.3.2 Modéliser la LTV . . . . .	27
<b>3 Notions préliminaires sur les chaînes de Markov</b>	<b>30</b>

---

3.1	Processus de Markov . . . . .	30
3.2	Propriétés fondamentales . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Vers une approche holistique des relations clients</b>	<b>40</b>
4.1	Impact sur les relations clients . . . . .	43
4.2	Méthodologie . . . . .	45
4.2.1	Objectifs de prédiction . . . . .	47
4.2.2	Contextes d'observation . . . . .	48
4.2.3	Modèles de prédiction . . . . .	49
4.2.4	Procédure d'entraînement . . . . .	55
4.3	Résultats et discussion . . . . .	60
4.3.1	Analyse de la rétention et du désengagement des clients .	61
4.3.2	Analyse de la migration entre les jeux . . . . .	64
4.3.3	Analyse du temps de jeu . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Extensions du modèle</b>	<b>72</b>
5.1	Dynamique pour un service unique . . . . .	72
5.1.1	Simulations . . . . .	75
5.2	Dynamique pour N services . . . . .	78
5.3	Modélisation des relations clients à l'échelle du réseau . . . . .	81
5.3.1	Indicateurs de performance générique . . . . .	81
5.3.2	Modélisation de la rétention . . . . .	83
5.3.3	Modélisation de la LTV . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>86</b>
	<b>Annexes</b>	<b>88</b>
<b>A</b>	<b>Données observées</b>	<b>89</b>
<b>B</b>	<b>Matrices de projection</b>	<b>92</b>

# Liste des symboles

$\mathbf{A}$	Matrice
$\mathbf{a}$	Vecteur
$\mathbf{A}^T$	Matrice transposée
$\mathbf{a}^T$	Vecteur transposé
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Distribution normale d'espérance $\mu$ et de variance $\sigma^2$
$P(A)$	Probabilité marginale de l'évènement $A$
$P(A, B)$	Probabilité jointe des évènements $A$ et $B$
$P(A B)$	Probabilité conditionnelle de l'évènement $A$ étant donné $B$
$X$	Variable aléatoire

# Table des figures

3.1	Processus stochastique générique . . . . .	32
3.2	Processus stochastique respectant la propriété de Markov . . . . .	32
3.3	Chaîne de Markov $N = 2$ . . . . .	33
3.4	Réalisation possible du système $N = 2$ pour $t = 4$ . . . . .	34
4.1	Représentation graphique de la chaîne de Markov homogène sur les jeux . . . . .	59
4.2	Rétention, pause et attrition avec l'hypothèse de stationnarité . . . . .	62
4.3	Rétention, pause et attrition avec l'hypothèse de non-stationnarité . . . . .	63
4.4	Comparaison des performances de prédiction de la rétention . . . . .	64
4.5	Migrations avec l'hypothèse de stationnarité . . . . .	65
4.6	Migrations avec l'hypothèse de non-stationnarité . . . . .	66
4.7	Comparaison des performances de prédiction de la migration . . . . .	67
4.8	Temps total joué avec l'hypothèse de stationnarité . . . . .	68
4.9	Temps moyen joué en jour/semaine avec l'hypotèse de non-stationnarité . . . . .	69
4.10	Comparaison des performances de prédiction du temps joué . . . . .	70
5.1	Rétention pour $r$ constant . . . . .	75
5.2	Rétention pour $r$ variable . . . . .	76
5.3	Rétention $r(t)$ pour les jeux A et E . . . . .	77

# Liste des tableaux

2.1	Distributions de fréquences et processus sous-jacents . . . . .	26
4.1	Récapitulatif des différentes approches . . . . .	54
4.2	Description du jeu de données réelles . . . . .	57
4.3	Description des états analysés . . . . .	60
A.1	Données observées en contexte d'analyse de la rétention . . . . .	90
A.2	Données observées en contexte d'analyse de la migration . . . . .	91

# Chapitre 1

## Introduction

Le développement des technologies de l'information a permis aux entreprises de développer des produits et services entièrement basés sur ces technologies. Ces logiciels, que l'on utilise maintenant sur une base quotidienne, génèrent des quantités massives de données. Chaque client, chaque opération et littéralement interaction avec les logiciels constituent toutes des informations qui peuvent être enregistrées grâce aux technologies numériques. Le stockage et le traitement de cette information constituent le coeur de ce nouveau type d'offre de services. Le stockage des données permet de contrôler cette offre et d'y ajouter de la valeur. En effet, ces données recèlent les secrets de l'expérience client ouvrant la porte à tout un champ d'optimisation des relations d'affaires. Par contre, sans l'expertise pour agréger ces données, les analyser, les exploiter, ceci n'est pas possible ; l'intelligence d'affaires, l'analytique et plus récemment la science des données constituent toutes de nouvelles dimensions essentielles aux entreprises technologiques modernes capables de faire face à la concurrence. Ce sont ces nouvelles unités qui ont l'expertise nécessaire pour extraire la valeur d'affaires dans les données. Dans ce mémoire, nous empruntons cette direction et analysons les données d'une entreprise de jeux mobiles *free-to-play*.

## 1.1 Contexte

Une entreprise de jeux mobiles *free-to-play* offre des jeux gratuits sur les plateformes d'applications mobiles. On nomme parmi les plus grandes plateformes *Android* de Google, *iOS* d'Apple et *Windows Phone* de Microsoft. Ces compagnies offrent toutes à leurs clients la possibilité de télécharger les applications de leur choix afin de personnaliser leur expérience. Ces applications sont disponibles via un environnement unique qui les agrège toutes, le *Google Play*, l'*App Store* et *Microsoft Store* respectivement. Ceux-ci sont ouverts aux développeurs d'applications afin de leur permettre de proposer leurs produits ; c'est un marché d'applications.

Dans le cadre du développement de jeux mobiles *free-to-play*, les développeurs permettent aux détenteurs d'appareils mobiles d'installer et d'interagir gratuitement avec leurs jeux. Une question simple et légitime est de savoir comment ces développeurs monétisent leurs applications. Ils mettent en place une stratégie commerciale dite *freemium*.

Ce modèle d'affaires se décline en deux volets, qui ont une importance relative d'un jeu à l'autre et d'un développeur à l'autre. Parfois, un de ces deux volets n'est pas présent du tout. Nous les définissons ici :

- Achats intégrés à l'application, mieux connu de l'anglais *In-App Purchases* (IAP) : le développeur met en place un marché à l'intérieur de son application afin de permettre à l'utilisateur d'améliorer son expérience via des achats intégrés. Par exemple, dans un jeu de construction, le développeur offre la possibilité au joueur de compléter instantanément la construction d'un bâtiment moyennant une certaine somme.
- Publicités : le développeur met en place une structure qui lui permet d'agir à titre d'éditeur de publicités. Ceci correspond exactement au modèle d'affaires principal des géants du web tels que Facebook et Google. Par exemple, dans le cadre d'un jeu mobile, le développeur peut choisir qu'une ou plusieurs publicités soient affichées au joueur à certains moments de l'expérience. Le développeur doit aussi mettre en place une plateforme d'offre à l'interne, afin de gérer la demande en publicité.

Un autre élément important à noter concernant un modèle d'affaires basé sur les achats intégrés est l'asymétrie des distributions des métriques mesurant le comportement des utilisateurs [24]. On pense notamment aux distributions de revenus que la firme de développement génère par utilisateur. En effet, les revenus sont générés par une minorité d'utilisateurs (p. ex. 1-2%) puisque la majorité des utilisateurs jouissent de l'application sans déboursier un sou [28]. La majorité des revenus proviennent d'une minorité de ces payeurs. Puisqu'ils dépenseront des sommes astronomiques dans l'application, ces utilisateurs sont essentiels au succès de ce modèle d'affaires.

On classifiera généralement les utilisateurs payeurs en quatre catégories distinctes (empruntées à la taxonomie ichtyenne) :

- Méné : joueur qui dépense, en un mois, la plus petite somme proposée par le développeur (p. ex. 1\$), ce sont les plus nombreux ;
- Dauphins : joueur qui dépense le montant moyen (p. ex. 5\$) ;
- Baleines : joueur qui dépense beaucoup plus que la moyenne (p. ex. 20\$) ;
- Super baleines : joueur qui dépense des sommes astronomiques (p. ex. se calcule en milliers de dollars).

L'engagement des joueurs présents dans le jeu affiche aussi une asymétrie forte. Si un certain nombre d'utilisateurs installent le jeu mobile et y jouent une première fois, une faible fraction de ceux-ci choisiront de poursuivre leur expérience. Le nombre de joueurs qui joue au jeu, pour une date d'installation donnée, diminue rapidement d'une journée à l'autre. Les courbes de rétention des joueurs actifs dans un jeu suivent généralement une décroissance exponentielle en fonction du temps.

## 1.2 Problématique

Dans ce contexte, il est particulièrement important de modéliser les relations clients afin d'améliorer l'acquisition et la rétention des utilisateurs. Nous nous intéresserons aussi à la migration des utilisateurs entre différentes applications

d'un même développeur.

Dans le cadre de ce mémoire, nous introduirons un modèle prédictif des relations clients dans le contexte des applications mobiles et des jeux *free-to-play* et qui cadre dans une vision holistique de la gestion des relations clients. Le modèle rend compte des mouvements des clients au sein du réseau de services d'une entreprise de jeux mobiles dont nous analyserons les données, et pour laquelle le *free-to-play* est devenu l'unique modèle d'affaires. La formalisation de ce modèle nous permettra aussi de développer une nouvelle famille d'indicateurs de performance : les taux migratoires. Ceux-ci peuvent par exemple être utilisés pour améliorer les prises de décision marketing à deux niveaux des relations client : l'acquisition et la rétention. Comme nous le verrons au dernier chapitre de ce mémoire, cette formalisation nous permettra aussi de décomposer sous forme de combinaison linéaire la contribution de différents phénomènes aux prédictions du modèle.

Nous définissons quatre critères pour évaluer la validité du modèle développé :

- Généralité : doit présenter une vision unifiante des relations clients d'une entreprise. Il doit fournir la base pour décrire plusieurs phénomènes dérivés comme la rétention et la profitabilité.
- Performance : dans un cadre prédictif, le modèle doit performer mieux qu'un modèle de base.
- Interprétabilité : le modèle doit être compréhensible pour un auditoire d'affaires non technique. Les paramètres du modèle doivent contenir de l'information pertinente et dans une certaine mesure être familiers aux preneurs de décision. Nous verrons en fait qu'un sous-échantillon des paramètres du modèle développé correspond exactement aux métriques de rétention et d'attrition (terme désignant le désengagement complet) pour chaque produit/service.
- Utilité : fournir l'information agrégée la plus pertinente possible pour optimiser la prise de décision.

Les chaînes de Markov sont des modèles adéquats pour rendre compte des relations clients. Les chaînes de Markov sont des modèles très généraux puisqu'elles peuvent expliquer des systèmes dynamiques pour un nombre arbitraire

d'états (ou un nombre infini d'états) en temps continu ou discret. La seule limitation avec ce genre de modèle est sa faible capacité d'apprendre en terme d'apprentissage automatique ; ce n'est pas le modèle le plus performant. C'est un modèle fortement biaisé qui ne performe bien qu'en moyenne. Pour faire face à cette limite, nous avons restreint notre étude à des cohortes de plusieurs joueurs, laissant pour plus tard (et pour un autre type de recherche) les prédictions au niveau individuel. En étudiant des cohortes de plusieurs utilisateurs, on recherche justement à décrire et prédire les comportements moyens.

Cette limitation vient tout de même avec des avantages. Le faible nombre de paramètres dans la chaîne de Markov la rend très intuitive et interprétable. Elle décrit les systèmes complexes seulement en terme de probabilité de transition entre les états. On remarquera que dans la littérature, l'interprétabilité est souvent perdue au profit de la performance. On y retrouvera notamment des méthodes d'ensemble ou des réseaux de neurones, des modèles dont les paramètres n'ont pas d'interprétation directe. Dans un cadre d'affaires, l'interprétabilité est particulièrement importante, puisque l'opacité d'un modèle s'avère bien souvent un obstacle à l'adoption commerciale, et donc au réel ajout de valeur.

Aussi, la chaîne de Markov s'avère utile pour deux modalités de l'analytique : l'analytique descriptive et l'analytique prédictive. Les paramètres de la chaîne de Markov représentent directement les taux de rétention, de mise en pause, de migration à d'autres produit et d'attrition de la cohorte sur laquelle elle a été entraînée. De plus, la chaîne peut être utilisée pour prédire les relations clients de nouvelles cohortes (en appliquant la chaîne sur ces nouvelles distributions).

## 1.3 Contributions

La contribution de ce mémoire à la recherche sur la gestion des relations clients se définit sous trois axes principaux :

- Développement d'un modèle générique des relations clients pour plusieurs produits simultanément permettant la prédiction de l'état futur d'une cohorte de clients en considérant une variété de phénomènes : la migration d'un produit à un autre, la rétention sur un même produit, l'arrêt momentané ainsi que l'arrêt permanent de l'utilisation d'un produit ; alors que la littérature se concentre généralement sur un seul produit à la fois. Ce modèle fut initialement conceptualisé par Jean-Baptiste Débordès dans le but de calculer une LTV à l'échelle du réseau des produits. Il a établi la procédure d'entraînement du modèle et les premières versions du logiciel utilisé pour générer les prédictions. L'auteur du présent mémoire a ensuite formalisé cette idée dans les termes de la théorie des chaînes de Markov. Nous l'avons contextualisé dans le domaine plus large de la gestion des relations clients nous permettant de décrire une variété de phénomènes. Nous avons aussi établi l'ensemble des procédures de test du modèle.
- Application de ce modèle à des données réelles d'une entreprise de jeux mobiles d'envergure ; nos recherches ont été effectuées sur plus d'un million d'utilisateurs interagissant avec plus d'une centaine de jeux vidéos.
- Développement d'un cadre théorique permettant de définir n'importe quel indicateur de performance pour une cohorte de clients à l'échelle d'un réseau de produits et à partir de la formulation matricielle des chaînes de Markov. Dans la littérature, les modèles développés se concentrent sur un seul indicateur de performance à la fois.

---

Pour récapituler, nous présentons une approche en chaîne de Markov nous permettant de généraliser à plusieurs produits les indicateurs de performance classiques en usant d'effets connus comme la rétention, mais aussi en introduisant des effets dynamiques généralement mis de côté : les migrations d'un produit à un autre et la notion de désengagement temporaire. Nous testons cette approche sur des données réelles d'une entreprise bien établie dans l'industrie.

## 1.4 Plan du mémoire

**Chapitre 2 : État de l’art.** Nous avons sélectionné les articles de recherche les plus marquants relativement à la gestion des relations clients. Nous avons aussi révisé les principales contributions de la recherche sur les relations clients en contexte de jeux vidéos et de jeux *free-to-play*, sur appareil mobile en particulier. Cette section permet d’introduire le lecteur à l’état de l’art en analytique de jeu en suivant principalement deux axes : l’analyse de la rétention et de l’attrition des clients et des revenus générés par ceux-ci.

**Chapitre 3 : Notions préliminaires sur les chaînes de Markov.** On introduit le lecteur aux différents types de chaînes de Markov et à leurs propriétés, auxquelles les sections suivantes feront grandement référence pour développer le modèle.

**Chapitre 4 : Vers une approche holistique des relations clients.** Ce chapitre constitue le coeur de la contribution du présent mémoire. On y décrit la méthodologie de l’auteur, l’extraction des données, les contextes d’observation, la procédure d’entraînement, l’évaluation de la performance des modèles et on y applique les modèles développés sur des données réelles.

**Chapitre 5 : Description analytique.** Dans ce chapitre, on approfondit le formalisme des chaînes de Markov appliquées à la gestion des relations clients à la décomposition des prédictions du modèle en divers composantes. Les prédictions y sont alors comprises comme une combinaison linéaire de ces composantes. Nous y posons aussi les bases mathématiques du développement de n’importe quel indicateur de performance à l’échelle du réseau de produits.

# Chapitre 2

## État de l'art

### 2.1 Gestion des relations clients

La gestion des relations clients ou CRM (de l'anglais *Customer relationship management*) est liée mais pas restreinte au marketing. Elle est aussi devenue possible grâce aux technologies de l'information qui permettent de récolter et d'analyser un grand nombre de données. La gestion personnalisée des clients pour les grandes entreprises n'est sans doute possible que dans ce contexte où il y a un certain degré d'automatisation. En effet, au début du marketing numérique, les firmes s'appuyaient sur les fonctionnalités du *database marketing* afin de segmenter les clients. On appliquait les techniques de marketing direct (mail, publi-postage, etc.) à ces segments. Les avancées technologiques ont permis de raffiner cette voie en personnalisant de plus en plus les stratégies marketing, faisant contraste avec marketing traditionnel de masse.

Ce lien avec la technologie est si intime qu'historiquement, on a associé le CRM au logiciel qui permet de traquer les clients de la firme pour laquelle il a été implanté. Cependant, le CRM ne s'y limite pas et s'avère un sujet de recherche en plein développement.

Kumar et al. [21] adopte une vision stratégique du CRM où la firme développe des stratégies spécifiques pour chaque type de consommateur. De par ces stratégies, la firme entretient des relations significantes avec le client où elle tente de

lui assurer satisfaction tout en extrayant de riches informations de ces relations dont elle pourra tirer parti dans le futur.

Afin d'élaborer une stratégie CRM efficace à partir de ces informations, il est nécessaire d'y appliquer des techniques d'analyse de données. Winer [44] présente un modèle à sept dimensions pour décrire le CRM :

- Base de données : architecture assurant la collecte, le stockage des données et leur traitement via des pipelines ETL.
- Analyse : analyses personnalisées (permettant le *1-to-1 marketing*) basées sur la rétention, la LTV (de l'anglais *Lifetime Value*, les revenus générés par un client), l'analyse du panier de produits, les taux de conversion et l'optimisation des clics par campagne, etc.
- Sélection des clients : ceci dépend de l'objectif de la campagne. La sélection peut se baser sur les analyses de la LTV, la fréquence d'achat, la loyauté au service, la loyauté à la marque ou sur l'algorithme d'un tierce partie comme Facebook (p. ex. les audiences similaires). Elle peut aussi se faire sur des segments démographiques, méthode couramment utilisée par les gestionnaires d'acquisition des utilisateurs UAM (de l'anglais *User Acquisition Manager*), lorsque différentes hypothèses sont testées.
- Ciblage des clients : par email, par publipostage, via une publicité télévisée et/ou des bannières web ;
- Relations clients : par l'établissement de programmes de loyauté, de récompenses, d'un service client satisfaisant et respectueux, d'une personnalisation de l'expérience et du maintien d'une communauté. Ceci représente un cadre plus général dans lequel s'inscrivent les campagnes afin de satisfaire les clients ;
- Confidentialité : en assurant la confidentialité des données et un usage connu du client ;
- Métriques de performance : pour mesurer l'impact des décisions d'affaires. On pense de façon générale aux profits, aux parts de marché, mais aussi aux métriques orientées clients comme les taux de conversion, les mesures de loyauté, de rétention/attrition et la LTV.

Dans ce mémoire, on s'intéresse particulièrement à la gestion des relations

clients sous l'angle de l'analyse par la modélisation statistique. Nous examinerons l'information permettant d'optimiser l'acquisition, la rétention et la monétisation des clients. En somme, ce qui permet à l'entreprise de définir la valeur de ses clients. Ce qui rend possible l'extraction de la valeur dans les données brutes est la modélisation, c'est-à-dire l'ensemble des techniques d'analytique descriptives et prédictives qui, en partant de certaines hypothèses sur la structure des données, permettent de capturer l'information pertinente sous forme d'indicateurs de performance et de métriques.

En pratique, les activités marketing modernes se concentrent sur un nombre restreint de métriques, ce qui permet à l'ensemble des parties prenantes de l'organisation de conseiller ou de prendre des décisions rapidement sans se perdre dans les terabytes d'informations. De plus, ces métriques sont généralement calculées à l'échelle d'une cohorte de plusieurs clients. Ces cohortes se définissent à différents niveaux de granularité pour lesquels il est bien entendu possible de faire des combinaisons.

Puisque les métriques sont généralement calculées à l'échelle d'une cohorte, voici un exemple de quelques dimensions pouvant potentiellement la décrire :

- Joueurs acquis via une campagne faite en janvier 2017 ;
- Dont on attribue l'installation du jeu A ;
- Au créatif vidéo X de 30 secondes ;
- Visionné via une source d'acquisition payante comme Facebook ;
- Et qui résident au Canada et qui sont âgés de 20 à 30 ans.

Chaque dimension permet d'évaluer la performance à un niveau particulier. Le nombre de clients pour différentes combinaisons est très variable : plus la segmentation est précise, plus le nombre de clients est restreint. Pour des segmentations très précises, le nombre d'utilisateurs est très bas, ce qui augmente l'intervalle de confiance/l'incertitude sur les estimés statistiques des métriques d'intérêt. En voulant isoler au mieux la source de variabilité d'une métrique, le danger est de se retrouver avec un nombre insuffisant de données et de ne pas avoir le minimum d'information nécessaire, afin de tirer des conclusions statistiquement significatives et utiles d'un point de vue d'affaires.

### 2.1.1 Acquisition

Dans un cadre réel d'acquisition des clients dans l'industrie des jeux vidéos mobiles, les UAM font face à deux sources d'acquisition des clients :

- Source organique : le client installe par lui-même l'application en naviguant sur le *store*. Ce sont ceux pour lesquels on ne peut identifier si une publicité a causé l'installation.
- Source acquisition payante : le client installe l'application via une publicité. Un éditeur de publicité attribue une installation à un clic ou une vue de la publicité à l'intérieur d'une certaine fenêtre d'attribution.

Pour atteindre leurs objectifs d'acquisition, les UAM auront recours à différents formats et méthodes d'acquisition [36] :

- Installations récompensées ou non récompensées ;
- Vidéos publicitaires ;
- Promotion croisée ;

Les UAM cherchent finalement à extraire et optimiser les métriques suivantes pour les cohortes d'utilisateurs acquis sous leur gestion :

- $R_j$  : rétention d'une cohorte au jour  $j$ .
- $C_i$  : attrition d'une cohorte au jour  $j$ , souvent définie comme  $1 - R_j$  ; ce qui est vrai au niveau d'un produit spécifique, mais ne tient plus quand on considère un réseau de produits.
- DNU : le nombre initial d'utilisateurs dans une cohorte, littéralement le nombre d'installations ;
- $DAU_j$  : le nombre d'utilisateurs qui ont interagi avec le produit au moins une fois le jour  $j$  ;
- CPI : coût d'acquisition par installation ;
- Revenu IAP $_j$  : revenu généré par les achats intégrés à l'application au jour  $j$  ;
- Revenu Publicités $_j$  : revenu en publicité au jour  $j$  ;
- Revenu $_j$  : revenu total au jour  $j$  ;
- ROAS $_j$  : retour sur l'investissement en publicité au jour  $j$ , généralement défini comme le rapport  $\frac{\text{Revenu}_j}{\text{Coût}}$ , de l'anglais *Return on Ads Spent* ;

- $ARPU_j$  : revenu moyen par utilisateur au jour  $j$  ;
- $ARPPAU_j$  : revenu moyen par utilisateur payeur (note : valide seulement dans le modèle d'affaires *freemium*).

Le rôle des gestionnaires d'acquisition des clients dans ce contexte est de déterminer *a posteriori* quelles décisions ont permis d'optimiser telle ou telle métrique à l'aide de tests statistiques et de leur avis d'expert. Ils génèrent ensuite, à partir de cette information, de nouveaux segments qui ressemblent aux segments acquis significativement plus performants (notamment grâce aux audiences *lookalike* de Facebook). Les segments à haut potentiel coûtent généralement plus cher à acquérir, c'est pourquoi il est important que la prise de décision considère une minimisation des coûts d'acquisition, ce qui introduit un compromis. Les métriques les plus pertinentes dans ce contexte sont à l'heure actuelle le *ROAS* et le profit  $\pi = \text{Revenu} - \text{Coût}$ . La modélisation de ces métriques marketing permet d'extraire un indice de qualité des cohortes. L'objectif principal de la firme est en effet la rentabilité de ses décisions.

La continuité naturelle de ce type d'approche pour optimiser les campagnes d'acquisition est l'introduction de la modélisation prédictive. Elle permet de tirer parti de l'ensemble des données d'acquisition de la firme pour nourrir les décisions futures. Voici quelques exemples de modèles prédictifs pertinents dans le cadre de l'acquisition des clients :

- $LTV_j$  : la valeur-vie d'un client ou d'une cohorte au jour  $j$  pour déterminer à l'aide de quelques jours de données la valeur future d'un client ou d'une cohorte. La modélisation de la *LTV* est un sujet de recherche riche et en pleine expansion.
- $ROAS_j$  : le retour sur investissement d'une campagne publicitaire au jour  $j$ . Cette approche a l'avantage de normaliser les cohortes relativement à leur taille et leur coût d'acquisition. Le désavantage de cette approche est qu'elle tend à mettre sur un même pied d'égalité des cohortes qui génèrent peu et beaucoup de revenus pour la firme
- Optimisation automatique des investissements : bien qu'il existe des solutions clés en mains comme les DSP (de l'anglais *Demand-side plat-*

*form*) pour la gestion automatique des stocks de publicités en fonction de différentes contraintes comme le budget, la firme peut aussi développer elle-même ses stratégies d'investissement et ses algorithmes d'optimisation des ordres d'achat et de vente. Ceci lui permet d'internaliser les coûts et les responsabilités liés à la gestion des publicités.

### 2.1.2 Rétention

En général, les analystes de jeux modélisent la rétention d'une cohorte de joueurs grâce à des courbes de rétention et des métriques affichant le nombre d'utilisateurs actifs trois, sept, quinze et trente jours après l'installation (i.e. Rétention D3, D7, D15, D30 respectivement). Ces métriques indiquent la proportion de joueurs retenus par jour et par rapport au nombre de joueurs qui ont initialement installé le jeu mobile. Ces métriques donnent un aperçu aux analystes de la qualité d'une cohorte acquise mais donnent aussi au concepteur de jeux vidéo un aperçu de la performance de son produit. Généralement, cette information sera utilisée pour surveiller l'effet de l'amélioration du jeu (i.e. l'amélioration du *gameplay* entraînera une amélioration de la rétention). Ce type de métrique simple s'étend naturellement à un contexte de prédiction. En effet, le développeur de jeux a fortement intérêt à pouvoir connaître à l'avance la qualité de l'expérience de jeu. Parmi les modèles prédictifs de rétention qu'il est possible de construire, voici les plus importants et les plus utilisés dans l'industrie :

- Prédiction de la rétention, de l'engagement, de l'attrition pour un joueur donné sur la base d'un historique d'évènements liés à son interaction avec le jeu [29]. Par évènement on entend entre autres l'achat d'items, monter de niveau, les combats avec d'autres joueurs, etc. ;
- Prédiction de l'attrition des joueurs vétérans et payants : étant donné que la majorité des revenus provient d'une faible proportion de tous les joueurs (joueurs qui jouent longtemps et qui dépensent beaucoup), prédire leur attrition et disposer de moyens pour faire face à cette situation présente un avantage compétitif fort [30] ;

- Prédiction de la rétention au jour  $j$  peu après l'installation : à partir d'une quantité limitée d'information pour une fenêtre d'observation donnée, prédire la valeur espérée de la rétention au jour  $j$  pour une cohorte donnée.

Il existe de multiples formats et méthodes de rétention des clients [36] :

- Inciter une connexion via les réseaux sociaux ;
- Inciter l'utilisation de canaux de communication entre les utilisateurs d'un même produit (et groupes, entre utilisateurs) ;
- Inciter l'invitation d'amis (récompensée ou pas) ;
- Offrir une récompense journalière en cas de connexion au jeu ;
- Envoi de notifications sur l'appareil mobile pour communiquer avec l'utilisateur lorsqu'il n'est pas connecté au jeu ;
- Don d'IAP aux joueurs désengagés à haut potentiel financier.

### 2.1.3 Monétisation

Dans le contexte du *free-to-play*, la rétention et la monétisation sont intimement reliées et représentent deux façons de mesurer le succès d'un jeu, tel qu'indiqué par Anders Drachen au chapitre douze de *Game Analytics Maximizing the Value of Player Data* [27]. Elles permettent de déterminer la qualité d'une cohorte de joueurs. La monétisation se comprend comme l'ensemble des techniques déployées pour monétiser le jeu (difficulté d'un niveau, type d'IAP, prix des IAP, publicité). De plus, la surveillance des différents points d'attrition et de conversion dans un jeu permet aux développeurs d'améliorer à la fois la rétention et la monétisation d'un jeu. Par exemple, une monétisation trop agressive peut mener à de forts taux d'attrition, ce qui est généralement mauvais pour les revenus du développeur.

Une autre façon intéressante de monétiser les joueurs dans les jeux mobiles *free-to-play* est de leur afficher du contenu publicitaire. Lorsqu'un joueur ne génère pas de revenu via les IAP, le développeur peut monétiser ce joueur en agissant comme un éditeur de publicité.

D'un point de vue de l'analytique prédictive, voici quelques applications d'affaires intéressantes :

- Détection des joueurs payants : détermine une règle de décision sur l'affichage de la publicité. Afficher aux joueurs qui n'ont pas le potentiel de devenir premium et ne rien afficher dans le cas inverse pour ne pas brimer l'expérience de jeu (augmentation de la rétention, encouragement à la conversion) ;
- Détection des baleines : ce sont les joueurs qui payent le plus et qui contribuent à la majorité des revenus. La détection préliminaire de ce type de joueurs permet aux développeurs de donner un meilleur traitement aux joueurs à haut potentiel très tôt dans la relation d'affaires ;
- Prédiction d'IAP : sachant qu'un joueur est ou deviendra premium, estimer le nombre d'achats que le joueur effectuera pour une période donnée ;
- Prédiction de la LTV : sachant qu'un joueur est ou deviendra premium, estimer le montant total que le joueur dépensera pour une période donnée. Ceci permet de déployer à l'avance des stratégies de traitement spécial pour encourager le joueur à atteindre son potentiel commercial. La modélisation de la LTV à l'échelle individuelle est particulièrement ardue en contexte de marketing d'applications mobiles.
- Prédiction de la rentabilité après une période donnée : ceci réduit le problème de la valeur financière d'un client à un problème de classification binaire tout en considérant les coûts d'investissement.

Il existe de multiples façons d'optimiser la monétisation d'un jeu [36], par l'optimisation de :

- L'entonnoir de conversion dans le jeu ;
- Du design du magasin dans le jeu ;
- De l'affichage de publicités dans le jeu.

## 2.2 Analytique d'affaires et jeux *free-to-play*

Dans le cadre des jeux *free-to-play*, l'analytique d'affaires s'identifie à l'optimisation et la modélisation de métriques d'affaires telles que la LTV et la rétention. Les variables agrégeant les habitudes comportementales des joueurs dans le jeu contiennent l'information nécessaire à la modélisation de ces métriques.

Parmi ces variables, on retrouvera par exemple, tiré de Sifa et al. [39] :

- Des mesures de progrès dans le jeu et leur évolution temporelle : buts atteints, numéro du monde, nombre d'achats, nombre d'opposants combattus, niveau pour différentes compétences, balances de ressources et de monnaies virtuelles, etc.
- Information sur le temps : le temps écoulé depuis la dernière session de jeu, la durée de la dernière session, les statistiques descriptives de ces distributions de temps.

Si la recherche en analytique dans le cadre des jeux s'avère d'abord très expérimentale, Drachen et al. [9] l'enrichit en introduisant un concept économique pour formaliser les découvertes empiriques : les faits stylisés. Ceux-ci se concentrent sur les tendances générales en ignorant les détails individuels. Ceci permet de définir un cadre formel aux découvertes empiriques et de structurer la connaissance dans ce nouveau champ de la recherche et du savoir. Les faits stylisés permettent aux chercheurs de trouver un point d'entente concernant les problèmes principaux à résoudre ainsi que de déterminer la terminologie utilisée dans l'analytique du jeu mobile. Les auteurs notent judicieusement que, dans un contexte de *free-to-play*, l'incitatif pour la recherche comportementale est grand puisque beaucoup de données de ce type sont disponibles. On pense, entre autres, aux interactions sociales entre joueurs. Par contre, la nature privée des données générées peut ralentir le partage des connaissances avec une audience de recherche plus large. Les auteurs définissent le revenu  $\pi$  (synonyme de LTV) comme :

$$\pi = f(\rho, \mu, \gamma) \tag{2.1}$$

qui est une fonction de la rétention  $\rho$ , de la monétisation  $\mu$  et de l'engagement  $\gamma$ . De cette définition, voici quelques faits stylisés énumérés par les auteurs :

- $\pi$  augmente quand  $\rho$ ,  $\mu$  et  $\gamma$  augmentent ;
- $\mu$  augmente quand  $\rho$  et  $\gamma$  augmentent ;
- $\rho$  et  $\gamma$  ne décroissent généralement pas quand  $\mu$  change ;
- $\mu$  et  $\gamma$  peuvent croître ou décroître l'un en fonction de l'autre.

Dans le même ordre d'idées, Hanner et al. [15] découvrent une série de faits intéressants en étudiant trois jeux bien distincts : un jeu de gestion des ressources, un jeu de gestion du sport et un jeu d'échange de cartes. La contribution des auteurs se résume aux découvertes suivantes :

- Le taux de conversion, c'est-à-dire la proportion des joueurs d'une cohorte donnée qui effectue leur premier achat, diminue en fonction du temps entre la date d'installation et la date de début de jeu ;
- La probabilité de rétention augmente avec le nombre d'achats ;
- Il existe une forte corrélation entre le montant moyen dépensé par achat et le nombre d'achats effectués.

Additionnellement, Voigt et al. [43] observent que la LTV augmente si le joueur :

- Effectue un achat peu après l'enregistrement du compte ;
- Dépense la majorité de son achat initial, démontrant l'usage de ses ressources ;
- Utilise sa carte de crédit pour effectuer les achats (ce fait est devenu un standard dans les *store*, on ne peut plus vraiment observer d'autres formes de paiements).

D'un point de vue de l'intelligence d'affaires et de l'analytique, une étude particulièrement intéressante dans le cadre du *free-to-play* est celle conduite par Viljanen et al. [42] qui s'attaquent au problème du calcul non-biaisé des indicateurs de performance journaliers pour des campagnes d'acquisition en temps réel qui s'étalent sur plusieurs jours, ce qui est chose commune dans l'industrie. Le fait que les campagnes durent plusieurs jours introduit de la censure, ce qui a pour effet de biaiser les estimés statistiques. Les auteurs

introduisent l'idée de fonction moyenne cumulative pour obtenir des estimés non biaisés de métriques tels que le temps joué et la LTV en fonction du temps. Ce cadre de modélisation est généralisable à n'importe quelle métrique, ce qui en fait un outil très puissant pour les développeurs de jeu. Cette contribution inclut plusieurs indicateurs de performance simultanément ; nous reprendrons cette idée dans le cadre de ce mémoire.

Dans un autre ordre d'idée, Saas et al. [35] prennent avantage de la forme en série temporelle des séquences d'évènements activés par un joueur pour un jeu donné. Pour traiter ce type d'information, les auteurs cherchent à extraire des tendances dans les séries temporelles afin de dresser des profils d'utilisateurs basés sur leur comportement dans le jeu.

## 2.3 Modélisation des relations clients

La modélisation des données est un vaste domaine qui s'étend des statistiques descriptives à l'intelligence artificielle en passant par l'apprentissage automatique. Pour que la modélisation soit possible, il faut généralement que les données contiennent un signal à extraire au-delà du bruit. Pour que la modélisation ajoute de la valeur à l'entreprise, il faut que ce signal soit monétisable, c'est-à-dire que l'on puisse y extraire des renseignements sur la performance des relations clients pour un service donné avec suffisamment de précision. Dans le cas de l'industrie des jeux mobiles, les chercheurs et les analystes qui oeuvrent au sein des équipes de production ou des départements de science des données sont principalement préoccupés par deux problèmes : la prédiction de la valeur vie des clients (LTV) future et l'attrition/rétention [45]. La LTV, indicateur de la valeur monétaire d'un client, donne un estimé du revenu généré par l'entreprise par le moyen des publicités et des IAP. L'attrition peut être interprétée comme la fin des relations d'un client avec l'entreprise ; on estimera généralement l'attrition sous forme de probabilité en fonction du temps. L'analyse de survie sied à ce type de problème. L'estimation de l'attrition est cruciale afin de déployer les efforts nécessaires pour étendre la durée de vie de la relation client ou de tenter de vendre le client à la compétition via des

publicités à l'interne [34]. Cette section couvrira une revue de la littérature pour ces deux champs d'étude.

### 2.3.1 Modéliser l'attrition et la rétention

La modélisation de l'attrition est au coeur de plusieurs industries et une recherche étendue a été conduite sur le sujet pour différents scénarios. Une multitude de techniques de *data mining*, comme les arbres de décision, les régressions et les réseaux de neurones pour n'en nommer que quelques-unes [34], ont été utilisées. Chaque étude met l'accent sur différentes techniques et différentes façons de poser le problème. La performance de ces modèles peut varier beaucoup d'un contexte à un autre.

L'intérêt de prédire l'attrition ne se limite pas au *free-to-play*. Dans le milieu bancaire (p. ex. [13]) et des télécommunications (p. ex. [17]), la recherche sur la détection de l'attrition des consommateurs est très prolifique puisqu'elle donne un avantage compétitif fort dans ce marché, comme l'atteste la revue de littérature de Garcia et al. [11] et de Coussement et al. [6], qui se penchent particulièrement sur les méthodes prédictives qui prennent avantage des données démographiques et comportementales des consommateurs.

Un intérêt de plus en plus marqué se fait du côté de l'analyse des réseaux sociaux pour prédire l'attrition [41]. Oskarsdottir et al. [31] montrent la pertinence de cette approche en spécifiant tout de même la difficulté apportée par cet ajout de complexité. Notamment, un des défis semble être le bon choix d'architecture pour les réseaux utilisés, ce qui dépend beaucoup des données à modéliser. Kim et al. [19] démontrent que l'introduction de variables reliées au réseau de clients apporte de l'information supplémentaire pour la prédiction de l'attrition pour une compagnie de télécommunications.

Moeyersoms et al. [26] s'attaquent entre autres au problème des variables cardinales dans le cadre de la modélisation de l'attrition. En effet, les caractéristiques discrètes d'une clientèle sont souvent encodées dans des vecteurs de dimensions  $N$ , où  $N$  correspond au nombre de valeurs distinctes que peuvent prendre ces caractéristiques. Ce type de variable engendre rapidement un phé-

nomène mieux connu sous le nom de malédiction de la dimensionnalité, c'est-à-dire un espace à haute dimensionnalité dont le volume croît rapidement et qui rend l'optimisation algorithmique très ardue, voire pratiquement impossible dans certains cas.

Dasgupta et al. [7] et Kusuma et al. [22] abordent le problème de l'attrition dans l'industrie des télécommunications sous sa facette sociale. Le réseau social est contruit et pondéré à partir de la fréquence des appels entre les différents clients. Différentes formes de modèles de diffusion sont ensuite appliquées à cette structure et les résultats sont comparés avec des modèles supervisés classiques. Kusuma et al. concluent quant à eux que l'attrition de voisins n'a pas suffisamment d'effet sur les autres membres dans le réseau de télécommunications. Les estimateurs traditionnels performant mieux dans ce contexte [22].

Borbora et al. [5] comparent une approche purement quantitative à une méthode issue de la théorie des motivations. Il faut noter que cette dernière performe moins bien, mais a l'avantage d'être plus interprétable, ce qui a une grande valeur d'affaires. Dans le présent mémoire, nous avons aussi fait le choix de favoriser l'interprétabilité de l'approche proposée pour modéliser les relations clients.

Les jeux en ligne massivement multijoueurs (dont l'acronyme est MMO, de l'anglais *massively multiplayer online game*) mettent en place des univers riches et complexes, créant à eux seuls des économies virtuelles posant des défis supplémentaires pour les développeurs dans le design du jeu. La modélisation de l'attrition dans ce contexte doit donc considérer l'aspect social du jeu ainsi que l'ensemble des déclinaisons comportementales du joueur.

En effet, Kawale et al. [18] abordent l'attrition sous sa facette sociale en étudiant le jeu *EverQuest II*. Les auteurs développent un modèle de diffusion sur le réseau des relations entre les joueurs. Ces relations sont pondérées et estimées en fonction du nombre de quêtes effectuées en duo pour chaque paire de joueurs. Cette approche est combinée à des métriques d'engagement obtenues au niveau individuel en ajustant une distribution *bêta* sur le temps de jeu par session pour chaque joueur. Les auteurs concluent sur la pertinence de l'ajout de variables tirées du paradigme RFM (de l'anglais *Recency Frequency*

*Monetisation*) pour améliorer la performance du modèle.

En effet, un cadre conceptuel pertinent au niveau des relations clients et utilisé de façon extensive en marketing direct dans la segmentation des clients est la méthode RFM. Le RFM se définit par ses trois dimensions :

- Récence : la date de la dernière transaction ou le temps depuis la dernière transaction du consommateur ;
- Fréquence : informations sur la fréquence d'achat du consommateur pour une période donnée ;
- (Valeur) Monétaire : informations sur les montants dépensés par le consommateur.

Une autre approche perspicace en contexte de MMO est celle de Borbora et al. [4] qui se base sur le cycle de vie des joueurs et distingue des traits distincts chez les joueurs désengagés dans les semaines précédant leur départ permanent. Les auteurs extraient une série de profils comportementaux afin de distinguer les joueurs actifs des joueurs moins actifs (lié à l'attrition) en se basant sur ces traits. Ainsi, trois dimensions sémantiques sont définies afin de construire des variables pertinentes :

- Engagement :  $x_{engage} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  ;
- Enthousiasme :  $x_{enthu} = \sum_{i=1}^N w_i \cdot (x_i - x_{i-1})$  ;
- Persistance :  $x_{persit} = \sum_{i=1}^N w_i \cdot sgn(x_i - x_{i-1})$

où  $x_i$  est l'observation à la  $i$ ème semaine de la variable  $x$ ,  $w_i$  le nombre de semaines et la fonction  $sgn$  retourne le signe de son argument par -1, 1, ou 0. Parmi les variables soumises à cette approche, on retrouve par exemple le nombre de sessions de jeu par semaine, le temps de jeu total par semaine et le temps total entre les sessions de jeu par semaine.

Plus récemment, Tamassia et al. [40] ont développé un modèle en chaîne de Markov cachée afin de prédire l'attrition pour le jeu *Destiny* défini ici comme quatre semaines d'inactivité consécutives. Le modèle est entraîné à reconnaître trois états : actif dans le jeu, en pause et arrêt permanent de l'activité. Le modèle développé dans les chapitres suivants de ce mémoire reprendra cette idée d'assignation d'états distincts pour distinguer entre l'activité, la pause et

l'arrêt des relations. Tamassia et al. observent aussi que les variables les plus performantes dépendent du type et du genre de jeu.

En général, dans l'industrie des jeux mobiles *free-to-play*, et tel que nous l'avons déjà mentionné plus haut, l'engagement des joueurs présente une distribution de fréquences fortement asymétrique, puisque la majorité des nouveaux joueurs pour une cohorte donnée quittent le jeu peu après l'installation [37]. Hadiji et al. [14] donnent une première définition formelle de l'attrition en contexte de *free-to-play* en plus d'investiguer une approche qui n'est pas spécifique à un jeu donné, mais qui dépend seulement de variables génériques sur le temps de jeu et l'engagement du joueur. Ceci leur permet de développer un modèle qui s'applique à une variété de jeux *free-to-play* différents. Dans notre étude, nous effectuerons aussi un traitement simultané de plusieurs jeux.

L'étude de Runge et al. [34] constitue la première étude de faisabilité en terme de modélisation de l'attrition des joueurs à forte valeur ajoutée (ce qu'on appelle les *super baleines*) en contexte de *free-to-play*. Le problème est ici posé comme une tâche de classification binaire. On retient d'abord quelques définitions issues de cet article :

- Joueur à haute valeur ajoutée : joueur appartenant à la tranche de 10% supérieure de tous les joueurs payant triés en ordre décroissant de revenu ;
- Joueur actif : joueur s'étant connecté au moins une fois dans les 14 derniers jours ;
- Joueur inactif : joueur ne s'étant pas connecté dans les 14 derniers jours.

Des conclusions de l'étude, on retient que :

- Le réseau de neurones et la régression logistique offrent des performances similaires (en terme d'AUC) ;
- L'ajout de variables temporelles provenant d'une chaîne de Markov cachée n'améliore pas la performance du modèle ;
- Un test statistique confirme que l'envoi de monnaie virtuelle n'améliore pas la rétention des joueurs à haute valeur ajoutée ;
- Un changement de gameplay ou la promotion croisée vers un autre jeu

semble être la meilleure façon de gérer l'attrition des joueurs.

Drachen et al. [8] démontrent qu'un arbre de décision basé sur de simples heuristiques arrive à bien performer relativement à des architectures plus complexes, indiquant qu'il est possible d'extraire des règles de décision simples pour prévenir l'attrition des joueurs. En effet, la particularité de l'arbre de décision est d'être assez explicite sur les mécanismes qui engendrent les prédictions. L'avantage de ce type d'approche se décline en trois points principaux :

- Flexible : facilement déployable en production ;
- Légère : ne requiert pas beaucoup de ressources computationnelles ;
- Interprétable : facilement communicable aux preneurs de décision sans formation professionnelle en analytique.

Récemment, Milosevic et al. [25] se sont attaqués au problème de l'attrition survenant très tôt dans le jeu, puisque la majorité des joueurs dans le *free-to-play* quittent peu de temps après l'installation du jeu. Le modèle développé traite seulement une journée de données comportementales et est, aux dires des auteurs, transférable à d'autres jeux. Dans cette étude, un test statistique montre que l'envoi d'une notification à l'appareil mobile du joueur lorsqu'il ne joue pas a un effet significatif sur le réengagement du joueur, par rapport à l'échantillon de contrôle et la *baseline*, c'est-à-dire un modèle naïf. Contrairement à l'étude de Runge et al. [34], les joueurs analysés dans cet article ne sont pas que des joueurs à haut potentiel.

Dans le même ordre d'idées, Kim et al. [20] se penchent sur les joueurs à courte durée de vie dans les jeux occasionnels. Ils prédisent l'attrition à l'aide de techniques d'apprentissage profond et soulèvent quelques difficultés dans la littérature sur la prédiction de l'attrition. Voici quelques points identifiés par les auteurs sur l'état de la littérature concernant l'attrition :

- La littérature donne généralement une définition aveugle des variables explicatives au lieu de se pencher sur une analyse en profondeur du phénomène d'attrition ;
- La littérature n'explore pas une grande variété d'architectures et d'algorithmes ;

- La littérature fixe généralement la fenêtre d’observation des données (OP) et la fenêtre de prédiction de l’attrition (CP) sans conduire de recherches additionnelles.

On constate qu’il n’y a pas consensus sur la définition de l’attrition, puisqu’il s’agit d’un non-événement et qu’on ne peut la définir que par l’absence (plus ou moins longue) d’évènements dans le jeu. Cette étude met en lumière cette notion de compromis entre la résolution temporelle et l’efficacité d’un modèle. Parmi les conclusions des auteurs, on retient que les réseaux neuronaux récurrents ont du mal à faire face aux grands espacements entre les événements modélisés, malgré leur importante capacité d’apprentissage. À noter que le cas d’usage principal, et le cas où ce modèle a eu le plus de succès, est le traitement automatique des langues (p. ex. la traduction automatique) où on ne retrouve jamais ce type d’espacement entre les données.

Dans cette étude, les variables explicatives les plus performantes sont génériques et dépendent uniquement du temps de jeu. La faible performance des variables comportementales est due au manque de complexité des jeux occasionnels selon les auteurs.

Rothenbuehler et al. [33] se penchent sur la construction d’un système expert basé sur une chaîne de Markov cachée pour détecter en temps réel l’attrition des joueurs.

L’approche de Xie et al. [46], quant à elle, est originale puisque les auteurs envisagent une version relaxée de l’attrition, c’est-à-dire que le désengagement du joueur peut être plus ou moins fort. L’hypothèse est qu’un joueur qui est sur le point de quitter le jeu est peut-être une cause perdue pour l’entreprise, tandis qu’un joueur désengagé peut toujours être affecté par des incitatifs dans le jeu ou de la promotion croisée ou la promotion d’un compétiteur via les publicités dans le jeu.

Dernièrement, Bertens et al. [3] ont développé un modèle d’ensemble de survie. L’approche bénéficie de la robustesse des méthodes d’ensemble tout en traitant le problème dans le cadre conceptuel le plus approprié pour modéliser l’attrition : l’analyse de survie. Ce modèle d’ensemble est plus performant qu’une

Distribution	Processus sous-jacent
Gamma	Processus de Poisson
Weibull	Processus de Poisson inhomogène
Gaussienne inverse	Processus de Wiener avec dérive
Log-normal	Diffusion de Fokker-Planck

TABLE 2.1 – Distributions de fréquences et processus sous-jacents

régression de Cox et requiert moins de traitement préalable des données pour le jeu *Age of Ishtaria*. Les auteurs argumentent que ce modèle est aisément transférable à d'autres jeux mobiles.

Si le problème de l'attrition est abondamment discuté, peu de recherches sont conduites sur les migrations entre différents jeux. On notera par contre la contribution de Sifa et al. [38], où est introduite pour la première fois la notion de migrations entre plusieurs jeux afin de tester une méthode de factorisation de matrice pour décrire le mouvement des joueurs et prédire l'attrition. Nous réutiliserons ce concept de migration entre différents jeux dans le présent mémoire.

Une étude originale sur l'engagement des joueurs est conduite par Bauckhage et al. [1]. Les auteurs abordent le problème de l'engagement par l'intermédiaire de la théorie des processus stochastiques. L'objectif est de trouver la forme de la distribution des fréquences de temps jeu en déterminant d'abord le processus stochastique sous-jacent qui génère cette distribution. Plusieurs types de processus sont considérés ; ils sont énumérés au tableau 2.1.

La distribution de Weibull ajuste mieux la distribution du temps joué, indiquant que le processus de Poisson inhomogène décrit le mieux l'intérêt du joueur pour le jeu. Le paramètre  $\lambda$  du processus de Poisson peut être compris comme le taux auquel le joueur retourne au jeu après avoir arrêté une certaine période de temps. Dans le cas inhomogène,  $\lambda = \lambda(t)$ , c'est-à-dire que le taux change avec le temps, et dans le cas présent ceci implique que l'urgence de jouer diminue avec le temps.

Sifa et al. [37] confirment que le temps de jeu peut être modélisé à l'aide d'une distribution de Weibull et suggèrent qu'il existe des propriétés fondamentales

qui gouvernent l’engagement d’un joueur dans un jeu. La distribution de Weibull offre un cadre général d’analyse et simple réduisant le phénomène à deux dimensions (i.e. les paramètres de forme  $k$  et d’échelle  $l$ ). Une méthode d’apprentissage non supervisée nommée analyse de noyaux achétypes est ensuite utilisée pour extraire des profils de joueurs pour différents degrés d’engagement à partir de ces paramètres.

### 2.3.2 Modéliser la LTV

La prédiction de la valeur vie du client (i.e. LTV) est un enjeu crucial pour la gestion des relations clients. La popularisation du concept de valeur vie d’un client par Dwyer [10] en marketing direct par des estimations numériques et le développement de modèles mathématiques par Berger et Nasr [2] ont permis de rendre compte de la pertinence de cette métrique dans l’évaluation de la rentabilité des activités marketing.

Bien qu’à l’époque la stratégie commerciale *freemium* n’existait pas encore, on retiendra tout de même l’étude de Pfeifer et Carraway [32] sur la modélisation des relations clients en terme de chaînes de Markov. Tout au long de ce mémoire, nous reprendrons cette idée pour développer un modèle de relations clients lui aussi basé sur les chaînes de Markov généralisable à un portfolio de produits arbitrairement grand. Dans le contexte des jeux mobiles, les revenus proviennent majoritairement des achats intégrés au sein de l’application (i.e. les IAP). Une autre source de revenu, telle que nous l’avons déjà mentionné, sont les publicités affichées à différents points de contrôle dans le jeu. Les achats intégrés à l’application se présentent généralement sous forme de biens virtuels que les joueurs souhaitent acquérir pour leurs attributs fonctionnel, hédonique et social, tel qu’observé par Lehdonvirta [23], qui étudie les motivations derrière l’achat de biens virtuels.

En contexte de *free-to-play* plus spécifiquement, Voigt et al. [43] établissent que

la formule pour la LTV pour le modèle d'affaires *freemium* non-contractuel est :

$$\text{LTV}_{\text{freemium}} = \sum_{t=1}^T \sum_{p_{t,i}}^{p_{t,N}} \text{Revenu}_{t,p_i} \quad (2.2)$$

où  $T$  est le nombre total de périodes pour lesquelles la LTV est évalué et  $p_{t,N}$  le nombre totale de transactions pour la période  $t$ .

En somme, la LTV est égale à la valeur de toutes les transactions effectuées par un joueur pour toutes les périodes d'activité données.

Sifa et al. [39] sont les premiers à s'attaquer au problème de la prédiction du nombre de décisions d'achat dans les jeux mobiles *free-to-play* avec une perspective comportementale au niveau du joueur. Ils font l'hypothèse que les comportements passés d'un utilisateur auront un impact sur son comportement futur. Ainsi, si un joueur a déjà effectué une ou plusieurs transactions par le passé, il sera plus enclin à acheter de nouveau. Sifa et al. développent un modèle empilé à deux niveaux : d'abord en prédisant si le joueur paiera, et ensuite en prédisant le nombre de transactions qui seront effectuées, qui est un proxy de la LTV. Ce proxy s'avère très précis s'il n'y a pas trop de variabilité dans la valeur des différents IAP proposés au joueur.

Guitart et al. [12] analysent les données journalières de revenus et de temps de jeu des jeux *Age of Ishtaria* et *Grand Sphere* à l'aide de modèles autorégressifs. Le modèle additif généralisé mixte (GAMM) incorpore l'effet de différentes covariables et performe mieux que le réseau neuronal *deep belief network* et que la méthode à base de *gradient boosting*.

Les recherches couvertes dans ce chapitre s'attaquent principalement à un seul problème de la gestion des relations clients soit l'attrition ou la LTV pour un produit unique à la fois. Seul Sifa et al. [38] introduira une notion d'interactions entre les différents services. Aussi, seuls Viljanen et al. [42] englobent plusieurs indicateurs de performance à la fois, mais seulement dans un contexte de statistique descriptive. Dans le chapitre 4, nous présenterons notre modèle des relations clients précisément basé sur la dynamique des clients sur un nombre arbitrairement grand de produits et services. Nous ferons ainsi appel

aux chaînes de Markov. De plus, dans le chapitre cinq, nous dériverons les expressions pour modéliser la rétention et la LTV sous ce même formalisme basé sur les chaînes de Markov. Mais d'abord, nous introduirons quelques notions préliminaires concernant ce type de modèle.

# Chapitre 3

## Notions préliminaires sur les chaînes de Markov

Le modèle présenté dans ce mémoire pour modéliser les relations clients est une chaîne de Markov discrète. Nous cherchons à modéliser les états possibles des utilisateurs d'applications mobiles dans le cas où le développeur a plus d'une application à offrir. Nous verrons que les probabilités de transition entre les états représentent les relations clients ; elles se réduisent entre autres aux métriques de performances connues. Avant de se lancer plus en détail dans la description de notre cadre conceptuel et de son application aux relations clients d'une entreprise de jeux mobiles, nous couvrirons dans cette section l'essentiel de la théorie des chaînes de Markov.

### 3.1 Processus de Markov

Les variables aléatoires sont un concept de la théorie des probabilités permettant d'éviter la contrainte déterministe admise par le sens commun et pour ainsi dire de nombreux modèles physiques. En effet, le concept de variable aléatoire permet de traiter l'incertitude comme partie intégrante d'un système. Par exemple, si une variable aléatoire  $X$  est échantillonnée d'une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , les paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  seront déterminés (i.e. en statistique fréquen-

tiste), mais la variable  $X$  ne le sera pas.

Pour décrire une variable aléatoire  $X$  évoluant dans un temps discret ou continue, l'approche habituelle est de fragmenter cette variable en plusieurs variables pour chaque temps  $t$ . L'ensemble des  $X_0, X_1, \dots, X_{t-1}, X_t$  consécutifs constituent un processus stochastique. *Processus* fait référence à l'aspect dynamique du système et *stochastique* est simplement synonyme d'*aléatoire*.

Une chaîne de Markov est un processus stochastique, et donc une série de variables aléatoires consécutives  $X_0, X_1, \dots, X_{t-1}, X_t$ , qui possède la propriété de Markov. Cette propriété stipule que l'état futur de la chaîne ne dépend pas de son état passé, mais uniquement de son état présent. Formellement :

$$P(X_{t+1}|X_t, \dots, X_1, X_0) = P(X_{t+1}|X_t). \quad (3.1)$$

Cette hypothèse d'indépendance aux états passés s'avère suffisante pour expliquer la dynamique de nombreux systèmes. On pense notamment, tiré de Hilgers and Langville [16] :

- Modèle en chaîne de Markov caché ;
- L'algorithme *PageRank* ;
- Les méthodes d'échantillonnage de Monte-Carlo par chaînes de Markov ;
- Le modèle n-gramme, etc.

Puisque chaque étape du processus est décrite par une variable aléatoire  $X_t$ , on représentera le système à l'aide d'une distribution jointe. Soit une séquence de variables aléatoire  $X_0, X_1, \dots, X_{t-1}, X_t$  successives dans le temps. On peut décrire la probabilité jointe de ce processus stochastique par :

$$P(X_t, X_{t-1}, \dots, X_1, X_0) = P(X_0) \prod_{\theta=1}^t P(X_\theta | X_{\theta-1}, X_{\theta-2}, \dots, X_1, X_0).$$

Pour un processus stochastique générique, la dépendance temporelle n'est restreinte que par le principe de causalité, c'est-à-dire à un ordre temporel où la cause  $t$  précède l'effet  $t + 1$ . Une façon éclairante de représenter ce type de

modèle probabiliste est l'utilisation d'un modèle graphique. Un modèle graphique est un graphe où les noeuds sont des variables aléatoires et les arêtes dirigées, la direction de leur lien de dépendance. Graphiquement, le processus stochastique auquel nous faisons ici référence ressemble à :

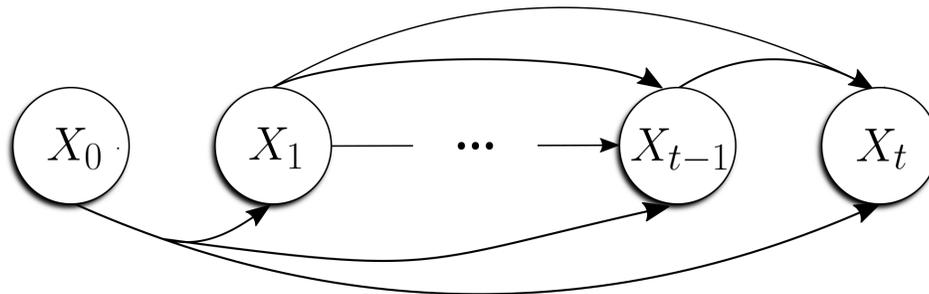


FIGURE 3.1 – Processus stochastique générique

À noter que la dépendance existe (même si non représentée) sur tous les autres états intermédiaires entre  $X_1$  et  $X_{t-1}$ . La propriété de Markov permet de simplifier les probabilités conditionnelles. Si l'indépendance sur les états passés est respectée, on obtient :

$$P(X_t, X_{t-1}, \dots, X_1, X_0) = P(X_0) \prod_{\theta=1}^t P(X_\theta | X_{\theta-1}). \quad (3.2)$$

Graphiquement, on peut observer la disparition des dépendances à long terme par le retrait des arêtes entre les noeuds qui ne sont pas directement voisins.

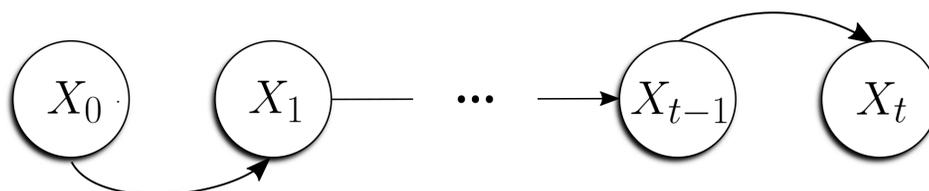


FIGURE 3.2 – Processus stochastique respectant la propriété de Markov

## 3.2 Propriétés fondamentales

Les processus de Markov possèdent des propriétés intéressantes et plusieurs représentations possibles : sous forme de graphe, de probabilités et de matrice. Nous exposerons ici les propriétés fondamentales des chaînes de Markov en faisant usage de ces trois types de représentations. Nous nous limiterons aux chaînes de Markov qui évoluent selon un temps discret où  $t \in \mathbf{R}$  pour se restreindre à l'application faite dans le présent mémoire. Dans le même ordre d'idées, nous nous limiterons à un espace fini des états possibles  $\Omega$  (par rapport à un espace infini). Cela signifie que chaque réalisation des variable aléatoires  $X_t$  est limitée (en termes de valeurs possibles) à un ensemble de  $N$  états bien précis de telle sorte que  $P(X_t \notin \Omega) = 0$ .

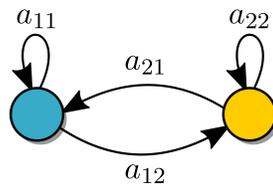


FIGURE 3.3 – Chaîne de Markov  $N = 2$

Une chaîne de Markov où  $N = 2$ , tel que représentée par la figure 3.3 avec les états Bleu ( $B$ ) et Jaune ( $J$ ), , contient quatre probabilités de transition  $a_{ij}$  fixées par le système. Pour tout  $t$ , le système respecte donc les quatre propriétés suivantes :

$$P(X_{t+1} = B | X_t = B) = a_{11}$$

$$P(X_{t+1} = B | X_t = J) = a_{21}$$

$$P(X_{t+1} = J | X_t = J) = a_{22}$$

$$P(X_{t+1} = J | X_t = B) = a_{12}.$$

Ces propriétés, fixant la dynamique du système, peuvent être représentées de façon plus compacte en notation matricelle. Chaque probabilité de transition d'un état  $i$  à un autre état  $j$  devient l'élément  $i, j$  de la matrice  $\mathbf{A}$  dite sto-

chastique, ou de transition. Pour  $N = 2$ , la matrice stochastique  $\mathbf{A}$  se définit comme :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Pour le dire autrement, cette matrice deux par deux suffit à décrire toutes les réalisations aléatoires possibles du processus markovien à  $N = 2$ .

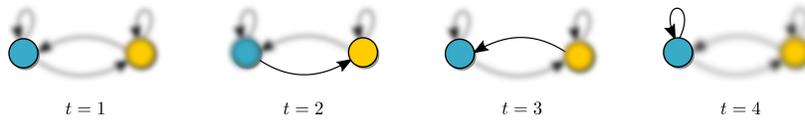


FIGURE 3.4 – Réalisation possible du système  $N = 2$  pour  $t = 4$

Par exemple, la probabilité d'une réalisation pour  $t = 4$  équivaut à la probabilité jointe de cette même réalisation, qui est obtenue grâce aux probabilités conditionnelles respectant la propriété de Markov. Par exemple, si  $X_1 = B$ ,  $X_2 = J$ ,  $X_3 = B$  et  $X_4 = B$  (i.e. figure 3.4), la probabilité de réalisation de cette séquence est obtenue par :

$$\begin{aligned} P(X_1 = B, X_2 = J, X_3 = B, X_4 = B) &= P(X_1 = B) \cdot P(X_2 = J|X_1 = B) \cdot \\ &P(X_3 = B|X_2 = J) \cdot P(X_4 = B|X_3 = B) \end{aligned}$$

Pour fin de simplicité, nous fixons l'état initial  $X_1 = B$ , impliquant  $P(X_1 = B) = 1$ , ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} P(X_1 = B, X_2 = J, X_3 = B, X_4 = B) &= P(X_2 = J|X_1 = B) \cdot \\ &P(X_3 = B|X_2 = J) \cdot \\ &P(X_4 = B|X_3 = B) \cdot \\ &= a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{11}. \end{aligned}$$

Ce type d'analyse s'étend à un nombre d'états  $N$  arbitrairement grand. Lorsque les probabilités de transition n'ont aucune dépendance temporelle, comme dans le cas échéant, nous dirons que la chaîne de Markov est homogène. Lorsqu'il existe une dépendance temporelle, nous dirons qu'elle est inhomogène.

### Cas homogène

**Définition 1** Une séquence de variables aléatoire  $X_0, X_1, \dots, X_t$  avec des valeurs dans l'ensemble dénombrable  $\Omega$  est une chaîne de Markov homogène de premier ordre si les états futurs  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots$  ne dépendent des états passés  $X_0, X_1, \dots, X_t$  par  $X_t$  uniquement, c'est-à-dire qui respecte la propriété de Markov. Pour n'importe quel  $i, j \in S$  et  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} P(X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) &= P(X_{t+1} = j | X_t = i) \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

où  $a_{ij}$  est la probabilité de transition entre les états  $i$  et  $j$  satisfaisant la propriété  $\sum_{j \in \Omega} a_{ij} = 1$ .

De ces probabilités de transition pour l'ensemble des états  $i, j \in S$ , on infère une matrice de transition afin de décrire le système dans son entièreté.

**Définition 2** Soit  $\mathbf{A}$  la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène avec une espace des états  $S$ , les éléments de la matrice de transition sont donnés par :

$$a_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i).$$

On cherche maintenant à utiliser cette information pour décrire l'évolution des probabilités marginales en fonction du temps. Si au temps  $t$ ,  $X_t$  suit la distribution de probabilité  $\mathbf{s}$ , alors

$$\begin{aligned}
P(X_{t+1} = j) &= \sum_i P(X_t = i) \cdot P(X_{t+1} = j | X_t = i) \\
&= \sum_i s_{t,i} a_{ij} \\
&= (\mathbf{s}_t^T \mathbf{A})_j
\end{aligned}$$

Et de façon générale :

$$P(X_{t+n} = j) = (\mathbf{s}_t^T \mathbf{A}^n)_j.$$

On peut ainsi utiliser la chaîne de Markov pour effectuer des prédictions. Étant donné l'état du système au temps  $t$ , suivant la distribution  $\mathbf{s}$ , ainsi que le modèle  $\mathbf{A}$ , on peut retrouver la distribution de ce système pour des temps subséquents. L'indice  $j$  correspond à la probabilité de se retrouver sur l'état  $j$ .

Pour retrouver les probabilités de transition pour les ordres supérieurs à 1, nous ferons appel aux équations de Chapman-Kolmogorov. Pour  $n = 2, \forall t$  et  $i, j, k \in \Omega$  :

$$\begin{aligned}
P(X_{t+2} = j | X_t = i) &= \sum_k P(X_{t+1} = j | X_{t+1} = k) \cdot P(X_{t+1} = k | X_t = i) \cdot P(X_t = i) \\
&= \sum_k a_{kj} a_{ik} \\
&= (\mathbf{A}^2)_{ij}.
\end{aligned}$$

Par inspection, on trouve ainsi que les probabilités de transition d'ordre  $n$  entre les états  $i$  et  $j$  sont données par :

$$P(X_{t+n} = j | X_t = i) = (\mathbf{A}^n)_{ij} \quad \forall n, t \in \mathbb{N}; i, j \in \Omega.$$

### Cas inhomogène

La chaîne de Markov inhomogène en temps assume l'hypothèse de non-stationarité du processus stochastique. Concrètement, ceci implique que les taux de transitions varient dans le temps.

**Définition 3** Soit  $\mathbf{A}(0), \mathbf{A}(1), \dots, \mathbf{A}(k)$  l'ensemble de matrices de transition d'une chaîne de Markov inhomogène dans un espace fini des états  $\Omega$ , les éléments de la matrice de transition  $\mathbf{A}^{(t)}$  sont donnés par :

$$a_{ij}^{(t)} = P(X_{t+1} = j | X_t = i, t).$$

Les probabilités de transition d'ordre supérieur sont fournies par les équations de Chapman-Kolmogorov dépendantes du temps :

$$\begin{aligned} P(X_{t+2} = j, t+2 | X_t = i, t) &= \sum_k P(X_{t+1} = j, t+2 | X_{t+1} = k, t+1) \\ P(X_{t+1} = k, t+1 | P(X_t = i, t)) &= \sum_k a_{kj}(t+1) \cdot a_{ik}(t) \\ &= (\mathbf{A}(t+1)\mathbf{A}(t))_{ij}. \end{aligned}$$

Par inspection, on trouve ainsi que les probabilités de transition d'ordre  $n$  entre les états  $i$  et  $j$  sont données par :

$$P(X_{t+n} = j, t+n | X_t = i, t) = \left( \prod_{\theta=t}^{t+n} \mathbf{A}(\theta) \right)_{ij} \quad \forall n, t \in \mathbb{N}, i, j \in \Omega.$$

### Chaîne de Markov régulière

Une chaîne de Markov homogène est dite régulière lorsque sa matrice de transition  $\mathbf{A}$  respecte la propriété de primitivité, ce qui signifie que

$$P(X_{t+1} = i, X_t = i) < 1 \quad \forall i.$$

Une propriété intéressante des chaînes régulières est que le système converge vers un régime permanent. Ce régime permanent se caractérise par un état stable. La distribution de probabilité de cet état, pour lequel le système converge, est indépendante de l'état initial  $\mathbf{s}_0$  pour des durées suffisamment grandes.

$$\mathbf{s}_t^T \mathbf{A} = \mathbf{s}_t^T \quad \forall t \gg 0.$$

### Chaîne de Markov absorbante

Une chaîne de Markov absorbante est composée d'un ou plusieurs états absorbants et d'états transients. Les états absorbants sont les états  $i$  pour lesquels la propriété  $P(i, i) = 1$  est respectée. Les états transients sont les autres états de la chaîne qui ne respectent pas cette propriété. La probabilité de se situer sur un état transient diminue avec le temps au profit des états absorbants.

Pour qu'une chaîne de Markov soit absorbante, elle doit respecter deux propriétés :

- Le système contient au moins un état absorbant ;
- Les états absorbants peuvent être visités par n'importe quel état transient (indépendamment du temps requis pour l'atteindre).

On notera au passage que la seconde propriété est la propriété d'ergodicité restreinte aux états absorbants. La forme matricielle des chaînes de Markov absorbantes est la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{R}$  est une matrice rectangulaire représentant les probabilités de transition

des états transients aux états absorbants et  $\mathbf{Q}$  une matrice carrée contenant les probabilités de transition entre les états transients uniquement.

On peut obtenir la forme qui décrit l'évolution temporelle du système :

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ (\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \dots + \mathbf{Q}^{(t-1)})\mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

Étant donné que les éléments  $(\mathbf{Q}^t)_{i,j} < 1 \quad \forall i, j, t$ , la somme sur les  $\mathbf{Q}^t$  est une série géométrique qui converge pour  $t \rightarrow \infty$ .

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} + \sum_t^{\infty} \mathbf{Q}^t = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}. \quad (3.3)$$

La matrice  $\mathbf{N}$  est appelée matrice fondamentale du système. Elle est particulièrement intéressante puisqu'elle contient l'information sur les temps moyens de survie (i.e. avant absorption).

En effet,  $(\mathbf{N})_{i,j}$  correspond au nombre de périodes espérées passées dans l'état  $j$  si le système débute à  $i$ . Quant au temps espéré avant absorption si le système débute à l'état  $i$ , il est obtenu en sommant sur les états  $j$  comme suit :

$$E(\text{Temps avant l'absorption})_i = \sum_j (\mathbf{N})_{i,j}. \quad (3.4)$$

Dans le prochain chapitre, nous verrons comment les chaînes de Markov absorbantes permettent de modéliser adéquatement les systèmes dissipatifs comme la dynamique d'une cohorte de clients sur un réseau de produits. De plus, les variétés homogène et inhomogène de la chaîne de Markov nous permettront de représenter deux hypothèses distinctes quant à la stationnarité des données.

# Chapitre 4

## Vers une approche holistique des relations clients

Dans ce mémoire, nous modélisons les relations clients d'une entreprise de jeux mobiles *free-to-play* à l'aide de chaîne de Markov. On se demandera si l'hypothèse d'indépendance entre les états futurs et passés est trop restrictive pour modéliser des systèmes réels comme les relations clients. En effet, alors que cette hypothèse puisse être complètement valide dans certains cas, elle s'avère souvent trop simple pour expliquer la complexité des systèmes réels. L'intérêt d'un modèle à base de chaînes de Markov ne réside pas dans le fait qu'il puisse capturer toute l'information temporelle d'un signal, mais qu'il constitue généralement une bonne approximation pour des systèmes complexes dont la dynamique exacte n'est pas connue. De plus, la propriété de Markov nous évite de gérer de longues dépendances temporelles trop bruitées.

La modélisation des relations clients à l'aide de chaînes de Markov peut être comprise sous cet angle. De nombreux mécanismes sous-jacents sont à l'oeuvre dans les relations clients : des saisonnalités, une variété de profils comportementaux chez les joueurs (p. ex. temps de jeu, achats) qui varient en fonction de différentes covariables (p. ex. jeu, pays du joueur, plateforme de l'appareil mobile, taille d'écran de l'appareil mobile, etc.). La dynamique des joueurs à l'intérieur d'un réseau de produits, c'est-à-dire la façon dont les joueurs passent

d'un jeu à un autre, est précisément le type de système complexe qui puisse être modélisé par des chaînes de Markov. Sans pour autant obtenir des résultats précis sur cette dynamique au niveau d'un joueur unique, les chaînes nous permettent d'extraire de riches informations pour des groupes de joueurs suffisamment grands.

Le présent mémoire propose d'appliquer les chaînes de Markov à un réseau de produits ou de services sur la base de la consommation qu'en font les utilisateurs. En somme, nous proposons de construire des chaînes de Markov dont les états discrets seront les produits dont les relations entre états sont pondérées par les fréquences de migrations des utilisateurs d'un produit à un autre. Le modèle présentera aussi des états reliés à un arrêt temporaire d'utilisation des services (i.e. mise en pause des relations clients) ainsi qu'un état absorbant d'attrition. Ainsi, nous sommes en mesure d'expliquer un large éventail de phénomènes.

Pour le dire autrement, nous cherchons à aborder la gestion des relations clients sous une vision holistique, c'est-à-dire en dressant un portrait général d'une cohorte donnée à travers plus d'un produit. Ce portrait nous servira ensuite à effectuer des prévisions sur la dynamique d'une cohorte qui n'a pas été utilisée pour inférer les paramètres du modèle. Avant d'aborder l'aspect technique de la modélisation, citons quelques avantages d'une représentation en chaîne de Markov des relations client :

- Générale : la chaîne peut représenter les métriques classiques de l'analytique et les indicateurs de performance du point de vue du réseau de produits. On ne cherche pas à redéfénir ces métriques, mais plutôt à leur donner un cadre conceptuel plus large ;
- Interprétable : la chaîne est un modèle intuitif et aisément compréhensible. Sa représentation graphique est visualisable en deux dimensions. On peut représenter la force des interactions par des arêtes de différentes épaisseurs, la popularité des produits par différentes tailles de noeud, ainsi que la similarité entre les produits par un spectre continu de couleur. Plus important encore, les paramètres du modèle nous indiquent directement sur la rétention des produits et la force des liens

qui les unient ;

- Performante : la chaîne présente une performance supérieure à un modèle naïf, mais inférieure aux modèles spécialisés pour les tâches individuelles comme la prédiction d'un indicateur de performance. Par modèle spécialisé, nous entendons la vaste majorité des modèles développés dans la littérature, c'est-à-dire des modèles appliqués à l'échelle des joueurs individuels et qui répondent à un seul aspect des relations clients à la fois comme la rétention ou les revenus générés ;
- Complète : la chaîne introduit des paramètres d'interaction entre les produits (que nous nommerons taux migratoires  $m_i(t)$  pour chaque jeu  $i$ ), en plus d'introduire des taux de pause  $p_i(t)$  et de fin des relations clients  $p_i(t)$  ainsi que de rétention  $r_i(t)$ . Les taux de rétention sont quant à eux obtenus par les auto-boucles de la chaîne. L'ensemble des relations clients peuvent donc être décrites.

Bien que la chaîne ne puisse compétitionner avec les modèles spécifiques, nous considérons que la généralité, l'aspect complet et l'interprétabilité du modèle justifie notre approche. Notre contribution est donc d'abord méthodologique. Nous avons mentionné plus haut que la chaîne pouvait servir à décrire une cohorte donnée, mais aussi à effectuer des prévisions futures sur l'état d'un système. En effet, on retient deux modalités d'activation de la valeur d'affaires de la chaîne de Markov :

- Modalité descriptive : la chaîne peut donner des estimés statistiques des indicateurs de performance pour une cohorte analysée : les probabilités de migrations, de rétention, de pause et d'attrition. Si pour un produit donné  $i$  au temps  $\theta$ , on sait que la rétention  $r_i(t = \theta) = 80\%$  alors le reste, l'attrition, les mises en pause et les migrations  $m_i(t = \theta) + p_i(t = \theta) + c_i(t = \theta) = 20\%$  ;
- Modalité prédictive : de ces probabilités de transition, on peut extraire des taux de transition entre les états permettant d'effectuer des projections futures pour de nouvelles cohortes, par exemple sur un ensemble de données de test, ou une utilisation en contexte réel de production. La contrainte est que les données utilisées pour tester notre approche

doivent être plus récentes que celles utilisées pour inférer les paramètres du modèle.

Ainsi, nous argumentons que les entreprises d'applications mobiles qui offrent une variété de produits bénéficierait de ce type de représentation des relations clients. L'exploitation de ce paradigme permettrait aux firmes de développer et d'évaluer des stratégies d'acquisition, de rétention et de monétisation de façon holistique, c'est-à-dire par rapport à un portfolio de plusieurs produits. Ceci encourage le développeur d'applications mobiles à évaluer non plus la performance d'un produit spécifique séparément du reste de son portfolio, mais la performance d'une marque, englobant ainsi l'ensemble des produits offerts simultanément. Dans ce cadre d'interprétation, le comportement des clients n'est plus analysé par rapport à un produit unique, mais par rapport à l'ensemble des produits offerts par l'entreprise. Nous dressons une liste exhaustive de l'impact de ce type d'approche sur l'acquisition et la rétention des clients.

## 4.1 Impact sur les relations clients

Une fonctionnalité intéressante découlant de cette perspective sur les relations clients est le développement d'une économie virtuelle propre à la marque, un lieu et une devise permettant aux joueurs de différents jeux de communiquer et d'échanger des biens virtuels sur une base commune.

Dans un cadre d'acquisition des clients, le développeur s'intéresse à tout ce qui lui permet d'attribuer les actions prises au niveau marketing aux nouveaux clients acquis. Ceci lui permet de mesurer l'impact de ses actions et d'identifier les meilleures opportunités d'affaires. L'effet migratoire est un effet secondaire de l'acquisition, où les clients sont acquis par l'intermédiaire d'un premier jeu. Ces clients migrent ensuite vers un ou plusieurs autres produits par eux-mêmes ou par l'intermédiaire d'une promotion croisée mise en place par le développeur.

Nous nommons ici quelques fonctionnalités dans les jeux et des actions d'affaires intéressantes qui découleraient de cette vision holistique de l'acquisition des clients :

- Récompenser l'installation d'un jeu à l'aide d'incitatifs touchant plusieurs jeux (un montant d'une devise virtuelle commune par exemple) ;
- Acquisition par promotion croisée guidée par la dynamique des utilisateurs à travers le réseau de produits. La notion d'arbitrage économique explique cette fonctionnalité. En effet, il peut s'avérer économiquement avantageux d'acquérir un joueur sur un jeu  $\alpha$  et de lui proposer de la promotion croisée pour un jeu  $\beta$  afin de l'acquérir dans le jeu  $\beta$ . Ceci est avantageux dans le cas où le coût d'une acquisition directe au jeu  $\beta$  est plus grand que le coût d'acquisition dans le jeu  $\alpha$  et le coût d'opportunité de la promotion croisée.
- Mise en place d'une plateforme, d'un espace public commun à la marque pour créer et maintenir une communauté de joueurs autour de cette marque.

Du point de vue de la rétention des clients, cette vision a aussi un impact. Notamment, si les développeurs de jeux mobiles s'intéressent généralement à la rétention d'un seul jeu à la fois, cette vision permettrait de mesurer la rétention par rapport à un réseau de plusieurs produits. On pense au développement d'une métrique de rétention qui englobe tous les produits d'un développeur. Nous reviendrons sur cette idée au chapitre cinq. En effet, si on constate qu'un jeu individuel ne retient pas beaucoup les joueurs, le développeur peut toujours chercher à optimiser la rétention au niveau du réseau de ce produit via des actions correctives appropriées.

Nous nommons quelques fonctionnalités dans les jeux et des actions d'affaires intéressantes qui découleraient de cette vision holistique de la rétention des clients :

- Développer et maintenir des canaux de communication communs entre les utilisateurs d'une même marque à l'intérieur de tous les produits développés sous cette marque ;
- Récompenser l'invitation d'amis dans le réseau des produits (cette action impacte autant l'acquisition que la rétention) ;
- Toute forme de récompenses au niveau du réseau des produits offerts par la marque (incitant la participation à un économie virtuelle commune

tel qu'énoncé ci-haut) ;

- Notifications sur l'appareil mobile pour communiquer avec l'utilisateur lorsqu'il n'est pas connecté au jeu. Ces communications pourrait inciter le joueur à se reconnecter/installer un jeu  $\alpha$  du développeur en lui indiquant par exemple qu'un de ses compagnons y joue au moment de l'envoi de la notification ;
- Promotion croisée permettant de rediriger les joueurs désengagés vers de nouveaux jeux du développeur susceptibles de susciter son intérêt. Cette action se couple avec l'introduction de récompenses dans le jeu cible si celui-ci est installé/joué pour un temps donné.

## 4.2 Méthodologie

Comme mentionné ci-haut, une modélisation complète des relations clients impliquerait de pouvoir modéliser l'ensemble des indicateurs de performance pour des groupes de clients arbitrairement grands et pour n'importe quelle division temporelle. À titre d'exemple :

- Indicateurs de performance d'intérêt : la proportion de la cohorte qui joue encore au jeu au temps  $t$  (i.e. la rétention), la proportion qui n'y joue plus (i.e. l'attrition), la proportion qui a migré vers d'autres jeux (i.e. la migration), la temps de jeu moyen et maximal par jour/semaine/mois, la rétention ainsi que la LTV globale de la cohorte (i.e. combien de revenus ont été générés pour une période donnée), etc. ;
- Division temporelle variable : modéliser les indicateurs de performances pour chaque heure, journée, semaine, etc. ;
- Taille de cohorte variable : de quelques joueurs à plusieurs milliers.

Plus la granularité de la modélisation est fine, plus la tâche est difficile (voire impossible, si le signal est trop bruité), mais d'un autre côté la capacité à prendre des actions ciblées sur la base de cette information augmente. Ceci implique dès lors une complexité supplémentaire dans la gestion des relations clients.

La modélisation des relations comme processus stochastique à l'aide des chaînes de Markov implique de fixer d'entrée de jeu la précision temporelle du modèle, c'est-à-dire la taille des sauts en temps discret. La précision temporelle la plus commune dans le cadre de l'analytique de jeu est la division journalière. En effet, la majorité des indicateurs de performance pour une cohorte donnée sont évalués pour chaque journée après l'acquisition des joueurs. Pour l'industrie des jeux mobiles *free-to-play*, nous avons généralement :

- Taux de rétention journaliers ;
- Taux de conversion des joueurs en joueur *premium* ;
- Les revenus générés : revenu moyen par joueur, revenu moyen par joueur *premium*, LTV ;
- Retour sur investissement (i.e. montant payé en publicité) pour les joueurs acquis via des canaux payants comme Facebook.
- etc.

Dans le présent mémoire, nous ne couvrirons que certains cas. Par exemple, la division temporelle du modèle développée sera hebdomadaire. En somme, les résultats seront limités à la portée et l'échelle suivante :

- Indicateurs de performance étudiés : rétention de la cohorte sur plusieurs jeux, attrition (inévitable) de la cohorte, contribution de la migration entre jeux à la rétention, ainsi que le temps de jeu moyen par joueur calculé en jours par semaine ;
- Division temporelle : hebdomadaire.
- Taille de cohorte : les paramètres des chaînes de Markov sont estimés à partir d'une cohorte de 1 million de joueurs et les modèles sont testés sur une cohorte de 100000 joueurs.

Au chapitre cinq, nous dérivons les expressions pour calculer n'importe quel indicateur de performance globale, à l'échelle du réseau. Par contre, nous laissons à de futures recherches le soin de valider cette approche.

### 4.2.1 Objectifs de prédiction

Dans les sections qui suivront, nous ferons grandement usage du terme *état*. Il est important de savoir que ce terme sera utilisé dans deux cas distincts. Dans le premier cas, *état* fera référence à un état discret de la chaîne (un noeud, si la chaîne est représentée sous forme de graphe). Dans le second cas, *état* sera utilisé pour parler du vecteur d'état  $\mathbf{s}$ , la distribution sur laquelle la chaîne est appliquée.  $\mathbf{s}$  nous informe sur quels états et dans quelles proportions la cohorte étudiée se trouve. En somme, le  $i$ ème élément du vecteur d'état  $\mathbf{s}$  correspond à la proportion de la cohorte se trouvant sur l'état  $i$ . Le terme *état* sied bien pour décrire ces deux situations ; c'est pourquoi nous avons conservé cette terminologie et préférer avertir le lecteur plutôt que de transformer notre propos. Nous tâcherons de clarifier l'utilisation de l'expression en fonction du contexte. Afin d'évaluer la performance du modèle, nous établissons deux objectifs de prédictions.

Le premier objectif consiste à prédire les distributions subséquentes  $\mathbf{s}$  décrites précédemment pour une cohorte donnée. En effet, ces prédictions seront effectuées à partir de l'information contenue dans la première période  $t = 0$  via la distribution initiale  $\mathbf{s}_0$ . Cette distribution nous informe sur la répartition initiale de la cohorte correspondante dans le réseau des produits. Cette répartition est déterminée en fonction de la contribution de chaque jeu à l'activité de l'ensemble des joueurs. Cette contribution est équivalente à la rétention pour les états de jeu. C'est la proportion des joueurs encore active à la période  $t$  pour un jeu donné. D'un autre côté, l'attrition se comprend comme la proportion de la cohorte sur l'état absorbant.

Puisque le système est modélisé par chaînes de Markov, les distributions subséquentes  $\mathbf{s}_n$  sont calculées grâce aux équations de Chapman-Kolmogorov pour une chaîne homogène ou inhomogène selon le cas. Aussi, nous rappellerons que, de par leur nature probabiliste, les distributions  $\mathbf{s}_n$  inférées par la chaîne seront toujours une autre distribution de probabilité respectant la propriété  $\sum_i (\mathbf{s}_t)_i = 1 \quad \forall t$ . Cet objectif de prédiction,  $\mathbf{s}_n$ , permet d'évaluer la performance du modèle en termes de prédiction de la rétention pour chaque jeu individuellement, de la migration entre les jeux, de la proportion de la cohorte

qui a momentanément arrêté de jouer et de la proportion de la cohorte qui a complètement arrêté de jouer. Nous rappelons que ces prédictions sont effectuées pour chaque période  $t$  suivant l'installation du premier jeu. Les modèles développés ne sont pas contraints à traiter uniquement des joueurs qui ont installé pour une même date.

Le second type d'objectif de prédiction est le temps moyen par joueur en termes de jours par semaine pour chaque jeu, que l'on peut représenter par le vecteur  $\mathbf{t}$ . On obtient un estimé du temps de jeu moyen en multipliant les vecteurs d'états  $\mathbf{s}_n$  à des valeurs historiques de temps de jeu moyen par jeu par semaine. On introduit ici une notion d'indicateur de performance au-delà de l'état  $\mathbf{s}_n$ . En effet, nous faisons l'hypothèse que les indicateurs de performance d'intérêt sont intimement liés à l'état  $\mathbf{s}_n$  illustrant la contribution d'une cohorte à chaque état de la chaîne à  $t = n$ . Nous introduisons  $\mathbf{T}_{historique}$ , une matrice diagonale dont les éléments sont égaux au temps moyen en jour par semaine passé par jeu. Par exemple, l'élément  $(\mathbf{T}_{historique})_{\alpha,\alpha}$  correspond au temps moyen pour le jeu  $\alpha$ . Naturellement, les éléments diagonaux correspondant aux états de pause et d'attrition sont nuls. Cet objectif nous permet d'évaluer les performances du modèles pour prédire des indicateurs de performance dérivés de  $\mathbf{s}$ . Le vecteur de temps moyen  $\mathbf{t}$  au temps  $n$  peut alors être obtenu par l'expression suivante :

$$\mathbf{t}_n^T = \mathbf{s}_n^T \mathbf{T}_{historique}$$

### 4.2.2 Contextes d'observation

#### Rétention, pause et attrition

Pour étudier le phénomène de rétention, la distribution initiale  $\mathbf{s}_0$  ne subit pas de contraintes particulières. Les joueurs de tous les jeux sont considérés au départ. Nous cherchons simplement à observer la performance du modèle dans la prédictions des états subséquents  $\mathbf{s}_n$ . Ce contexte sera aussi utilisé pour évaluer la prédiction du temps moyen.

## Migrations

Pour isoler le phénomène de migration, qui est essentiellement très faible par rapport à la rétention, on force  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{e}_i$  où  $i$  est l'indice d'un jeu unique. En effet, la distribution initiale du système sera entièrement concentrée dans une seule application A, ce qui nous permettra d'évaluer les performances du modèle quant aux migrations vers d'autres jeux. Par exemple, si la cohorte étudiée débute entièrement sur le jeu A, on saura que si une proportion non nulle de la cohorte se retrouve sur le jeu B dans les périodes suivantes, ce sera dû aux migrations en provenance du jeu A.

### 4.2.3 Modèles de prédiction

La majorité des états possibles de la chaîne de Markov sont les services offerts par la firme, dans notre cas des jeux. De plus, nous aurons au moins un état représentant la pause des relations clients et un autre pour la fin de celle-ci. Ce dernier sera représenté par un état absorbant, rendant la chaîne absorbante. Ceci implique que la distribution stationnaire de la chaîne sera entièrement concentrée sur cet état, ce qui est réaliste puisqu'on s'attend à ce que l'ensemble des joueurs d'une cohorte arrête complètement de jouer un jour ou l'autre. Nous définissons l'attrition comme un arrêt de jeu de plus de quatre semaines consécutives. Si un joueur se reconnecte à un jeu après ces quatre semaines, l'activité à partir de cette reconnexion n'est pas considérée dans l'entraînement des modèles. Rappelons que cette définition de l'attrition est aussi utilisé par Tamassia et al. [40] lors de l'étude du jeu *Destiny*. D'un autre côté, dans notre modèle, une pause correspond à un arrêt de jeu d'au plus quatre semaines consécutives. Il n'est pas possible de passer directement de l'état de pause à l'état absorbant, puisque nous marquons toute les pauses qui mènent à une attrition comme une attrition dès le début de cette pause. En somme, lorsque le joueur cesse de jouer, il est soit en pause, soit en arrêt complet de ses relations avec la firme, et jamais les deux en même temps. C'est cette idée que nous avons tenté d'exprimer par ce choix.

Deux types de chaînes de Markov sont évalués sur les données de l'entreprise

de jeux vidéos. Ces deux chaînes respectent deux hypothèses distinctes sur la structure des données : les hypothèses de stationnarité et de non-stationnarité.

### Cas stationnaire

La chaîne de Markov homogène conserve l'hypothèse de stationnarité. Dans ce contexte, les poids sur les arcs de la chaîne sont indépendants du temps  $t$ . Le système est entièrement décrit par sa matrice de transition  $\mathbf{A}$ . Et donc, si la taille de l'ensemble des états possibles est  $N$ , le nombre de paramètres non nuls du modèle est borné supérieurement par  $N^2$ . Suivant les équations de Chapman-Kolmogorov pour les chaînes homogènes, on a :

$$\mathbf{s}_t^T = \mathbf{s}_0^T \prod_{n=0}^t \mathbf{A} \quad (4.1)$$

$$= \mathbf{s}_0^T \mathbf{A}^t \quad (4.2)$$

soit le vecteur transposé de la distribution initiale (représentant l'état initial d'une cohorte donnée) multiplié par la matrice stochastique  $\mathbf{A}$  de la chaîne de Markov à la puissance  $t$ . Rappelons que  $\mathbf{s}_t$  désigne la répartition de la cohorte sur les états de la chaîne au temps  $t$ .

### Exemple numérique

Dans l'exemple suivant, nous présentons une dynamique à 5 états dont trois d'entre eux correspondent à des jeux, un état à une pause et un état absorbant pour l'attrition. Les indices  $i \in \{1, 2, 3\}$  correspondent aux jeux et les indices  $i = 4$  et  $i = 5$  correspondent aux états de pause et d'attrition respectivement.

Nous avons une matrice stochastique  $\mathbf{A}$  dont les éléments  $a_{ij}$  sont fictifs :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.1 & 0.05 & 0.15 \\ 0.05 & 0.5 & 0.15 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

On observe que  $\sum_j a_{ij} = 1 \forall j$  puisque chaque élément correspond à la probabilité de passer à un autre état (ou de rester sur le même) à la période suivante. Par exemple, à la première ligne on peut déduire que le système a 70% de chance de rester sur le jeu  $i = 1$  s'il y est déjà. Dans le même contexte, le système a 0%, 10% et 5% de chance de passer au jeu  $i = 2$ ,  $i = 3$  et  $i = 4$  respectivement à la période suivante. On constate aussi qu'il n'est pas possible de sortir de l'état d'attrition puisque  $a_{55} = 1$ . On observe que généralement les éléments avec le plus de poids sont les éléments de la diagonale. Ces éléments diagonaux décrivent le degré de persistance du système au changement d'états. Plus ces éléments sont élevés, plus le système résiste aux transitions. En effet, si  $a_{ii} \rightarrow 1 \forall i \in \{1, \dots, 6\}$ , on a que dans la limite où  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{I}$ , le système ne changera jamais d'état. Pour poursuivre avec notre exemple, on définit  $\mathbf{s}_0$ , dont les éléments initiaux sont non nuls seulement s'ils représentent les jeux. En effet, la cohorte ne commence pas en pause ou en fin de relation avec la compagnie.

$$\mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Ce vecteur représente l'état initial du système et implique que 30%, 20 % et 50 % de la cohorte débute leur relation client sur les jeux  $i = 1$ ,  $i = 2$  et  $i = 3$  respectivement. En appliquant  $\mathbf{A}$  une fois sur  $\mathbf{s}_0$  selon la règle définit à

l'équation 4.2, on obtient l'état après une période :

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 0.22 \\ 0.1 \\ 0.51 \\ 0.035 \\ 0.135 \end{bmatrix} .$$

Après la première période, 13.5% de la cohorte a complètement cessé de jouer. Pour  $t \gg 0$ , le système converge vers l'état absorbant entièrement :

$$\mathbf{s}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Il s'agit de l'état stationnaire de la chaîne absorbante. Cela signifie que l'ensemble de la cohorte a cessé de jouer après au moins  $t$  périodes.

### Cas non stationnaire

Quant à elle, la chaîne de Markov inhomogène ne conserve pas l'hypothèse de stationnarité puisque les probabilités de transition entre les états sont des fonctions non constantes du temps. Rappelons que cette dépendance temporelle n'est pas par rapport à un temps absolu, mais relative à la date d'installation du premier jeu et se calcule en semaine dans notre cas. La matrice stochastique  $\mathbf{A}(t)$  contient une dépendance sur des temps discrets. Le nombre de paramètres du modèle dépendra alors aussi du nombre de périodes  $T$  pour lesquelles la chaîne a été entraînée. En fait, le nombre de paramètres non nuls du modèle est borné supérieurement par  $TN^2$ . Dans notre cas, les modèles ont été entraînés sur 24 périodes, soit 24 semaines. Suivant les équations de

Chapman-Kolmogorov pour les chaînes inhomogènes, on a :

$$\mathbf{s}_t^T = \mathbf{s}_0^T \prod_{\theta=0}^t \mathbf{A}(\theta). \quad (4.3)$$

À noter que dans le cas de la chaîne non homogène, nous avons accru la complexité du modèle en créant un état de pause pour chaque jeu, au lieu d'avoir un état de pause pour l'ensemble des jeux.

### Modèle naïf

Le modèle naïf, aussi nommé *baseline* dans le présent mémoire, est utilisé pour comparer la performances des deux chaînes. Il représente une hypothèse naïve sur l'évolution du système qui ne requiert presque pas de travail de modélisation. Le modèle naïf correspond simplement à l'état initial  $\mathbf{s}_0$  du système. Ce modèle naïf respecte l'hypothèse improbable que l'état du système est constant, qu'il ne change pas à travers le temps :

$$\mathbf{s}_t^T = \mathbf{s}_0^T. \quad (4.4)$$

Le tableau 4.1 présente une synthèse des approches servant à prédire les états futurs d'une cohorte donnée. On suppose que les modèles ont été entraînés sur  $T$  périodes.

Type/Contexte	Conditions du système	État $\mathbf{s}_{n+t}$	Nb. de paramètres
Modèle inhomogène/Rétention, pause et attrition	$\mathbf{A}(t) \neq \mathbf{A}(t+n)$ $\mathbf{s}_n \neq \mathbf{e}_i$	$\mathbf{s}_n^T \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta)$	$TN^2$
Modèle inhomogène/Migration	$\mathbf{A}(t) \neq \mathbf{A}(t+n)$ $\mathbf{s}_n = \mathbf{e}_i$	$\mathbf{e}_i^T \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta)$	$TN^2$
Modèle homogène/Rétention, pause et attrition	$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+n)$ $\mathbf{s}_n \neq \mathbf{e}_i$	$\mathbf{s}_n^T \mathbf{A}^t$	$N^2$
Modèle homogène/Migration	$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+n)$ $\mathbf{s}_n = \mathbf{e}_i$	$\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}^t$	$N^2$
Modèle naïf/Rétention, pause et attrition	$\mathbf{s}_n \neq \mathbf{e}_i$	$\mathbf{s}_n^T$	0
Modèle naïf/Migration	$\mathbf{s}_n = \mathbf{e}_i$	$\mathbf{e}_i^T$	0

TABLE 4.1 – **Récapitulatif des différentes approches.** Prédiction de l'état  $\mathbf{s}_{n+t}$  à partir de l'état  $\mathbf{s}_n$  pour différents types de modèles.

### 4.2.4 Procédure d'entraînement

La procédure d'entraînement utilisée dans cette étude est essentiellement une procédure de comptage strictement équivalente à la maximisation de la vraisemblance des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}(t)$  selon le cas pour expliquer les données. En effet, le comptage assure que les paramètres des matrices convergent vers les taux de transition espérés. Elle permet donc de déterminer les éléments  $a_{ij}$  et  $a_{ij}(t)$  de façon itérative.

La procédure de comptage peut aussi être comprise comme un problème d'optimisation convexe où on cherche à minimiser l'erreur absolue faite par la chaîne de Markov dans la prédiction de  $\mathbf{s}_{t+1}$  à partir de  $\mathbf{s}_t$ .

#### Cas stationnaire

On cherche à trouver les paramètres de  $\mathbf{A}$  qui minimisent la différence entre la distribution réelle correspondant à l'état à  $t + 1$  et la prédiction faite à partir de l'état à  $t$  pour lequel on a appliqué la chaîne.

$$\min_{\mathbf{A}} \sum_i^M \sum_t^{T-1} |\mathbf{s}_{i,t+1}^T - \mathbf{s}_{i,t}^T \mathbf{A}| \mathbf{1}$$

*s.c.*  $\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{1}$

où l'indice  $i$  correspond au  $i$ ème joueur,  $M$  le nombre total de joueurs,  $T$  l'horizon du modèle (i.e. le nombre maximal de périodes pour lequel le modèle est entraîné). La contrainte implique que les rangées de  $\mathbf{A}$  doivent sommer à un pour respecter le deuxième axiome des probabilités : la probabilité que la chaîne visite un état appartenant aux états possibles est égale à un.

#### Cas non stationnaire

La procédure d'entraînement pour la chaîne de Markov inhomogène est très similaire au cas stationnaire, à la seule différence que l'opération doit être faite pour tous les  $t$  séparément. Ceci a pour effet de diminuer par  $\frac{1}{T}$  le nombre

de données utilisé pour estimer la valeur de chaque paramètres de  $\mathbf{A}(t)$ . On se retrouve en effet avec  $T$  fonctions objectifs indépendantes à optimiser.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{A}(t)} \sum_i^M |\mathbf{s}_{i,t+1}^T - \mathbf{s}_{i,t}^T \mathbf{A}(t)| \mathbf{1} \quad \forall t \in \{0, T-1\} \\ s.c. \mathbf{A}(t) \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad \forall t \in \{0, T-1\} \end{aligned}$$

En somme, c'est comme si l'on répétait la procédure du cas stationnaire  $T$  fois.

### Métrique de performance : erreur absolue

Afin de comparer la performances des différentes approches, soit la chaîne homogène, inhomogène et le modèle naïf, nous ferons simplement usage du critère de l'erreur absolue :

$$|\mathbf{s}_{i,t}^{pred} - \mathbf{s}_{i,t}^{obs}| \quad \forall i \in \{1..N\}, \forall T \in 1..T.$$

### Données

Nous avons extrait les distributions  $\mathbf{s}_{i,t}$  pour chaque joueur  $i$  pour chaque semaine  $t$  à partir de l'installation du premier jeu pour un total de 24 semaines d'activité. Nous ne considérons pas la date exacte d'installation, mais seulement le temps qui passe relativement à cette date. Rappelons que chaque joueur aura donc une série de 24 vecteurs, un pour chaque période. Chaque élément du vecteur correspond à un état du système et décrit la proportion de l'activité totale consacrée à cet état. Par exemple, si un joueur consacre la moitié de son temps total de jeu dans un jeu  $\alpha$  et l'autre moitié dans un jeu  $\beta$  dans sa première semaine d'activité, les éléments  $(\mathbf{s}_0)_\alpha = (\mathbf{s}_0)_\beta = 0.5$  et les autres éléments du vecteur seront nuls pour ce joueur. Lorsqu'un joueur est en pause ou qu'il est totalement désengagé, la distribution sera entièrement concentrée sur un des états (ou l'unique état) de pause, ou l'état d'attrition selon le cas. De plus, si un joueur cesse complètement de jouer après une seule semaine d'activité, la seule composante non nulle (et égale à un) des vecteurs subséquents sera celle correspondant à l'état d'attrition.

Une fois ces distributions extraites, nous avons appliqué la comptage pour évaluer les taux de transitions entre les états dans le temps. Par exemple, si on évalue que 80 % des joueurs qui ont joué au jeu  $\alpha$  pour une période  $t$  ont aussi rejoué exclusivement à ce jeu pour la période suivante  $t + 1$ , on estimera que l'auto boucle (i.e. la rétention) sur  $\alpha$  au temps  $t$  sera égale à 80%, c'est-à-dire  $(\mathbf{A}(t))_{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha} = 0.8$ . Le temps d'exécution de la procédure d'entraînement est proportionnel à  $O(N^2MT)$  puisque le comptage des transitions entre deux vecteurs de taille  $N$  s'estime à  $O(N^2)$  dans le pire cas. L'opération est ensuite répétée pour  $M$  joueurs pour un total de  $T$  périodes. Par exemple, dans le cas inhomogène, les paramètres de  $\mathbf{A}(t = 0)$  sont inférés à partir des transitions de  $\mathbf{s}_0$  vers  $\mathbf{s}_1$ .

Paramètre	Entraînement	Test
Date de début	2016-01-01	2017-01-01
Date de fin	2016-12-01	2017-02-01
Pays	Canada	Canada
Nombre de joueurs	1M	100k

TABLE 4.2 – Description du jeu de données réelles.

Nous avons restreint notre étude au Canada pour l'année 2016 et le début de 2017. Les joueurs ont été tirés aléatoirement à l'aide d'une fonction de hachage basée sur le modulo de leur numéro d'identification dans les jeux. Ceci nous permet d'éviter toute forme de biais de sélection.

Puisqu'il s'agit d'un point important, rementionnons que le temps  $t$  est relatif à la date d'installation du premier jeu pour chaque joueur. Ceci nous permet de traiter conjointement des joueurs qui ont débuté leur relation avec la firme à des dates différentes et ainsi d'augmenter le volume de notre analyse. Dans un cadre réel d'application du modèle, on devra restreindre la plage de dates d'installation à des valeurs plus raisonnables comme une journée ou une semaine.

La figure 4.1 illustre une représentation graphique d'une chaîne de Markov homogène décrivant le mouvement des joueurs entre les différents jeux ; les auto-boucles de rétention et les taux de mise en pause et d'attrition ont aussi

été omis pour simplifier la visualisation. De plus, la taille des noeuds correspond à la popularité du produit, obtenue en termes du nombre d'installations pour la période donnée. Aussi, ceci nous permet de comprendre comment certains états occupent une place prépondérante au sein du réseau. Il y a quelques noeuds de bonne taille et plusieurs noeuds de petite taille. On observe aussi des liens de plus grande taille autour des noeuds les plus importants. Ceci indique qu'il y a beaucoup de trafic, vraisemblablement dans la direction du jeu moins populaire au jeu plus populaire.

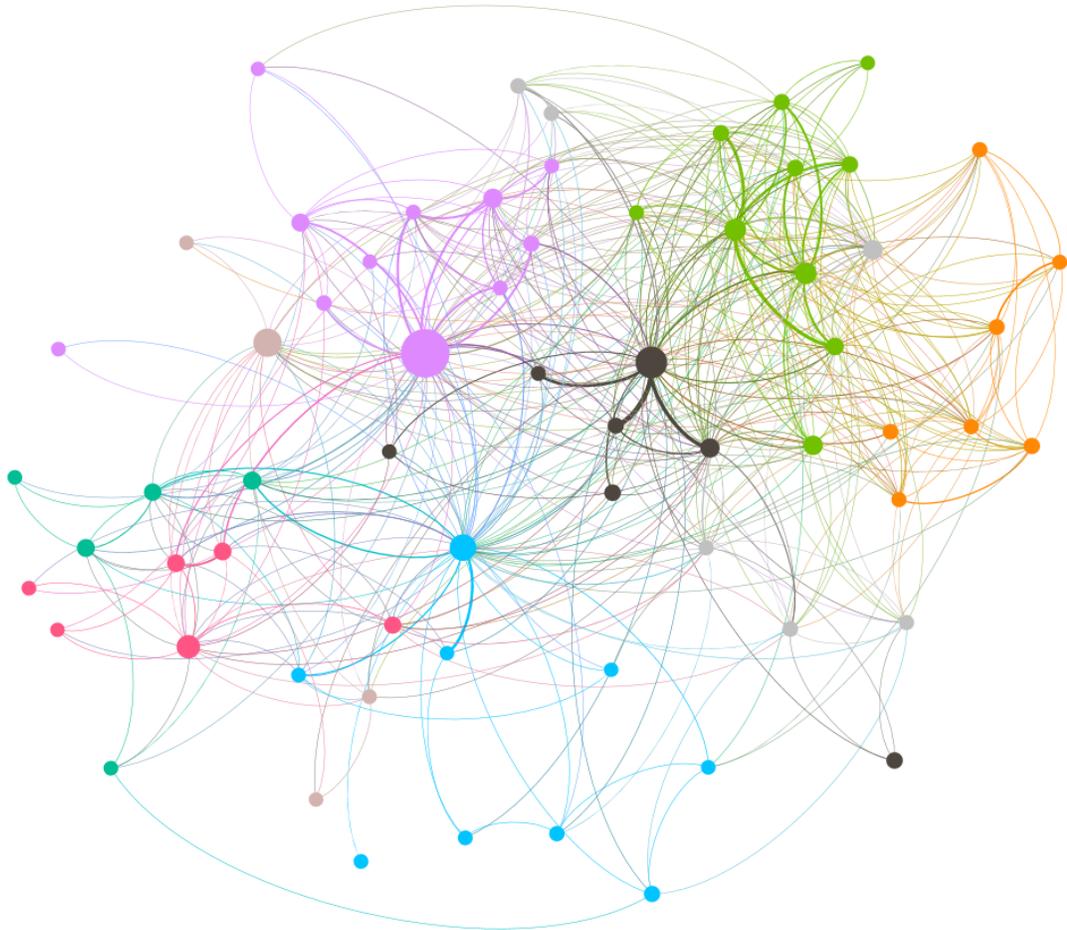


FIGURE 4.1 – **Représentation graphique de la chaîne de Markov homogène sur les jeux.** Exemple de la représentation graphique de la chaîne de Markov appliquée aux jeux de la firme où chaque noeud représente un jeu. Ce graphe résume l'activité migratoire de milliers de joueurs entre les jeux pour une période de trois mois. Contrairement à la chaîne de Markov, le graphe visualisé n'est pas orienté pour simplifier la visualisation. Une coloration similaire indique les groupes de produits où les interactions sont plus fortes.

## 4.3 Résultats et discussion

Nous avons appliqué les modèles sur l'ensemble des jeux. Par contre, pour chaque objectif de prédiction et chaque contexte, nous évaluerons dans cette section la performance des modèles sur neuf états de la chaîne de Markov : sept jeux, l'état d'attrition et l'état de pause (dans le cas de la chaîne inhomogène, les états de pause ont été agrégés en un seul état). Les noms réels des jeux ont été omis pour des raisons de confidentialité concernant les données de l'entreprise. De plus, rappelons que les deux objectifs de prédiction sont 1) la répartition de la cohorte sur les états de la chaîne par période d'observation et 2) le temps moyen de jeu par période d'observation. Aussi, les deux contextes d'observation correspondent respectivement à une cohorte initialement hétérogène et une cohorte initialement concentré sur un seul jeu. Le tableau 4.3 donne un aperçu des différents états analysés.

État	Description
A	Jeu de course
B	Jeu de tir
C	Jeu de construction
D	Jeu de tir
E	Jeu d'aventure
F	Jeu de tir
G	Jeu d'aventure
Pause	Arrêt temporaire de la relation client
Fin	Fin de la relation client

TABLE 4.3 – **Description des états analysés.** La chaîne de Markov homogène contient 121 états possibles, soit 119 états pour les jeux et un état pour la pause et l'attrition respectivement. La chaîne de Markov inhomogène contient 239 états possibles, soit 119 états pour les jeux et 119 états de pause et un état pour l'attrition. L'analyse des résultats se restreint à sept jeux pour simplifier l'interprétation.

### 4.3.1 Analyse de la rétention et du désengagement des clients

L'analyse de la rétention, de la mise en pause et de l'attrition s'effectue en appliquant la chaîne à l'état  $\mathbf{s}_0$  où débute le système sur plusieurs jeux en même temps. Ceci nous empêche tout de même d'observer l'effet de migration puisque son effet est minime par rapport à la rétention et l'attrition. C'est pourquoi nous considérons que dans ce contexte, l'expérience nous permet d'analyser la rétention, la mise en pause et l'attrition uniquement. La valeur des état  $\mathbf{s}_t$ , c'est-à-dire la répartition de la cohorte de test, décroît tel qu'attendu pour les états de la chaîne qui représentent des jeux en faveur de l'attrition.

Tel qu'on le remarque à la figure suivante (illustrant les performances du modèle sur l'échantillon de test), les états de pause et de fin des relations clients se comporte différemment. L'état de pause croît légèrement pour ensuite décroître à faible allure ; il est d'abord dominé par les transitions partant des jeux, mais le taux auquel les joueurs pausent leur relation décroît au profit de l'attrition à partir d'une semaine. En ce sens, l'état de fin, c'est-à-dire d'attrition, présente une croissance puisqu'il absorbe la majorité des pertes de  $\mathbf{s}_t$  sur les états représentant les jeux. Rappelons que le noeud fin est un noeud absorbant (les arêtes de sortie ont des poids nuls). Ultimement, tous les joueurs de n'importe quelle cohorte de joueurs cesseront leur relation avec la firme. La figure suivante nous permet de visualiser la performance de la chaîne homogène (respectant l'hypothèse de stationnarité) sur la prédiction des états futurs  $\mathbf{s}_t \forall t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , c'est-à-dire huit semaines.

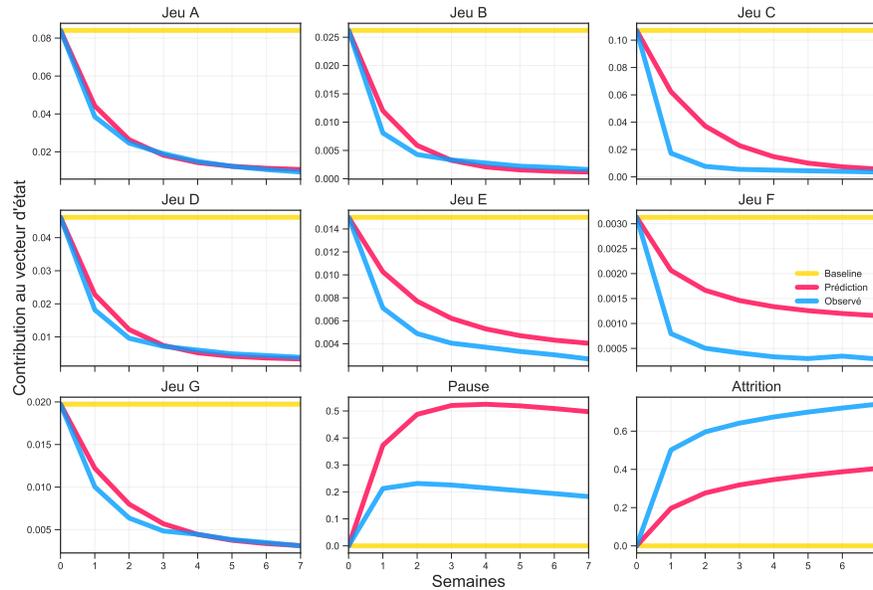


FIGURE 4.2 – **Rétention, pause et attrition avec l’hypothèse de stationnarité.** La chaîne de Markov homogène explique la rétention pour certains jeux. Le modèle surestime la proportion du temps joué pour les jeux C, E et F. Le modèle n’arrive pas à expliquer correctement la pause et la fin des relations clients.

Selon la figure 4.2, on observe que l’hypothèse de stationnarité est trop faible pour expliquer les données. La chaîne homogène possède l’avantage de ne pas requérir un grand nombre de paramètres, mais cette faible capacité d’apprentissage introduit un biais à l’entraînement menant au sous-apprentissage. La figure 4.3 correspond aux résultats de prédiction de la chaîne de Markov inhomogène.

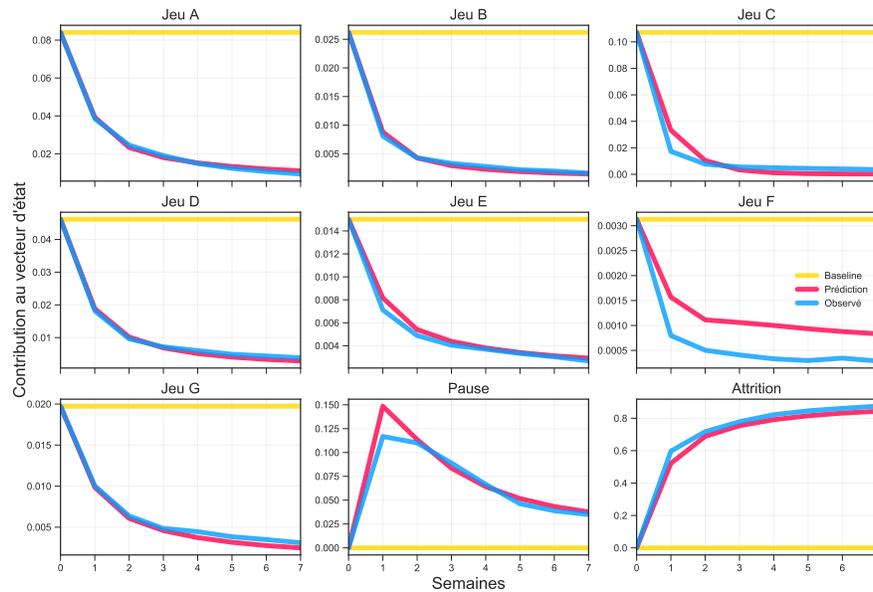


FIGURE 4.3 – **Rétention, pause et attrition avec l’hypothèse de non-stationnarité.** La chaîne de Markov inhomogène explique la rétention pour la majorité des jeux. Le modèle surestime la proportion du temps joué pour le jeu F. Le modèle arrive très bien à expliquer la pause et la fin des relations clients.

La figure 4.3 est particulièrement intéressante, puisqu’elle démontre que l’ajout d’états de pause pour chaque jeu et le respect de l’hypothèse de non-stationnarité permet d’expliquer adéquatement les données. L’hypothèse de non-stationnarité du système implique seulement une dépendance sur un temps relatif : le temps depuis l’installation du premier jeu. Ceci signifie que la chaîne inhomogène ne tient pas compte des dépendances par rapport au temps absolu. Dans ce cas, un changement dans la monétisation, dans l’activité marketing d’un jeu et tout autre évènement non représenté dans les données d’entraînement ont un effet direct sur les performance du modèle. On pourrait attribuer la mauvaise performance sur le jeu F à ce phénomène, mais ceci pourrait aussi être du à la limite de résolution du modèle puisque la valeur de l’état est très faible par rapport aux autres.

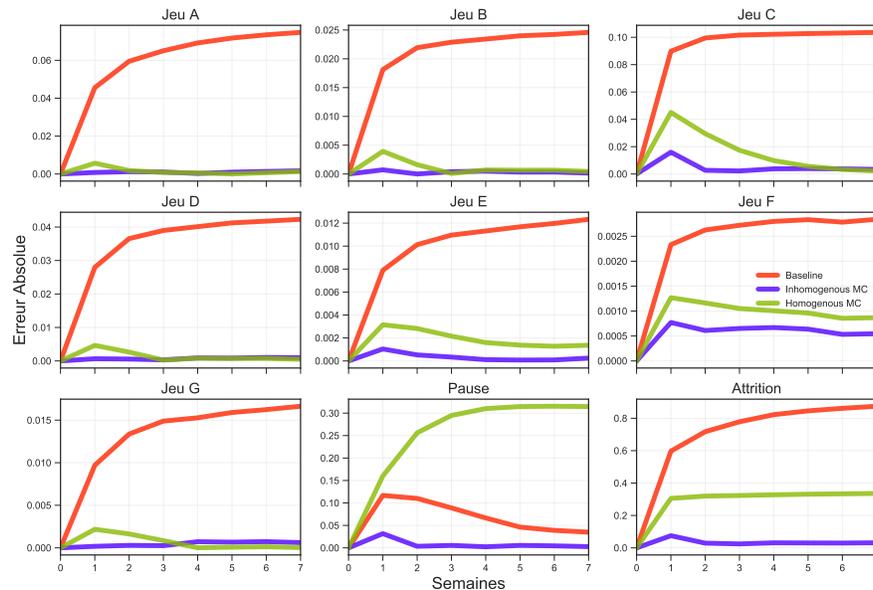


FIGURE 4.4 – **Comparaison des performances de prédiction de la rétention.** La chaîne de Markov inhomogène performe globalement mieux que les deux autres modèles. On remarque remarque les modèles homogènes et inhomogènes performant très bien sur les jeux A, B, D et G avec une erreur absolue de prédiction pratiquement nulle.

La chaîne homogène surestime de beaucoup la mise en pause, performant moins bien que le modèle naïf. Dans les autres cas, le modèle naïf enregistre la pire performance parmi les approches proposées.

### 4.3.2 Analyse de la migration entre les jeux

Pour observer les migrations entre les jeux, nous avons sélectionné les joueurs ne jouant qu'au jeu A à la première semaine. En effet, la migration est un phénomène qui a un effet bien plus faible que la rétention. En isolant que des joueurs du jeu A, on s'assure que les migrations vers les autres états dans les périodes suivantes sont entièrement dues au jeu A.

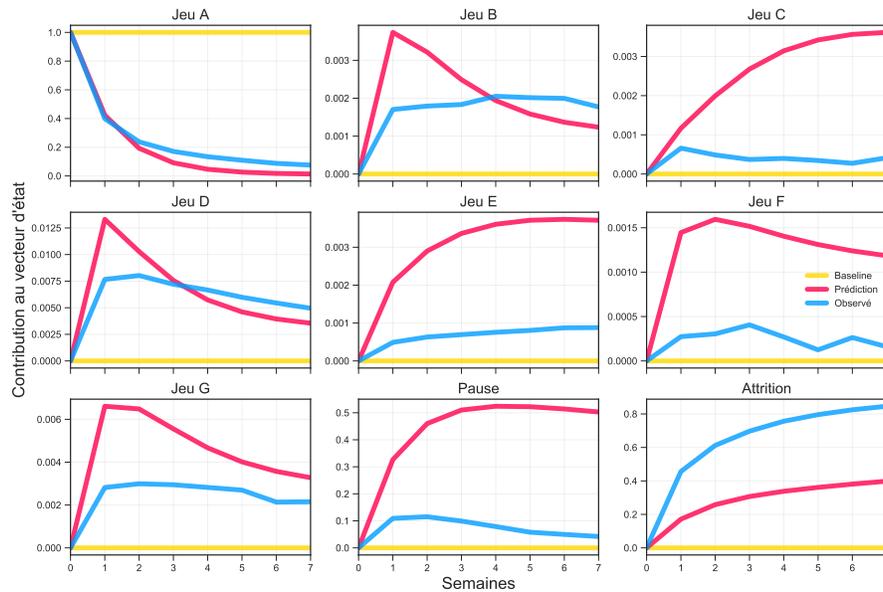


FIGURE 4.5 – **Migrations avec l'hypothèse de stationnarité.** L'ensemble de la cohorte débute sur l'état représentant le jeu A. Après la première semaine, on observe des migrations vers les autres jeux. L'effet de l'attrition est observé à partir de la deuxième semaine.

Tel qu'on l'observe sur la figure 4.5, la chaîne homogène surestime l'effet migratoire vers les autres jeux et le taux de mise en pause. Elle sous-estime le nombre de joueurs qui cessent complètement de jouer. La tâche de prédiction des migrations est plus difficile que la précédente, puisqu'il s'agit d'un phénomène secondaire à faible intensité.

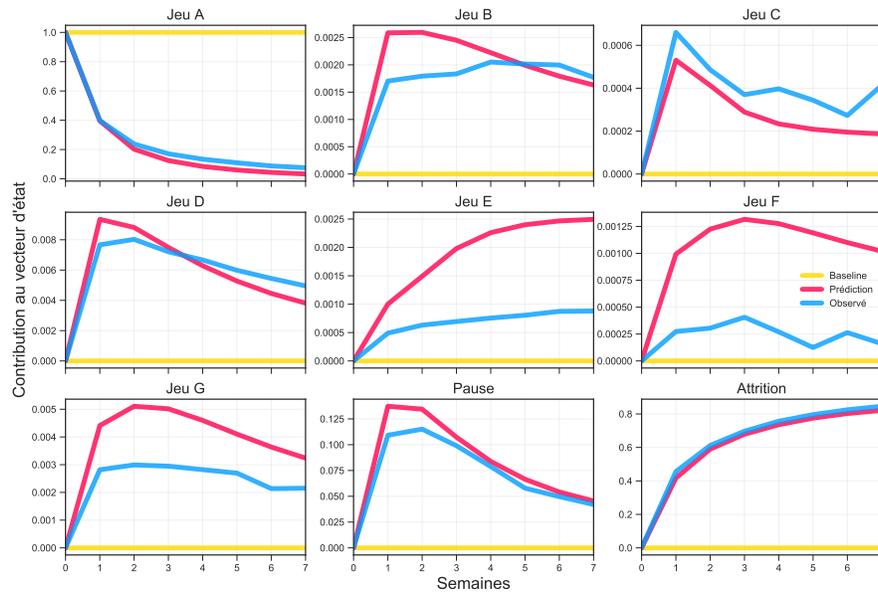


FIGURE 4.6 – Migrations avec l’hypothèse de non-stationnarité. L’ensemble de la cohorte débute sur le jeu A. L’hypothèse de non-stationnarité semble suffire à expliquer la pause et la fin des relations clients, mais échoue à expliquer les jeux E, F et G

La migration est un phénomène de faible amplitude, comme on peut l’observer dans les deux figures précédentes. Malgré tout, la chaîne inhomogène arrive à l’expliquer pour certains jeux. Et ce, particulièrement pour le jeu D où le phénomène migratoire prend une place plus grande que pour les autres jeux. Il est probable que ces faibles quantités atteignent la limite de résolution des deux chaînes. Pour déterminer cette limite, il faudrait conduire une analyse supplémentaires sur les intervalles de confiance des estimés des paramètres de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}(t)$ . Cette analyse nous fournirait des intervalles d’erreur pour les prédictions. Une façon de calculer ces intervalles de confiance serait de procéder à un tirage aléatoire avec remplacement (aussi appelé *bootstrap*. Nous réservons ces analyses à des études futures.

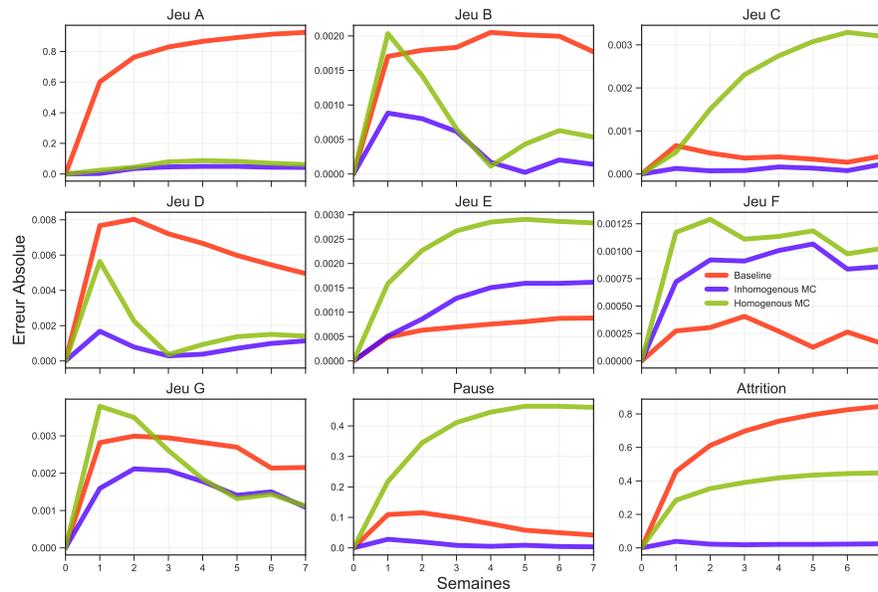


FIGURE 4.7 – Comparaison des performances de prédiction de la migration.

On observe que le modèle naïf échoue à expliquer la rétention dans le jeu A et l'attrition, mais s'avère assez performant pour les autres jeux par rapport aux modèles développés dans ce mémoire. La raison en est que la contribution de la migration aux états futurs est pratiquement nulle, et donc une prédiction nulle (i.e. celle du modèle naïf) s'avère être une approximation acceptable de la réalité. On observe tout de même que la chaîne inhomogène performe mieux que la chaîne homogène dans presque tous les cas. On remarque aussi que la chaîne inhomogène performe généralement mieux que le modèle naïf.

### 4.3.3 Analyse du temps de jeu

Dans cette section, nous évaluons la performance des modèles sur un indicateur de performance dérivé de l'état prédit, soit le temps moyen joué par joueur calculé en jour/semaine. On évalue d'abord cet indicateur de performance pour chaque jeu, à partir de la cohorte d'entraînement. Pour chaque jeu, on aura donc un estimé du nombre moyen de jours passés par semaine et par joueur à partir de données historiques. La prédiction consiste à pondérer cet estimé par la valeur de la distribution de la cohorte pour un jeu donné à une période donnée. Étant donné que l'on étudie le temps de jeu, nous assumons que les contributions aux états de pause et d'attrition sont nulles.

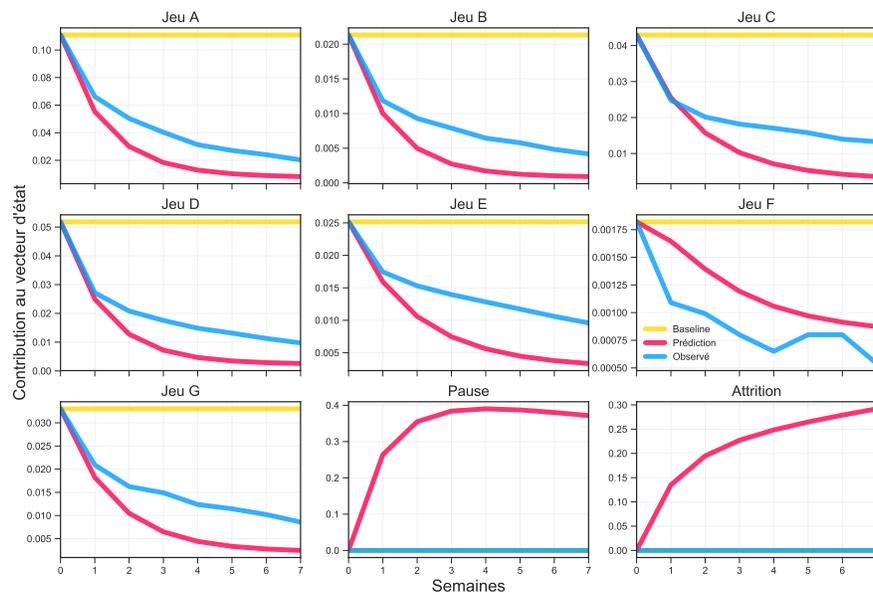


FIGURE 4.8 – **Temps moyen joué en jour/semaine avec l'hypothèse de stationnarité.** La chaîne de Markov homogène sous-estime systématiquement la valeur du temps joué moyen (en jour/semaine) pour l'ensemble des jeux hormis le jeu F dont les valeurs observées sont très petites.

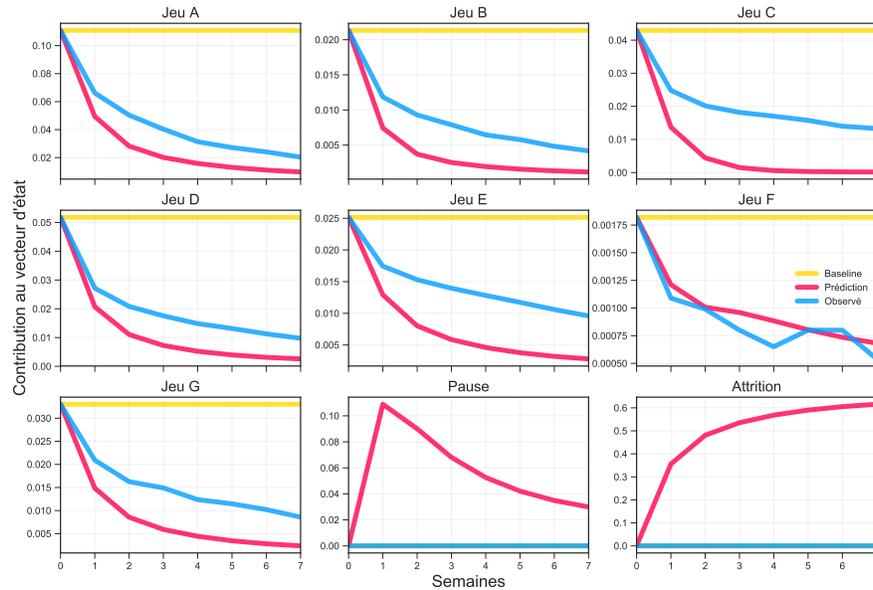


FIGURE 4.9 – **Temps joué avec l’hypothèse de non-stationnarité.** La chaîne de Markov inhomogène sous-estime systématiquement la valeur du temps joué moyen (en jour/semaine) pour l’ensemble des jeux. Cela peut être dû au fait que le temps moyen de jeu dépend du temps ( $\theta = \theta(t)$ ).

Les figures précédentes nous montrent comment les deux modèles tendent à sous-estimer les vraies valeurs de temps moyen. Notons que pour dresser ces prédictions, nous avons utilisé des valeurs historiques de temps moyen par semaine. Étant donné que ces distributions sont généralement asymétriques, ceci engendre une grande volatilité des valeurs moyennes. Ces distributions sont asymétriques puisque beaucoup de joueurs ne joue pas beaucoup de temps et un nombre restreint de joueurs jouent plus longtemps.

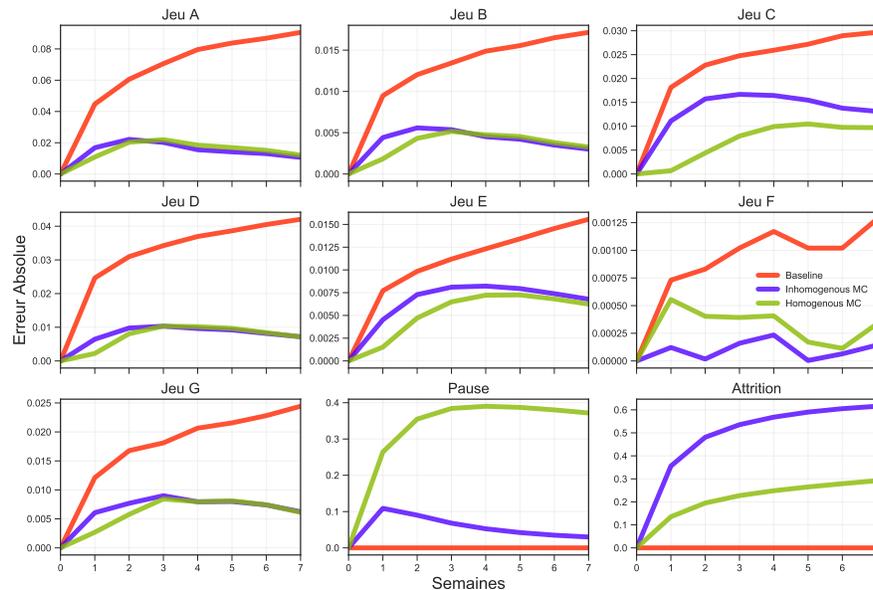


FIGURE 4.10 – **Comparaison des performances de prédiction du temps joué.** La chaîne de Markov inhomogène performe moins bien que la chaîne homogène. Malgré tout, les deux modèles enregistrent de faibles performances.

Dans la figure 4.10, on observe que les deux modèles de chaînes de Markov homogène et inhomogène enregistrent des performances similaires sur la prédiction de l'indicateur de performance. Tout de même, la chaîne homogène performe mieux sur le jeu C et la chaîne inhomogène, sur le jeu F. Dans tous les cas, le modèle naïf est moins performant.

Dans cette section, nous avons appliqué les modèles développés dans ce mémoire à des données réelles d'une firme de jeux vidéos développant des jeux pour les appareils mobiles. Nous avons pu observer que la chaîne de Markov inhomogène, contenant davantage de paramètres que la chaîne homogène, performait mieux que cette dernière dans la prédiction de la rétention, la mise en pause, l'attrition. Le phénomène de migration n'était tout de même pas très bien modélisé par ces deux chaînes. Nous avons proposé que cela est dû à la limite de résolution des deux modèles. De plus, nous avons testé les modèles

---

développés sur la prédiction d'un indicateur de performance : le temps de jeu moyen. Dans ce cas, les deux chaînes présentaient des performances comparables. Nous avons que la faible performance sur la prédiction du temps moyen est dû à un choix trop naïf de  $\mathbf{T}$ , simplement obtenu via des moyennes de temps de jeu par période estimées à partir des données historiques. Notre cadre de modélisation s'étend naturellement à un estimé plus complexe de  $\mathbf{T}$ , mais nous laissons ce travail aux initiatives de recherche futures. Dans la prochaine section, nous étendrons notre travail d'élaboration d'un cadre analytique pour décrire, mesurer et prédire l'état des relations clients sur la base des chaînes de Markov.

# Chapitre 5

## Extensions du modèle

L'objectif de cette section est d'étendre notre réflexion sur la modélisation des relations clients par chaînes de Markov. Nous montrerons comment il est possible de reformuler la description des courbes de rétention d'un seul produit dans le cadre formel de modélisation présenté dans ce mémoire. Nous montrerons aussi comment les prédictions de la chaîne de Markov peuvent être comprises comme une combinaison linéaire des différents phénomènes à l'oeuvre : la rétention, l'attrition, la migration vers d'autres produits, la mise en pause lorsque ceci s'applique. Dans cette optique, nous étudierons les systèmes avec un nombre arbitrairement grand de produits. Finalement, dans la dernière section, nous jetterons les bases mathématiques pour modéliser les indicateurs de performance d'une cohorte comme la rétention et la LTV à l'échelle un réseau de produits toujours à l'aide du même cadre conceptuel des chaînes de Markov.

### 5.1 Dynamique pour un service unique

Dans l'industrie des jeux mobiles, on s'intéresse généralement à la dynamique d'une cohorte pour un seul produit. On cherche à répondre à des questions comme : quel proportion d'une cohorte donnée est encore présente  $t$  périodes après l'installation ? Nous formaliserons ce problème souvent rencontré dans l'industrie en termes des chaînes de Markov. Dans ce cas, le système aura deux

états : la rétention dans l'unique application et l'attrition des joueurs par rapport à celle-ci.

Cette approche, plutôt classique dans l'industrie du jeu mobile, consiste à étudier une cohorte et son interaction avec un seul produit, une seule application le cas échéant. En effet, on dira que l'état initial du système est entièrement concentré sur un seul état, l'application de départ. Formellement, on a que  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{e}_0$ , un vecteur unitaire dont l'élément non nul est lié au jeu. Compris ainsi, le système possède deux états possibles : un état associé à l'activité dans le produit (i.e. la rétention) et un autre associé à un arrêt d'activité dans le produit (i.e. l'attrition, sans réengagement). Pour reprendre la notation de la chaîne Markov absorbante, le système à deux états que nous décrivons est représenté comme suit :

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} r(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec  $c(t) = 1 - r(t)$ . Les éléments  $r(t)$  et  $c(t)$  sont les taux de transition du système fictif décrit ici. Par exemple, si  $r(0) = 0.8$ , ceci implique que le taux de rétention de la cohorte à  $t = 0$  sur le jeu sera de 80%. De plus, on suppose le cas général où cette chaîne est inhomogène puisque les taux de transitions  $r(t)$  et  $c(t)$  contiennent une dépendance temporelle. Si nécessaire, poser  $r(t)$  et  $c(t)$  indépendant du temps nous permet de retrouver le cas où la chaîne est homogène. Étant donné un système modélisé par cette chaîne avec une distribution  $\mathbf{s}_n$  au temps  $n$ , la chaîne permet de trouver les états suivants au temps  $n + t$  suivant la règle :

$$\mathbf{s}_{n+t}^T = \mathbf{r}_{n+t}^T + \mathbf{c}_{n+t}^T = \mathbf{s}_n^T \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta). \quad (5.1)$$

La décomposition de l'état  $\mathbf{s}_{n+t}$  comme une combinaison linéaire de ses composantes de rétention  $\mathbf{r}_{n+t}$  et d'attrition  $\mathbf{c}_{n+t}$  permet d'isoler la contribution

de chaque phénomène à l'état futur :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{n+t}^T &= \mathbf{e}_0^T(\mathbf{s}_{n+t})_0 \\ \mathbf{c}_{n+t}^T &= \mathbf{e}_1^T(\mathbf{s}_{n+t})_1.\end{aligned}$$

On retrouve aisément les composantes  $(\mathbf{s}_{n+t})_0$  et  $(\mathbf{s}_{n+t})_1$  du vecteur d'état  $\mathbf{s}_{n+t}$  pour une période ultérieure quelconque :

$$\begin{aligned}(\mathbf{s}_{n+t})_0 &= (\mathbf{s}_n)_0 \prod_{\theta=n}^{n+t} r(\theta) \\ (\mathbf{s}_{n+t})_1 &= (\mathbf{s}_n)_0 \left( 1 - \prod_{\theta=n}^{n+t} r(\theta) \right) + (\mathbf{s}_n)_1.\end{aligned}$$

Pour davantage de clarté, on associe ces deux composantes à la rétention et l'attrition de la cohorte respectivement, on définit :

$$\begin{aligned}R_{n+t} &= (\mathbf{s}_{n+t})_0 \\ C_{n+t} &= (\mathbf{s}_{n+t})_1\end{aligned}$$

qui agisse comme des fonctions décrivant l'évolution de la cohorte à travers le temps. En effet, en estimant  $R_t$  pour tous les  $t$ , on retrouve la courbe de rétention prédite par le modèle. Finalement on a que :

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{n+t}^T &= \mathbf{r}_{n+t}^T + \mathbf{c}_{n+t}^T = \begin{bmatrix} R_{n+t} \\ C_{n+t} \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{s}_n)_0 \begin{bmatrix} \prod_{\theta=n}^{n+t} r(\theta) \\ 1 - \prod_{\theta=n}^{n+t} r(\theta) + (\mathbf{s}_n)_1/(\mathbf{s}_n)_0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

avec la condition que  $(\mathbf{s}_n)_0 + (\mathbf{s}_n)_1 = 1 \quad \forall n$ . Bien que cette formulation matricielle des relations clients ne soit pas nouvelle, car déjà exploré par Pfeifer et al. [32] précédemment, ce résultat nous permet de poser les fondations pour modéliser les relations clients dans un réseau contenant un nombre arbitrairement grand de produits.

### 5.1.1 Simulations

Nous avons présenté le cas le plus complexe où le paramètre  $r(t)$  qui contrôle la rétention est variable dans le temps. Nous pouvons tout de même forcer la contrainte de stationnarité en posant  $r(t)$  constant, c'est-à-dire correspondant à une valeur fixe  $r$ . Dans cette section, nous simulerons l'effet d'un  $r$  constant sur l'évolution de la rétention  $R_t$ . Nous nous pencherons ensuite sur l'effet d'un taux de rétention  $r(t)$  variable en étudiant l'effet de différentes fonctions.

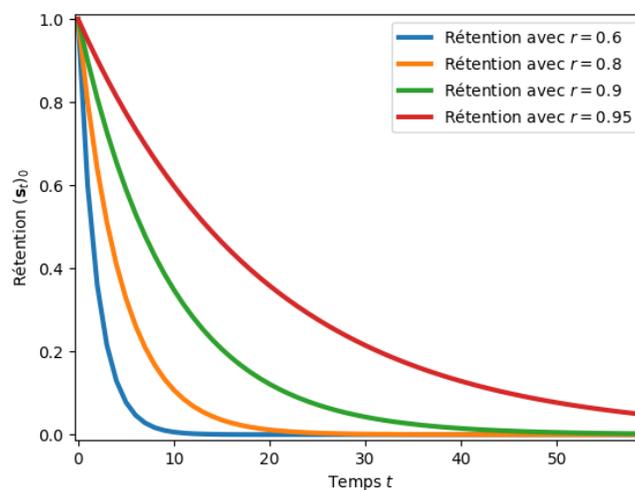


FIGURE 5.1 – **Rétention pour  $r$  constant.**

La figure 5.1 permet d'observer une décroissance exponentielle de la rétention pour les différents taux constants. Un taux de rétention élevé mène naturellement à une plus forte rétention et un taux de rétention bas mène à une plus forte attrition. Aussi, plus le taux de rétention est élevé, moins la pente de rétention  $R_t$  est abrupte. Rappelons aussi que  $R_t$  représente la composante  $(s_n)_0$  du vecteur d'état. Finalement, on remarque que plus  $r$  est élevé, plus les joueurs sont engagés dans l'application.

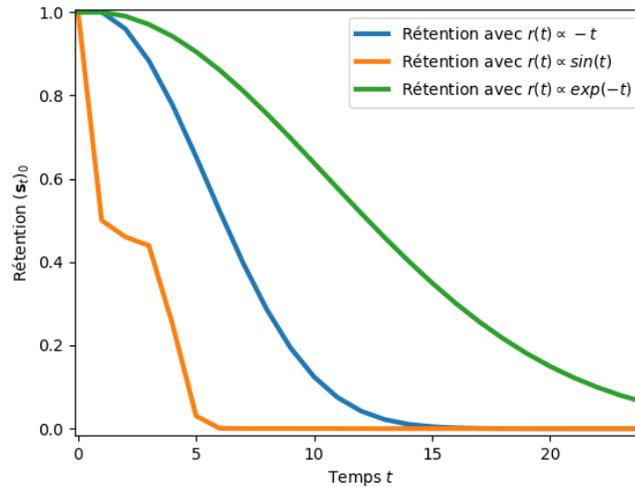


FIGURE 5.2 – **Rétention pour  $r$  variable.** On observe différentes formes de décroissance selon la fonction de taux  $r$  utilisée. Ces fonctions n'ont pas d'utilité réelle, puisqu'elles servent seulement à montrer les effets de différents types de variation temporelle du paramètre  $r$ .

Lorsque  $r(t)$  est proportionnelle à une fonction sinusoïdale, on observe un ralentissement temporaire de la décroissance de la rétention. Ceci est dû au fait que cette fonction s'approche périodiquement de 1. Dans notre cas, ceci signifie que la cohorte aurait une rétention quasi parfaite à certains instants du processus.

Puisque la chaîne de Markov est absorbante et que  $r(t) < 1$ , les pentes de rétention seront toujours décroissantes, tout comme les courbes réelles de rétention. Ainsi nous constatons que la chaîne de Markov absorbante est un bon candidat pour modéliser ces courbes. Au chapitre quatre, on a pu constater que le phénomène de rétention était bien représenté par la chaîne inhomogène, mais que la chaîne homogène était tout de même une approximation acceptable. Dans le cas présent, ceci indique que  $r$  serait mieux modéliser comme une fonction du temps. Pour le vérifier, on observe à la figure 5.3 les éléments diagonaux des chaînes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}(t)$  développées au chapitre quatre, qui nous permettent d'obtenir  $r(t)$ .

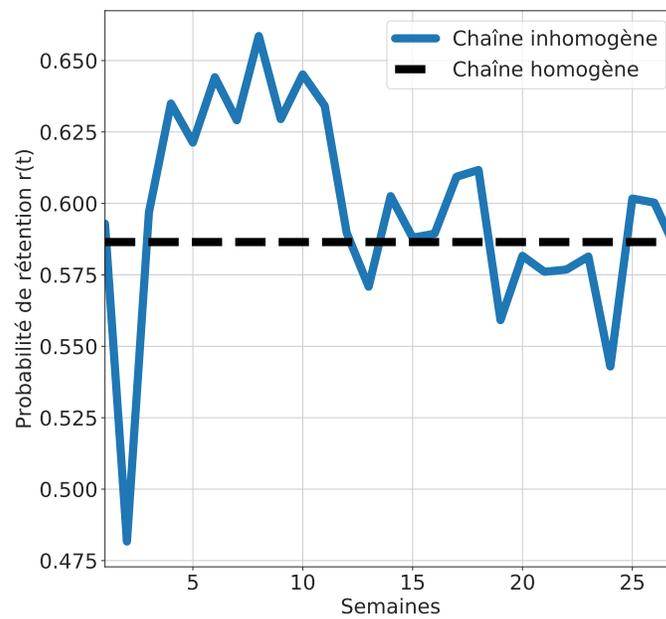
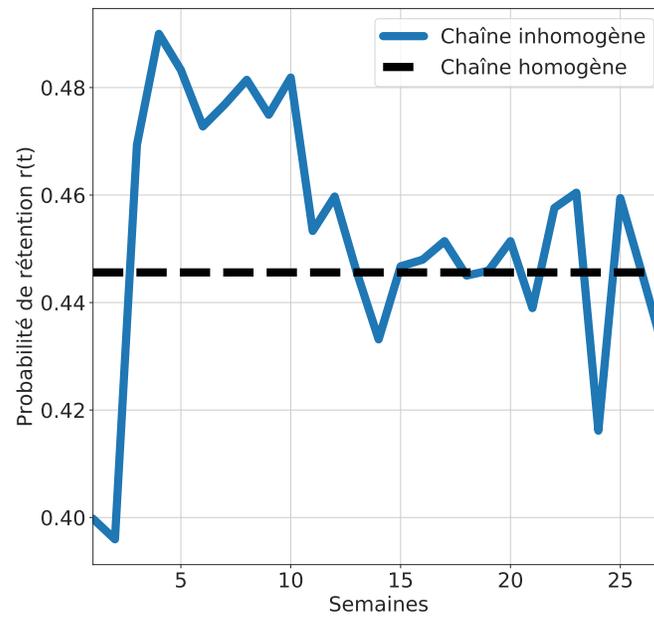


FIGURE 5.3 – **Rétention  $r(t)$  pour les jeux A et E.** Par contraste, la chaîne inhomogène ajuste  $r(t)$  aux données comme une fonction du temps, alors que dans le cas homogène  $r$  est constant ; décrivant le taux de rétention moyen.

## 5.2 Dynamique pour N services

Nous analyserons ici le cas général où le développeur possède un nombre arbitraire  $N$  de jeux. Nous introduirons aussi des états de pause pour chaque jeu afin d'expliquer en détail la notion de désengagement, qui ne se réduit pas qu'à l'unique état d'attrition. Dans cette section, nous cherons à décomposer les distributions prédites  $\mathbf{s}$  en toutes leurs composantes, soit la contribution de tous les types d'état. Pour une valeur donnée associée à l'état  $\alpha$  du vecteur d'état  $\mathbf{s}$ , on cherche à répondre aux questions suivantes : quelle est la contribution du phénomène de migration en provenance d'autres jeux à l'élément  $(\mathbf{s})_\alpha$  ? Quelle est la proportion des joueurs qui reviennent de pause et qui occuperont l'état  $\alpha$  à la période suivante ? Quelle proportion est uniquement attribuable à la rétention sur  $\alpha$  ?

Cette décomposition permet donc de décomposer sur la dynamique du système en ses divers phénomènes. Le traitement suivant décrit les vecteurs d'état sous forme de combinaison linéaires de ces différents phénomènes. Cette approche nous donne les notions nécessaires pour répondre à ces questions.

Étant donné une chaîne de Markov et sa matrice stochastique  $\mathbf{A}(t)$  ainsi que la distribution  $\mathbf{s}_n$  d'une cohorte donnée à  $t = n$ , la distribution  $\mathbf{s}_{n+t}$  est obtenue par :

$$\mathbf{s}_{n+t}^T = \mathbf{r}_{n+t}^T + \mathbf{m}_{n+t}^T + \mathbf{p}_{n+t}^T + \mathbf{c}_{n+t}^T = \mathbf{s}_n^T \prod_{\theta=0}^t \mathbf{A}(\theta) \quad (5.2)$$

où on décompose  $\mathbf{s}_{n+t}$  pour la contribution de phénomènes sous-jacents : la rétention, l'effet migratoire (c'est-à-dire les transitions entre les états non absorbants), les états de pause ainsi que l'attrition (la fin complète des relations clients).

En utilisant la matrice de projection  $\mathbf{P}_{(\alpha)}$  pour la coordonnée  $\alpha$  (dont les éléments  $(\mathbf{P}_{(\alpha)})_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}$ ), la contribution majeure à ce nombre est obtenu

par  $\mathbf{r}_{n+t}$  :

$$\mathbf{r}_{n+t}^T = \mathbf{s}_n^T \sum_{\alpha \in A} \left[ \mathbf{P}_{(\alpha)} \left( \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \right) \mathbf{P}_{(\alpha)} \right]$$

où  $A$  est l'ensemble des indices de la matrice stochastique associés aux jeux. À titre informatif, le lecteur trouvera en annexe des informations pertinentes sur le comportement des matrices de projection  $\mathbf{P}$ .

On retrouve ensuite la composante liée à l'état de pause en suivant un raisonnement similaire. En effet, on ne retient que les taux transitoires qui se dirigent vers l'état de pause, qui y vont ou qui y reste. En fait, les trois composantes de la définition suivante isole respectivement ces différents taux.

$$\mathbf{p}_{n+t}^T = \mathbf{s}_n^T \left[ \mathbf{P}_{(p)} \left( \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \right) + \left( \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \right) \mathbf{P}_{(p)} - \mathbf{P}_{(p)} \left( \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \right) \mathbf{P}_{(p)} \right].$$

L'attition est quant à elle obtenue par :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n+t}^T &= \mathbf{s}_n^T \left[ \mathbf{P}_{(c)} \left( \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \right) + \left( \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \right) \mathbf{P}_{(c)} - \mathbf{P}_{(c)} \left( \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \right) \mathbf{P}_{(c)} \right] \\ &= \mathbf{s}_n^T \mathbf{P}_{(c)} \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \end{aligned}$$

puisque

$$\left( \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \right) \mathbf{P}_{(c)} = \mathbf{P}_{(c)} \left( \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \right) \mathbf{P}_{(c)}$$

si l'indice  $c$  correspond à un état absorbant. Ceci indique que les seuls taux de transition non nuls liés à l'état absorbant sont les taux qui vont vers cet état. De plus, on sait que la rétention sur cet état est toujours égale à un.

Ensuite, pour décrire les migrations entre jeux, on isole les liens sortants et entrants d'un jeu à un autre. La contribution des migrations à l'état  $\mathbf{s}_{n+t}^T$  est

obtenue par :

$$\mathbf{m}_{n+t}^T = \mathbf{s}_n^T \left[ \left( \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_{(\alpha)} \right) \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \left( \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_{(\alpha)} \right) - \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_{(\alpha)} \left( \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta) \right) \mathbf{P}_{(\alpha)} \right].$$

Nous avons illustré le cas le plus complexe lorsque la matrice stochastique  $\mathbf{A}$  dépend du temps, mais dans le cas où la chaîne est homogène, on obtient la simplification suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+t}^T &= \mathbf{r}_{n+t}^T + \mathbf{m}_{n+t}^T + \mathbf{p}_{n+t}^T + \mathbf{c}_{n+t}^T = \mathbf{s}_n^T \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{s}_n^T \mathbf{A}^t. \end{aligned}$$

La composante de rétention est obtenue par :

$$\mathbf{r}_{n+t}^T = \mathbf{s}_n^T \sum_{\alpha \in A} [\mathbf{P}_{(\alpha)} \mathbf{A}^t \mathbf{P}_{(\alpha)}].$$

On étend ensuite ce raisonnement à l'attrition, à la mise en pause de l'utilisation de l'application et à la migration à d'autres applications. La contribution de l'état de pause est :

$$\mathbf{p}_{n+t}^T = \mathbf{s}_n^T [\mathbf{P}_{(p)} \mathbf{A}^t + \mathbf{A}^t \mathbf{P}_{(p)} - \mathbf{P}_{(p)} \mathbf{A}^t \mathbf{P}_{(p)}].$$

On obtient la composante de l'attrition par :

$$\mathbf{c}_{n+t}^T = \mathbf{s}_n^T \mathbf{P}_{(c)} \mathbf{A}^t.$$

Et la migration se calcule :

$$\mathbf{m}_{n+t}^T = \mathbf{s}_n^T \left[ \left( \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_{(\alpha)} \right) \mathbf{A}^t \left( \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_{(\alpha)} \right) - \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_{(\alpha)} \mathbf{A}^t \mathbf{P}_{(\alpha)} \right].$$

Cette combinaison linéaire de  $\mathbf{s}$  en termes de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{m}$  permet d'isoler

les contributions de différents phénomènes. Chaque composante permet de répondre aux questions énoncées ci-haut.

## 5.3 Modélisation des relations clients à l'échelle du réseau

Nous cherchons maintenant à modéliser les indicateurs de performance d'une cohorte donnée sur le réseau des produits; nous dériverons les expressions pour calculer la rétention à l'échelle du réseau ainsi que la LTV, deux concepts centraux dans la gestion des relations clients. Il est crucial de formaliser ces concepts dans notre formulation afin de pouvoir prétendre à une vision holistique des relations clients.

Pour  $\mathbf{K}(\theta)$  une matrice diagonale dont les éléments non-nuls correspondent à un indicateur de performance arbitraire fonction du temps  $\theta$ , on cherche à déterminer la valeur totale de cette indicateur. À noter que pour les états d'attrition et de pause, les éléments diagonaux correspondants de  $\mathbf{K}$  sont nuls puisque ces états n'influencent pas le calcul des métriques reliées à la rétention.

### 5.3.1 Indicateurs de performance générique

#### Chaîne de Markov homogène et $\mathbf{K}$ indépendant du temps

On introduit le vecteur  $\mathbf{1}$  dont les éléments sont tous égaux à 1. Il s'avère utile puisqu'il nous permet de sommer l'ensemble des éléments d'un vecteur sans quitter le terrain de l'algèbre linéaire.

$$\begin{aligned} K_{\text{reseau}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_i^N \sum_{\theta=0}^T (\mathbf{s}_0^T \mathbf{K} \mathbf{A}^\theta)_i \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{s}_0^T \mathbf{K} [(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{T+1}) - \mathbf{I}] \mathbf{1} \\ &= \mathbf{s}_0^T \mathbf{K} [(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{I}] \mathbf{1}. \end{aligned}$$

La dernière simplification est possible puisque à la somme infinie sur les puissances de  $\mathbf{A}$  est une série géométrique. On rencontre dès lors une première difficulté puisque la condition sur les valeurs propres  $|\lambda| < 1$  n'est pas respectée en raison de l'aspect fermé du système. En effet,  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  n'est pas inversible dans ce contexte. Une façon de résoudre ce problème est de rendre nuls les taux de transitions vers l'état d'attrition (ainsi que l'auto-boucle sur cet état). Formellement, on applique la transformation suivante à la matrice stochastique  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A} - \mathbf{P}_{(c)}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{P}_{(c)} + \mathbf{P}_{(c)}\mathbf{A}\mathbf{P}_{(c)}.$$

Notons tout de même que le temps d'exécution d'une inversion de matrice se situe autour de  $O(N^3)$ , et qu'il est possible d'obtenir une approximation acceptable avec un  $T$  suffisamment grand en sommant les matrices  $\mathbf{A}^\theta$  à  $T$  reprises. La simplification de la série géométrique n'est donc utile que dans le cas où  $T > N^3$ .

### Chaîne de Markov inhomogène et $\mathbf{K}$ dépendant du temps

Comme on vient de le voir, la limite à l'infini peut être approximée numériquement en prenant un  $T$  très grand. Une bonne approximation de  $T$  correspond au temps où la distribution est principalement concentrée sur l'état absorbant. On pourrait avoir recourt à la notion de temps espéré avant absorption introduite au chapitre 3, mais elle requiert une inversion de matrice. Généralement, on estimera ce temps empiriquement à l'aide de simulations numériques.

$$\begin{aligned} K_{\text{reseau}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_i^N \sum_{\theta=0}^T \left( \mathbf{s}_0^T \mathbf{K}(\theta) \prod_{t=0}^{\theta} \mathbf{A}(t) \right)_i \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \sum_{\theta=0}^T \left( \mathbf{s}_0^T \mathbf{K}(\theta) \prod_{t=0}^{\theta} \mathbf{A}(t) \right) \right] \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Dans le cas inhomogène, la somme sur les puissances de  $\mathbf{A}(t)$  n'est plus une somme géométrique. Il n'est donc pas possible de réduire l'expression davantage.

### 5.3.2 Modélisation de la rétention

Dans le cas de la modélisation de la rétention, la matrice  $\mathbf{K}$  se réduit à une matrice diagonale dont  $k_{nn} \in \{0, 1\}$ . Lorsque l'indice  $n$  correspond à une application, alors  $k_{nn} = 1$  et c'est  $k_{nn} = 0$  sinon. À noter que dans le calcul de la rétention, on ne sommera pas sur toute les périodes puisque nous ne sommes intéressé que par l'état du système au temps  $t$ . On se dégage de la somme sur  $\theta$ , et donc de la somme infini. Pour la rétention, on la définit en termes des matrices de projection :

$$\mathbf{K} = \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_{(\alpha)}$$

puisque les éléments diagonaux de la chaîne représentent déjà la composante de rétention.

#### Chaîne de Markov homogène

On étend la notion de rétention à un seul jeu à la rétention au niveau du réseau. Le fait qu'un joueur ne joue plus à un jeu donné indique son attrition dans le cadre classique d'analyse, mais ici nous considérons qu'il est retenu temps et aussi longtemps qu'il n'occupe pas le noeud absorbant. Il peut donc se retrouver sur les autres états. L'expression suivante définit la métrique de rétention à l'échelle du réseau à travers le temps :

$$R_{\text{reseau}}(t) = \mathbf{s}_0^T \left[ \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_{(\alpha)} \right] \mathbf{A}^t \mathbf{1}$$

#### Chaîne de Markov inhomogène

La variante non stationnaire de la définition précédente permet d'introduire une complexité supplémentaire dans la modélisation, une plus grande précision

dans la prédiction.

$$\begin{aligned} R_{\text{reseau}}(t) &= \sum_i^N \left( \mathbf{s}_0^T \left[ \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_{(\alpha)} \right] \prod_{\theta=0}^t \mathbf{A}(\theta) \right)_i \\ &= \left[ \mathbf{s}_0^T \left[ \sum_{\alpha \in A} \mathbf{P}_{(\alpha)} \right] \prod_{\theta=0}^t \mathbf{A}(\theta) \right] \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Dans la prochaine section, nous allons montrer qu'il est aussi possible d'obtenir des expressions pour la LTV.

### 5.3.3 Modélisation de la LTV

La LTV est généralement calculé, dans le cadre de l'analytique de jeu, à l'aide du revenu moyen par joueur par période (i.e. ARPDAU, de l'anglais *Average revenu per daily active user*) et du temps de vie espéré par joueur compté en nombre de périodes. Elle se définit en fait comme le ARPDAU multiplié par le temps de vie espéré. Ici, notre expression pour la LTV suit ce raisonnement et se définit donc par une somme de fonctions du revenus par période pondérée par la chaîne.

Pour  $\mathbf{\Pi}$  une matrice diagonale dont les éléments non nuls correspondent à une fonction ou une statistique du revenu (i.e. total, moyen, médian, etc.) par période pour les différents produits. Si  $\mathbf{\Pi}$  est une fonction, on s'imagine très bien qu'elle puisse être estimé par des méthodes d'approximation de fonctions comme une régression, une heuristique ou un modèle d'apprentissage automatique. On cherche maintenant à obtenir une expression pour le revenu total généré par le réseau.

#### Chaîne de Markov homogène avec $\mathbf{\Pi}$ constant

Cette première expression permet d'obtenir la LTV totale à l'échelle du réseau en supposant que la dynamique du système ne change pas dans le temps, et que les revenus générés par période sont aussi constants dans le temps. On

suppose  $\mathbf{\Pi}$  constant pour simplifier l'expression finale.

$$\begin{aligned} \text{LTV}_{\text{reseau}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_i^N \sum_{\theta=0}^T (\mathbf{s}_0^T \mathbf{\Pi} \mathbf{A}^\theta)_i \\ &= \mathbf{s}_0^T [\mathbf{\Pi}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{I}] \mathbf{1}. \end{aligned}$$

### Chaîne de Markov inhomogène avec $\mathbf{\Pi}$ dépendant du temps

Cette variante non stationnaire introduit une dépendance temporelle sur les paramètres de la chaîne de Markov, mais aussi sur les éléments diagonaux  $\mathbf{\Pi}$  dans le cas où ils sont modélisés à l'aide de fonctions. En effet, on peut s'attendre à ce que dans un cadre réel de modélisation, les revenus par période varient dans le temps. L'expression de la LTV de réseau est donc obtenue par :

$$\begin{aligned} \text{LTV}_{\text{reseau}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_i^N \sum_{\theta=0}^T \left( \mathbf{s}_0^T \mathbf{\Pi}(\theta) \prod_{t=0}^{\theta} \mathbf{A}(t) \right)_i \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\theta=0}^T \left[ \mathbf{s}_0^T \mathbf{\Pi}(\theta) \prod_{t=0}^{\theta} \mathbf{A}(t) \right] \mathbf{1}. \end{aligned}$$

# Chapitre 6

## Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons démontré la validité d'un cadre de modélisation basé sur les chaînes de Markov pour expliquer les relations clients tant sous une modalité descriptive que prédictive en analysant les données d'une entreprise de jeux mobiles. Nous avons appliqué les modèles ainsi dérivés à des données réelles d'une entreprise de jeux vidéos mobiles. Nous avons ensuite montré qu'il était possible d'enrichir la compréhension des relations clients à l'aide de taux migratoires entre jeux, et l'introduction de la notion de désengagement temporaire.

Lors du développement de ces modèles, nous avons aussi évalué l'impact des hypothèses de stationnarité et de non stationnarité des données respectivement sur les performance du modèle. Nous avons ensuite exploré des extensions de ce même modèle, admettant une description des prédictions sous forme de combinaison linéaire de vecteurs d'états. Ces expressions nous permettent de décomposer les prédictions des chaînes de Markov en ses différentes composantes. Nous avons aussi jeté les bases théoriques pour décrire les indicateurs de performance à l'échelle d'un réseau de jeux, toujours sous le formalisme des chaînes de Markov.

En résumé, le modèle stationnaire développé dans ce mémoire est équivalent

à :

$$\mathbf{s}_{n+t}^T(\theta, \mathbf{s}_n) = \mathbf{s}_n^T \mathbf{A}^t$$

et sa variante non stationnaire est obtenue par :

$$\mathbf{s}_{n+t}^T(\theta, \mathbf{s}_n, t) = \mathbf{s}_n^T \prod_{\theta=n}^{n+t} \mathbf{A}(\theta).$$

Avec  $\theta = \mathbf{A}$  ou  $\theta = \mathbf{A}(t)$ , on comprend que les probabilités de transition ne sont pas estimées individuellement. En effet, les probabilités de transition sont partagées pour tous les joueurs d'une cohorte. Ces probabilités, estimées à partir de l'ensemble d'entraînement, ne dépendent pas de caractéristiques individuelles de chaque joueur et permettent seulement d'effectuer des prédictions à l'échelle d'une cohorte avec un nombre de joueurs  $N \gg 1$ . Il serait ainsi intéressant d'étudier la performances de ces modèles en fonction du nombre de joueurs analysés. On y trouverait sans doute une limite inférieure où les paramètres des modèles ne convergent plus.

En guise d'explorations futures et pour pallier à ce problème, on pense au développement de modèles capables de prédire les états futurs pour chaque client individuellement. Ceci peut entre autres correspondre à estimer une matrice stochastique  $\mathbf{A}_i$  pour chaque client  $i$  en fonction de covariables nous informant sur les spécificités du comportement des joueurs dans les jeux. L'introduction de covariables permet d'inclure davantage d'informations à l'échelle individuelle. Aussi, tel que présenté dans la littérature, nous pourrions construire des architectures plus complexes comme des chaînes de Markov cachées, des réseaux de neurones ou des méthodes d'ensemble pour générer ces probabilités conditionnelles pour chaque joueur  $i$ . Il s'agit en fait de construire un modèle estimant  $p(\mathbf{s}_{t+1}|\mathbf{s}_t, t, x)$  dépendant du temps  $t$  et de covariables  $x$ . Cette approche nous permettrait d'obtenir des estimés moins biaisés des taux transitaires au niveau du joueur.

# Annexes

# Annexe A

## Données observées

Semaine	A	B	C	D	E	F	G	Pause	End
0	0.084071	0.026209	0.10714	0.046142	0.015011	0.003129	0.019729	0.00	0.00
1	0.038501	0.008080	0.017328	0.018173	0.007120	0.000797	0.010027	0.11682	0.59721
2	0.024588	0.004277	0.007666	0.009595	0.004884	0.000503	0.006365	0.11008	0.71723
3	0.019043	0.003328	0.005534	0.007171	0.004052	0.000409	0.004843	0.08895	0.77842
4	0.014916	0.002780	0.004940	0.006022	0.003694	0.000331	0.004455	0.06656	0.82233
5	0.012333	0.002216	0.004433	0.004902	0.003330	0.000296	0.003832	0.04619	0.84577
6	0.010629	0.001975	0.004028	0.004383	0.003037	0.000345	0.003492	0.03891	0.86145
7	0.009350	0.001622	0.003568	0.003838	0.002678	0.000289	0.003099	0.03494	0.87425

TABLE A.1 – Données observées en contexte d'analyse de la rétention.

Semaine	A	B	C	D	E	F	G	Pause	End
0	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.398710	0.001703	0.000660	0.007667	0.000489	0.000274	0.002818	0.109196	0.456111
2	0.237586	0.001793	0.000486	0.008028	0.000631	0.000304	0.002991	0.115081	0.612071
3	0.170997	0.001834	0.000370	0.007208	0.000694	0.000406	0.002946	0.099043	0.697199
4	0.133970	0.002052	0.000397	0.006666	0.000755	0.000270	0.002821	0.078817	0.756598
5	0.109443	0.002016	0.000344	0.005985	0.000806	0.000125	0.002696	0.057894	0.795973
6	0.087768	0.001996	0.000273	0.005448	0.000874	0.000263	0.002137	0.049696	0.824914
7	0.075623	0.001771	0.000413	0.004954	0.000880	0.000160	0.002152	0.042025	0.846073

TABLE A.2 – Données observées en contexte d'analyse de la migration.

# Annexe B

## Matrices de projection

Les matrices de projection  $\mathbf{P}_{(\alpha)}$  isolent la partie du système qui représente l'état  $\alpha$ . Pour mieux comprendre le comportement de  $\mathbf{P}_{(\alpha)}$ , nous donnerons un exemple dans le cas où  $\alpha = 1$ . Soit  $\mathbf{P}_{(1)}$  en cinq dimensions :

$$\mathbf{P}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et admettons que :

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & m_{12}(t) & m_{13}(t) & p_{14}(t) & c_{15}(t) \\ m_{21}(t) & r_{22}(t) & m_{23}(t) & p_{24}(t) & c_{25}(t) \\ m_{31}(t) & m_{32}(t) & r_{33}(t) & p_{34}(t) & c_{35}(t) \\ p_{41}(t) & p_{42}(t) & p_{43}(t) & p_{44}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}(t) \end{bmatrix} .$$

Soit une matrice stochastique d'une chaîne de Markov inhomogène  $\mathbf{A}(t)$  pour

un système à trois jeux avec un état de pause et un état d'attrition. Nous avons volontairement noté les éléments de la matrice selon leur fonction dans le système. Cette notation renvoie directement à celle utilisée pour les composantes du vecteur  $\mathbf{s}_{n+t}^T$  dans le chapitre cinq. Une utilisation judicieuse de  $\mathbf{P}$  nous permet d'extraire les bons éléments et de les attribuer aux composantes de  $\mathbf{s}_{n+t}^T$ . Par exemple, l'expression suivante isole les taux de transitions à partir du premier état :

$$\mathbf{P}_{(1)}\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & m_{12}(t) & m_{13}(t) & p_{14}(t) & c_{15}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour isoler les taux de transitions vers le premier état :

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{P}_{(1)} = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{41}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour isoler uniquement la composante de rétention associée au premier état :

$$\mathbf{P}_{(1)}\mathbf{A}(t)\mathbf{P}_{(1)} = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque donc que les matrices de projection permettent d'exprimer la matrice stochastique d'une chaîne de Markov sous forme de combinaisons linéaires. En effet, si on somme  $\mathbf{P}_{(i)}$  sur l'ensemble des états  $\Omega$  de la chaîne, on retrouve la matrice identité avec  $\sum_{i \in \Omega} \mathbf{P}_{(i)} = \mathbf{I}$ .

# Bibliographie

- [1] Christian BAUCKHAGE et al. “How players lose interest in playing a game : An empirical study based on distributions of total playing times”. In : *2012 IEEE Conference on Computational Intelligence and Games, CIG 2012*. 2012. ISBN : 9781467311922. DOI : 10 . 1109 / CIG . 2012 . 6374148.
- [2] Paul D. BERGER et Nada I. NASR. “Customer lifetime value : Marketing models and applications”. In : *Journal of Interactive Marketing* 12.1 (1998), p. 17–30.
- [3] Paul BERTENS, Anna GUITART et África PERIÁÑEZ. “Games and Big Data : A Scalable Multi-Dimensional Churn Prediction Model”. In : (2017). arXiv : 1710.02262.
- [4] Zoheb H. BORBORA et Jaideep SRIVASTAVA. “User behavior modeling approach for churn prediction in online games”. In : *Proceedings - 2012 ASE/IEEE International Conference on Privacy, Security, Risk and Trust and 2012 ASE/IEEE International Conference on Social Computing, SocialCom/PASSAT 2012* (2012), p. 51–60. DOI : 10 . 1109 / SocialCom-PASSAT.2012.84.
- [5] Zoheb BORBORA et al. “Churn prediction in MMORPGs using player motivation theories and an ensemble approach”. In : *Proceedings - 2011 IEEE International Conference on Privacy, Security, Risk and Trust and IEEE International Conference on Social Computing, PASSAT/SocialCom 2011* (2011), p. 157–164.

- [6] Kristof COUSSEMENT, Stefan LESSMANN et Geert VERSTRAETEN. “A comparative analysis of data preparation algorithms for customer churn prediction : A case study in the telecommunication industry”. In : *Decision Support Systems* 95 (2017), p. 27–36. ISSN : 01679236. DOI : 10.1016/j.dss.2016.11.007. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.dss.2016.11.007>.
- [7] Koustuv DASGUPTA et al. “Social Ties and their Relevance to Churn in Mobile Telecom Networks”. In : *Edbt* (2008), p. 1–10.
- [8] Anders DRACHEN et al. “Rapid Prediction of Player Retention in Free-to-Play Mobile Games”. In : *Aaai Aiide* (2016), p. 23–29. arXiv : 1607.03202.
- [9] Anders DRACHEN et al. “Stylized facts for mobile game analytics”. In : *IEEE Conference on Computational Intelligence and Games, CIG* (2017). ISSN : 23254289. DOI : 10.1109/CIG.2016.7860392.
- [10] F. Robert DWYER. “Customer Lifetime Valuation to Support Marketing Decision Making”. In : *Journal of Interactive Marketing* 11.4 (1997), p. 109–125. ISSN : 1094-9968. DOI : 10.1002/(SICI)1522-7138(199723)11. arXiv : arXiv:1011.1669v3. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S109499689770762X>.
- [11] David L. GARCIA, Angela NEBOT et Alfredo VELLIDO. “Intelligent data analysis approaches to churn as a business problem : a survey”. In : *Knowledge and Information Systems* 51.3 (2017), p. 719–774.
- [12] Anna GUITART et al. “Forecasting Player Behavioral Data and Simulating in-Game Events”. In : (2017). arXiv : 1710.01931.
- [13] Özden GÜR ALI et Umut ARITÜRK. “Dynamic churn prediction framework with more effective use of rare event data : The case of private banking”. In : *Expert Systems with Applications* 41.17 (2014), p. 7889–7903.
- [14] Fabien HADIJI, Rafet SIFAT et Christian BAUCKHAGET. “Predicting Player Churn In the Wild”. In : *Ieee* (2014). DOI : 10.1109/CIG.2014.6932876.

- [15] Nicolai HANNER et Ruediger ZARNEKOW. “Purchasing behavior in free to play games : Concepts and empirical validation”. In : *Proceedings of the Annual Hawaii International Conference on System Sciences 2015-March* (2015), p. 3326–3335. ISSN : 15301605. DOI : 10.1109/HICSS.2015.401.
- [16] P Von HILGERS et AN LANGVILLE. “The five greatest applications of Markov Chains”. In : (2006), p. 155–168. URL : <http://langvillea.people.cofc.edu/MCapps7.pdf>.
- [17] Ying HUANG et Tahar KECHADI. “An effective hybrid learning system for telecommunication churn prediction”. In : *Expert Systems with Applications* 40.14 (2013), p. 5635–5647. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2013.04.020>.
- [18] Jaya KAWALE, Aditya PAL et Jaideep SRIVASTAVA. “Churn Prediction in MMORPGs : A Social Influence Based Approach”. In : *Network* (2009), p. 423–428.
- [19] Kyoungok KIM, Chi Hyuk JUN et Jaewook LEE. “Improved churn prediction in telecommunication industry by analyzing a large network”. In : *Expert Systems with Applications* 41.15 (2014), p. 6575–6584. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2014.05.014>.
- [20] Seungwook KIM et al. “Churn prediction of mobile and online casual games using play log data”. In : (2017), p. 1–19. DOI : 10.1371/journal.pone.0180735. URL : <http://journals.plos.org/plosone/article/file?id=10.1371/journal.pone.0180735%7B%5C%7Dtype=printable>.
- [21] Vineet KUMAR et Werner REINARTZ. *Customer Relationship Management : Concept, Strategy, and Tools*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] Palupi D. KUSUMA et al. “Combining Customer Attribute and Social Network Mining for Prepaid Mobile Churn Prediction”. In : *BENELEARN 2013 : Proceedings of the 22nd Belgian-Dutch Conference on Machine Learning* (2013), p. 50–58.

- [23] Vili LEHDONVIRTA. “Virtual item sales as a revenue model : Identifying attributes that drive purchase decisions”. In : *Electronic Commerce Research* (2009).
- [24] Nick LIM. *Freemium games are not normal*. 2012. URL : [https://www.gamasutra.com/blogs/NickLim/20120626/173051/Freemium\\_games\\_are\\_not\\_normal.php](https://www.gamasutra.com/blogs/NickLim/20120626/173051/Freemium_games_are_not_normal.php) (visité le 26/05/2016).
- [25] Miloš MILOŠEVIĆ, Nenad ŽIVIĆ et Igor ANDJELKOVIĆ. “Early churn prediction with personalized targeting in mobile social games”. In : *Expert Systems with Applications* 83 (2017), p. 326–332.
- [26] Julie MOEYERSOMS et David MARTENS. “Including high-cardinality attributes in predictive models : A case study in churn prediction in the energy sector”. In : *Decision Support Systems* 72 (2015), p. 72–81. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.dss.2015.02.007>.
- [27] EL-NASR, SEIF AND DRACHEN, ANDERS AND CANOSSA, ALESSANDRO. “Game Analytics Maximizing the Value of Player Data”. In : (2013).
- [28] Dmitry NOZHININ. *Predicting Churn : Data-Mining Your Game*. 2012. URL : [https://www.gamasutra.com/view/feature/170472/predicting\\_churn\\_datamining\\_your\\_.php](https://www.gamasutra.com/view/feature/170472/predicting_churn_datamining_your_.php) (visité le 26/05/2016).
- [29] Dmitry NOZHININ. *Predicting Churn : Data-Mining Your Game*. 2012. URL : [https://www.gamasutra.com/view/feature/170472/predicting\\_churn\\_datamining\\_your\\_.php](https://www.gamasutra.com/view/feature/170472/predicting_churn_datamining_your_.php) (visité le 26/05/2016).
- [30] Dmitry NOZHININ. *Predicting Churn : When Do Veterans Quit ?* 2012. URL : [https://www.gamasutra.com/view/feature/176747/predicting\\_churn\\_when\\_do\\_veterans\\_.php](https://www.gamasutra.com/view/feature/176747/predicting_churn_when_do_veterans_.php).
- [31] María ÓSKARSDÓTTIR et al. “Social network analytics for churn prediction in telco : Model building, evaluation and network architecture”. In : *Expert Systems with Applications* 85 (2017), p. 204–220.
- [32] Phillip E. PFEIFER et Robert L. CARRAWAY. “Modeling customer relationships as Markov chains”. In : *Journal of Interactive Marketing* 14.2 (2000), p. 43–55.

- [33] Pierangelo ROTHENBUEHLER et al. “Hidden Markov models for churn prediction”. In : *IntelliSys 2015 - Proceedings of 2015 SAI Intelligent Systems Conference* (2015), p. 723–730.
- [34] Julian RUNGE et al. “Churn prediction for high-value players in casual social games”. In : *IEEE Conference on Computational Intelligence and Games, CIG* (2014). ISSN : 23254289. DOI : 10.1109/CIG.2014.6932875.
- [35] Alain SAAS, Anna GUITART et África PERIÁÑEZ. “Discovering Playing Patterns : Time Series Clustering of Free-To-Play Game Data”. In : (2017). arXiv : 1710.02268.
- [36] Brian SAPP. *It's an A.R.M.'s Race*. 2012. URL : <https://fr.slideshare.net/betable/its-an-arms-race-acquisition-retention-and-monetization-in-mobile-gaming>.
- [37] Rafet SIFA, Christian BAUCKHAGE et Anders DRACHEN. “The Playtime Principle : Large-scale cross-games interest modeling”. In : *IEEE Conference on Computational Intelligence and Games, CIG*. 2014.
- [38] Rafet SIFA, César OJEDA et Christian BAUCKHAGE. “User Churn Migration Analysis with DEDICOM”. In : *RecSys '15 Proceedings of the 9th ACM Conference on Recommender Systems* (2015).
- [39] Rafet SIFA et al. “Predicting Purchase Decisions in Mobile Free-to-Play Games”. In : *Proceedings, The Eleventh AAAI Conference on Artificial Intelligence and Interactive Digital Entertainment (AIIDE-15)* (2015), p. 79–85.
- [40] Marco TAMASSIA et al. “Predicting player churn in destiny : A Hidden Markov models approach to predicting player departure in a major online game”. In : *IEEE Conference on Computational Intelligence and Games, CIG* (2017).
- [41] Wouter VERBEKE, David MARTENS et Bart BAESENS. “Social network analysis for customer churn prediction”. In : *Applied Soft Computing Journal* 14.PART C (2014), p. 431–446. ISSN : 15684946. DOI : 10.1016/j.asoc.2013.09.017. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2013.09.017>.

- 
- [42] Markus VILJANEN et al. “Measuring Player Retention and Monetization using the Mean Cumulative Function”. In : (2017), p. 1–10. arXiv : 1709.06737. URL : <http://arxiv.org/abs/1709.06737>.
- [43] Sebastian VOIGT et Olivier HINZ. “Making Digital Freemium Business Models a Success : Predicting Customers’ Lifetime Value via Initial Purchase Information”. In : *Bus Inf Syst Eng* 58.2 (2016), p. 107–118.
- [44] Russell S. WINER. “A Framework for Customer Relationship Management”. In : *California Management Review* 43.4 (2001).
- [45] David XICOTA. *Free to play and its Key Performance Indicators*. 2014. URL : [https://www.gamasutra.com/blogs/DavidXicota/20140527/218550/Free\\_to\\_play\\_and\\_its\\_Key\\_Performance\\_Indicators.php](https://www.gamasutra.com/blogs/DavidXicota/20140527/218550/Free_to_play_and_its_Key_Performance_Indicators.php) (visité le 26/05/2016).
- [46] Hanting XIE et al. “Predicting player disengagement and first purchase with event-frequency based data representation”. In : *IEEE Conference on Computational Intelligence and Games, CIG 2015 - Proceedings* (2015), p. 230–237.