
HEC MONTRÉAL

Modélisation des dérivés de longévité avec mortalité stochastique

Par

Jia Guo

Sciences de la gestion
(Ingénierie Financière)

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences (M.Sc.)*

2018, Avril

©Jia Guo, 2018

REMERCIEMENTS

La rédaction du présent mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention, consciente, d'un grand nombre de personnes. Je souhaite ici les en remercier.

Je tiens d'abord à remercier mon superviseur, Monsieur Pascal François, pour ses magnifiques cours sur les produits dérivés, ses capacités académiques, ainsi que son grand charisme. Il a su m'orienter adéquatement sans pour autant me priver de mon autonomie. Ses observations académiques acharnées et vigoureuses m'ont non seulement aidée à améliorer grandement ce mémoire, mais également à mieux comprendre la nature de mes futures études.

Je souhaite également exprimer mes sincères remerciements à tous les professeurs de HEC Montréal m'ayant enseigné et qui, par leurs compétences, m'ont soutenu le long de mon parcours académique.

Finalement, je me dois de remercier mes parents, lesquels m'ont toujours supporté de cœur et d'esprit depuis notre résidence en Chine. Sans leurs encouragements, je suis convaincue que je n'aurais pu surmonter tant de difficultés et accomplir autant. Il en est de même pour tous les ami(e)s qui ont contribué à ma réussite de par leurs soutien et patience.

SOMMAIRE

Grâce à la médecine moderne, à la technologie et à l'amélioration du niveau de vie dans le monde, les taux de mortalité sont en baisse. Cependant, cette baisse pose un risque de longévité pour les fonds de pension et les assureurs. Transférer le risque de longévité sur le marché des capitaux est la tendance future, la prédiction précise du taux de mortalité futur devient la base de tout cela.

Nous avons d'abord examiné et résumé les modèles de mortalité précédent, y compris le modèle le plus classique de Lee-Carter 1992. Après avoir pris en compte des facteurs tels que les effets de cohorte et les modèles multifactoriels, l'impact des événements extrêmes sur la mortalité a été particulièrement important, raison pour laquelle nous avons choisi la distribution normale inverse gaussienne sur le modèle de MBMM parce qu'elle correspond bien aux sauts. Les résultats prévus ont été comparés aux données réelles, à l'indice *LifeMetrics* et au modèle Lee-Carter. Par conséquent, le modèle de MBMM avec la loi NIG est le plus proche des données réelles.

Le marché de la longévité est le marché des capitaux qui traite les actifs et les passifs liés à la longévité. Afin d'évaluer les dérivés liés à la longévité ou mortalité, le modèle de mortalité doit non seulement simuler avec précision la mortalité future, mais aussi satisfaire un changement de mesure pour trouver le prix théorique. Pour cette raison, nous appliquons la transformation d'Esscher au processus de Lévy NIG.

Enfin, nous avons étudié *q-forward*, un produit relativement réussi sur le marché. Bien que le marché manque d'informations publique sur les prix, nous appliquons les résultats de mortalité néerlandais du modèle NIG aux cadres de la tarification publiés de J.P. Morgan et LLMA, essayons d'analyser le ratio de Sharpe obtenu par différentes méthodes et fournissons une base fondamentale pour les recherches futures sur le marché des dérivés.

Mots clés : Risque de longévité, taux de mortalité, *q-forward*, processus de Lévy NIG, transformation d'Esscher, ratio de Sharpe, *LifeMetrics*, J.P. Morgan.

TABLES DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	I
SOMMAIRE	II
LISTE DES TABLEAUX	IV
LISTE DES FIGURES	V
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 : REVUE DE LITTÉRATURE.....	12
2.1 INTRODUCTION	12
2.2 MODÈLE LEE-CARTER	12
2.3 EXTENSIONS DU MODÈLE LEE-CARTER	14
2.4 APPROCHES DE CHANGEMENT DE MESURE.....	18
2.5 APPROCHE DE RATIO DE SHARPE	19
CHAPITRE 3 : MÉTHODOLOGIE.....	21
3.1 LES DONNÉES.....	21
3.2 MODÈLE LEE-CARTER	24
3.1.1 Estimation des paramètres.....	24
3.1.2 Modélisation de l'indice de mortalité <i>kt</i>	27
3.2 MODÈLE MBMM	31
3.2.1 Estimation des paramètres.....	31
3.3 ÉVALUATION DE LA PERFORMANCE	33
3.4 MODÉLISATION DE <i>kt</i> AVEC PROCESSUS DE LÉVY NIG.....	38
3.4.1 Distribution normale-inverse gaussienne (NIG).....	38
3.4.2 Estimation des paramètres de la distribution	41
3.4.3 Simulation du processus NIG	44
3.4.4 Modélisation sous la mesure physique.....	45
CHAPITRE 4 : APPLICATION: TARIFICATION DE Q-FORWARD.....	47
4.1 MÉCANISME DE Q-FORWARD	47
4.2 TARIFICATION DE Q-FORWARD.....	51
4.2.1 Cadre de tarification de la longévité	51
4.2.2 Graduation.....	52
4.2.3 Comparaison des résultats de projection et l'indice LifeMetrics	53
4.2.4 Taux de mortalité fixe.....	54
CHAPITRE 5 : CONCLUSION.....	64
ANNEXE	66
BIBLIOGRAPHIQUE.....	67

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Espérance de vie à la naissance

Tableau 2 : Nouveaux indices de longévité

Tableau 3 : Moments de Δk_t

Tableau 4 : Comparaison de RSSE des deux modèles

Tableau 5 : Comparaison de RSSE pour chaque tranche d'âge

Tableau 6: Moments d'une variable aléatoire NIG

Tableau 7 : Valeurs estimées des paramètres NIG des années 1900-2004

Tableau 8 : Test de Student pour des paramètres

Tableau 9: Une feuille de termes illustrative pour un seul risque de longévité *q-forward*

Tableau 10: Une illustration du règlement *q-forward* pour différents résultats du taux de référence réalisé

Tableau 11: Résultats de projection et l'indice *LifeMetrics* d'âge 65 ans

Tableau 12: Taux à terme selon différent ratio de Sharpe

Tableau 13: Valeurs estimées du paramètre d'Esscher

Tableau 14 : Taux à terme obtenu par différentes méthodes

LISTE DES FIGURES

Figure 1: l'espérance de vie à la naissance de la population des Pays-Bas de 1900 à 2014

Figure 2: Taux de mortalité des différents groupes d'âge

Figure 3: Valeurs estimées de a_x pour différents groupes d'âge

Figure 4: Valeurs estimées de β_x pour différents groupes d'âge

Figure 5: Valeurs estimées de k_t pour différentes années

Figure 6: Autocorrélogramme et autocorrélogramme partiel de l'indice de mortalité k_t

Figure 7: Autocorrélogramme et autocorrélogramme partiel de la différence de l'indice de mortalité k_t

Figure 8: Prédiction de k_t pour 2005-2014 avec intervalle de confiance (IC) de 95%

Figure 9: Comparaison de la distribution de Δk_t et de la distribution normale

Figure 10: Valeurs estimées de a_x pour différents groupes d'âge

Figure 11: Valeurs estimées de β_x pour différents groupes d'âge

Figure 12: Valeurs estimées de k_t pour différentes années

Figure 13: Comparaison de la prévision du taux de mortalité du groupe d'âge 65-69

Figure 14: Comparaison de la prévision du taux de mortalité du groupe d'âge 10-14

Figure 15: Les fonctions de densité NIG selon différents paramètres

Figure 16: Distributions empirique et estimées

Figure 17: Taux de mortalité prévu des années 2004-2013

Figure 18: Risque de mortalité d'un assureur-vie et le risque de longévité d'un régime de retraite

Figure 19: Taux de mortalité estimé de la population féminine des Pays-Bas

Figure 20: Comparaison entre le taux à terme et le taux attendu

Figure 21 : Illustration du taux de mortalité sous la mesure martingale

Chapitre 1 : Introduction

L'espérance de vie à la naissance correspond au nombre moyen d'années qu'une personne peut espérer vivre, si le taux de mortalité actuel n'évolue pas. Pour la première fois, l'espérance de vie dans l'ensemble des pays de l'OCDE (Organisation de coopération et de développement économiques) a dépassé 80 ans en 2011, soit un gain de 10 ans depuis 1970. La Suisse, le Japon et l'Italie dominent un grand groupe de pays dans lesquels l'espérance de vie à la naissance dépasse désormais 80 ans. Un second groupe, qui se compose des États-Unis, du Chili et de plusieurs pays d'Europe centrale et orientale, enregistre une espérance de vie comprise entre 75 et 80 ans. Parmi les pays émergents, l'espérance de vie au Brésil, en Chine, en Indonésie et en Inde a beaucoup progressé au cours des dernières décennies et se rapproche rapidement de la moyenne de l'OCDE. Les gains d'espérance de vie au cours des dernières décennies peuvent être attribués à plusieurs facteurs, dont l'augmentation du niveau de vie, l'amélioration de la technologie médicale et la croissance de l'économie.

Tableau 1 : Espérance de vie à la naissance (source : Panorama des statistiques de l'OCDE 2014)

Nombre d'années	1970	2011
Suisse	73.1	82.8
Japon	72.0	82.7
États-Unis	70.9	78.7
Pays-Bas	73.7	81.3
France	72.2	82.2
Canada	72.9	81.0
Chine	62.9	73.5

Le taux de mortalité à un âge donné est le nombre de personnes qui meurent à cet âge divisé par le nombre de personnes qui sont en vie au début de cet intervalle d'âge. En raison de l'espérance de vie prolongée, le taux de mortalité réel à l'avenir sera inférieur au taux de mortalité attendu et la solvabilité future des régimes de retraite et des compagnies d'assurance-vie risque d'être insuffisante. La gestion du risque de mortalité et longévité est fondamentale pour l'industrie de l'assurance-vie et des régimes de retraite. Les modèles de mortalité permettent de prédire les futurs taux de mortalité et de quantifier les risques. Cependant, des études menées au cours des 20 dernières années ont révélé que les prévisions passées ont surestimé les taux de mortalité dans de nombreux pays industrialisés (Stoto, 1983).

La tentative de suivre la courbe de mortalité appropriée a une longue histoire en démographie et en sciences actuarielles. Selon qu'il s'agisse de considérer l'incertitude des changements futurs de la mortalité, le modèle de prédiction de la mortalité est divisé en deux catégories: le modèle de mortalité déterministe (modèle de mortalité statique) et le modèle de mortalité aléatoire (modèle de mortalité stochastique).

Graunt (1662) a examiné les *Bills of Mortality* de Londres qui ont montré que la durée de vie des individus était prévisible dans l'ensemble, et a développé une table de la vie pour décrire ce processus structuré de la mort. De Moivre (1725) a écrit la fonction de survie d'âge x sous la forme $S(x) = 1 - \frac{x}{w}$, w est l'âge maximum. Les décès sont supposés suivre une distribution uniforme. Plus tard, l'actuaire britannique Gompertz (1825) a observé que pour le groupe d'âge entre 20 et 60 ans, la force de mortalité augmentait presque exponentiellement avec l'âge $\mu(x) = ae^{bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$. L'observation de Gompertz était basée sur des données de la population d'Angleterre, de Suède et de France. Depuis lors, de nombreuses études confirment que la loi Gompertz fonctionne même pour divers autres pays. (Olshansky et al. 1997).

Une grande variété de modèles stochastiques a été proposée pour modéliser la dynamique de la mortalité dans le temps. Lee et Carter (1992) ont présenté une méthode stochastique basée sur l'approche en composantes principales pour ajuster et prévoir les taux de mortalité par âge de la population américaine sur la période 1900-1987. Le modèle saisit à la fois la tendance de la mortalité globale et les changements spécifiques à l'âge pour différents groupes d'âge. L'ajustement de l'âge est nécessaire parce que l'amélioration de la mortalité varie selon les groupes d'âge. De plus, les chocs de mortalité, tels que la pandémie de la grippe de 1918, attaquent différents groupes avec une intensité variable. Le modèle Lee-Carter a été largement utilisé pour des applications démographiques et actuarielles dans divers pays. Par exemple, le modèle Lee-Carter a été utilisé pour le Japon (Wilmoth, 1993), les sept pays les plus développés économiquement (G7) (Tuljapurkar et al. 2000), l'Australie (Booth et al. 2002) et les pays nordiques (Lundström et Qvist 2004, Koissi et al. 2006). Malgré ses performances raisonnables, le modèle Lee-Carter avait plusieurs limites (Lee, 2000) qui ont provoqué des réactions négatives de la part de certains actuaires. L'hypothèse de l'âge invariant dans le temps a été violée lorsqu'elle a été appliquée à l'Australie (Booth et al. 2002). La méthode était également moins directe lorsque Renshaw et Haberman (2003) utilisent des données historiques provenant du Royaume-Uni qui présentaient un fort effet de cohorte.

DeJong et Tickle (2006) réduisent le nombre de paramètres dans Lee-Carter pour modéliser les taux de mortalité en tant que modèle de l'espace d'état. Un effet de cohorte, qui signifie que les personnes nées la même année ou la même période devraient avoir une expérience similaire d'amélioration de la mortalité, est ajouté au modèle de Lee-Carter dans Renshaw et Haberman (2006). Des recherches considérables sur l'effet de cohorte ont été menées au Royaume-Uni. Ceux qui sont nés entre 1925 et 1945 montrent un effet de cohorte négatif; c'est-à-dire, un taux d'amélioration de la mortalité plus élevé que ceux nés après 1945. Chen et Cox (2009) incorporent un processus de saut dans le modèle original de Lee-Carter et l'utilisent pour prévoir les taux de mortalité et analyser la titrisation de la mortalité. Ils trouvent que la modélisation de la mortalité via des effets

de saut transitoires peut être plus appropriée dans la titrisation de la mortalité. Deng et al. (2012) utilisent un modèle de diffusion stochastique avec un processus de diffusion double saut exponentiel qui capture à la fois les sauts de fréquence asymétriques vers le haut et vers le bas ainsi que l'effet de cohorte dans les tendances de mortalité. Mitchell et al. (2013) montrent qu'en modélisant les séries temporelles des changements de taux de mortalité plutôt que le niveau des taux de mortalité, ceci permet de mieux modéliser la mortalité. L'indice de mortalité est modélisé selon une distribution normale inverse gaussienne (NIG). Ils démontrent, avec un ensemble exhaustif d'expériences et d'ensembles de données couvrant 11 pays sur plus de 100 ans, que le modèle proposé surpasse significativement les modèles existants. Chuang et al. (2014) utilisent un processus de Lévy NIG avec la transformation d'Esscher sur le modèle de Mitchell (2013), cela permet de trouver une mesure de martingale équivalent pour évaluer des dérivés liées à la longévité et la mortalité.

Keilman (1998) a rapporté que les prévisions antérieures avaient raté certains événements importants tels que le baby-boom de l'après-guerre et la baisse de la fécondité en Grèce et en Espagne après 1985. Les chocs aberrants ne doivent pas être négligés et les taux de mortalité devraient être explicitement modélisés dans la titrisation de la mortalité, car la vente ou l'achat de titres de mortalité vise à couvrir les risques de mortalité. Ignorer ces sauts peut conduire à sous-estimer la probabilité d'un événement catastrophique et à surestimer la variation de l'indice de mortalité, ce qui peut entraîner d'importantes erreurs de tarification des titres liés à la mortalité et de calcul de la prime de risque.

Notre modèle s'inspire du modèle de Mitchell et al. (2013) et pour considérer l'impact des événements extrêmes sur le modèle de mortalité, la distribution gaussienne ne peut pas répondre à cette exigence, le modèle de diffusion doit considérer le processus de saut. Un autre problème est que pour la tarification d'un dérivé financier lié à la longévité, un

modèle de mortalité stochastique est nécessaire ainsi qu'une mesure de martingale. Les extensions du modèle Lee-Carter avec des spécifications de processus stochastiques ont tendance à être compliquées et il n'est pas intuitif de les relier aux techniques de tarification de martingale courantes dans la littérature financière. Chuang et al. (2014) proposent d'utiliser un processus stochastique de Lévy NIG avec la transformation d'Esscher. Le modèle a deux avantages: d'abord, il peut imiter les sauts dans les taux de mortalité puisque la distribution NIG a des queues épaisses avec kurtosis élevée, et, deuxièmement, ce modèle de mortalité avec la transformation d'Esscher se prête à la tarification des dérivés de longévité sous la mesure risque neutre. À l'aide de la transformation d'Esscher, ils montrent comment trouver une mesure de martingale équivalente, permettant la tarification pour les dérivés liés au risque de longévité.

Le risque de longévité a été systématiquement sous-estimé, rendant les bilans vulnérables aux augmentations inattendues des passifs pour les fournisseurs des fonds de pension et des rentes viagères. Il existe deux approches de transférer les risques de longévité pour des régimes de retraite.

Le moyen traditionnel de transférer le risque de longévité est le marché de l'assurance et de la réassurance. Cependant, ceux-ci n'ont pas la capacité et la liquidité nécessaires pour supporter une exposition globale estimée à plus de \$20 trillion (Loeys et al. 2007). Un marché de *pension buy-outs* s'est développé au Royaume-Uni à partir de 2006, *Paternoster*, dirigé par *Mark Wood*, a conclu le premier *buy-outs* avec le plan de la famille *Cuthbert Heath* en novembre 2006 (Biffis et Blake, 2009). L'outil de *buy-outs* transfère les actifs détenus par les promoteurs de régimes de retraite ainsi que les passifs pris en charge à l'assureur afin que le promoteur puisse éliminer complètement l'incertitude entourant le rendement des actifs et le remboursement de la dette. Ce type de transaction implique le transfert de tous les risques, y compris le risque de longévité et le risque d'investissement, du régime de retraite au secteur de l'assurance. La police d'assurance est signée au nom du participant original du régime de retraite. Les *Pension buy-ins* sont similaires aux *buy-outs*, qui transfèrent le risque de longévité des régimes de

retraite, mais les risques d'inflation et les rendements incertains des actifs demeurent dans le régime de retraite. La police est signée au nom du fiduciaire de retraite, de sorte que le passif demeure dans le régime de retraite et qu'il n'y a pas de contrat entre le participant au régime et la compagnie d'assurance (Blake et al. 2013).

Une variation plus récente sur les *pension buy-outs* traditionnelles est le contrat d'assurance longévité ou swap de longévité basé sur l'assurance. Aucun actif n'est transféré et le régime de retraite conserve les risques d'investissement. L'avantage est que ces swaps suppriment le risque de longévité sans avoir besoin d'un paiement initial par le promoteur et permettent aux fiduciaires de pension de garder le contrôle de la répartition de l'actif. Le premier swap de longévité sur mesure axé sur les marchés financiers (non indexé) a été lancé en juillet 2008 par J.P. Morgan et Canada Life (U.K.).

D'un autre côté, les marchés de capitaux pourraient jouer un rôle très important, offrant une capacité et une liquidité supplémentaires au marché de la réassurance, ce qui entraînerait une tarification plus transparente et plus compétitive du risque de longévité. Une première génération de titres liés à la mortalité est caractérisés par une structure de type obligataire. Blake et Burrows (2001) ont d'abord proposé des obligations à longévité, dont la valeur nominale ou le taux d'intérêt nominal correspond directement aux changements de la probabilité de survie. La maturité de l'obligation est de 30 années, l'obligation verse aux investisseurs un coupon annuel selon un taux de survie pour un groupe donné de personnes ayant pris leur retraite au moment de l'émission, par exemple, la population masculine américaine âgée de plus de 65 ans. Comme ce groupe de personnes meurent progressivement chaque année, le paiement du coupon annuel diminue également jusqu'à l'expiration. La première tentative d'émission d'une obligation de longévité a eu lieu en novembre 2004 lorsque *BNP Paribas* a annoncé l'émission par la Banque Européenne d'Investissement (EIB) d'une obligation à 25 années avec un prix d'émission de £540 million et des coupons liés à un indice de taux de mortalité des hommes de l'Angleterre et pays de Galles âgés de 65 ans en 2002. Le coupon initial a été fixé à £50 millions, tandis que les coupons suivants auraient diminué en fonction de la

mortalité réalisée par la cohorte de référence des hommes. Cependant, l'obligation n'a pas généré une demande suffisante de la part des investisseurs pour être effectivement lancée, et a été retirée pour une refonte à la fin de 2005 (Biffis et Blake, 2009).

La leçon la plus importante est que la survie d'un instrument de marché des capitaux négocié dépend de la satisfaction des besoins de couverture et de spéculation. Alors que le premier besoin exige un instrument de couverture efficace, le second exige des liquidités. Cependant, il y a trois raisons pour lesquelles il est difficile d'établir un marché liquide des dérivés liés à la mortalité. L'une des raisons est l'énorme déséquilibre entre les expositions existantes et les fournisseurs de couverture consentants. Une autre raison est que des dérivés liés à la mortalité doit répondre aux différents besoins des *hedgers* (concernés par l'efficacité des couvertures) et des investisseurs (concernés par la liquidité et recevoir une compensation adéquate pour assumer le risque), besoins difficiles à concilier lorsque le risque de longévité, un risque de tendance à long terme difficile à quantifier est impliqué. Une troisième raison est l'absence d'un prix de marché établi pour le risque de longévité (Biffis et Blake, 2009).

Suite au retrait de l'obligation de la BEI, les grandes banques d'investissement ont commencé à travailler sur des formes plus transparentes d'indice de la mortalité et sur des conceptions de produits plus efficaces, donnant naissance à une deuxième génération de produits dérivés.

Un marché du risque de longévité liquide, transparent et actif permettrait aux institutions exposées à un risque de longévité de couvrir ce risque et à d'autres de négocier ce risque et d'y investir. A cet effet, divers indices de longévité ou mortalité ont été créés récemment. *Credit Swisse* avait fait une première tentative de développer un indice de longévité en 2005 sur la base de statistiques d'espérance de vie de la population américaine. Ensuite, l'indice J.P. Morgan *LifeMetrics* lancé en 2007 et l'indice *Deutsche Borse Xpect* lancé en 2008, utilisent aussi comme source des données sur la population

mises à la disposition du public. Pour les indices de population généraux, l'antisélection n'est pas un problème. Les données sont vérifiables, ne peuvent pas être manipulées et sont fournies par une source publique fiable. *Goldman Sachs* a récemment lancé l'indice QxX qui réplique un échantillon représentatif de la population américaine assurée de plus de 65 ans. Les données de l'indice sont référencées à partir d'un bassin de 50,000 personnes au maximum ayant participé à des rachats de contrats d'assurance-vie. L'indice spécialisé se focalise sur un segment limité de la population âgée qui a tendance à être surreprésenté dans la portion la plus malade du marché de l'assurance-vie et, à ce titre, ne conviendrait pas pour servir de référence aux fonds de pension. Le tableau suivant montre les trois nouveaux indices de longévité sur le marché (Swiss Re, 2009).

Tableau 2 : Nouveaux indices de longévité (source : Swiss Re Research&Consulting)

Indice	LifeMetrics	Xpect	QxX
Zone couverte	Allemagne Pays-Bas	Etats-Unis	Etats-Unis Pays-Bas Allemagne Angleterre et Pays de Galles
Base de l'indice	Espérance de vie Taux de mortalité	Espérance de mortalité effective du pool de vies de référence	Espérance de vie Taux de mortalité
Sous-indices	Par âge, sexe	Par âge, sexe	Par âge, sexe
Source des données	Données officielles plus sources internes	Échantillon de la population assurée américaine	Données officielles
Ancienneté des données	1900 pour l'Allemagne 1920 pour les Pays-Bas	2007	1968 pour les Etats-Unis 1951 pour les Pays-Bas 1952 pour l'Allemagne 1961 pour l'Angleterre et Pays de Galles
Mise à jour	Mensuelle	Mensuelle	Annuelle
Négoce des indices	OTC	OTC	OTC

Les swaps de longévité sont des dérivés financiers basés sur l'indice de survie future pour une population spécifique. Avant l'expiration du contrat, les parties au swap échangent régulièrement une série de flux de trésorerie, et au moins la trésorerie d'une partie fluctue avec l'indice de survie. La première exploration théorique des contrats de swap sur le risque de longévité a commencé avec Lin et Cox (2005). Par la suite, Dowd et al. (2006) ont proposé des swaps de survivant, une forme d'échange par laquelle une partie échange un flux de trésorerie fixe avec l'autre par un flux de trésorerie flottant, souvent appelé échange de longévité. Comparé aux obligations de longévité, le swap de longévité a les avantages des coûts d'émission bas, de la flexibilité élevée et de la facilité d'opération, ainsi son développement du marché s'est-t-il fait plus rapidement que des obligations de longévité. Canada Life (U.K.) a échangé £500 millions avec J.P. Morgan pour un swap de longévité de 40 années. Le swap n'était pas lié à un indice, mais à l'expérience de mortalité réelle des rentiers de plus de 125,000 membres du portefeuille de rentes en cours de couverture. Par la suite, le marché britannique a publié 6 swaps de longévité sur les marchés financiers, totalisant £7,6 milliards (Blake et al. 2013).

Le *q-forward* est un contrat à long terme basé sur l'indice de mortalité *LifeMetrics* publié par J.P.Morgan. Lorsque le contrat expire, les parties à la transaction échangent un montant proportionnel au taux de mortalité réalisé d'une population donnée (ou sous-population), en contrepartie d'un montant proportionnel à une mortalité fixe qui a été convenu mutuellement au début. En d'autres termes, un *q-forward* est un swap zero-coupon qui échange la mortalité fixe contre la mortalité réalisée à maturité. Les régimes de retraite et J. P. Morgan sont respectivement les payeurs réels et les payeurs fixes des taux de mortalité. Le taux de mortalité fixe peut être calculé à partir de la série chronologique de la mortalité au moment de la signature du contrat à terme, et le taux de mortalité flottante est déterminé par l'indice de mortalité réel à l'expiration du contrat. À l'échéance, une seule partie paie la trésorerie nette en fonction du niveau relatif de la mortalité fixe et de la mortalité réelle. En cas de risque de longévité, le taux de mortalité réel dû à la date d'échéance du contrat à terme est inférieur au taux de mortalité fixe et

les régimes de retraite reçoivent un flux de trésorerie, couvrant ainsi ses pertes dues aux paiements de la rente (Coughlan et al. 2007). Plus de détails sur ce sujet sont fournis au chapitre 4.

En résumé, après deux générations d'évolution, le marché de la longévité est encore loin d'être un marché liquide. Bien qu'il existe des indices publics sur le marché, les informations sur les prix des dérivés liés à la longévité ou mortalité sont encore rares et peu propices à la recherche dans ce domaine.

Pour réussir l'objectif d'un marché liquide de longévité, plusieurs questions doivent être adressées. D'abord, un modèle précis qui peut caractériser les tendances de la mortalité et les effets des événements extrêmes. Ensuite, un système de tarification raisonnable et ouvert qui répond aux besoins des investisseurs et des *hedgers*. Pour ce faire, nous consacrons donc ce mémoire à deux parties. Le but de la première partie est de trouver un modèle qui peut bien décrire le taux de mortalité. A partir du modèle de Lee-Carter, nous trouvons que le modèle de MBMM avec la distribution de NIG peut simuler avec précision la mortalité réelle et les événements extrêmes. Le but de la deuxième partie est de déterminer le prix de *q-forward*, en utilisant le taux de mortalité prévu dans la première partie, nous obtenons le taux à terme de 10 ans par deux approches respectivement, la transformation d'Esscher et le ratio de Sharpe. En raison de l'absence d'informations ouvertes sur les prix de *q-forward*, et le choix du ratio de Sharpe est relativement subjectif, nous calculons et comparons les valeurs des ratios correspondants sous différents résultats. La contribution de ce mémoire est de fournir une référence pour le mécanisme de tarification à l'avenir.

Le reste de ce mémoire est organisé comme suit. Le chapitre 2 présente une revue de littérature résumant les principales études antérieures portant sur la modélisation de la mortalité. Le chapitre 3 présente les données, la méthodologie et la performance

d'évaluation. Le chapitre 4 présente la tarification sur *q-forward* basée sur la population féminine des Pays-Bas. Le chapitre 5 présente la conclusion.

Chapitre2 : Revue de littérature

2.1 Introduction

Le modèle de prédiction de la mortalité stochastique a commencé en 1986 Land et 1988 Olshansky. La durée de vie individuelle était incertaine, il y avait un modèle plus prévisible de la longévité et de la mortalité dans les groupes. De plus, la prévision des taux de mortalité futurs est importante et difficilement réalisable à l'aide de modèles de mortalité statiques. A partir de Lee-Carter (1992), de nombreux modèles stochastiques de mortalité émergent et nous présenterons le modèle Lee-Carter et ses extensions dans ce chapitre comme le modèle de Renshaw et Haberman (2006) et le modèle de Cairns, Blake et Dowd (CBD) 2006 et les autres modèles avec un diffusion de saut.

Nous introduisons ici quelques-unes des notions actuarielles utilisées dans les modèles suivants. $m_{x,t}$ représente taux de mortalité brut (c'est-à-dire non lissé) pour l'âge x de l'année t . Il est défini comme le nombre de décès au cours de l'année t d'âge x divisé par la population moyenne au cours de l'année t d'âge x . $q_{x,t}$ est la probabilité qu'un individu d'âge x à l'instant t va mourir entre t et $t+1$, $q_{x,t} = 1 - \exp(-m_{x,t})$. La force de mortalité $\mu_{x,t}$, ceci est interprété comme le taux de mortalité instantané à l'instant t pour les individus âgés exactement de x à l'instant t . Un ensemble de données de la mortalité typique comprend le nombre de décès, $D_{x,t}$ et les expositions correspondantes, $E_{x,t}$, de l'année t et d'âges x .

2.2 Modèle Lee-Carter

Le modèle Lee-Carter (1992) est l'un des pionniers parmi les modèles de mortalités dits stochastiques. Ils ont été parmi les premiers auteurs à modéliser les effets distincts de l'âge (α_x, β_x) et du temps (k_t). Le modèle s'agit d'une approche d'extrapolation, l'avantage est qu'aucune connaissance sur les influences médicales, les démographies n'est requise.

Le modèle est décrit comme suit

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

$$x = x_1, x_2, \dots, x_N \text{ et } t = t_1, t_2, \dots, t_T$$

$m_{x,t}$ est un taux de mortalité pour l'âge x de l'année t , le logarithme du taux de mortalité pour l'année t d'une personne d'âge x peut être exprimée en forme linéaire avec les composantes par âge et par temps. k_t est un indice de mortalité variant dans le temps, il est identique pour tout âge x . α_x décrit la forme générale du taux de mortalité, β_x est la sensibilité du taux de mortalité d'un âge spécifique aux changements de l'indice de mortalité ($\frac{d \ln(m_{x,t})}{dt} = \beta_x \frac{dk_t}{dt}$). β_x pourrait être négatif pour certaines âges, ce qui indique que la mortalité à ces âges a tendance à augmenter quand celle les autres âges diminuent. $\varepsilon_{x,t}$ est le terme d'erreur pour l'âge x représentant l'information qui n'est pas capturée par le modèle. Le terme d'erreur $\varepsilon_{x,t}$ est supposé avoir une distribution indépendante et identique gaussienne $\varepsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma_x^2)$, où σ_x^2 est la variance du taux de mortalité dans l'âge x . Le modèle est indéterminé, car les β_x et k_t peuvent être arbitraires, l'un de ces deux éléments peut être multiplié par une constante tandis que l'autre est divisé par cette constante sans changer les valeurs estimées par le modèle. Alors, Lee et Carter proposent deux contraintes comme suit pour assurer une solution unique du modèle.

$$\sum_x \beta_x = 1$$

$$\sum_t k_t = 0$$

Lee et Carter modélisent les taux de mortalité pour différents âges au fil du temps en extrayant une variable d'état (k_t) non observée des données historiques sur les taux de mortalité. En effet, en calibrant les paramètres α_x , β_x et k_t sur les données historiques, ils supposent que α et β sont constants dans le temps, et seul l'indice de mortalité k_t devait être prédit. Les approches de séries chronologiques de Box-Jenkins (1976) sont utilisées avec la fonction d'autocorrélation partielle pour tester la série des résidus. Ils modélisent les k_t par une série temporelle de type ARIMA (0,1,0) pour adapter et prévoir

les taux de mortalité par âge de la population américaine, de l'années 1900 à 1987. Ainsi, le modèle introduit l'idée que non seulement les nombres de décès sont aléatoires, mais la probabilité selon laquelle les décès se produisent peut changer au cours du temps.

Il convient de noter que la méthode Lee-Carter ne tente pas d'intégrer des hypothèses concernant les progrès de la science médicale ou des changements environnementaux spécifiques, aucune information autre que l'histoire précédente n'est prise en compte. Cela signifie que cette approche est incapable de prévoir des améliorations soudaines de la mortalité dues à la découverte de nouveaux traitements médicaux ou de remèdes révolutionnaires. De même, les futures détériorations causées par les épidémies, l'apparition de nouvelles maladies ne peuvent entrer dans le modèle.

Pour le paramètre β_x , la méthode suppose un certain type de changement dans la répartition par âge de la mortalité, de sorte que les taux de déclin à différents âges maintiennent toujours les mêmes ratios les uns par rapport aux autres au fil du temps. Mais en pratique, la vitesse relative du déclin à différents âges peut varier. De plus, l'incertitude découlant des erreurs dans l'estimation des coefficients β_x est assez difficile à estimer et à incorporer dans le modèle, l'incertitude de prévision provient de l'incertitude dans la prévision de k_t , l'indice de mortalité.

Il y a eu un certain nombre d'extensions de la méthode, y compris l'élaboration de prévisions cohérentes par sexe et par race, et des prévisions pour les régions comprenant un système national etc. Dans la section suivante, nous présenterons quelques extensions importantes du modèle Lee-Carter.

2.3 Extensions du modèle Lee-Carter

La théorie de l'analyse actuarielle suppose que les probabilités de survie futures sont connues. Cette hypothèse est toutefois incompatible avec la recherche démographique, qui documente des niveaux élevés d'incertitude dans les projections de mortalité. Alors, des approches de modélisation tenant compte des incertitudes dans les projections de mortalité sont nécessaires. Bauer, Benth et Kiesel (2012) fournissent une analyse détaillée du *forward mortality model* guidés par un mouvement brownien. Ce modèle est défini

en fonction des prévisions de probabilités de survie telles qu'elles peuvent être trouvées dans les tables de mortalité, et les dynamiques du modèle sont sur l'ensemble de la structure âge et terme de la mortalité. L'avantage du modèle gaussien est que la structure du *forward mortality model* est préservée par des changements de mesure avec un choix déterministe du prix du marché du risque. Par conséquent, le modèle gaussien présente une classe particulièrement utile puisque les modèles de tarification peuvent être développés à partir du modèle de la meilleure estimation en ajustant simplement la surface de mortalité initiale.

Renshaw et Haberman (2006) incorporent les effets de cohorte dans le modèle Lee-Carter et il est appliqué à l'expérience de mortalité de la population du Royaume-Uni de 1961 à 2000 pour chaque sexe. L'effet de cohorte signifie que les personnes nées la même année devraient avoir une expérience similaire d'amélioration de la mortalité. Années de cohorte est définie comme :

$$\text{cohorte} = \text{année civile} - \text{âge}$$

Contrairement au modèle original de Lee-Carter, Renshaw et Haberman (2006) appliquent le modèle à la force de mortalité

$$\mu_{x,t} = \exp(a_x + \beta_x k_t + \gamma_x l_{t-x} + \varepsilon_{x,t})$$

l_{t-x} représente l'effet de cohorte, les autres paramètres sont les mêmes que Lee-Carter. Modèle Lee-Carter est alors un cas particulier où γ_x et l_{t-x} sont mis à zéro. Les erreurs du modèle supposent une loi de poisson, et les prévisions sont générées en modélisant les deux composantes temporelles avec deux processus ARIMA différents.

Cairns, Blake et Dowd (2006) introduisent un modèle stochastique à deux facteurs pour le développement de la courbe de mortalité dans le temps. Le premier facteur affecte la dynamique des taux de mortalité à tous les âges de la même manière, tandis que le second facteur affecte beaucoup plus la dynamique des taux de mortalité aux âges plus élevés qu'aux âges inférieurs. L'avantage est qu'il réussit à combiner l'indicateur temporel classique avec un nouvel indicateur de dynamique de la mortalité. Ils appliquent ce

modèle aux données sur la mortalité au Royaume-Uni d'âge 60 ans pour évaluer les instruments financiers liés à la mortalité tels que l'obligation de longévité de la Banque Européenne d'Investissement. Les résultats obtenus amènent les auteurs à conclure que le risque de longévité sur des horizons temporels relativement courts est très faible, mais à des horizons dépassant dix ans, il commence à se redresser très rapidement.

CBD (2006) a adapté le modèle suivant aux taux de mortalité $q_{x,t}$

$$\log(q_{x,t}) = \log\left(\frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}}\right) = \beta_x^1 k_x^1 + \beta_x^2 k_x^2$$

Selon leur modèle, la courbe de mortalité d'une année donnée augmente en fonction de l'âge, ce qui ne reflète pas le fait que les taux de mortalité des enfants sont beaucoup plus élevés que ceux des âges moyens. Dans la même année, les auteurs suggèrent une première généralisation du modèle initial, un modèle à trois facteurs permettant de capturer l'effet de cohorte.

$$\log(q_{x,t}) = \log\left(\frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}}\right) = \beta_x^1 k_x^1 + \beta_x^2 k_x^2 + \beta_x^3 k_x^3$$

Cependant, leurs modèles n'incluent pas les sauts de mortalité. Les modèles d'extrapolation utilisent des données historiques pour prédire les futures, de sorte que les caractéristiques des données historiques sont également un facteur important dans la modélisation. Cependant, les chocs de mortalité catastrophiques à court terme, tels que la pandémie de grippe de 1918, peuvent entraîner des taux de mortalité beaucoup plus élevés. Il est crucial d'aborder de tels sauts de mortalité dans la modélisation de la dynamique de la mortalité. Ensuite, nous allons introduire quelques recherches utilisent toutes des processus de diffusion avec des composantes de saut et des processus de Lévy pour décrire la dynamique des taux de mortalité.

Pour prendre en compte les sauts de mortalité, Biffis (2005) utilise des diffusions de sauts affines et modélise les prix des actifs et les dynamiques de mortalité, dans le cadre de l'analyse des risques et de la valorisation des contrats d'assurance vie. Les processus affins sont une classe de processus de Markov avec fonction caractéristique conditionnelle de

la forme affine exponentielle. Le processus est utile pour développer des modèles de tarification dynamiques. L'équation différentielle stochastique est définie comme

$$dX_t = \delta(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t + dJ_t$$

W_t est un mouvement brownien standard, J_t est un processus de saut pur.

Cox et al. (2006) combinent le mouvement brownien géométrique avec un processus de Poisson composé avec l'effet de saut permanent pour modéliser les taux de mortalité des États-Unis et du Royaume-Uni, les projections sont utilisées pour l'évaluation de l'obligation de mortalité de Swiss Re, mais le problème de la corrélation dans le temps reste non résolu.

En outre, Lin et Cox (2008) combinent le mouvement brownien avec une chaîne de Markov discrète pour capturer l'effet transitoire du saut de mortalité. Et une distribution de saut log normale pour fixer les prix des titres basés sur la mortalité dans un cadre de marché incomplet. Cependant, ils soutiennent que parce que la probabilité d'avoir un événement de mortalité catastrophique est très faible, la corrélation des données est négligeable.

Chen et Cox (2009) incorporent un processus de saut dans le modèle de Lee-Carter, en limitant les sauts de mortalité à des effets à une période pour prévoir les taux de mortalité. En effet, la plupart des sauts de mortalité défavorables sont causés par des événements catastrophiques à court terme et n'ont que des effets transitoires sur le taux de mortalité. Selon les auteurs, ignorer ces sauts peut conduire à sous-estimer la probabilité d'avoir un événement catastrophique et à surestimer la variation du facteur de mortalité, ce qui peut entraîner d'importantes erreurs dans la tarification des titres liés à la mortalité et le calcul de la prime de risque. Ils utilisent la transformée de Wang pour analyser la titrisation de la mortalité et font la première tentative pour rendre compte des corrélations de l'indice de mortalité dans le temps.

2.4 Approches de changement de mesure

Dans un marché complet, les valeurs attendues d'un processus transformé qui est une martingale conduisent à des prix sans arbitrage. Mais dans un marché incomplet, il n'y a pas de transformation unique. En d'autres termes, il n'existe pas de stratégie de couverture parfaite associée à une seule transformation martingale spécifique. En général, il existe deux approches pour la tarification des dérivés liés à la mortalité. L'une consiste à adapter le cadre de tarification sans arbitrage à la titrisation du risque de mortalité. CDB (2006) fournit une discussion détaillée sur cette question. La deuxième méthode consiste à utiliser un opérateur de distorsion pour créer une distribution corrigée du risque équivalente et obtenir la juste valeur du titre dans le cadre de la mesure ajustée au risque. Deux exemples de cette approche sont sur la transformation de Wang (2000) et la transformation d'Esscher (1994).

La transformation de Wang a été largement utilisée comme cadre universel pour la tarification des risques financiers et d'assurance. La transformation de Wang a été inspirée en partie par le travail de plusieurs éminents chercheurs en actuariat. Considérons un actif ou un passif financier X , avec une fonction de distribution cumulée (CDF), $F(X) = p(X \leq x)$. Dans Wang (2000), l'auteur a proposé une méthode de tarification universelle basée sur la transformation suivante:

$$F^*(X) = \Phi[\Phi^{-1}(F(X)) - \lambda]$$

où Φ est la distribution cumulative normale standard. Le paramètre λ est appelé le prix du marché du risque, reflétant le niveau de risque systématique. La transformée de Wang produit un CDF $F^*(X)$ ajusté au risque. La valeur moyenne sous $F^*(X)$, notée $E^*(X)$ définit une *fair value* ajustée en fonction du risque de X à l'instant T , qui peut être actualisée au temps zéro, en utilisant le taux d'intérêt sans risque. La propriété plus importante de la transformée de Wang est que les distributions normales et log-normales sont préservées. Si F a une distribution normale (μ, σ^2) , F^* est aussi une distribution normale avec $\mu^* = \mu - \lambda\sigma$ et $\sigma^* = \sigma$. Si F a une distribution log-normale (μ, σ^2) , F^* est aussi une distribution log-normale avec $\mu^* = \mu - \lambda\sigma$ et $\sigma^* = \sigma$. La transformée de

Wang reproduit le modèle de CAPM, supposons que le rendement R_i pour l'actif i a une distribution normale avec un écart-type de σ_i . En appliquant la transformation de Wang à la distribution de R_i , nous obtenons un taux de rendement ajusté au risque

$$E^*(R_i) = E(R_i) - \lambda\sigma_i$$

Dans un marché concurrentiel, le rendement ajusté au risque pour tous les actifs doit être égal au taux sans risque r . Par conséquent, nous pouvons déduire que $\lambda = \frac{E^*(R_i) - r}{\sigma_i}$, ce qui est exactement le même que le prix du marché du risque dans le CAPM classique.

Dans la modélisation financière, un processus de tarification peut être construit en utilisant la mesure de martingale obtenue à partir de la dérivée de Radon-Nikodym. Ceci peut être vu comme le rapport de deux vraisemblances et est souvent appliqué quand un changement de mesure est nécessaire pour obtenir une mesure de martingale neutre au risque liée à la mesure physique originale. La transformée d'Esscher est un cas particulier du dérivé de Radon-Nikodym par le rapport de deux mesures. Prause (1999), Esche et Schweizer (2005) montrent que pour un processus de Lévy exponentiel, l'application du processus de transformation d'Esscher peut obtenir la martingale ayant la propriété de préserver la structure de Lévy du modèle. La transformation d'Esscher est nommée en l'honneur de l'actuaire suédois Fredrick Esscher qui a introduit cette transformation pour un cas particulier dans Esscher (1932). Gerber et Shiu (1994) montrent que la transformation d'Esscher est une technique efficace pour évaluer les titres dérivés si les logarithmes des prix des titres sont régis par certains processus stochastiques avec incréments stationnaires et indépendants. Cette famille de processus comprend le processus de Wiener, le processus de Poisson, le processus gamma et le processus gaussien inverse.

2.5 Approche de ratio de Sharpe

Bauer, Burger et Russ (2010) comparent différentes approches de la tarification des produits de la longévité. Parmi ces méthodes, nous nous intéressons surtout à l'approche de ratio de Sharpe qui est conforme aux cadres de la tarification publiés de J.P. Morgan. Les auteurs mentionnent que Milevsky et al. (2005) et Bayraktar et al. (2008) développent

une théorie de tarification du risque de mortalité dans un marché incomplet. Ils postulent que l'investisseur des produits de la longévité nécessite une compensation du risque selon un ratio de Sharpe prédéfini. L'idée de base est qu'un rendement supérieur au taux sans risque est versé sur le portefeuille d'actifs de l'investisseur, qui est déterminé comme le ratio de Sharpe multiple l'écart type restant après couverture de tout risque diversifiable. Bien que Milevsky et al. (2006) indiquent que le ratio de Sharpe des stocks est approximativement égal à 0.25, Loeys et al. (2007) propose également un niveau de 25% pour la longévité, mais la question de choisir ce ratio reste encore ouverte. Bauer (2008) montre que cette approche coïncide avec un changement de la mesure de probabilité de la mesure physique à une mesure ajustée au risque invoquée par un processus de prix du marché constant.

Nous allons mentionner les détails de la transformation d'Esscher dans le chapitre 4 et appliquer cette méthode au processus de Lévy NIG pour trouver la solution analytique du paramètre d'Esscher. Nous appliquons aussi l'approche de ratio de Sharpe sous la mesure physique. Finalement, nous calculons et comparons les prix théorique de *q-forward* obtenu par ces deux méthodes.

Chapitre 3 : Méthodologie

3.1 Les données

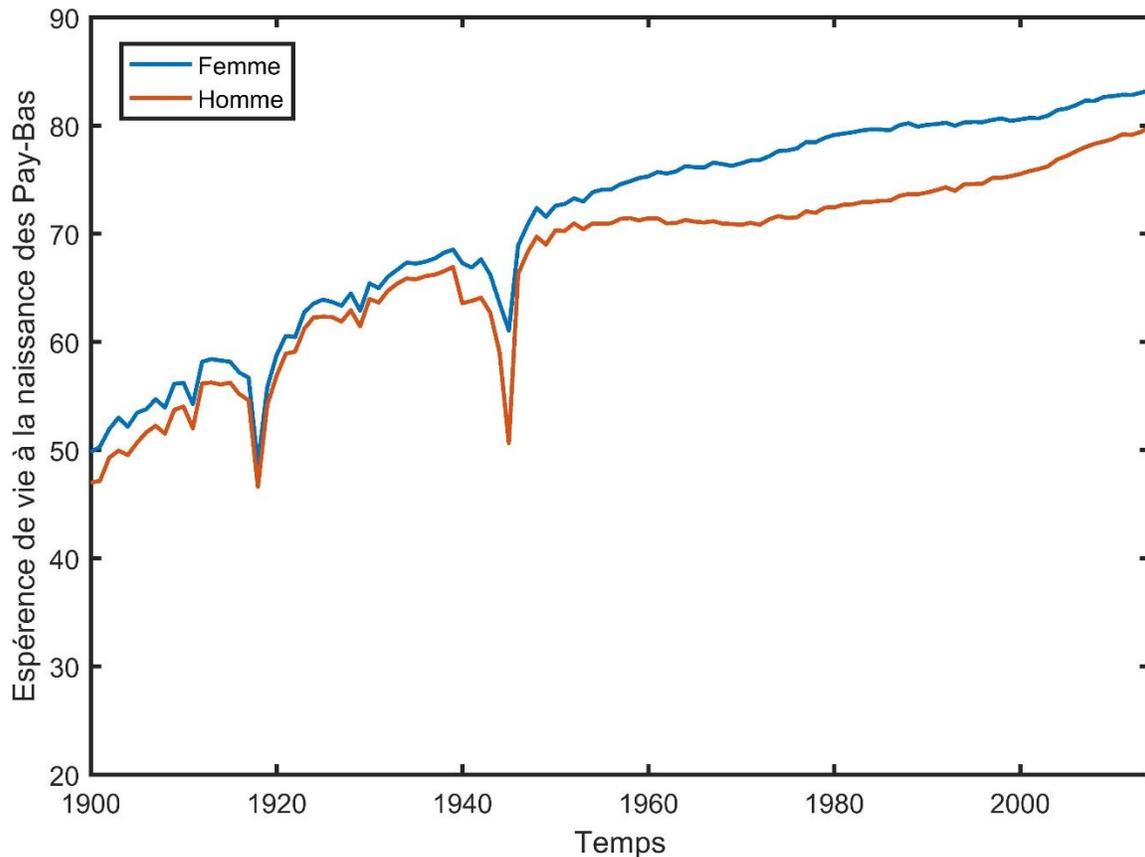
Pour la tarification de *q-forward*, son rendement dépend de la valeur de l'indice *LifeMetrics* pour la population de référence à la date d'échéance du contrat. Les indices *LifeMetrics* sont publiés à partir de mars 2007 (Voir www.lifemetrics.com). Les indices comprennent des données de mortalité disponibles au public au niveau de la population, ventilées par âge et par sexe, pour différents pays clés (Royaume-Uni, États-Unis, Pays-Bas et Allemagne). Pour favoriser la transparence des indices et des modèles de projection de la mortalité, *LifeMetrics* inclut une boîte à outils open source pour mesurer et gérer les projections de risque de longévité et de mortalité. Nous avons choisi les données de la population des Pays-Bas pour prédire la mortalité et la tarification. L'indice des Pays-Bas se présentent de 1950 à 2016, et des données pour les tranches d'âges allant de 20 à 90 ans.

Les données que nous utilisons pour prédire les taux de mortalité future comprennent les taux de mortalité observés, le nombre de la population, le nombre de décès et l'espérance de vie à la naissance pour la population générale des Pays-Bas des années 1900-2014, fournis par la base de données sur la mortalité humaine (Voir www.mortality.org).

Les données que nous utilisons sont divisées en hommes et femmes selon le sexe. L'âge est divisé en 21 groupes, chaque groupe contient 5 âges, de 0, 1-4, 5-9, 10-14, et jusqu'au dernier groupe d'âge 95-99. Vu que les nouveau-nés ont des taux de mortalité plus élevés, la catégorie d'âge 0 constitue un group à part entière. Certaines données après l'âge de 99 ans sont manquantes, donc notre dernier groupe d'âge est jusqu'à 99 ans.

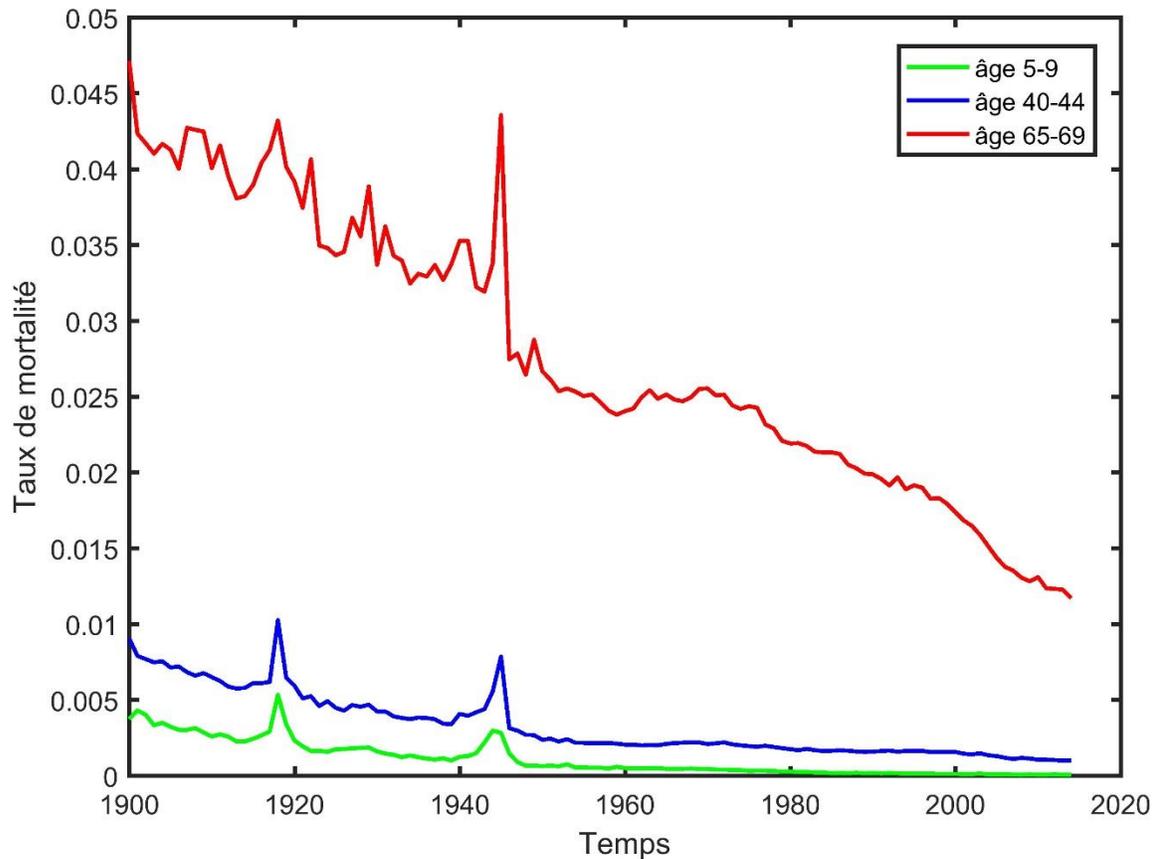
Comme mentionné ci-dessus, l'amélioration de la mortalité a conduit à la croissance de l'espérance de vie, ce qui signifie que la pression sur les fonds de pension a été augmentée, et la nécessité d'améliorer les modèles de projection de la mortalité. Nous illustrons l'ampleur des améliorations de la mortalité au cours des dernières années en utilisant l'espérance de vie à la naissance de la population des Pays-Bas de 1900 à 2014.

Figure 1 : l'espérance de vie à la naissance de la population des Pays-Bas de 1900 à 2014



A travers le temps, l'espérance de vie à la naissance de la population des Pays-Bas des hommes est passée de 47 ans en 1900 à près de 80 ans en 2014. L'espérance de vie des femmes est passée de 50 à 83 ans au cours de la même période. Cela correspond à une augmentation de 0.6% par an pour les deux sexes due à la progression des technologies médicales et l'amélioration de la vie. Ces augmentations de l'espérance de vie ne sont pas un problème en soi. Elles pourraient être correctement gérées si les améliorations de la mortalité étaient pleinement anticipées. Le vrai problème est que l'augmentation de l'espérance de vie est affectée par une incertitude considérable, et les changements dans les taux de mortalité sont souvent imprévus. C'est ce que nous entendons quand nous parlons de risque de longévité comme étant un risque de tendance à long terme. La longévité féminine semble évoluer à un rythme plus élevé que celle des hommes, donc nous décidons d'appliquer notre approche aux données féminines.

Figure2 : Taux de mortalité des différents d'âge groupe



En comparant les taux de mortalité des différents d'âge groupe, nous pouvons voir que les changements dans les taux de mortalité varient pour chaque groupe d'âge. Un modèle de mortalité adéquat devrait refléter cet effet de l'amélioration de la mortalité à travers tous les âges. En particulier, l'amélioration de la mortalité dans le groupe des personnes âgées était plus forte que dans le groupe d'âge plus jeune.

Dans les sections suivantes, nous utiliserons les données sur la mortalité des femmes néerlandaises de 1900 à 2004 pour prédire le taux de mortalité sur dix ans de 2005-2014 et comparer les résultats prévus avec les données réelles.

3.2 Modèle Lee-Carter

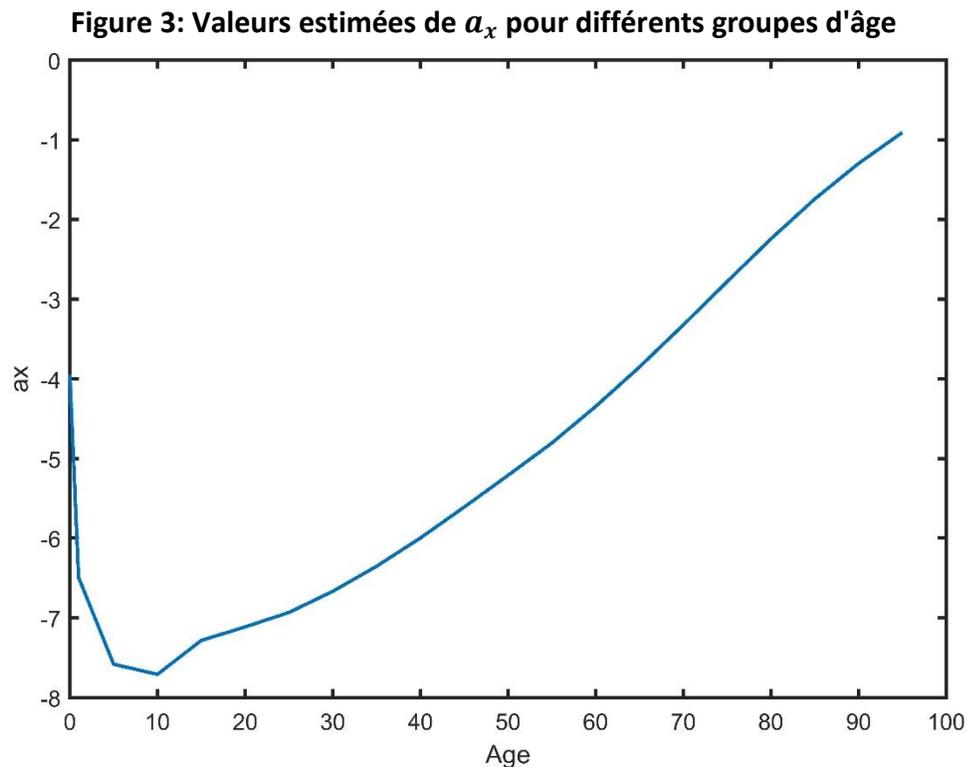
3.1.1 Estimation des paramètres

Rappelons le modèle Lee-Carter

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

Selon les contraintes définies dans le chapitre précédent, et en faisant la somme au cours des temps t , le vecteur α_x est la moyenne dans le temps du logarithme du taux de mortalité.

$$\alpha_x = \sum_{t=t_1}^T \frac{1}{T} \ln(m_{x,t})$$



Dans la figure 3, la moyenne du logarithme du taux de mortalité des groupes infantiles et des personnes âgées est relativement élevée, ce qui indique que leur taux de mortalité est plus élevé. À mesure que l'âge augmente, le taux de mortalité a tendance à augmenter progressivement.

Les variables β_x et k_t sont inconnues, donc les techniques de régression ne peuvent pas être utilisées ici. Dans Lee et Carter (1992), la décomposition en valeurs singulières (voir annexe A pour plus de détails) est appliquée à la matrice $A_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - a_x$, pour obtenir des estimations de β_x et k_t .

$$SVD(A_{x,t}) = \sum_{i=1}^r \sigma_i U_{x,i} V_{t,i}$$

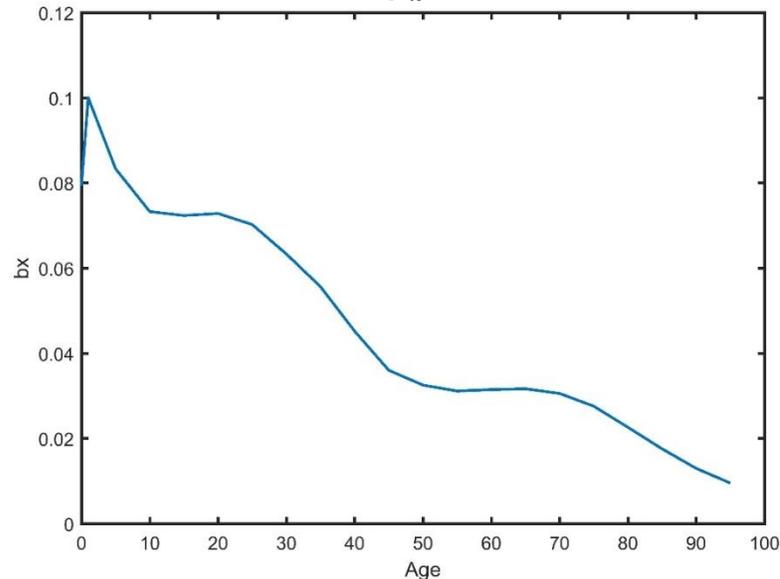
$r = \text{rang}(A_{x,t})$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ sont des valeurs singulières ordonnées, U et V sont des vecteurs singuliers. L'approximation de premier ordre ($h = 1$) est utilisée dans Lee et Carter (1992).

$$\hat{A}_{x,t} = \sum_{i=1}^h \sigma_i U_{x,i} V_{t,i} = \sum_{i=1}^h \beta_x^{(i)} k_t^{(i)}, h \leq r$$

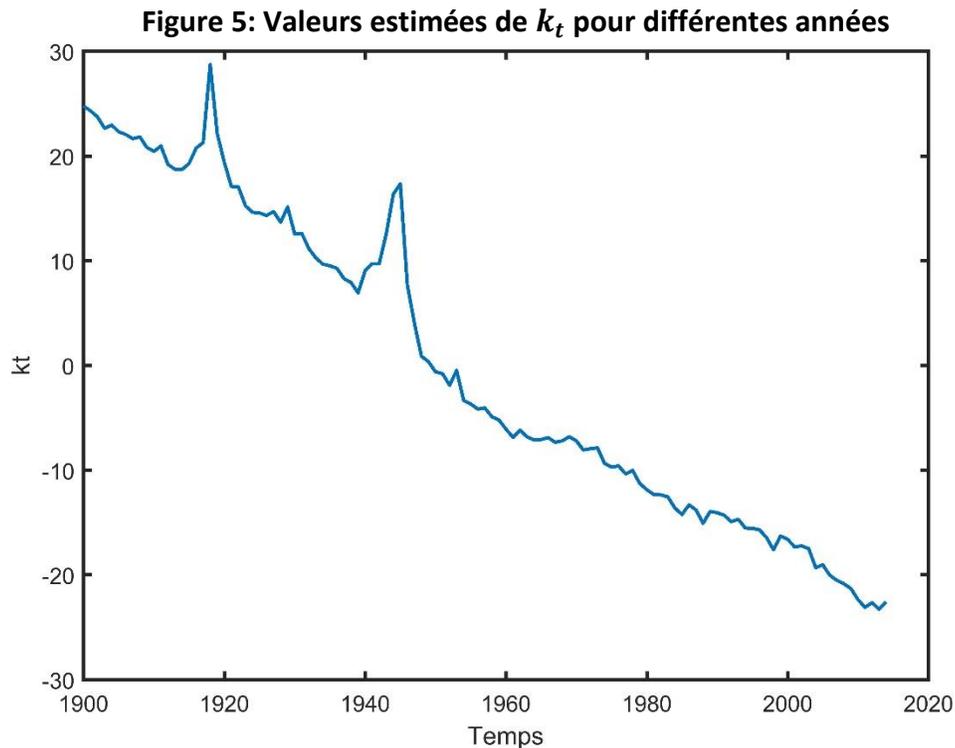
Le pourcentage de la variance totale expliqué par l'approximation d'ordre $h=1$ est 98.76% $\left(\frac{\sum_{j=1}^h \sigma_j^2}{\sum_{j=1}^r \sigma_j^2}\right)$. Il est clair que $0 \leq \sigma_h^2 \leq 1$, plus cette valeur est proche de 1, meilleure est l'approximation. Les valeurs singulières sont ordonnées, donc σ_1 est la plus grande valeur. Par conséquent, les résultats estimés sont

$$\beta_x = U_{x,1} \text{ et } k_t = \sigma_1 V_{t,1}$$

Figure 4 : Valeurs estimées de β_x pour différents groupes d'âge



β_x est la sensibilité du taux de mortalité aux changements de l'indice de mortalité, certains âges sont beaucoup plus sensibles que d'autres. En général, plus l'âge est jeune, plus sa sensibilité à la variation du paramètre k_t est grande. Cette variabilité élevée est le résultat des progrès réalisés en médecine au cours du 20^{ème} siècle pour réduire la mortalité infantile. En principe β_x pourrait être négatif pour certains âges, ce qui indique que la mortalité à ces âges a tendance à augmenter en cas de baisse à d'autres âges, en pratique, cela ne semble pas se produire à long terme.



La tendance décroissante de la série chronologique de mortalité k_t montre l'amélioration de la mortalité au cours du temps. La figure 5 montre également le grand saut autour 1918 et 1940 qui a été causé par la pandémie de la grippe et les deux Guerres Mondiales.

Lee et Carter proposent de réestimer k_t par $D_t = \sum_x P_{x,t} \exp(a_x + \beta_x k_t)$, où D_t est le nombre de décès de l'année t , $P_{x,t}$ est le nombre de population pour l'âge x de l'année t parce que le modèle correspond au logarithme des taux de mortalité au lieu des taux de mortalité actuels. Nous utilisons la méthode itération de Newton-Raphson pour trouver la racine de la fonction $\sum_x P_{x,t} \exp(a_x + \beta_x k_t) - D_t = 0$. Cependant, le taux de mortalité

obtenu par k_t réestimé montre que quelques sauts extrêmes aux Pays-Bas qui ne correspondaient pas aux données réelles. Les estimations originales étaient plus proches des données réelles, donc, l'estimation originale de k_t est choisie ici dans notre modélisation.

3.1.2 Modélisation de l'indice de mortalité k_t

L'étape suivante consiste à modéliser k_t comme un processus stochastique. Lee et Carter trouvent qu'une marche aléatoire avec dérive décrit bien k_t , il est modélisé ainsi :

$$k_t = k_{t-1} + c + e_t$$

où c est une constante et e_t est un terme d'erreur qui a une distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire. Ceci implique que le changement de l'indice de mortalité est supposé être gaussien.

Nous utilisons donc un processus ARIMA (0,1,0) pour prédire l'indice de mortalité des années 2005-2014, les figures 6 et 7 confirment que l'indice k_t est fortement autocorrélé et que sa différence première ne l'est pas. La prédiction de k_t et un intervalle de confiance de 95% est aussi présente dans la figure 8. L'estimation du modèle donne le résultat suivant :

$$k_t = k_{t-1} - 0.406038 + e_t$$

Figure 6: Autocorrélogramme et autocorrélogramme partiel de l'indice de mortalité k_t

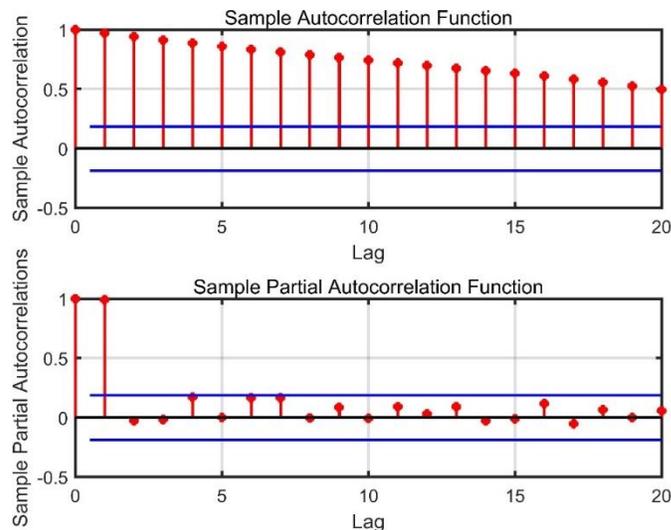
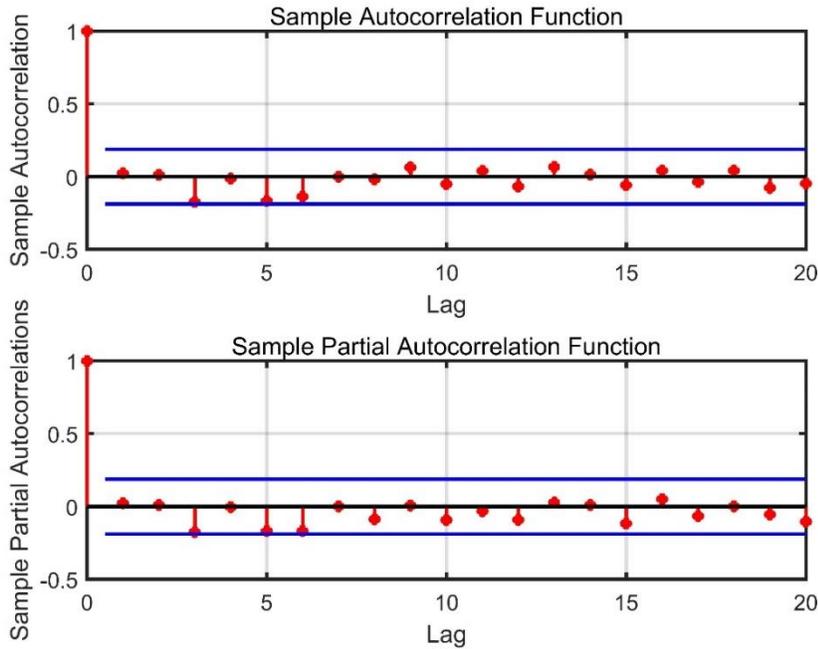


Figure 7: Autocorrélogramme et autocorrélogramme partiel de la différence de l'indice de mortalité k_t



Ainsi, les taux de mortalité (après la dernière année disponible t) sont projetés

$$m_{x,t+s} = \exp(\alpha_x + \beta_x k_{t+s})$$

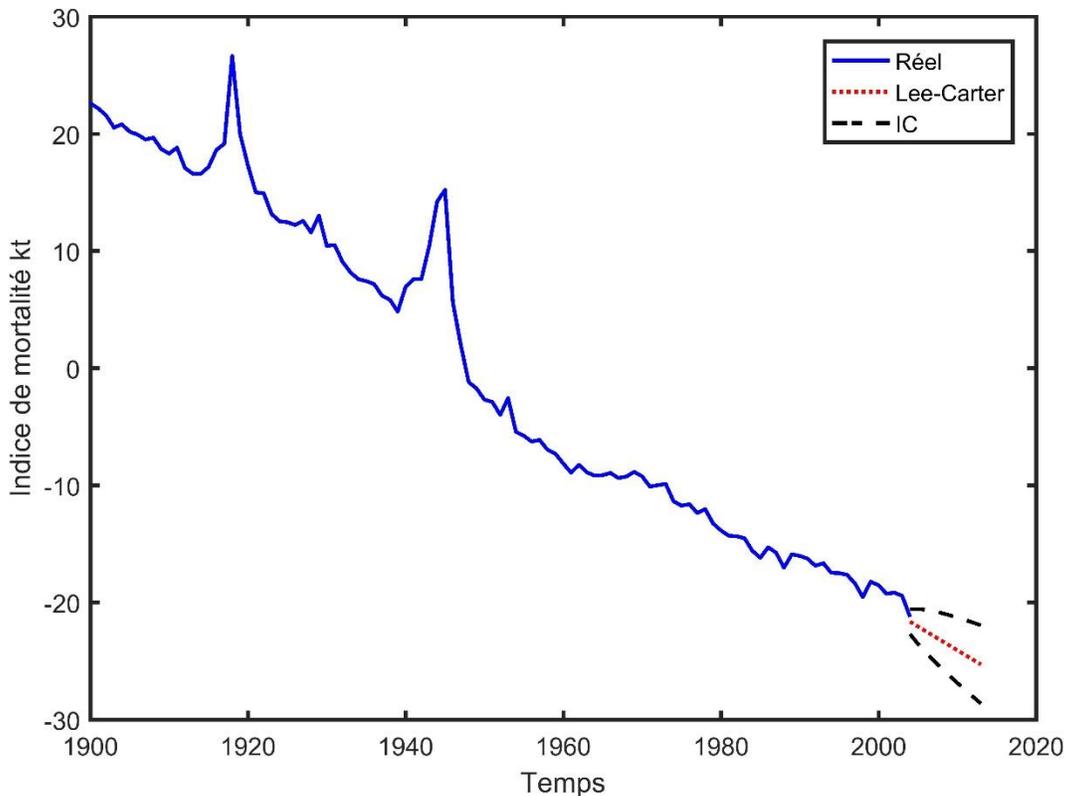
où k_{t+s} est la valeur projetée du paramètre k dans l'année $s + t$.

Lee (2000) propose que les prévisions devraient prendre les plus récents taux de mortalité par âge observés comme valeurs initiales. La formule alternative pour prédire le taux de mortalité est

$$\ln(m_{x,t+s}) = \ln(m_{x,t}) - \beta_x(k_{t+s} - k_t)$$

Cela garantit que la première année de la prévision correspondra adéquatement avec les derniers taux de mortalité observés.

Figure 8: Prédiction de k_t pour 2005-2014 avec intervalle de confiance (IC) de 95%



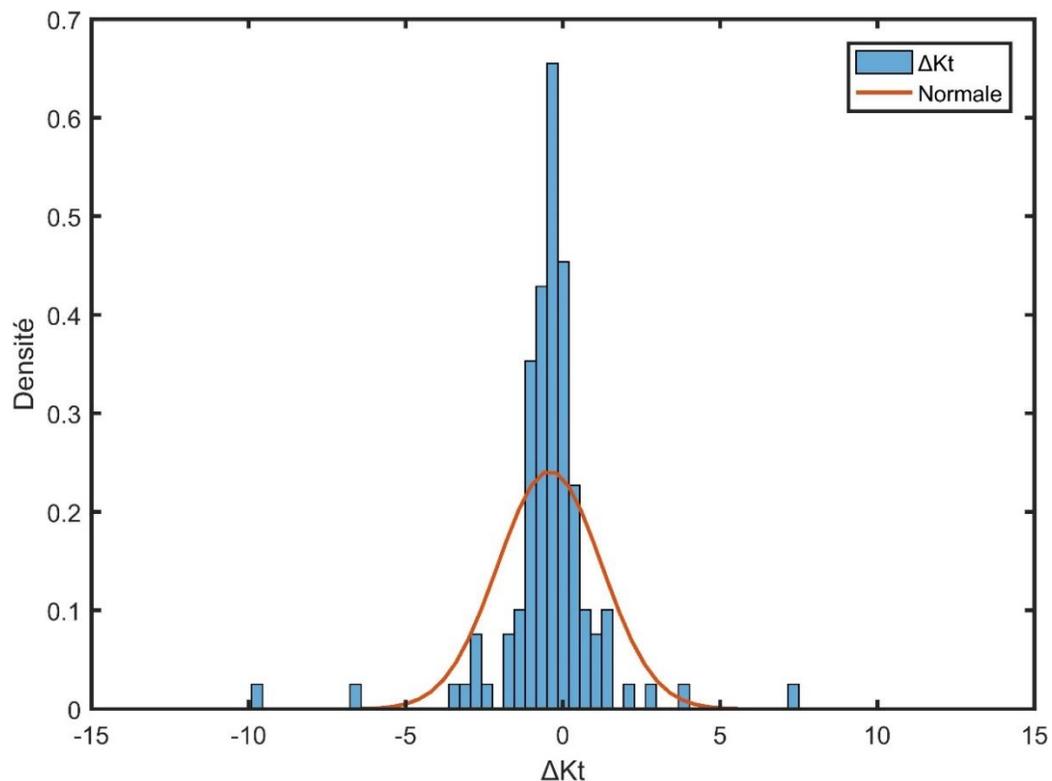
La tendance décroissante de la série chronologiques de l'indice k_t montre l'amélioration de la mortalité au cours du temps. Nous avons besoin d'un modèle pour capturer les caractéristiques de la forme, la tendance et les sauts de l'indice de mortalité. Nous calculons d'abord les quatre moments de Δk_t . Le coefficient d'asymétrie mesure le degré auquel une distribution est asymétrique. Si une distribution a une queue plus longue à gauche qu'à droite, alors elle a une asymétrie négative. Si l'inverse est vrai, la distribution a une asymétrie positive. Le kurtosis mesure le grand mouvement dans l'indice, c'est la raison principale pour considérer les processus avec des sauts. Pour la distribution normale le kurtosis est 3, si la distribution est leptokurtique, le kurtosis est supérieur à 3, les échantillons ayant des queues plus épaisses que la normale aux extrémités, impliquant des valeurs anormales plus fréquentes. Le tableau suivant présente les quatre premiers moments de Δk_t .

Tableau 3 : Moments de Δk_t

Moments de Δk_t	Valeur
Moyenne	-0.4217
Variance	2.9487
Coefficient d'asymétrie	-0.8948
Kurtosis	15.0732

Les statistiques descriptives de Δk_t montrent des caractéristiques leptokurtiques. La distribution de k_t présente un kurtosis élevé avec des queues épaisses que nous pouvons observer dans la figure 9. Il apparaît ainsi que k_t ne peut pas être bien modélisé par une distribution normale. Mitchell et al. (2013) suggèrent un modèle avec la distribution normale inverse gaussienne (NIG) qui peut mieux décrire ces caractéristiques.

Figure 9 : Comparaison de la distribution de Δk_t et de la distribution normale



3.2 Modèle MBMM

Mitchell et al. (2013) nommé modèle MBMM, suggèrent que la construction d'un modèle sur la différence du logarithme de la mortalité, plutôt que sur le niveau puis sur la différence, peut fournir un meilleur ajustement. Ils proposent le modèle de Lee-Carter modifié représenté comme suit :

$$m_{x,t} = m_{x,t-1} e^{a_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}}$$

Ou encore

$$\ln(m_{x,t}) - \ln(m_{x,t-1}) = a_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

où a_x décrit la variation moyenne du taux de mortalité par logarithme pour chaque groupe d'âge, k_t décrit un indice de changement de mortalité identique pour tous les groupes d'âge, β_x indique comment chaque groupe d'âge répond à l'indice de mortalité et $\varepsilon_{x,t}$ est un terme d'erreur, qui a une valeur attendue nulle et que nous supposons être non corrélé dans le temps et le groupe d'âge. Ceci est analogue à la façon dont le niveau de mortalité logarithmique est une fonction linéaire de l'indice de mortalité de Lee et Carter (1992). L'évolution des données provient des taux de mortalité des années précédentes plutôt qu'une tendance de l'indice de mortalité caché. De cette façon, nous avons enlevé la tendance en considérant les changements plutôt que les niveaux.

3.2.1 Estimation des paramètres

La méthode d'estimation des paramètres est la même que celle du modèle Lee-Carter. Nous établissons d'abord une matrice M qui représente le changement entre logarithme du taux de mortalité, $M_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - \ln(m_{x,t-1})$. Alors, a_x est obtenu par le changement moyen au fil du temps pour chaque groupe d'âge, $a_x = \sum_{t=t_1}^T \frac{1}{T} (M_{x,t})$. Ensuite, nous utilisons la décomposition en valeurs singulières sur la matrice $M_{x,t} - a_x$ pour trouver les valeurs estimées de β_x et k_t . Les valeurs des paramètres ne sont pas uniques. Les mêmes contraintes définies par Lee et Carter (1992) sont utilisées d'ici $\sum_x \beta_x = 1$ et $\sum_t k_t = 0$. L'approximation de l'ordre 1 dans la décomposition en valeurs singulières nous donne $SVD(M_{x,t} - a_x) = \sigma_1 U_{x,1} V_{t,1}$. k_t est un scalaire multiple de la

première colonne de U fois σ_1 et β_x est la première colonne de V divisée par ce même scalaire. Alors la prédiction du modèle de $\ln(m_{x,t})$ est égale à $\ln(m_{x,t-1}) + a_x + \beta_x k_t$. Les figures 10 et 11 montrent les valeurs estimées de a_x et β_x du modèle de MBMM pour différents groupes d'âge. La forme de ces deux valeurs est identique à celle du modèle de Lee-Carter.

Figure 10 : Valeurs estimées de a_x pour différents groupes d'âge

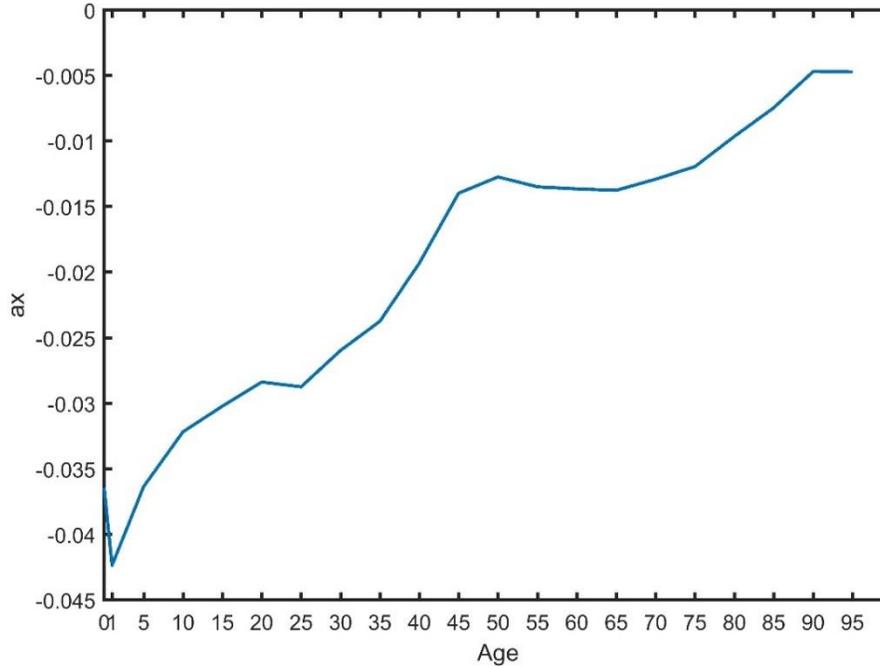


Figure 11 : Valeurs estimées de β_x pour différents groupes d'âge

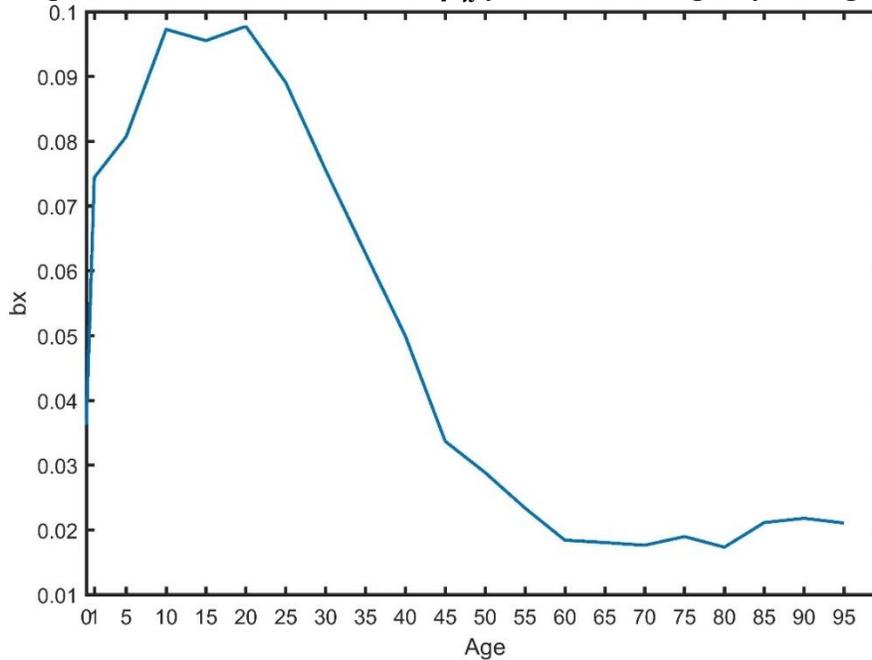
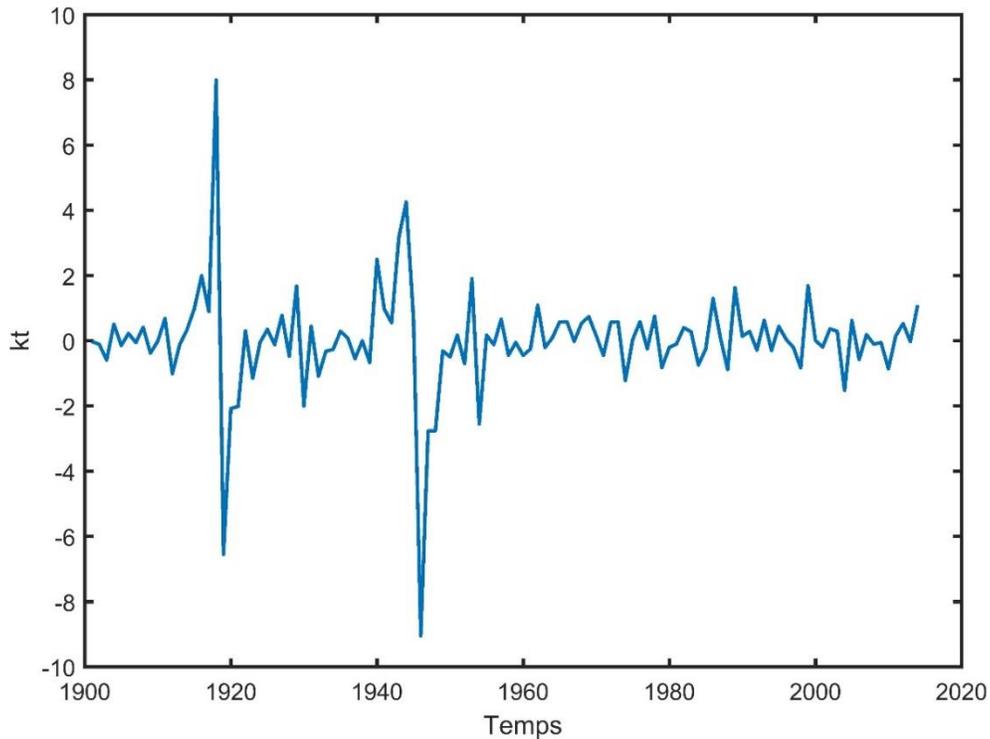


Figure 12: Valeurs estimées de k_t pour différentes années



Comme le montre la figure 12, le processus k_t est stationnaire et prêt pour la modélisation. Nous supposons que les réalisations de k_t sont des observations indépendantes d'une variable aléatoire. Cela pose cependant un problème autour de 1918 et 1940 car après un grand saut en haut, nous observons un grand saut en bas. Cela pourrait indiquer un processus autocorrélé, mais ce problème est également observé dans le modèle Lee-Carter lors de calibration de Δk_t en tant qu'observations indépendantes d'une variable aléatoire gaussienne. Mitchell et al. (2013) ignorent aussi ce problème et interprète simplement k_t comme des observations indépendantes d'une variable aléatoire.

3.3 Évaluation de la performance

Maintenant que nous savons comment adapter le modèle aux données, nous aimerions voir comment modèle MBMM fonctionne par rapport au modèle Lee-Carter. Les deux figures suivantes montrent le taux de mortalité actuel aux Pays-Bas pour deux groupes

d'âge différents, la prédiction de Lee-Carter du taux de mortalité et la prédiction par le modèle MBMM du taux de mortalité. Les résultats du modèle Lee-Carter dans le groupe jeune (10-14) sont meilleurs, mais l'erreur dans le groupe plus âgé est plus grande. Nous voyons que modèle MBMM prédit le taux de mortalité de l'année prochaine beaucoup mieux que le modèle Lee-Carter dans les deux groupes. Dans l'ensemble, le modèle Lee-Carter tend à surestimer le taux de mortalité, en particulier pour les projections après l'année 2000.

Figure 13: Comparaison de la prévision du taux de mortalité du groupe d'âge 65-69

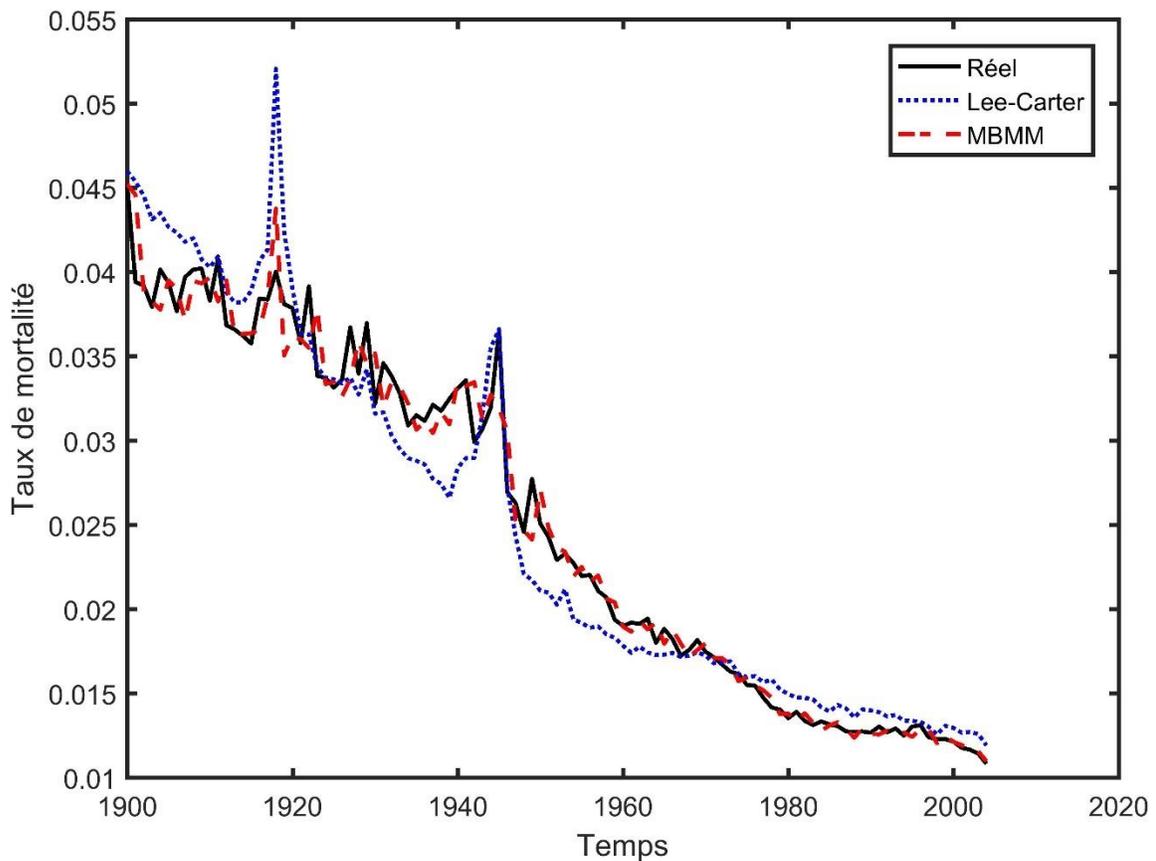
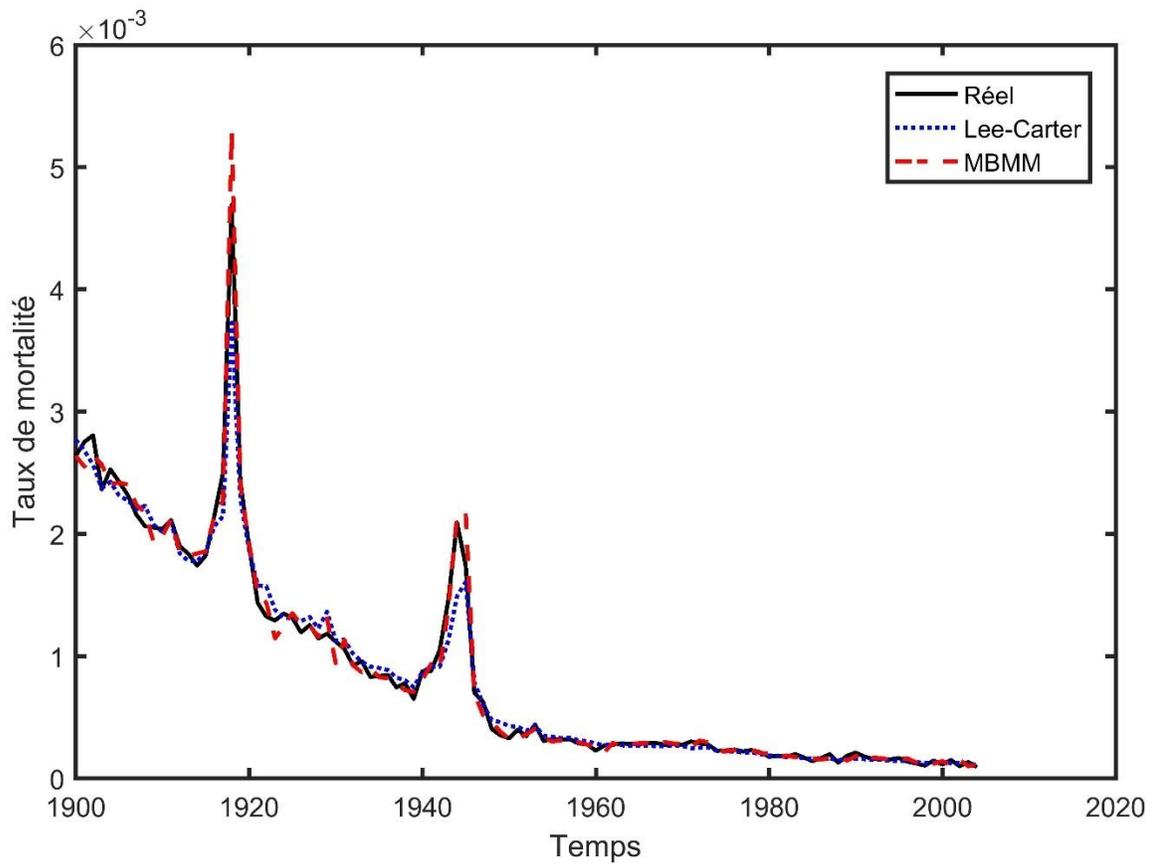


Figure 14 : Comparaison de la prévision du taux de mortalité du groupe d'âge 10-14



Avec les données décrites ci-dessus, nous pouvons maintenant comparer les deux modèles en utilisant des mesures d'ajustement dans l'échantillon. La mesure d'ajustement que nous utilisons est la racine de la somme des erreurs au carré, ou RSSE (*root sum of squared errors*) en anglais. Cela mesure la racine carrée de la somme des différences au carré entre le taux de mortalité logarithme réel et la prédiction du modèle. Nous définissons RSSE comme $RSSE = \sqrt{\sum_{x,t} \varepsilon^2_{x,t}}$. Le tableau 4 montre les résultats selon le modèle de Lee-Carter et le modèle de MBMM sur la période d'estimation des années 1900-2004, et des années 1950-2004 après les deux guerres mondiales. La principale raison pour laquelle le modèle de MBMM fonctionne mieux est que nous utilisons explicitement le taux de mortalité de cette année pour prédire

l'année prochaine, tandis que le modèle de Lee-Carter utilise uniquement un indice agrégé des taux de mortalité de l'année prochaine. La raison de considérer la période des années 1950-2004 est de déterminer si le modèle de MBMM est robuste avec des données sans sautes (les deux guerres mondiales).

Tableau 4 : Comparaison de RSSE dans les deux modèles

	LC	MBMM
RSSE (1900-2004)	5.2782	3.7976
RSSE (1950-2004)	2.3640	2.2706

Le tableau 5 montre les RSSE pour chaque tranche d'âge en deux périodes d'estimation 1900-2004 et 1950-2004. Pour la première période, en plus du groupe d'âge de 0 ans et 10-14 ans, les RSSE des autres groupes d'âge sont inférieures à ceux du modèle de Lee-Carter. Pour la deuxième période, sauf le groupe d'âge de 1-4, 5-9, 20-24, 25-29 et 30-34, le modèle de MBMM fonctionne mieux que celui de Lee-Carter pour les autres. En conclusion, l'estimation pour les groupes d'âge plus élevés présente un excellent résultat peu importe la période d'estimation.

Tableau 5 : Comparaison de RSSE pour chaque tranche d'âge

Age	1900-2004		1950-2004	
	LC	MBMM	LC	MBMM
0	1.6833	0.987	0.5476	0.4426
1-4	1.5505	1.0226	0.4583	0.5985
5-9	1.5801	1.1514	0.8395	0.9082
10-14	1.1346	1.1674	0.8568	0.7928
15-19	1.5516	0.9105	0.8972	0.8156
20-24	1.4143	0.915	0.7235	0.7919
25-29	1.2207	0.8078	0.5978	0.6047
30-34	0.9961	0.7573	0.5541	0.5739
35-39	0.8923	0.6262	0.4883	0.4432
40-44	0.771	0.5119	0.3950	0.3229
45-49	0.5986	0.3727	0.3643	0.2299
50-54	0.6131	0.484	0.3352	0.2969
55-59	0.6331	0.5338	0.2711	0.2441
60-64	0.7218	0.4302	0.2795	0.1915
65-69	0.9313	0.4812	0.3013	0.1968
70-74	1.163	0.5554	0.3013	0.1927
75-79	1.2535	0.6742	0.2815	0.2108
80-84	1.1853	0.7154	0.3132	0.2379
85-89	1.0477	0.8278	0.3264	0.2906
90-94	0.9495	0.8838	0.3658	0.2815
95-99	1.3061	1.5332	0.5063	0.5317

Après avoir adapté ce modèle, nous aimerions également faire des prévisions des taux de mortalité dans le futur. Pour ce faire, nous devons modéliser la distribution future des taux de mortalité. Mitchell et al. (2013) proposent trois modèles différents pour 11 pays développés : distribution normale, distribution NIG et *double exponential jump diffusion (DEJD)* pour s'adapter à l'indice de mortalité k_t , et utilise le BIC (critère d'information bayésien) du processus k_t pour chaque modèle afin de mesurer la qualité de l'ajustement d'une distribution de probabilité.

En conclusion, la distribution normale ne fonctionne que pour des données de mortalité sans sauts, par exemple, si les données utilisées étaient après la grippe de 1918 et la Seconde Guerre mondiale. Il n'existe pas une forme fermée pour la

distribution DEJD, donc l'estimation des paramètres est plus coûteuse. Nous considérons donc seulement le distribution NIG à l'avenir en raison de sa capacité à gérer adéquatement les sautes de données de mortalité et sa simplicité de calcul.

3.4 Modélisation de k_t avec processus de Lévy NIG

Afin de modéliser le taux de mortalité sous la mesure de martingale et de l'appliquer pour la tarification des dérivées de longévité, Chuang et al. (2014) introduisent un processus stochastique de Lévy NIG dans la structure MBMM. À l'aide de la transformation d'Esscher, ils montrent comment trouver une mesure de martingale avec une forme fermée, permettant la tarification à la martingale pour les dérivés liés au risque de mortalité ou longévité. Bien qu'il existe de nombreuses méthodes pour déterminer une mesure de probabilité pour la tarification, la transformation d'Esscher est la plus appropriée pour le processus de Lévy, car, elle fournit une solution analytique qui est relativement simple à calculer.

Pour prédire les taux de mortalité futurs, Chuang et al. (2014) proposent une formule basée sur le taux de mortalité actuel et sur les itérations montrées comme suit

$$m_{x,t} = m_{x,0} \exp(a_x t + b_x \sum_{i=1}^t k_i + \sum_{i=1}^t \varepsilon_{x,i})$$

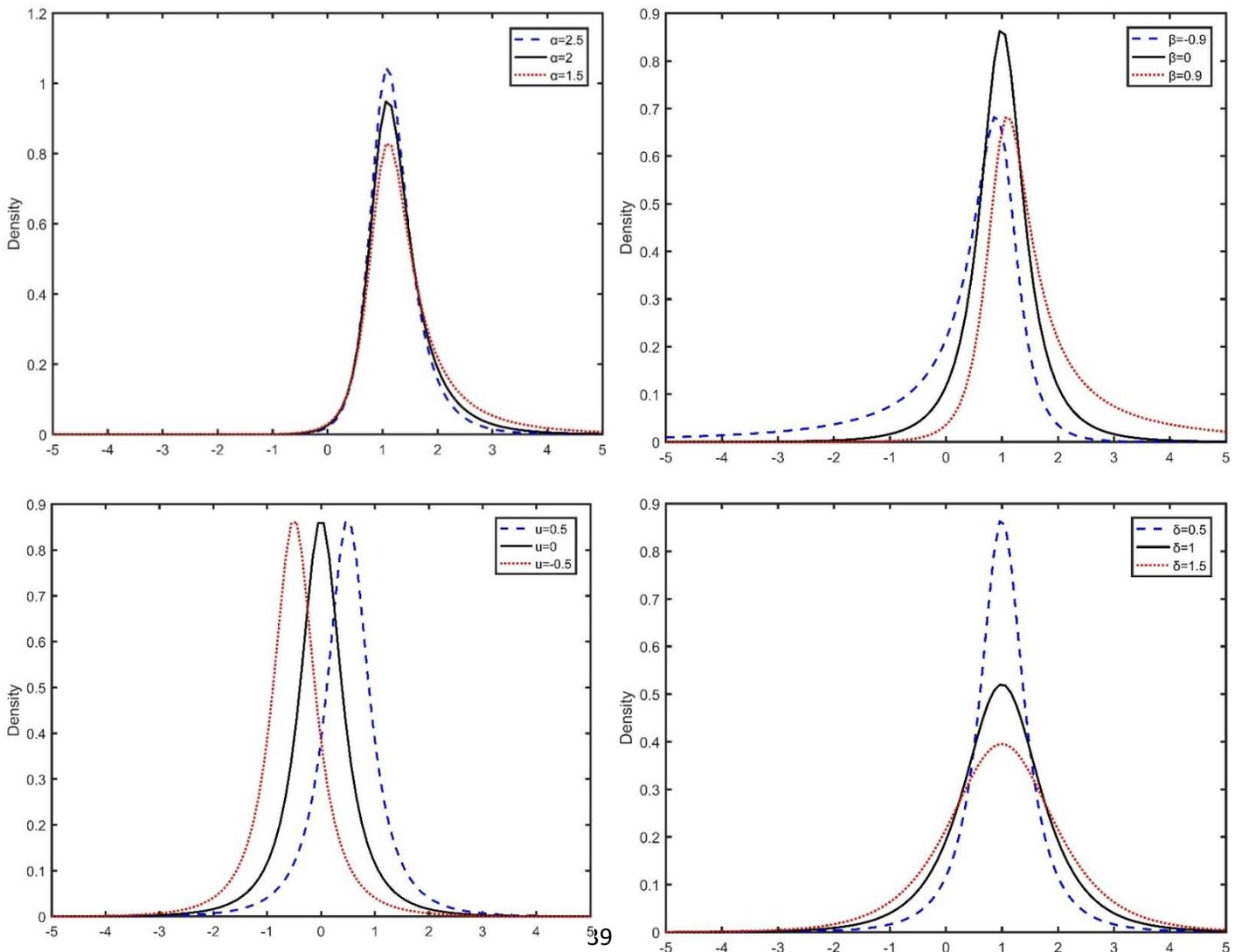
Ceci montre que le taux de mortalité futur au temps t peut être obtenu en multipliant le taux de mortalité actuel par une fonction exponentielle qui fournit la dynamique des changements de taux de mortalité.

3.4.1 Distribution normale-inverse gaussienne (NIG)

La distribution normale inverse gaussienne (NIG) est un cas particulier des distributions hyperboliques généralisées, introduites pour la première fois par Barndorff-Nielsen (1994). Avec ses quatre paramètres, la distribution NIG permet à la fois l'asymétrie et l'aplatissement supérieur à la distribution normale. Ces propriétés, en particulier permettant des queues à décroissance plus lente, en font un outil approprié pour la modélisation des taux de mortalité.

Nous considérons une variable aléatoire X distribuée selon une loi NIG avec les paramètres α , β , μ et δ , où μ est l'emplacement, β est l'asymétrie, α est l'amplitude et δ est l'échelle. La figure 15 montre les fonctions de densité NIG avec différents paramètres. Les paramètres de base sont $\alpha=1$, $\beta=1$, $\mu=1$ et $\delta=0.5$. Nous voyons que le paramètre α contrôle la lourdeur de la queue. Un α plus petit entraîne une queue plus lourde. Le paramètre β contrôle la symétrie de la forme. Lorsque β est nul, la forme est symétrique. Le paramètre μ est appelé le paramètre de localisation et désigne le centre de la distribution. Le δ est appelé paramètre d'échelle et contrôle le kurtosis de la distribution. Un grand δ résulte en une kurtosis élevée.

Figure 15 : Les fonctions de densité NIG selon différents paramètres



La fonction de densité pour une variable $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ est donnée par

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \int_0^{\infty} f_N(x; \mu + \beta y, y) * f_{IG}(y; \delta y, \gamma^2) dy$$

f_N désigne la fonction de densité de la distribution gaussienne, f_{IG} désigne la fonction de densité de la distribution inverse gaussienne, avec $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ et $\alpha > 0, -\alpha < \beta < \alpha, \delta > 0, \mu \in \mathbb{R}$.

Cette fonction de densité peut aussi s'écrire

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\alpha \delta}{\pi} \exp(\delta \gamma + \beta(x - \mu)) \frac{K_1(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}$$

$K_1(\cdot)$ désigne la fonction modifiée de Bessel du second définie comme

$$K_1(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}u(t + t^{-1})) dt$$

La distribution NIG possède une propriété de convolution et une propriété de mise à l'échelle intéressantes, ce qui facilite l'utilisation de la distribution NIG pour de nombreuses applications analytiques.

Propriété de mise à l'échelle

Soit X une variable aléatoire NIG où $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$. Étant donné une constante non négative c , alors cX est aussi une variable aléatoire NIG où $cX \sim NIG\left(\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}, \mu c, \delta c\right)$.

Propriété de convolution

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires NIG avec $X_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1, \delta_1)$ $X_2 \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_2, \delta_2)$. Alors $Y = X_1 + X_2$ est aussi une variable aléatoire NIG où $Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2)$.

Selon ces deux propriétés, les k_i sont des variables aléatoires i.i.d., $k_i \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$, alors nous avons $N_{x,t} = b_x \sum_{i=1}^t k_i$ et $N_{x,t} \sim NIG\left(\frac{\alpha}{|b_x|}, \frac{\beta}{|b_x|}, |b_x| \mu t, |b_x| \delta t\right)$.

Le modèle devient comme suit (Chuang et al. 2014)

$$m_{x,t} = m_{x,0} \exp(a_x t + N_{x,t})$$

Ceci correspond un processus Lévy exponentiel. En fait, il n'existe pas de terme d'erreur qui présente un terme de diffusion dans le modèle. Schoutens (2003) mentionne qu'un terme de diffusion n'aura pas d'impact significatif sur l'estimation, car un processus Lévy peut incorporer des sauts petits et grands.

3.4.2 Estimation des paramètres de la distribution

La méthode d'estimation des moments appliquée à la distribution NIG consiste à construire un système non linéaire d'équations pour les quatre paramètres. En particulier, nous mettons le premier et le second moment, l'asymétrie et le kurtosis égal à leurs données empiriques. La méthode des moments (MOM) ne nécessite pas une représentation explicite de la fonction de densité de sorte qu'il est très robuste.

Tableau 6: Moments d'une variable aléatoire NIG

Moments	NIG ($\alpha, \beta, \mu, \delta$), $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$
Espérance	$\mu + \frac{\delta\beta}{\gamma}$
Variance	$\frac{\delta\alpha^2}{\gamma^3}$
Coefficient d'asymétrie	$\frac{3\beta}{\alpha\sqrt{\delta\gamma}}$
Kurtosis	$3 \frac{1 + 4(\frac{\beta^2}{\alpha^2})}{\delta\gamma}$

En pratique, nous pouvons d'abord calculer les estimations à partir de la méthode du moment, puis les utiliser comme point de départ pour la résolution itérative des estimations du maximum de vraisemblance (MLE).

La fonction de vraisemblance d'un échantillon x_1, x_2, \dots, x_n de n valeurs de distribution peut être calculé avec la fonction de densité associée à l'échantillon en fonction de ϑ , les paramètres de distribution, avec x_1, x_2, \dots, x_n fixés.

$$l(\theta) = f_{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

En supposant que les données sont i.i.d. nous devons maximiser

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f_{\theta}(x_i)$$

Selon la fonction de densité définie dans la section précédente,

$$L(\theta) = \ln \left(\frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{-1} \beta^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{-1}{2}}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln(\delta^2 + (x_i - \mu)^2) \sum_{i=1}^n [\ln K_1(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} + \beta(x_i - \mu))]$$

Le tableau 7 montre les résultats de l'estimation sur les données de la mortalité féminine aux Pays-Bas de 1900 à 2004. Nous utiliserons ces paramètres pour prédire le taux de mortalité durant les années 2005-2014.

Tableau 7 : Valeurs estimées des paramètres NIG des années 1900-2004

Paramètre	α	β	μ	δ
Valeur	0.1717	-0.0237	0.0719	0.5159

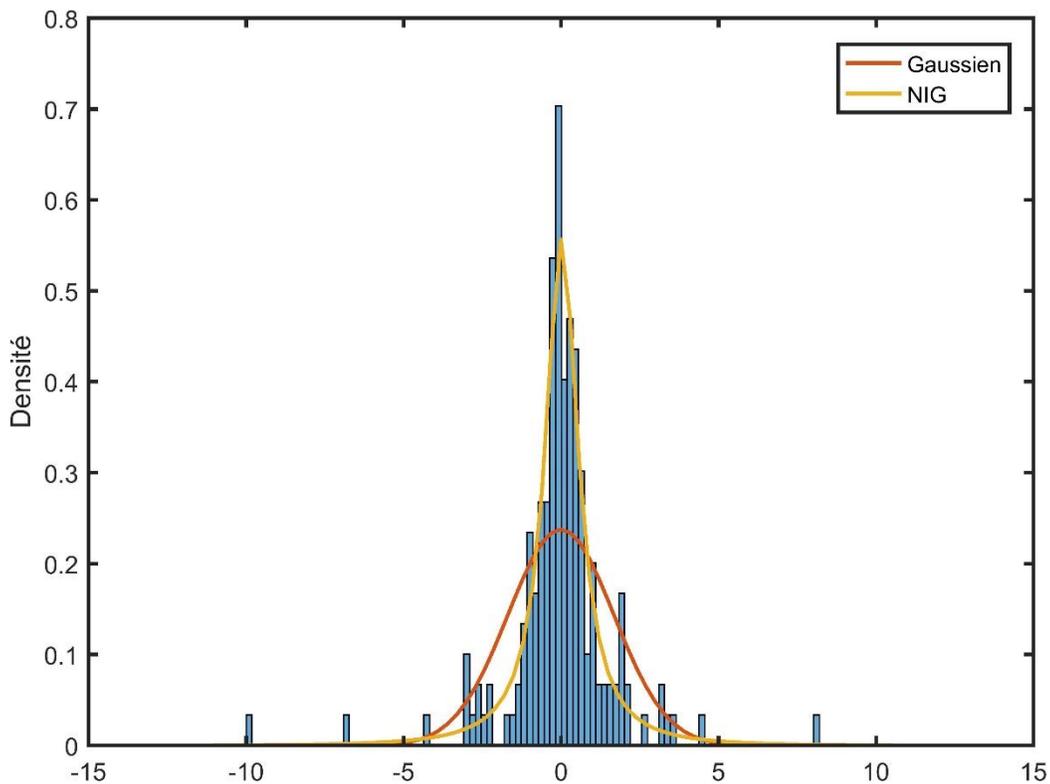
Pour comparer statistiquement avec les paramètres normaux, le nombre des échantillons est suffisamment grand, les valeurs P du test de Student sont présente dans le tableau 8. Nous générons un autre échantillon provenant de NIG selon

différente hypothèse nulle, comme la valeur P est supérieurs à 5%, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle, le résultat n'est pas statistiquement significatif.

Tableau 8 : Test de Student pour des paramètres

H_0	$\beta = 0$	$\mu = 0$	$\delta = 1$
Valeur P	0.7676	0.2332	0.1424

Figure 16: Distributions empirique et estimées



La figure 16 montre la distribution ajustée de l'indice de mortalité de la population féminine des Pays-Bas de 1900 à 2004. D'après la comparaison entre la distribution normale et la distribution NIG, il est clair que la distribution normale ne peut pas décrire très bien des queues épaisses et la caractéristique leptokurtique. Cependant, la distribution NIG est un bon ajustement pour les données de mortalité avec des événements extrêmes.

3.4.3 Simulation du processus NIG

Le processus NIG est défini comme suit

$$X^{NIG} = \{X_t^{NIG}, t \geq 0\}$$

Avec $X_0^{NIG} = 0$ et les incréments distribués NIG stationnaires et indépendants. $X_{t+dt}^{NIG} - X_t^{NIG}$ est alors distribué NIG avec les paramètres $\alpha, \beta, \mu dt$ et δdt .

Schoutens (2003) montre qu'un processus X^{NIG} avec $\alpha > 0, -\alpha < \beta < \alpha, \delta > 0, \mu \in \mathbb{R}$ peut être obtenu en changeant le temps d'un mouvement brownien standard $W = \{W_t, t \geq 0\}$ avec dérive par un processus inverse gaussien (IG), $I = \{I_t, t \geq 0\}$ avec les paramètres $a = 1$ et $b = \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

La distribution inverse gaussienne décrit la distribution du temps qu'un mouvement brownien standard avec la dérive $b > 0$ prend pour atteindre un niveau positif fixe a . Le temps que cela prend ne peut bien sûr être que positif, et donc le processus gaussien inverse est seulement défini pour $x > 0$. La fonction de densité pour la distribution IG (a, b) est donnée par

$$f_{IG}(x; a, b) = \left(\frac{a}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-a(x-b)^2}{2b^2x}\right)$$

Le processus NIG est obtenu par (Schoutens, 2003)

$$X_t^{NIG} = \beta\delta^2 X_t^{IG} + \delta W_t + \mu, t > 0$$

Le nom du processus NIG est dû au fait que nous pouvons relier le processus NIG à un mouvement brownien à changement de temps inverse gaussien $IG \sim (a, b)$.

Nous utilisons l'algorithme suivant pour générer un processus inverse-gaussien avec les paramètres $a = 1$ et $b = \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ et ensuite un processus NIG, nous divisons la durée en 1000 sous-intervalles, et simulons 10,000 chemins différents.

- Générer un nombre aléatoire normal standard v
- Définir $y = v^2$

- Définir $x = \frac{a}{b} + \frac{y}{2b^2} + \frac{\sqrt{4aby+y^2}}{2b^2}$
- Générer un nombre aléatoire uniforme u
- Si $u \leq \frac{a}{a+xb}$, alors renvoyer le nombre x comme $IG(a, b)$,
Sinon retourner $\frac{a^2}{b^2x}$ comme $IG(a, b)$
- Générer n nombres aléatoires indépendants $i_n \sim IG(a\Delta t, b)$, $\Delta t = \frac{t}{n}$, $n \geq 1$
- Définir la valeur initiale du processus, $X_0^{IG} = 0$
- Par itération $X_{n\Delta t}^{IG} = X_{(n-1)\Delta t}^{IG} + i_n$
- Différence chaque état consécutif de X^{IG} , $dt_{n\Delta t} = X_{n\Delta t}^{IG} - X_{(n-1)\Delta t}^{IG}$
- Simuler $\{W_t, t \geq 0\}$ à partir de n variables aléatoires normales standards indépendantes, $v_n, n > 0$
- Définir $W_0 = W_{X_0}^{IG} = 0$
- $W_{n\Delta t} = W_{(n-1)\Delta t} + \sqrt{dt_{n\Delta t}}v_n$
- Par itération $X_{n\Delta t}^{NIG} = \beta\delta^2 X_{n\Delta t}^{IG} + \delta W_{n\Delta t} + \mu$

3.4.4 Modélisation sous la mesure physique

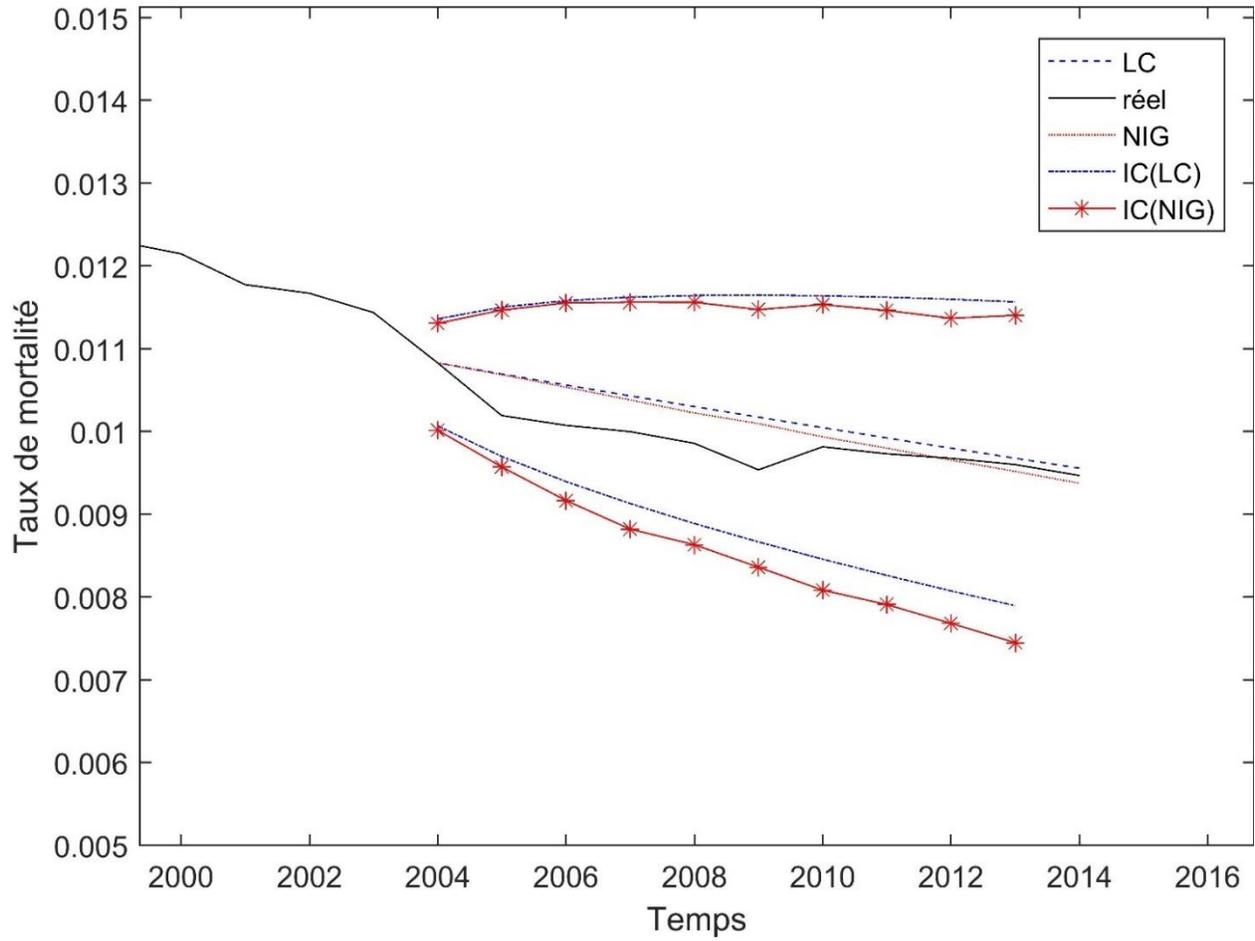
Rappelons le modèle de mortalité sous la mesure physique:

$$m_{x,t} = m_{x,0} \exp(a_x t + N_{x,t})$$

$N_{x,t}$ est obtenu par la simulation de la loi NIG, $m_{x,0}$ est le taux de mortalité observé. Nous utilisons les données de la population féminin d'âge 65-69 des Pays-Bas des années 1900-2004 pour prédire le taux de mortalité des années 2005-2014, la valeur prédite est basée sur 10,000 simulations, la figure 17 montre que le modèle MBMM avec la loi NIG est plus proche que les taux de mortalité réels et un intervalle de confiance approprié qui inclut les valeurs réalisées. L'intervalle de confiance augmente au fil du temps, ce qui signifie que l'incertitude du taux de mortalité augmente. En général, les taux de mortalité obtenus par le modèle de MBMM avec la loi NIG sont inférieurs à ceux du modèle de Lee-Carter. Une mortalité plus faible correspond à un taux de survie plus élevé, ce qui évite la

sous-estimation du risque de longévité. Dans le prochain chapitre, nous utiliserons ces résultats de la prévision pour établir le prix de q -forward.

Figure 17: Taux de mortalité prévu des années 2005-2014 et un IC de 95%



Chapitre 4 : Application: Tarification de q-forward

4.1 Mécanisme de q-forward

Le risque de longévité et les solutions liées aux marchés de capitaux ont pris de plus en plus d'importance ces dernières années. Les améliorations de la mortalité partout dans le monde mettent de plus en plus de pression sur les gouvernements, les caisses de retraite, les sociétés d'assurance-vie, ainsi que les particuliers, pour faire face au risque de longévité auquel ils sont confrontés. Les fonds de pensions, les gouvernements sont la partie de *short*, parce que leur passif augmente avec le risque de longévité. Les sociétés d'assurance-vie sont la partie de *long*, car ses passifs relatifs aux polices d'assurance temporaire diminuent avec la mortalité. Il existe un fort déséquilibre entre les expositions long et short, car dans le secteur de l'assurance-vie, les deux risques opposés de la rente viagère et les passifs d'assurance à terme sont assez équilibrés, donc le nombre d'acheteurs est significativement plus petit que le nombre de vendeurs. Cet écart doit être comblé par les autres acteurs du marché tels que les hedge funds.

Dans le même temps, les marchés de capitaux peuvent, en principe, fournir des véhicules pour couvrir efficacement le risque de longévité et transférer le risque de ceux qui ne veulent ou ne peuvent le gérer à ceux qui sont prêts à investir dans ce risque ou à ceux exposés à des risques que le risque de longévité peut couvrir. De nombreux nouveaux produits d'investissement ont été créés à la fois par l'industrie de l'assurance ou réassurance et par les marchés de capitaux.

Le 1er février 2010, *Life and Longevity Markets Association* (LLMA) a été créée à Londres. Ses membres actuels sont Aviva, AXA, Deutsche Bank, J.P. Morgan, Morgan Stanley, Prudential PLC et Swiss Re. LLMA a été créée pour promouvoir le développement d'un marché liquide des risques liés à la longévité et à la mortalité. LLMA vise à soutenir le développement de normes, méthodologies et benchmarks cohérents pour aider à construire un marché de trading liquide nécessaire pour soutenir la future demande de protection de la longévité par les assureurs et les fonds de pension. Les indices *LifeMetrics* ont été transférés à LLMA dans le but d'établir une référence mondiale pour le risque de longévité et de mortalité. Les principales composantes de l'indice sont: taux de mortalité

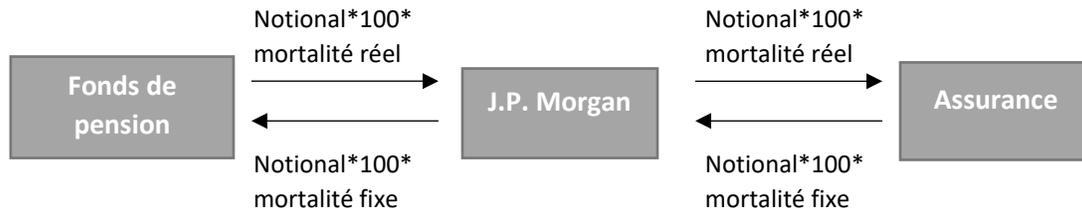
brut (m_x), taux de mortalité gradués ($q_x = \frac{m_x}{1 + \frac{1}{2}m_x}$) et l'espérance de vie (e_x). Pour la modélisation de la mortalité, J.P. Morgan utilise huit modèles, Cairns et al. (2007) présente une discussion détaillée de tous les modèles.

Le *q-forward* a été lancé par J.P. Morgan depuis juillet 2007, les contrats prévoyant l'échange d'un taux de mortalité réalisé relatif à une population déterminée à une date ultérieure donnée, en échange d'un taux de mortalité fixe convenu au début du contrat (c'est ce que nous appelons le taux à terme). Il est ainsi nommé parce que la lettre «q» est le symbole utilisé par les actuaires pour désigner les taux de mortalité. Les dérivés de longévité et de mortalité sont des instruments des marchés de capitaux qui, comme d'autres instruments financiers dérivés, ont des gains liés au niveau d'un indice de longévité ou de mortalité. Les contrats à terme de gré à gré constituent en principe une bonne base pour développer un marché liquide des produits dérivés de la mortalité, car ils constituent les éléments constitutifs d'un certain nombre d'expositions plus complexes. De plus, ils ont le potentiel de répondre aux besoins de couverture des parties dont la partie *short* de longévité (régimes de retraite et fournisseurs de rentes) ou la partie *long* de longévité (fournisseurs de garanties à terme et polices d'assurance vie entière).

Selon la direction de l'échange de la mortalité entre J.P. Morgan et les contreparties dans *q-forward*, ils peuvent être classés en deux types basés sur le risque de longévité et la mortalité extrême. En raison du caractère naturel opposé des deux risques, les deux types d'institutions négocient les contrats à terme dans la direction opposée, tandis que J.P. Morgan peut agir en tant qu'intermédiaire financier ou teneur de marché pour le risque de longévité et la mort extrême. Comme le montre la figure 18, l'assureur-vie est le payeur d'un taux de mortalité fixe. Si le taux réel de mortalité augmente brusquement, l'assureur-vie peut recevoir un paiement net de J.P. Morgan pour couvrir son décès. Le fonds de pension est le payeur de mortalité réel ou flottant, et la caisse de retraite bénéficie du contrat à terme lorsque le niveau de mortalité réel diminue à mesure qu'il arrive à échéance, ce qui lui permet de couvrir ses paiements aux rentiers bénéficiaires

ou pensionnés. Par conséquent, J.P. Morgan peut neutraliser ou réduire efficacement l'exposition unilatérale au risque de mortalité dans une transaction bidirectionnelle.

Figure 18: Risque de mortalité d'un assureur-vie et le risque de longévité d'un régime de retraite (source : Coughlan, 2007)



Le tableau 9 fournit une feuille de termes illustrative pour un contrat écrit sur une population de référence d'hommes en Angleterre et au pays de Galles de 65 ans. En raison du retard de dix mois dans la disponibilité des données officielles, le règlement au 31 décembre 2016 sera basé sur le niveau de l'indice *LifeMetrics* pour l'année de référence 2015. Le paiement du *q-forward* dépend de la valeur de l'indice *LifeMetrics* pour la population de référence à la date d'échéance du contrat. Le contrat implique que J.P. Morgan fournisse une couverture au fonds de pension XYZ pour couvrir son risque de longévité (c'est-à-dire baisse des taux de mortalité) sur un horizon de 10 ans (de 2006 à 2016). Comme un régime de retraite doit verser des prestations de retraite à ses membres en fonction de leur longévité, la couverture évidente est un contrat dérivé dans lequel le régime de retraite reçoit un taux de survie réalisé et verse un taux de survie fixe. Mais en notant que les taux de survie à un an sont donnés par $1 - q$, il est évident que la survie fixe payante $1 - q_{fixe}$ équivaut à recevoir une mortalité fixe q_{fixe} .

Tableau 9: Une feuille de termes illustrative pour un seul risque de longévité q-forward (source : Coughlan, 2007)

Montant notionnel	GBP 500,000,000
Date de transaction	31 Déc. 2006
Date effective	31 Déc. 2006
Date d'échéance	31 Déc. 2006
Année de référence	2015
Taux fixe	1.2%
Payeur de montant fixe	J.P. Morgan
Montant fixe	Montant notionnel*taux fixe*100
Taux de référence	<i>LifeMetrics</i>
Payeur de montant flottant	Fonds de pension XYZ
Montant flottant	Montant notionnel*taux flottant*100
Règlement	Règlement net = montant fixe-montant flottant

Le tableau 10 montre les paiements à la maturité selon les différents taux réalisés. Si le taux de référence est inférieur au taux fixe (c'est-à-dire une mortalité inférieure), le paiement est positif et le régime de retraite reçoit le montant pour compenser l'augmentation de sa valeur de passif. Si, par contre, le taux de référence est supérieur au taux fixe (mortalité plus élevée), le paiement est négatif et le régime de retraite verse le paiement au fournisseur de couverture, qui sera compensé par la baisse de la valeur de ses passifs.

Tableau 10: Une illustration du règlement q-forward pour différents résultats du taux de référence réalisé (source : Coughlan, 2007)

Taux de référence	Taux fixe	Notional	Transaction
1.0%	1.2%	50,000,000	10,000,000
1.1%	1.2%	50,000,000	5,000,000
1.2%	1.2%	50,000,000	0
1.3%	1.2%	50,000,000	-5,000,000

4.2 Tarification de q-forward

4.2.1 Cadre de tarification de la longévité

LLMA développe un cadre simple et transparent pour la tarification sur la longévité, il y a cinq intrants clés spécifiques à la longévité requis pour évaluer le risque de longévité. (LLMA, 2010)

- Structure du produit : par exemple, la structure d'une pension de retraite, d'un *q-forward*, d'un *S-forward*.
- Données sur les durées de vie: Données d'expérience historique sur la mortalité de la population d'individus.
- Taux de mortalité de base: L'ensemble actuel des taux de mortalité pour la population.
- Améliorations attendues de la mortalité: Les changements relatifs (en pourcentage) projetés des taux de mortalité par rapport à une table de mortalité initiale de base.
- Prime de risque: Une charge payée par les *hedgers* de longévité pour compenser les investisseurs longévité pour prendre le risque de longévité.

Dans ce chapitre, nous utilisons les résultats prédits par le modèle de mortalité précédent pour calculer un contrat *q-forward* de 10 ans, avec une population de référence des

femmes hollandaises de 65 ans, date de transaction Décembre 2004, date d'expiration Décembre 2013.

4.2.2 Graduation

Les taux de mortalité gradués sont importants dans l'évaluation des expositions sur la longévité. Ils permettent de capturer des informations supplémentaires sur le taux de mortalité à un âge donné à partir des âges voisins avec le double avantage de la simplification et de la réduction du bruit. Les techniques de graduation peuvent être séparées en modèles paramétriques (modèle de Gompertz-Makeham) et non paramétriques (lissage des splines cubiques, méthode de Beers), voir J.P. Morgan (2007) pour plus de détails.

Nous utilisons la méthode spline cubique (le degré de la fonction polynomiale est trois) pour lisser la mortalité du groupe d'âge à la mortalité d'un âge spécifique. Une spline est une fonction polynomiale par morceaux qui incorpore certaines hypothèses concernant la manière dont les fonctions sont assemblées au niveau des nœuds. Une spline est donc définie par les emplacements des nœuds et les coefficients des polynômes qui définissent les fonctions sur chaque intervalle. Le lissage des splines cubiques détermine les coefficients des polynômes afin de minimiser la fonction

$$\sum_{j=1}^n (m_j - f(x_j))^2 + \lambda \int_{x_1}^{x_n} (f''(t))^2 dt$$

Les nœuds sont x_1, x_2, \dots, x_n . Le paramètre de lissage, λ , représente le compromis entre le lissage (2^e terme) et la qualité de l'ajustement (1^e terme). LLMA (2012) suggère la valeur 1/3 pour le paramètre de lissage.

La fonction polynomiale est définie comme

$$f(x) = a_j(x - x_j)^3 + b_j(x - x_j)^2 + c_j(x - x_j) + d_j$$

pour tout $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Nous appliquons la méthode de lissage des splines cubiques à nos résultats obtenus pour des années de 2005 à 2014 dans la section 3.4.4 sous la mesure physique, afin d'obtenir les résultats d'estimation par âges spécifiques de 56 à 65 ans. La figure 19 montre les résultats d'estimation pour les femmes âgées de 56 à 65 des années 2005-2014. Les chiffres en caractères gras sont le taux de mortalité attendu pour des femmes qui ont 55 ans en 2005, il augmente au fil du temps en raison du fait que le taux de mortalité augmente avec l'âge. Après dix ans quand elles ont 65 ans en 2014, le taux de mortalité devient 0.94%.

Figure 19 : Taux de mortalité estimé sous la mesure physique de la population féminine des Pays-Bas

		années									
		2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
âge	56	0.0049	0.0048	0.0048	0.0047	0.0046	0.0046	0.0045	0.0044	0.0044	0.0043
	57	0.0053	0.0052	0.0051	0.0051	0.005	0.0049	0.0049	0.0048	0.0047	0.0047
	58	0.0057	0.0057	0.0056	0.0055	0.0054	0.0053	0.0053	0.0052	0.0051	0.005
	59	0.0062	0.0061	0.006	0.006	0.0059	0.0058	0.0057	0.0056	0.0055	0.0055
	60	0.0068	0.0067	0.0066	0.0065	0.0064	0.0063	0.0062	0.0061	0.006	0.0059
	61	0.0074	0.0072	0.0071	0.007	0.0069	0.0068	0.0067	0.0066	0.0065	0.0065
	62	0.008	0.0079	0.0078	0.0077	0.0076	0.0075	0.0074	0.0073	0.0071	0.007
	63	0.0088	0.0087	0.0085	0.0084	0.0083	0.0082	0.0081	0.008	0.0078	0.0077
	64	0.0097	0.0095	0.0094	0.0093	0.0091	0.009	0.0089	0.0088	0.0086	0.0085
	65	0.0107	0.0105	0.0104	0.0102	0.0101	0.0099	0.0098	0.0097	0.0095	0.0094

4.2.3 Comparaison des résultats de projection et l'indice *LifeMetrics*

Le paiement du *q-forward* dépend de la valeur de l'indice *LifeMetrics* pour la population de référence à la date d'échéance du contrat. LLMA a combiné la technologie existante avec son propre travail de développement pour lancer les indices de longévité spécifiques au pays. Le tableau 11 compare le taux de mortalité de 2005-2014 pour la population féminine des Pays-Bas de 65 ans avec des prédictions de modèles, la mortalité réelle et l'indice *LifeMetrics* respectivement. Nous pouvons voir que le modèle NIG sous la mesure physique est le plus proche des données réelles, et l'indice *LifeMetrics* sous-estime la mortalité. Ensuite, nous allons calculer le prix théorique de *q-forward* en utilisant les résultats prévus par le modèle NIG.

Tableau 11 : Résultats de projection et l'indice LifeMetrics d'âge 65 ans

Années	Réel	NIG sous P	LifeMetrics
2005	0.0102	0.0107	0.0082
2006	0.0101	0.0105	0.0084
2007	0.0100	0.0104	0.0080
2008	0.0099	0.0103	0.0084
2009	0.0095	0.0101	0.0082
2010	0.0098	0.0100	0.0084
2011	0.0097	0.0098	0.0077
2012	0.0097	0.0097	0.0088
2013	0.0096	0.0096	0.0081
2014	0.0095	0.0094	0.0083

4.2.4 Taux de mortalité fixe

A l'expiration du temps, la transaction est proportionnelle à la différence entre le taux de mortalité fixe (le taux à terme, $\widehat{m}_{x,t}$) et le taux de référence ($m_{LifeMetrics}$). Le règlement net de la banque à la maturité est

$$\text{montant notionnel} * (\widehat{m}_{x,t} - m_{LifeMetrics})$$

Le règlement net d'un fonds de pension à la maturité est

$$\text{montant notionnel} * (m_{LifeMetrics} - \widehat{m}_{x,t})$$

Le taux de référence est publié par LLMA, donc, la clé de la tarification *q-forward* est de savoir comment calculer les taux de mortalité fixes. Nous considérons deux approches pour calculer ce taux à terme, le ratio de Sharpe et la transformation d'Esscher, nous utiliserons ces deux méthodes respectivement dans les sections suivantes.

Ratio de Sharpe

Selon Loeys et al. (2007), la tarification de *q-forward* est similaire à la tarification des taux d'intérêt à terme. Comme les investisseurs exigent une compensation sous la forme d'une prime de risque pour assumer le risque de longévité, le taux de mortalité à terme auquel les *q-forward* se négocieront sera inférieur au taux de mortalité attendu. Cet écart reflète

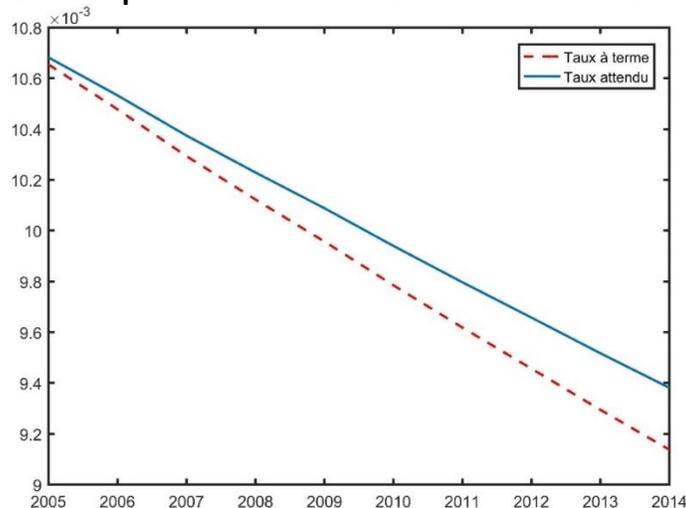
le rendement attendu pour les investisseurs et doit être suffisant pour fournir une rentabilité de marché comparable à celui des autres actifs. Il propose le taux à terme est défini comme suit

$$\widehat{m}_{x,t} = m_{x,t}(1 - T * \sigma * SR)$$

$m_{x,t}$ est obtenu par la modélisation de la mortalité sous la mesure physique, T est la durée du contrat, σ est l'écart-type historique annualisé de l'âge de référence, SR est le ratio de Sharpe qui est défini comme le taux de mortalité excédentaire par rapport au taux de mortalité attendu divisé par la volatilité du taux de mortalité. Le ratio de Sharpe sur le rendement à long terme des actions et des obligations est d'environ 0.2 à 0.3. Puisque le risque de longévité n'est pas corrélé à d'autres risques des actions ou des obligations, le ratio de Sharpe requis devrait être bien inférieur aux moyennes sur des marchés, mais suffisamment attrayant pour attirer les investisseurs sur le marché. Loeys et al. (2007) propose un ratio de Sharpe annualisé d'environ 0,25 pour *q-forward*.

Dans la figure 19, nous trouvons la mortalité d'un âge 65 ans sous la mesure physique en 2014 est 0.94%. L'écart-type historique annualisé de l'âge 65 ans est 1.04%. Avec le ratio de Sharpe de 0.25, nous calculons le taux à terme, le résultat est 0.91%. La figure 20 montre que la différence entre le taux à terme et le taux attendu sous la mesure physique est l'effet de la prime de risque. Le taux à terme est inférieur au taux de mortalité attendu, de sorte que les investisseurs puissent avoir un flux de trésorerie futur positif à l'échéance.

Figure 20: Comparaison entre le taux à terme et le taux attendu



Le tableau 12 compare le taux à terme selon différentes hypothèses sur le ratio de Sharpe, dans l'intervalle sur le rendement à long terme des actions et des obligations, le taux à terme est stable. Si le ratio de Sharpe est nul, le taux à terme est le taux attendu sous la mesure physique. Si le ratio de Sharpe est un, le taux à terme diminue à 0.84%.

Tableau 12: Taux à terme selon différent ratio de Sharpe

Ratio de Sharpe	Taux à terme $\widehat{m}_{65,2014}$
0	0.94%
0.2	0.92%
0.25	0.91%
0.3	0.91%
1	0.84%

Transformée d'Esscher

Une mesure de probabilité \mathbb{Q} est une mesure martingale équivalente, si \mathbb{Q} est équivalent à \mathbb{P} , c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes ensembles nuls et le processus du prix actualisé $\{\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t, t \geq 0\}$ est une martingale sous \mathbb{Q} .

Nous supposons que le marché se compose d'un actif sans risque avec un processus de prix donné par $B_t = e^{rt}$, et un actif risqué. Le modèle de l'actif risqué est $S_t = S_0 \exp(X_t)$, où $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est un processus de Lévy.

Gerber et Shiu (1994) ont montré que la transformation d'Esscher est une technique efficace pour évaluer les produits dérivés si les logarithmes des prix des titres sont régis par certains processus stochastiques avec incréments stationnaires et indépendants. Le paramètre d'Esscher est déterminé de sorte que le prix actualisé de chaque titre soit une martingale dans le cadre de la nouvelle mesure de probabilité.

Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus stochastique qui a une distribution infiniment divisible avec des incréments stationnaires et indépendants $X_0 = 0$, tel que $S_t = S_0 \exp(X_t), t \geq$

0. $M(z, t) = E(e^{zX_t})$ est la fonction génératrice des moments. En supposant que $M(z, t)$ est continue au temps initial, nous pouvons prouver que

$$M(z, t) = M(z, 1)^t$$

$$M(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t) dx, \text{ d'où } f(x, t) = \frac{d}{dx} F(x, t).$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre d'Esscher, et $M(\theta, t)$ existe. Alors, la nouvelle fonction de densité de X_t est

$$f(x, t; \theta) = \frac{e^{\theta x} f(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta y} f(y, t) dy} = \frac{e^{\theta x} f(x, t)}{M(\theta, t)}$$

et la fonction génératrice des moments correspondante est

$$M(z, t; \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t; \theta) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} e^{\theta x} f(x, t) dx}{M(\theta, t)} = \frac{M(z + \theta, t)}{M(\theta, t)}$$

$$M(z, t; \theta) = [M(z, 1; \theta)]^t$$

Comme la fonction exponentielle est positive, la mesure de probabilité modifiée est équivalente à la mesure de probabilité initiale; c'est-à-dire que les deux mesures de probabilité ont les mêmes ensembles nuls.

Nous cherchons $\theta = \theta^*$, de sorte que le processus du prix des actions actualisé $\{e^{-r_f t} S_t, t \geq 0\}$, est une martingale par rapport à la mesure de probabilité correspondant à θ^* , r_f est le taux sans risque.

$$S_0 = E^Q(e^{-r_f t} S_t) = e^{-r_f t} E^Q(S_0 e^{X_t}) = S_0 e^{-r_f t} E^Q(e^{X_t})$$

Le paramètre θ^* est une solution de l'équation

$$1 = e^{-r_f t} E^Q(e^{X_t})$$

Ou

$$e^{r_f t} = M(1, t; \theta^*)$$

La fonction caractéristique ϕ d'une variable aléatoire X , est la transformée de Fourier-Stieltjes de la fonction de distribution $F(X) = P(X \leq x)$.

$$\phi_x(\theta) = E(\exp(i\theta x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\theta x) dF(x)$$

La fonction caractéristique détermine de façon unique la fonction de distribution, elle existe toujours et est continue. Lorsque les moments existent, les moments de X peuvent aussi être facilement dérivés de ϕ . La distribution *NIG* ($\alpha, \beta, \mu, \delta$), a une fonction caractéristique donné par (Barndorff-Nielsen, 1994)

$$\phi(\theta) = \exp(-\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + i\theta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \mu\theta)$$

La fonction génératrice des moments est liée à la fonction caractéristique, donc elle peut aussi définir par

$$M(\theta^*) = \phi(-i\theta^*) = \exp(-\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta^*)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \mu\theta^*)$$

La fonction génératrice des cumulants est définie ainsi

$$K(\theta^*) = \ln \phi(i\theta^*) = \ln M(\theta^*)$$

Alors,

$$K(\theta^*) = -\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta^*)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \mu\theta^*$$

Avec les fonctions génératrices que nous avons définies, nous pouvons trouver la solution de la paramètre d'Esscher θ^* en mettant $t = 1$,

$$e^{r_f} = M(1,1; \theta^*) = \frac{M(\theta^*+1,1)}{M(\theta^*,1)}$$

et

$$r_f = \ln M(\theta^* + 1,1) - \ln M(\theta^*, 1) = K(\theta^* + 1) - K(\theta^*)$$

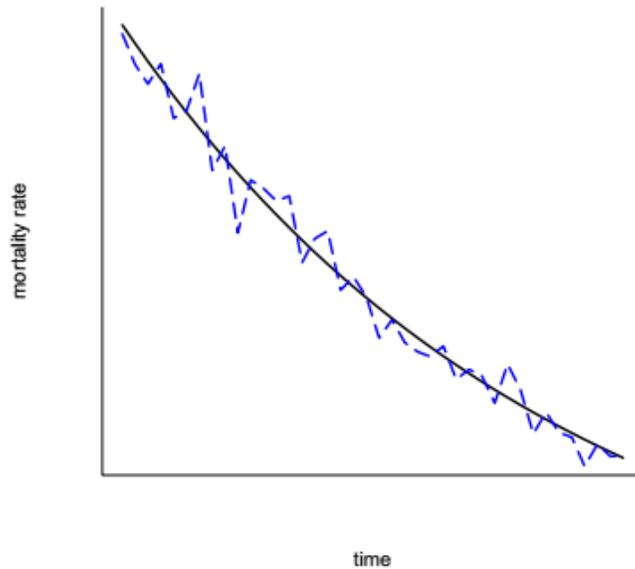
Alors,

$$\theta^* = -\beta - 0.5 + \sin(\beta) \sqrt{\frac{(\mu - r_f)^2}{(\mu - r_f)^2 + \delta^2} \alpha^2 - \frac{(\mu - r_f)^2}{4\delta^2}}$$

Le marché de la longévité est incomplet, car le taux de mortalité n'est pas un actif négocié. Quand une procédure de tarification est soumise à une mesure de martingale, la probabilité de chaque état est ajustée avec la volatilité de l'instrument financier, ce qui signifie que la variance attendue de la variation de rendement est nulle. Par conséquent, le prix en vertu de la mesure martingale est sans risque, de sorte que le rendement attendu est simplement le taux sans risque. Les taux de mortalité et les rendements des actifs ont des tendances et le mouvement des courbes, que ce soit vers le haut ou vers le bas. Alors que le taux d'amélioration de la mortalité représente le taux de variation attendu du taux de mortalité, la dynamique de l'indice de mortalité montre la volatilité des taux de mortalité. Le taux de mortalité selon une mesure de martingale signifie que la volatilité de la variation du taux de mortalité est prise en compte, de sorte que la variation attendue du taux de mortalité est nulle. En ce sens, le taux de mortalité attendu sous la mesure de martingale est simplement calculé à partir du taux d'amélioration de la mortalité. La variable a_x est liée à l'information concernant l'amélioration du taux de mortalité, nous pouvons construire des prix de martingale pour les dérivés de longévité similaires au prix de martingale basé sur le taux sans risque dans la modélisation financière.

La figure 21 illustre le taux de mortalité sous la mesure de martingale. La ligne continue est le taux de mortalité avec seulement l'estimation du taux d'amélioration de la mortalité. Comme il n'y a pas de variation de la mortalité, le taux de mortalité est comme prévu et ne montre aucune variance. C'est le taux de mortalité ajusté sous une mesure de martingale. La ligne en pointillés est l'un des taux de mortalité possibles avec des variations et une amélioration de la mortalité. Il a le risque de mortalité généré par la variance du taux de mortalité sous la mesure réelle. À des fins de tarification, nous devons ajuster la ligne en pointillés à la ligne continue, produisant un taux de mortalité sans risque pour la tarification.

Figure 21 : Illustration du taux de mortalité sous la mesure martingale



Rappelons le modèle de mortalité défini ci-dessous :

$$m_{x,t} = m_{x,0} \exp(a_x t + N_{x,t})$$

Comparons le modèle de la tarification du stock, $\tilde{S}_t = S_0 \exp(r_f t + X_t)$, selon l'idée du taux de mortalité sous la mesure martingale, nous voyons que la variable a_x a la même logique que le taux sans risque, donc la solution de θ^* pour le taux de mortalité est obtenu par

$$K(\theta^* + 1) - K(\theta^*) = a_x$$

sous forme fermée

$$\theta^* = -\beta - 0.5 + \sin(\beta) \sqrt{\frac{(\mu - a_x)^2}{(\mu - a_x)^2 + \delta^2} \alpha^2 - \frac{(\mu - a_x)^2}{4\delta^2}}$$

La mesure de martingale équivalente du processus Lévy NIG est alors $N_{x,t}^\theta \sim NIG(\alpha, \beta + \theta^*, \mu, \delta)$.

Tableau 13: Valeurs estimées du paramètre d'Esscher

Age	θ_x
0	-3.9956
1-4	-1.8672
5-9	-1.6314
10-14	-1.2690
15-19	-1.2642
20-24	-1.2031
25-29	-1.3398
30-34	-1.5525
35-39	-1.8682
40-44	-2.2636
45-49	-3.2578
50-54	-3.8391
55-59	-5.1913
60-64	-7.0307
65-69	-7.2232
70-74	-7.2992
75-79	-6.4966
80-84	-6.7473
85-89	-4.5155
90-94	-3.2280
95-99	-3.4067

Le tableau 13 montre les estimations de paramètres pour le modèle proposé lorsque nous utilisons des données de mortalité féminine des Pays-Bas des années 1900 à 2004. Ces résultats seront utilisés pour calculer le taux à terme du *q-forward*. Les paramètres dépendent du groupe d'âge et ils sont négatifs, donc le taux de mortalité $m_{x,t}^\theta$ sous la mesure risque neutre est inférieur que le taux attendu sous la mesure physique, et $m_{x,t}^\theta$ est le taux à terme obtenu par l'approche de la transformation d'Esscher, la différence entre ces deux valeurs représente l'effet de la prime de risque.

Le modèle de mortalité dans la mesure de martingale équivalente devient :

$$m_{x,t}^\theta = m_{x,0} \exp(a_x t + N_{x,t}^\theta)$$

Nous utilisons les données de la population féminin d'âge 65-69 des Pays-Bas des années 1900-2004 pour prédire le taux de mortalité des années 2005-2014, la valeur prédite est basée sur 10,000 simulations avec une intervalle de confiance de 95%, le résultat pour le taux à terme en 2014 est 0.82%. Dans ce cas, le taux de référence de *LifeMetrics* est 0.83%, la différence entre ces deux taux reflète le règlement à l'expiration, ce qui signifie un flux de trésorerie positif pour l'investisseur.

La méthode du ratio de Sharpe a une longue histoire dans la tarification de produits financiers, elle est facile à comprendre et accepter par le marché des capitaux. Mais le choix du paramètre du ratio de Sharpe est subjectif. Le tableau 14 compare le ratio de Sharpe obtenu par différentes méthodes de l'âge 56-65, la dernière colonne est le ratio de Sharpe calculé selon le taux à terme obtenu par la transformation d'Esscher. Mais un ratio autour de 1.2 pour *q-forward* est irréaliste.

Tableau 14 : Taux à terme obtenu par différentes méthodes

Age	Taux à terme avec SR=0.25	Taux à terme	
		avec transformé d'Esscher	SR correspondant
56	0.42%	0.37%	1.258
57	0.45%	0.40%	1.257
58	0.49%	0.44%	1.257
59	0.53%	0.47%	1.257
60	0.58%	0.51%	1.258
61	0.63%	0.56%	1.259
62	0.69%	0.61%	1.260
63	0.75%	0.67%	1.260
64	0.83%	0.74%	1.258
65	0.91%	0.82%	1.255

Cochrane et Saa-Requejo (2000) proposent une approche '*good-deal bounds*' pour la tarification dans un marché incomplet. *Good-deal* signifie un ratio de Sharpe élevé, nous pouvons proposer une fourchette de prix à partir de ratios de Sharpe historiquement observés. Pour des actifs non négociés, les auteurs donnent trois contraintes sur le

facteur d'actualisation stochastique m . La limite inférieure de *good-deal bounds* est donnée par

$$C = \min_m E(mx^c) \text{ s. t. } p = E(mx), m \geq 0, \sigma(m) \leq \frac{h}{r_f}$$

où m est le facteur d'actualisation, x^c est le règlement de l'actif à évaluer, p et x est le prix et le règlement de l'actif de base, h est la limite de volatilité, r_f est le taux sans risque.

La limite supérieure est donnée par maximisation. Le premier contrainte $p = E(mx)$ est sur un ensemble d'actifs de base, le prix et le règlement sont observables. Le deuxième contrainte $m \geq 0$ est équivalente à l'absence d'opportunité arbitrage, si le payoff d'un actif est non-négatif, alors son prix est aussi non-négatif. La dernière contrainte, une restriction de volatilité du facteur d'actualisation est équivalente à une limite supérieure h du ratio de Sharpe. $E(mR^e) = 0$ si et seulement si $\frac{|E(R^e)|}{\sigma(R^e)} \leq \frac{\sigma(m)}{E(m)} \leq h$, avec $E(m) = \frac{1}{r_f}$, donc $\sigma(m) \leq \frac{h}{r_f}$.

Dans les futures études, si nous pouvons observer les rendements de *q-forward*, nous pouvons trouver la distribution de ratio de Sharpe, et le quantile de 95% peut être comme la valeur de h , cela évite les problèmes de sélection subjective. Si les prix sont aussi observables, selon le règlement *montant notionnel* * $(\widehat{m}_{x,t} - m_{LifeMetrics})$, nous pouvons définir la première contrainte. Finalement, le prix de *good-deal bounds* pourrait être obtenu par la programmation linéaire sur ces trois contraintes.

Chapitre 5 : Conclusion

Depuis la seconde moitié du XXe siècle, l'enrichissement des sociétés, les progrès médicaux, les améliorations de qualité de vie, tout cela contribue à des taux de mortalité de plus en plus faible. Cependant, la prédiction du taux de mortalité basée sur le modèle de décès traditionnel est souvent plus élevée que le niveau réel, ce qui a un impact négatif important sur la solvabilité des fonds de pension et des compagnies d'assurance. Basé sur le développement d'un modèle de mortalité, ce mémoire examine et résume divers types de modèles de prédiction de la mortalité, nous comparons trois résultats de prévision avec les données réelles: le modèle LC, le modèle de MBMM avec la loi NIG et l'indice *LifeMetrics* de J.P. Morgan. Finalement, c'est le modèle de MBMM avec un processus de Lévy NIG qui est le plus proche des données réelles.

Nous commençons par le modèle le plus classique, le modèle Lee-Carter (1992) est l'un des pionniers parmi les modèles de mortalités dits stochastiques. Ils incorporent à la fois un effet d'âge et un effet de période, et ils créent un indice qui montre une diminution dans les taux de mortalité au fil du temps. Le problème avec cet indice prévisionnel des taux de mortalité est qu'il suppose une distribution gaussienne. En effet, le changement de taux de mortalité n'est pas une distribution gaussienne car la survenance d'une catastrophe ou d'une épidémie peut provoquer une augmentation dramatique des taux de mortalité. Il existe en outre toute une autre classe d'extensions du Lee-Carter qui tient compte de l'effet génération (dite de cohorte par les démographes). Bien que tous ces extensions puissent fournir de bons résultats d'estimation du taux de mortalité, il n'est pas facile de les appliquer pour la détermination du prix des dérivés liés à la mortalité.

Ensuite, nous utilisons le modèle MBMM avec un processus de Lévy NIG pour la tarification des dérivés liés à la mortalité. L'avantage de cette distribution est qu'elle peut capturer les caractéristiques à kurtosis élevé et à grosse queue, ce qui est particulièrement approprié pour ajuster le taux de mortalité avec des sauts anormaux.

Dans l'application empirique, en raison de l'absence de prix du marché, nous ne pouvons utiliser que les cadres de la tarification publiés par LLMA et J.P. Morgan pour mener des études de prix théoriques. Loey et al. (2007) propose le ratio de Sharpe pour calculer le

taux à terme de q -forward, les taux de mortalité prédits par la loi NIG sous la mesure physique sont utilisés.

Une autre approche est souvent considérée lors de la tarification d'un actif financier sur un marché incomplet, il est nécessaire de convertir la mesure physique de l'actif en une mesure de martingale équivalente afin de garantir que le prix reflète une tarification sans arbitrage. La transformée d'Esscher est un cas particulier du dérivé de Radon-Nikodym, l'avantage de cette méthode est qu'une solution de forme fermée pour le paramètre de la transformée d'Esscher peut être trouvée dans le processus de Lévy NIG. Le résultat de cette approche est plus proche l'indice de *LifeMetrics*, mais il reflète un ratio de Sharpe plus élevé que la valeur suggérée. Nous voyons que le choix de ratio de Sharpe est suffisamment subjectif, il manque un critère en réalité pour le marché de longévité.

Devant provisionner de plus en plus de capital pour faire face au risque de longévité long terme, il devient crucial pour les fonds de pensions de trouver une façon adéquate et efficace de transférer une partie de ce risque aux réassureurs et aux marchés financiers. Dans le marché des dérivés de longévités, les déséquilibres entre le nombre d'acheteurs et de vendeurs, l'absence d'un système réglementaire clair, l'incohérence de la prédiction du modèle et le système de tarification ont conduit à une liquidité insuffisante du marché. Un système de tarification ouvert et équitable et une prime de risque raisonnable sont des solutions qui attirent plus d'investisseurs pour résoudre le problème du manque de liquidité.

La limite de cette étude est que la loi NIG correspond bien à la mortalité avec des événements extrêmes, mais si les données sont lisses sans sauts majeurs, comme la mortalité canadienne, la distribution normale offre un bon ajustement. Comme aucun modèle ne peut parfaitement prédire la mortalité, et pour différents types de données, il est conseillé de choisir soigneusement le modèle et la fenêtre d'estimation pour des meilleurs résultats. Dans les futures études, nous suggérons d'utiliser les *good-deal bounds* pour trouver une fourchette de prix à partir de ratios de Sharpe historiquement observés.

Annexe

Décomposition en valeurs singulières (ou SVD de l'anglais singular value decomposition) :

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et de rang r . La décomposition en valeurs singulières de la matrice A comme suit : $A = U\Sigma V^T$

Où $U \in R^{m \times m}$ et $V \in R^{n \times n}$ deux matrices orthogonales et $\Sigma \in R^{m \times n}$ une matrice diagonale formée par les r valeurs singulières $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$, $m < n$.

$$A = \begin{bmatrix} U_{1,1} & \dots & U_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{1,m} & \dots & U_{m,m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_m & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_{1,1} & \dots & V_{1,m} & \dots & V_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{m,1} & \dots & V_{m,m} & \dots & V_{m,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n,1} & \dots & \dots & \dots & V_{n,n} \end{bmatrix}$$

En particulier, pour $A = \ln(m_{x,t}) - \hat{a}_x$, et l'approximation de rang 1,

$$A_{x,t}^{(1)} = \sigma_1 U_{x,1} V_{1,t} = \beta_x^{(1)} k_t^{(1)}$$

Alors,

$$\beta_x^{(1)} = (U_{1,1}, U_{2,1}, \dots, U_{x,1})^T$$

$$k_t^{(1)} = \sigma_1 (V_{1,1}, V_{2,1}, \dots, V_{T,1})$$

En utilisant les contraintes de Lee-Carter, les coefficients d'estimation sont enfin,

$$\beta_x^{(1)} = \frac{1}{\sum_x U_{x,1}} (U_{1,1}, U_{2,1}, \dots, U_{x,1})^T$$

$$k_t^{(1)} = \sum_x U_{x,1} \sigma_1 (V_{1,1}, V_{2,1}, \dots, V_{T,1})$$

BIBLIOGRAPHIQUE

- ❖ Bauer, D., (2008). Stochastic Mortality Modeling and Securitization of Mortality Risk. ifa-Verlag, Ulm (Germany).
- ❖ Bauer, D., Börger, M., & Russ, J. (2010). On the pricing of longevity-linked securities. *Insurance Mathematics & Economics*, 46(1), 139-149.
- ❖ Bauer, D., Benth, F. E., & Kiesel, R. (2012). Modeling the forward surface of mortality. *Siam Journal on Financial Mathematics*, 3(1), 639-666.
- ❖ Barndorff-Nielsen, O. E. (1994). Normal inverse gaussian processes and the modelling of stock returns. *Scandinavian Journal of Statistics*, 24, 1-13.
- ❖ Bayraktar, E., Milevsky, M. A., Promislow, S. D., & Young, V. R. (2008). Valuation of mortality risk via the instantaneous sharpe ratio: applications to life annuities. *Social Science Electronic Publishing*, 33(3), 676-691.
- ❖ Biffis, E., and D. Blake. (2009). Mortality-Linked Securities and Derivatives. Discussion Paper PI-0901.
- ❖ Biffis, E. (2005). Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations. *Insurance Mathematics and Economics* 37 (3): 443-68.
- ❖ Blake, D., Cairns, A., Coughlan, G., Dowd, K., & MacMinn, R. (2013). The new life market. *Journal of Risk and Insurance*, 80(3), 501-558.
- ❖ Blake, D., & Burrows, W. (2001). Survivor bonds: helping to hedge mortality risk. *Journal of Risk & Insurance*, 68(2), 339-348.
- ❖ Booth, H., Maindonald, J., Smith, L., (2002). Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline. *Population Studies*, 56, 325-336.
- ❖ Cairns, A., D. Blake, and Dowd, K., (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance* 73, 787-718.
- ❖ Cairns, A., D. Blake, K. Dowd, G.D. Coughlan, D. Epstein, A. Ong, and Balevich, I., (2007). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal* 13, 1-35.

- ❖ Chen, H., & Cox, S. H. (2009). Modeling mortality with jumps: Applications to mortality securitization. *The Journal of Risk and Insurance* 76 (3): 727-751.
- ❖ Chuang, S.L., and Brockett, P. (2014). Modeling and Pricing Longevity Derivatives Using Stochastic Mortality Rates and the Esscher Transform.
- ❖ Cochrane, J. H., & Saa-Requejo, J. (2000). Beyond arbitrage: good-deal asset price bounds in incomplete markets. *Journal of Political Economy*, 108(1), 79-119.
- ❖ Cox, S. H., Lin, Y., & Wang, S. (2006). Multivariate exponential tilting and pricing implications for mortality securitization. *The Journal of Risk and Insurance* 73 (4): 719-736.
- ❖ Coughlan, G., Epstein, D., Sinha, A., & Honig, p. (2007). Q-forwards: Derivatives for transferring longevity and mortality risks. JPMorgan Pension Advisory Group, London, July 2.
- ❖ Deng, Y., P. L. Brockett, and R. D. MacMinn. (2012). Longevity/Mortality Risk Modeling and Securities Pricing. *Journal of Risk and Insurance* 79: 697–721.
- ❖ De Moivre, A. (1725). Annuities on lives: Or, the valuation of annuities upon any numbers of lives.
- ❖ De Jong, P., Tickle, L., & Booth, H., Hyndman, R. J. (2006). Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions.
- ❖ Dowd, K., Blake, D., Cairns, A. J., & Dawson, P. (2006). Survivor swaps. *Journal of Risk and Insurance*, 73(1), 1-17.
- ❖ Esche, F., & Schweizer, M. (2005). Minimal entropy preserves the Levy property: how and why. *Stochastic progresses and their applications*, 115(2), 299-327.
- ❖ Esscher, F. (1932). On the probability function in the collective theory of risk. *Scandinavian Actuarial Journal*, 15(3), 175-195.
- ❖ Gerber, H. U., and E. S. W. Shiu. (1994). Option Pricing by Esscher Transforms. *Transactions of Society of Actuaries* 46: 98–140.
- ❖ Gompertz, B. (1825). XXIV. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life

- contingencies. In a letter to Francis Baily, Esq. FRS &c. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 115, 513-583.
- ❖ Graunt, J. (1662). Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index, and Made Upon the Bills of Mortality. London: John Martyn and James Allestry, 1973.
 - ❖ J.P. Morgan. (2007). LifeMetrics, a Toolkit for Measuring and Managing Longevity and Mortality Risks. Technical document, J.P. Morgan.
 - ❖ Keilman, N. (1998). How accurate are the United Nations world population projections? Population and Development Review, 24, 15-41.
 - ❖ Koissi, M. C., Shapiro, A. F., & Högnäs, G. (2006). Evaluating and extending the Lee-Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval. Insurance: Mathematics and Economic, 38(1), 1-20.
 - ❖ Lee, R. (2000). The lee-carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. North American Actuarial Journal, 4(1), 80-91.
 - ❖ Lee, R.D., Carter, L.R., (1992). Modeling and forecasting US mortality. Journal of the American Statistical Association 87 (419), 659–671
 - ❖ Life & Longevity Markets Association. (2010). Longevity Pricing Framework.
 - ❖ Life& Longevity Markets Association. (2012). Longevity Index Technical Document.
 - ❖ Lin, Y., & Cox, S. H. (2005). Securitization of mortality risks in life annuities. Journal of risk and Insurance, 72(2), 227-252.
 - ❖ Lin, Y., & Cox, S. H. (2008). Securitization of catastrophe mortality risks. Insurance Mathematics and Economics 42 (2): 628-637.
 - ❖ Loeys, J., Panigirtzoglou, N., & Ribeiro, R. M. (2007). Longevity: A Market in the Making. Global Market Strategy, J.P. Morgan.
 - ❖ Lundström, H., & Qvist, J. (2004). Mortality forecasting and trend shifts: an application of the lee–carter model to swedish mortality data. International Statistical Review, 72(1), 37-50.
 - ❖ Milevsky, M. A., Promislow, S. D., & Young, V. R. (2005). Financial valuation of mortality risk via the instantaneous sharpe ratio. working paper. Papers.

- ❖ Milevsky, M. A., Promislow, S. D., & Young, V. R. (2006). Killing the law of large numbers: mortality risk premiums and the sharpe ratio. *Journal of Risk & Insurance*, 73(4), 673–686.
- ❖ Mitchell, D., Brockett, P., Mendoza-Arriaga, R., and K. Muthuraman. (2013). Modeling and Forecasting Mortality Rate. *Insurance: Mathematics and Economics* 52: 275–285.
- ❖ OECD Factbook 2015-2016: Economic, Environmental and Social Statistics, 2016.
- ❖ Olshansky, S. J., & Carnes, B. A. (1997). Ever since gompertz. *Demography*, 34(1), 1-15.
- ❖ Prause, K. (1999). The generalized hyperbolic model: Estimation, financial derivatives, and risk measures (Doctoral dissertation, PhD thesis, University of Freiburg).
- ❖ Renshaw, A., and Haberman, S., (2003). Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(2), 255-272.
- ❖ Renshaw, A., and Haberman, S., (2006). A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics* 38, 556-570.
- ❖ Schoutens, W. (2003). *Levy processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. New York: John Wiley & Sons.
- ❖ Stoto, M. A. (1983). The accuracy of population projections. *Journal of the American Statistical Association*, 78(381), 13-20.
- ❖ Swiss Re, (2009). *The Role of Indices in Transferring Insurance Risks to Capital Markets*, Sigma.
- ❖ Tuljapurkar, S., Li, N., & Boe, C. (2000). A universal pattern of mortality decline in the G7 countries. *Nature*, 405(6788), 789.
- ❖ Wang, S. S. (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *The Journal of Risk and Insurance* 67 (1): 15-36.

- ❖ Wilmoth, J. R. (1993). Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change. Technical report, Department of Demography, University of California, Berkeley.