Quelques contributions à la théorie des processus de Lévy avec sauts et ses applications en finance

par

Djilali Ait-Aoudia

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

HEC MONTRÉAL

Montréal, Québec, Canada, juin 2018

SOMMAIRE

Ce mémoire porte sur l'étude d'une certaine classe de processus de Lévy avec sauts. Dans cette classe proposée par Lewis et Mordecki [25], la distribution des sauts suit une loi mixte-gamma. Dans la première partie, en appliquant la formule de Feynman-Kac (Théorème 4.4.2, Karatzas et Shreve [20]), nous allons résoudre le problème de premier instant où la double barrière est franchie par un modèle de diffusion de type Lewis et Mordecki. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à l'évaluation d'options européennes et l'estimation des paramètres physiques par la méthode du maximum de vraisemblance. Ensuite, nous présentons les résultats numériques obtenus avec une analyse comparative des résultats d'estimation sur des données simulées et des données de marché.

REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement ma directrice de mémoire Geneviève Gauthier pour avoir accepté d'encadrer ce travail, ainsi que pour le suivi, les relectures et les précieux conseils.
Je remercie également les membres du jury, Bruno Rémillard, Chantal Labbé et Michel Denault, d'avoir accepté d'évaluer mon travail.
Je tiens à remercier l'ensemble des enseignants que j'ai pu avoir tout au long de mes études au HEC Montréal, pour m'avoir transmis leur savoir et leur passion.
Enfin, je tiens aussi à remercier ma femme Nassima pour sa patience, son soutien et ses encouragements.

Djilali Ait-Aoudia

Montréal, Avril 2018

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION

La modélisation en mathématiques financières a été introduite avec les travaux de Louis Bachelier en 1900 dans sa thèse intitulée *Théorie de spéculation* [6]. Bachelier a introduit le mouvement brownien pour modéliser la dynamique des prix des actions à la Bourse, ce qui sera le point de départ de la finance moderne (El Karoui [16]). Lors de l'introduction du calcul stochastique dans les années 1970, notamment du modèle de Black & Sholes [10], cette modélisation a connu une grande expansion. Dans ces modèles de Black & Sholes, le sous-jacent est représenté par l'exponentielle d'un mouvement brownien. Ainsi, sa trajectoire est continue dans le temps car celle du mouvement brownien l'est. Or, lorsqu'on observe les données du marché, on remarque que les trajectoires de prix semblent ponctuées de sauts. En effet, plus les périodes d'observation sont courtes, plus le caractère discontinu des prix s'accentue. Pour plus de détails, voir Labbé [24], Randrianarivony [30], Randrianarivony [32], Tankov [15], Cont et Tankov [15]. Il est donc essentiel de pouvoir modéliser ces discontinuités et de tenir compte de ces sauts dans un modèle plus proche de la réalité des marchés. Les processus de Lévy représentent une telle alternative.

Introduits en 1937 par le mathématicien français Paul Lévy [26], les processus de Lévy qui constituent un domaine d'étude en plein développement, ont de nombreuses propriétés intéressantes. Par exemple, leurs trajectoires sont continues à droite avec limites à gauche (càdlàg) et leurs incréments sont indépendants et stationnaires. Il existe plusieurs ouvrages de référence sur le sujet tels que Applebaum [4], Bertoin [9], Kyprianou[23], Cont et Tankov [15], Popier [28], Rémillard (chapitre 6) [33] et Sato [34].

En ce qui est de la modélisation financière, on retrouve dans les processus de Lévy une classe de modèles avec sauts assez riche pour bien décrire les données empiriques et aussi assez simple pour effectuer des calculs analytiques [35]. En effet, les phénomènes stochastiques à modéliser sont souvent la juxtaposition d'un processus à temps continue de type mouvement brownien et des sauts représentant des chocs imprévus. Ces derniers sont généralement modélisés par un processus de Poisson composé. Formellement, dans le modèle de marché que nous présentons, le cours du sous-jacent de l'option à l'instant t s'écrit :

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\big) \prod_{i=1}^{N_t} V_i \\ &= S_0 \exp\big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln(V_i)\big). \end{aligned}$$

On pose $Y_i = \ln(V_i)$, on a alors

$$S_t = \exp(X_t),$$

avec,

$$X_t = X_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{0.0.1}$$

où $S_0 = \exp(X_0)$ est le prix à l'instant 0 de l'actif, $W = \{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard, $(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i)_t$ est un processus de Poisson composé d'intensité λ, c'est-à-dire $N = \{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson simple de paramètre λ et $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et représentent la taille des sauts pouvant survenir.

Entre deux instants de sauts, le modèle évolue comme un mouvement brownien géométrique. Puis, à des intervalles de temps de loi exponentielle de paramètre λ des sauts se

produisent, induisant une variation de S de $\left(e^Y - 1\right)\%$ (El Karoui et Gobet [16]).
Nous allons maintenant présenter les trois processus de Lévy avec sauts les plus célèbres et les plus appliqués en finance : le processus mixte à sauts gaussiens (Merton [27]), celui à sauts de loi exponentielle double (Kou [22]) et un nouveau processus généralisant le précédent en introduisant des sauts de loi mixte-gammas (Lewis et Mordecki [25]).

0.1. Exemples de processus de Lévy avec sauts

0.1.1. Modèle de Merton [27]

Le modèle le plus connu et souvent utilisé comme indice de référence est sans doute le modèle de Merton [27]. Dans son modèle, Merton considère un processus mixte avec une composante gaussienne et une composante de type Poisson composé avec sauts gaussiens. c'est-à-dire les variables aléatoires $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées et la densité de la variable Y_1 est donnée par

$$f(y) = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^2}, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{0.1.2}$$

avec $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$ et $\hat{\sigma} > 0$.

0.1.2. Modèle de Kou [22]

Dans son article [22], Kou a proposé un modèle de même type que celui de Merton mais dont les sauts suivent une loi asymétrique de type exponentielle double. Pour ce modèle, les variables aléatoires $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées et la densité de la variable Y_1 est donnée par

$$f(y) = p\eta e^{-\eta y}\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}} + (1-p)\theta e^{\theta y}\mathbf{1}_{\{y<0\}}, \tag{0.1.3}$$

avec $\eta > 0, \theta > 0$ et $0 < p < 1$.

Ce modèle a l'avantage de conduire à des procédures numériques simplifiées, notamment pour les options européennes et exotiques, et ce, grâce aux bonnes propriétés des lois exponentielles, en particulier la propriété d'absence de mémoire. La comparaison entre le modèle de Kou et celui de Merton est donnée dans Cont et Tankov [15] (Tableau 4.3).

0.1.3. Généralisation du modèle de Kou [13], [32]

Le modèle de Kou a été généralisé par Cai et Kou [12], [13] et Randrianarivony [32], pour des cas où la loi des sauts est une loi hyper-exponentielle. Pour ce modèle, la densité de la variable Y_1 est donnée par

$$f(y) = \sum_{j=1}^{m} p_j \eta_j e^{-\eta_j y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + \sum_{j=1}^{n} q_j \theta_j e^{\theta_j y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}, \tag{0.1.4}$$

avec, $p_j, q_j \geq 0$ telle que $\sum_{j=1}^{m} p_j + \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \eta_j > 0$, $\theta_j > 0$, $\eta_i \neq \eta_j$ et $\theta_i \neq \theta_j$ pour tout $i \neq j$.

0.1.4. Modèle de Lewis et Mordecki [25]

Finalement, Lewis et Mordecki [25] ont proposé un nouveau modèle où la distribution des sauts suit une loi mixte-gamma dont les paramètres peuvent être complexes, la densité de la variable Y_1 est donnée par

$$f(y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_j} p_{ij} \frac{(\eta_j)^i y^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\eta_j y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} q_{ij} \frac{(\theta_j)^i (-y)^{i-1}}{(i-1)!} e^{\theta_j y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}, \tag{0.1.5}$$

avec, $p_{ij}, q_{ij} \geq 0$ telle que $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_j} p_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} q_{i,j} = 1$, $Re(\eta_j)$, $Re(\theta_j) > 0$, $\eta_i \neq \eta_j$ et $\theta_i \neq \theta_j$ pour tout $i \neq j$.

C'est l'étude de cette dernière classe des processus de Lévy et ses applications dans le domaine de la finance qui constitue l'objet de ce mémoire.

0.2. NOS CONTRIBUTIONS

Ce présent mémoire est composé de quatres chapitres. Le premier et le dernier constituent respectivement l'introduction et la conclusion. Les deux autres chapitres sont indépendants. Cependant, ils sont complémentaires dans la mesure où ils permettent ensemble d'apporter une information plus complète sur le sujet traité.
Le deuxième chapitre est un article *A note on first passage functionals for Lévy processes with jumps of rational Laplace transforms* ([2]) publié dans la revue *Abstract and applied Analysis*. Dans cet article, nous nous intéressons à une classe de processus de Lévy avec sauts proposée par Lewis et Mordecki [25]. Dans cette classe qui est dense dans l'ensemble des processus de Lévy (voir [5], Proposition 1), la distribution des sauts suit une loi mixte-gamma dont les paramètres peuvent être complexes.
Nous nous intéressons particulièrement au problème de premier instant où la double barrière est franchie. Plus précisément, soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus de Lévy avec sauts tel que

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{0.2.6}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ sont respectivement la dérive et la volatilité de la partie diffusive, $W = \{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard, $N = \{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson simple de paramètre λ et $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dont la variable aléatoire parente Y_1 suit la loi de densité f donnée par (0.1.5) et représente la taille des sauts pouvant survenir. Aussi, $\{W_t, t \geq 0\}, \{N_t, t \geq 0\}$ et $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sont mutuellement indépendants.
On se donne deux réels h et H tel que $h < H$ et on définit τ comme le premier instant

où la double barrière est franchie par le processus X_t :

$$\tau := \inf\left\{t \geq 0 : X_t > h \text{ ou } X_t < H\right\}. \tag{0.2.7}$$

On définit la fonction ϕ telle que

$$\phi(x) = \mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha\tau}g(X_\tau)\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\alpha\tau}g(X_\tau)|X_0 = x\right]; \tag{0.2.8}$$

avec $\alpha > 0$ et g fonction positive bornée. En appliquant la formule de Feynman-Kac (Théorème 4.4.2, Karatzas et Shreve [20], [24], Théorème 9) on obtient

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \alpha)\,\phi(x) = 0 & \text{in } (h, H), \\ \phi(x) = g(x) & \text{on } (-\infty, h] \cup [H, +\infty), \end{cases} \tag{0.2.9}$$

où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal du processus X_t défini par

$$\mathcal{L}\phi(x) \;=\; \mu\phi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(x) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\phi(x-y) - \phi(x)\right)f(y)\mathrm{d}y,$$

Notre contribution principale est le Théorème 1.3.1. Dans ce dernier, on a obtenu une forme explicite pour $\phi(x)$ en résolvant l'équation intégro-différentielle (0.2.9). Plus précisément, on a montré que pour tout $\alpha \geq 0$ et pour toute fonction continue bornée g sur $(h, H)^c$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(**a**) $\phi(x) = \mathbb{E}_x[e^{-\alpha\tau}g(X_\tau)]$, avec $\tau := \inf\left\{t \geq 0 : X_t \geq h \text{ ou } X_t \leq H\right\}$.

(**b**) La fonction $\phi(x)$ est solution du problème (0.2.9).

(**c**) La fonction $\phi(x)$ est donnée par une forme bien explicite (Proposition 1.3.2).

De plus, en choisissant $g(x) = e^{\gamma x}$ pour une certaine constante γ, on déduit la distribution conjointe du premier instant où la double barrière est franchie par le processus X_t et sa valeur à ce premier temps de passage (la distribution conjointe de (τ, X_τ)).

La section 4 de cet article est une application de nos résultats en mathématiques financières où on s'est principalement concentré sur une option double-barrière. Cette dernière

est définie comme un produit dérivé sur un actif sous-jacent $S_t = \exp(X_t)$ pour lequel le versement à l'échéance T de la fonction de paiement $\psi(S_t)$ dépend du fait que le sous-jacent a franchi ou non vers le haut ou vers le vas, durant la durée de vie du contrat $[0, T]$ une double-barrière $[L, U]$ donnée (voir par exemple [15], p. 177).
Pour un temps d'arrêt $\hat{\tau}$ tel que :

$$\hat{\tau} = \inf \{t \geq 0 : S_t \leq U \text{ or } S_t \geq L\},$$

le prix de l'option double-barrière avec maturité T et du prix de levée K est donné par

$$e^{-rT}\mathbb{E}\left[(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} | S_0\right].$$

Soit $\kappa := -\log K$, on pose

$$C(\kappa, T) := e^{-rT}\mathbb{E}_x\left[\left(S_0 e^{X_T} - e^{-\kappa}\right)^+ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}\right]. \tag{0.2.10}$$

Maintenant on définit $\hat{C}(\alpha, \gamma)$ et $\hat{\Delta}(\alpha, \gamma)$ respectivement les transormées de Laplace de $C(\kappa, T)$ et de delta $\Delta(\alpha, \gamma) = \partial C(\kappa, T)/\partial S_0$, ie.,

$$\hat{C}(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\gamma\kappa - \alpha T} C(\kappa, T) d\kappa dT. \tag{0.2.11}$$

$$\hat{\Delta}(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\gamma\kappa - \alpha T} \Delta(\alpha, \gamma) d\kappa dT. \tag{0.2.12}$$

Notre contribution dans cette section est l'obtention une forme explicite pour $\hat{C}(\alpha, \gamma)$ et $\hat{\Delta}(\alpha, \gamma)$.
Le troisième chapitre est consacré à l'évaluation d'options européennes et l'estimation des paramétres physiques par la méthode du maximum de vraisemblance. Nous présentons aussi les résultats numériques obtenus avec une analyse comparative des résultats d'estimation sur des données simulèes et des données réelles.
Notons que les articles [3] (*Occupation time of Lévy processes with jumps rational Laplace transforms*) et [1] (*Martingale characterization of exponential distribution*) sont

des conséquences directes de ce mémoire. En effet, dans le premier article, en appliquant le lemme 1.3.1 et la formule de Feynman-Kac, on a calculé la loi conjointe de X_t et son temps d'occupation $\left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{h<X_s<H\}} ds; X_t\right)$ avec X_t un processus de Lévy avec sauts où la distribution des sauts suit une loi mixte-gamma. Dans le deuxième article, en appliquant encore le lemme 1.3.1, on a construit une martingale qui caractérise la loi exponentielle (voir annexe D) et comme application de ce résultat, on a résolu le problème (0.2.9) pour le cas où X_t est un modèle de Kou généralisé (voir annexe E).

CHAPITRE 1

A note on first passage functionals for Lévy processes with jumps of rational Laplace transforms

Résumé

Cet article étudie le problème de premier instant où la double barrière est franchie par un processus de diffusion avec sauts de distribution mixte-gamma. Le problème de valeurs aux limites correspondant est résolu pour obtenir une formule explicite pour le premier passage fonctionnel. De plus, on déduit la distribution conjointe du premier instant où la double barrière est franchie par ce processus et sa valeur à ce premier temps de passage.

Abstract

This paper investigates the two-sided first exit problem for a jump diffusion process having jumps with rational Laplace transform. The corresponding boundary value problem is solved to obtain an explicit formula for the first passage functional. Also, we derive

the distribution of the first passage time to two-sided barriers and the value at the first passage time.

1.1. Introduction

One-sided and two-sided exit problems for the compound Poisson processes and jump diffusion processes with two-sided jumps have been applied widely in a variety of fields. For example, in actuarial mathematics, the problem of first exit from a half-line is of fundamental interest with regard to the classical ruin problem and the expected discount penalty function or the Gerber-Shiu function as well as the expected total, see for example Mordecki [2003], Xing et al.[2008], Zhang et al.[2010], Lewis et al.[2008] and Avram et al.[2015]. In mathematical finance, the first passage time plays a crucial role for the pricing of many paths-dependent options and American type options, see for example Geman et Yor [1996], Bertoin [1998], Kyprianou [2000], Rogers [2000], Avram et al.[2004] and Alili et al.[2005]. Recently, Cai [2009], investigated the first passage time of hyper-exponential jump-diffusion process. Cai and Kou [2011] proposed a mixed-exponential jump-diffusion process to model the asset return and found an expression for the joint distribution of the first-exit problem for a jump and overshoot for a mixed-exponential jump-diffusion process. Chen et al.[2013] and Yin et al.[2014] discussed the first passage functional for hyper-exponential jump-diffusion process.

Motivated by works mentioned above, the main objective of this paper is to study the first exit time of the two-sided first exit problem for jump-diffusion process having jump with rational Laplace transform proposed by Lewis and Mordecki [2008], see also Kuznetsov [2012]. This extends recent results obtained in Chen et al. [2013, Theorem 2.5] on the hyper-exponential jump-diffusion process.

The rest of the paper is organized as follows. In section 2, we introduce the jump-diffusion process having jumps with rational Laplace transform. Section 3 concentrates on deriving the joint distribution of first-exit time and a nonnegative bounded measurable function of the process value at the first-exit time to two flat barriers. Section 4 presents the analytical solution to the pricing problem of standard double barrier options.

1.2. The model

A Lévy jump-diffusion process $X = \{X_t, t \geq 0\}$ is defined as

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{1.2.1}$$

where $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$ represent the drift and volatility of the diffusion part respectively, $W = \{W_t, t \geq 0\}$ is a (standard) Brownian motion, $N = \{N_t, t \geq 0\}$ is a homogeneous Poisson process with rate λ and $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ are independent and identically distributed random variables supported in $\mathbb{R}$; moreover, $\{W_t, t \geq 0\}, \{N_t, t \geq 0\}$ and $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ are mutually independent; finally, the probability density function (pdf) of Y_1 is given by

$$f(y) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij}\frac{(\eta_j)^i y^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\eta_j y}\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{ij}\frac{(\theta_j)^i(-y)^{i-1}}{(i-1)!}e^{\theta_j y}\mathbf{1}_{\{y<0\}}, \tag{1.2.2}$$

where, $p_{ij}, q_{ij} \geq 0$ and such that $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{i,j} = 1$, $Re(\eta_j)$ and $Re(\theta_j) > 0$, and that $\eta_i \neq \eta_j$ and $\theta_i \neq \theta_j$ for all $i \neq j$.

Another important tool to establish the key result of the article is the infinitesimal generator of X_t. Note that X_t is a Markovian process and its infinitesimal generator is given by

$$\begin{aligned}\mathcal{L}h(x) &:= \lim_{t\searrow 0}\frac{\mathbb{E}\left[h(X_t)|X_0 = x\right] - h(x)}{t} \\ &= \mu h'(x) + \frac{\sigma^2}{2}h''(x) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left(h(x-y) - h(x)\right)f(y)\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

for any bounded and twice continuously differentiable function h.

Throughout the rest of the paper, the law of X such that $X_0 = x$ is denoted by $\mathbb{P}_x$ and the corresponding expectation by $\mathbb{E}_x$; we write $\mathbb{P}$ and $\mathbb{E}$ when $x = 0$. The Lévy exponent of X is given by

$$\begin{aligned} G(\zeta) &= \frac{\ln \mathbb{E}\left[\exp(\zeta X_t)\right]}{t} \\ &= \mu\zeta + \frac{\sigma^2}{2}\zeta^2 + \lambda\left(\mathbb{E}[e^{-\zeta Y_1}] - 1\right) \\ &= \mu\zeta + \frac{\sigma^2}{2}\zeta^2 + \lambda\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j}\frac{p_{ij}(\eta_j)^i}{(\eta_j+\zeta)^i} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{-q_{ij}(\theta_j)^i}{(\zeta-\theta_j)^i} - 1\right). \end{aligned}$$

Accordingly, G is a rational function on $\mathbb{C}$. The equation $G(\zeta) - \alpha = 0$ with $\alpha > 0, \sigma > 0$ and $\mu \in \mathbb{R}$ yields $S = M + N + 2$ zeros with $M = \sum_{i=1}^{m} m_i$ and $N = \sum_{j=1}^{n} n_j$, see Kuznetsov [2012].

Let us denote the zeros of $G(\zeta) - \alpha$ in the half-plane $\mathrm{Re}(\zeta) > 0$ $\{\mathrm{Re}(\zeta) < 0\}$ as $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{M+1}$ $\{\rho_{M+2}, \rho_{M+3}, \ldots, \rho_{M+N+2}\}$. Also, we assume that all zeros of $G(\zeta) - \alpha$ are simple.

1.3. Distribution of the first passage time to two flat barriers

Define τ to be the first passage time of X_t to two flat barriers h and H with $h < H$; that is

$$\tau := \inf\left\{t \geq 0 : X_t < h \text{ or } X_t > H\right\}, \tag{1.3.4}$$

and let

$$\phi(x) = \mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha\tau} g(X_\tau)\right]; \tag{1.3.5}$$

where $\alpha > 0$ and g is nonnegative bounded measurable function.

Now, by Feynman-Kac formula (see, for instance, Theorem 4.4.2, Karatzas and Shreve

[1991]) we have that $\phi(x)$ must satisfy

$$\begin{cases} (\mathcal{L}-\alpha)\,\phi(x)=0 & \text{in } (h,H), \\ \phi(x)=g(x) & \text{on } (-\infty,h]\cup[H,+\infty). \end{cases} \tag{1.3.6}$$

Our goal in this section is to solve the boundary problem (1.3.6) and find explicit formulae for $\phi(x)$. We first show that ϕ satisfies an integro-differential equation and then derive an ordinary differential equation for ϕ. Based on the ODE, we show ϕ can be written as a linear combination of known exponential functions. As a consequence, its explicit form is obtained and choosing $g(x)$ to be $e^{\gamma x}$, it is easy to derive the joint distribution of the first passage time of X to two flat barriers and the process value at the first passage time.

Now, let $\mathcal{P}_0(\zeta)=\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{m_j}(\zeta+\eta_j)^i\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n_j}(\zeta-\theta_j)^i$, then $\mathcal{P}_1(\zeta)=\mathcal{P}_0(\zeta)(G(\zeta)-\alpha)$ is a polynomial whose zero coincide with those of $G(\zeta)-\alpha$. Also, denote by D the differential operator such that its characteristic polynomial is $\mathcal{P}_1(\zeta)$.

The following Lemma will be needed for our proof of Proposition 1.3.1.

Lemma 1.3.1. *Let $d^{(k)}$ indicate the k-th derivative with respect to x of any differentiable function and define*

$$F(i,\eta_j,x)=\big(\frac{d}{dx}+\eta_j\big)^{(i)}e^{-\eta_j x}\int_{-\infty}^{x}\phi(y)(x-y)^{i-1}e^{\eta_j y}dy$$

with $\big(\frac{d}{dx}+\eta_j\big)^{(i)}$ be the Generalized Leibniz operator such that

$$\big(\frac{d}{dx}+\eta_j\big)^{(i)}:=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(\eta_j)^{i-k}\,d^{(k)}.$$

Then for all $i\geq 1$,

$$F(i,\eta_j,x)=(i-1)!\phi(x) \tag{1.3.7}$$

Proof. We proceed by induction on i. For $i = 1$, we have

$$\begin{aligned}
F(1, \eta_j, x) &= \left(\frac{d}{dx} + \eta_j \right) e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y) e^{\eta_j y} dy \\
&= -\eta_j e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y) e^{\eta_j y} dy + \phi(x) + \eta_j e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y) e^{\eta_j y} dy \\
&= \phi(x).
\end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dx} + \eta_j \right) e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y)(x-y)^{i-1} e^{\eta_j y} dy \\
&\qquad = -\eta_j e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y)(x-y)^{i-1} e^{\eta_j y} dy + (i-1) e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y)(x-y)^{i-2} e^{\eta_j y} dy \\
&\qquad\qquad + \eta_j e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y)(x-y)^{i-1} e^{\eta_j y} dy \\
&\qquad = (i-1) e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y)(x-y)^{i-2} e^{\eta_j y} dy.
\end{aligned}$$

It follows inductively that

$$\begin{aligned}
F(i, \eta_j, x) &= \left(\frac{d}{dx} + \eta_j \right)^{(i)} e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y)(x-y)^{i-1} e^{\eta_j y} dy \\
&= \left(\frac{d}{dx} + \eta_j \right)^{(i-1)} \left(\frac{d}{dx} + \eta_j \right) e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y)(x-y)^{i-1} e^{\eta_j y} dy \\
&= (i-1) \left(\frac{d}{dx} + \eta_j \right)^{(i-1)} e^{-\eta_j x} \int_{-\infty}^{x} \phi(y)(x-y)^{i-2} e^{\eta_j y} dy \\
&= (i-1) F(i-1, \eta_j, x) \\
&= (i-1)! F(1, \eta_j, x) \\
&= (i-1)! \phi(x),
\end{aligned}$$

which is the desired result.

We may now state

Proposition 1.3.1. *Suppose a bounded solution ϕ defined on $\mathbb{R}$ to the boundary value problem (1.3.6) exist. Then on $\mathbb{R} \setminus \{h, H\}$, ϕ is infinitely differentiable and satisfies the*

ODE

$$D\phi \equiv 0, \ \ on\ (h, H). \tag{1.3.8}$$

Hence, on (h, H), $\phi(x) = \sum_{k=1}^{S} Q_k e^{\rho_k x}$ *for somme constants* Q_k.

Proof. Applying the infinitesimal generator $\mathcal{L}$ to the function ϕ, we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\phi(x) &= \frac{\sigma^2}{2}\phi''(x) + \mu\phi'(x) + \lambda\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij}\frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!}e^{-\eta_j x}\int_{-\infty}^{x}\phi(y)(x-y)^{i-1}e^{\eta_j y}dy \\ &\quad +\lambda\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{ij}\frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!}e^{\theta_j x}\int_{x}^{+\infty}\phi(y)(y-x)^{i-1}e^{-\theta_j y}dy - \lambda\phi(x).\end{aligned}$$

Next, ϕ will be shown to satisfy an ODE. Using Lemma (1.3.1), we get for $j = 1, 2, \ldots, m, i = 1, 2, \ldots, m_j$,

$$\left(\frac{d}{dx} + \eta_j\right)^{(i)} e^{-\eta_j x}\int_{-\infty}^{x}(x-y)^{i-1}\phi(y)e^{\eta_j y}dy = (i-1)!\phi(x).$$

The same computation will yield for $j = 1, 2, \ldots, n, i = 1, 2, \ldots, n_j$,

$$\left(\frac{d}{dx} - \theta_j\right)^{(i)} e^{\theta_j x}\int_{x}^{+\infty}(y-x)^{i-1}\phi(y)e^{-\theta_j y}dy = -(i-1)!\phi(x)$$

Now, since $\sigma > 0$ and $(\mathcal{L} - \alpha)\phi \equiv 0$ then thanks to Proposition 3.3 in the work of Chen et al. [2007], ϕ is infinitely differentiable on (h, H) and

$$\begin{aligned}0 &= \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{m_j}(\frac{d}{dx} + \eta_j)^{(i)}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n_j}(\frac{d}{dx} - \theta_j)^{(i)}(\mathcal{L} - \alpha)\phi(x) \qquad (1.3.9)\\ &= \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{m_j}(\frac{d}{dx} + \eta_j)^{(i)}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n_j}(\frac{d}{dx} - \theta_j)^{(i)}\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \mu\frac{d}{dx} - \lambda - \alpha\right)\phi(x) \\ &\quad +\lambda\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n_j}(\frac{d}{dx} - \theta_j)^{(i)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{m}\prod_{i=1}^{m_j}(\frac{d}{dx} + \eta_k)^{(i)}p_{ij}\frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!}(i-1)!\phi(x) \\ &\quad -\lambda\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{m_j}(\frac{d}{dx} + \eta_j)^{(i)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{n}\prod_{i=1}^{n_j}(\frac{d}{dx} - \theta_k)^{(i)}q_{ij}\frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!}(i-1)!\phi(x)\end{aligned}$$

Hence, Eq. (1.3.9) transforms the integro-differential equation $(\mathcal{L} - \alpha)\phi \equiv 0$ into an ODE : $\hat{D}\phi \equiv 0$, where $\hat{D}$ high order differential operator.

To complete the proof, $\hat{D}$ must be shown to coincide with D. To show that the characteristic polynomials of D and $\hat{D}$ will suffice. Write $\hat{\mathcal{P}}(\zeta)$ as the characteristic polynomial of $\hat{D}$. Then, by (1.3.9), $\hat{\mathcal{P}}$ is given by

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}(\zeta) &= \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{m_j}(\zeta+\eta_j)^i\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n_j}(\zeta-\theta_j)^i\Big[\mu\zeta+\frac{\sigma^2}{2}\zeta^2+\lambda\big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j}\frac{p_{ij}(\eta_j)^i}{(\zeta+\eta_j)^i} \\ &\qquad +\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{-q_{ij}(\theta_j)^i}{(\zeta-\theta_i)^i}-1\big)-\alpha\Big] \\ &= \mathcal{P}_0(\zeta)\left(G(\zeta)-\alpha\right).\end{aligned}$$

This equation reveals that the characteristic polynomial $\mathcal{P}_1(\zeta)$ of D equals that, $\hat{\mathcal{P}}(\zeta)$, of $\hat{D}$, which completes the proof.

Proposition 1.3.2. *Suppose that ϕ is a bounded solution to the boundary value problem (1.3.6) and, on $(h,H), \phi(x) = \sum_{k=1}^{S} Q_k e^{\rho_k x}$ for some constants Q_k. Then the constant vector Q satisfies the equation*

$$AQ = V_g \tag{1.3.10}$$

where A is an $S \times S$ nonsingular matrix given by

$$A = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \tag{1.3.11}$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} \frac{\eta_1}{\rho_1+\eta_1}e^{\rho_1 h} & \cdots & \frac{\eta_1}{\rho_S+\eta_1}e^{\rho_S h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\eta_1}{\rho_1+\eta_1}\right)^{m_1} e^{\rho_1 h} & \cdots & \left(\frac{\eta_1}{\rho_S+\eta_1}\right)^{m_1} e^{\rho_S h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\eta_m}{\rho_1+\eta_m}e^{\rho_1 h} & \cdots & \frac{\eta_m}{\rho_S+\eta_m}e^{\rho_S h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\eta_m}{\rho_1+\eta_m}\right)^{m_m} e^{\rho_1 h} & \cdots & \left(\frac{\eta_m}{\rho_S+\eta_m}\right)^{m_m} e^{\rho_S h} \\ e^{\rho_1 h} & \cdots & e^{\rho_S h} \end{pmatrix} \tag{1.3.12}$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} \frac{\theta_1}{\rho_1-\theta_1} e^{\rho_1 H} & \cdots & \frac{\theta_1}{\rho_S-\theta_1} e^{\rho_S H} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\theta_1}{\rho_1-\theta_1}\right)^{n_1} e^{\rho_1 H} & \cdots & \left(\frac{\theta_1}{\rho_S-\theta_1}\right)^{n_1} e^{\rho_S H} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\theta_n}{\rho_1-\theta_n} e^{\rho_1 H} & \cdots & \frac{\theta_n}{\rho_S-\theta_n} e^{\rho_S H} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\theta_n}{\rho_1-\theta_n}\right)^{n_n} e^{\rho_1 H} & \cdots & \left(\frac{\theta_n}{\rho_S-\theta_n}\right)^{n_n} e^{\rho_S H} \\ e^{\rho_1 H} & \cdots & e^{\rho_S H} \end{pmatrix} \tag{1.3.13}$$

and $V_g = (V_{g,1}(j,i), g(h), V_{g,2}(j,i), g(H))$,

$$\begin{aligned} V_{g,1}(j,i) &= \int_{-\infty}^{0} g(y+h) \frac{(\eta_j)^i (-y)^{i-1} e^{\eta_j y}}{(i-1)!} dy, & (1.3.14) \\ V_{g,2}(j,i) &= \int_{0}^{+\infty} g(y+H) \frac{(\theta_j)^i y^{i-1} e^{-\theta_j y}}{(i-1)!} dy. & (1.3.15) \end{aligned}$$

Proof. Since $(\mathcal{L}-\alpha)\,\phi = 0$ and $\phi(x) = \sum_{k=1}^{S} Q_k e^{\rho_k x}$ on (h,H), which entails

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}-\alpha)\,\phi(x) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\phi^{''}(x) + \mu\phi^{'}(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-y) f(y) dy - (\lambda+\alpha)\phi(x) \\ &= \sum_{k=1}^{S} Q_k e^{\rho_k x} \left(\frac{\sigma^2}{2}\rho_k^2 + \mu\rho_k - (\lambda+\alpha) \right) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-y) f(y) dy. \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Furthermore

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-y) f(y) dy = \left(\int_{-\infty}^{h} + \int_{H}^{+\infty} \right) g(y) f(x-y) dy + \int_{x-H}^{x-h} \phi(x-y) f(y) dy \\ = &\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_j} p_{ij} e^{-\eta_j (x-h)} \int_{-\infty}^{0} \frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!} g(y+h)(x-h-y)^{i-1} e^{\eta_j y} dy \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} q_{ij} e^{\theta_j (x-H)} \int_{0}^{+\infty} \frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!} g(y+H)(y+H-x)^{i-1} e^{-\theta_j y} dy \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_j} p_{ij} \sum_{k=1}^{S} Q_k e^{\rho_k x} \frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!} \int_{0}^{x-h} y^{i-1} e^{-(\eta_j+\rho_k) y} dy \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_j} q_{ij} \sum_{k=1}^{S} Q_k e^{\rho_k x} \frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!} \int_{x-H}^{0} y^{i-1} e^{(\theta_j-\rho_k) y} dy. \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

Now, since $(a\pm y)^{i-1} = \sum_{l=0}^{i-1}\binom{i-1}{l}(\pm y)^l (a)^{i-1-l}$ and

$$\begin{aligned}\int_0^a y^{i-1}e^{-\beta y}dy &= \beta^{-i}\Gamma(i,a\beta)\\ &= \beta^{-i}(i-1)!\left(1-e^{-a\beta}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{(a\beta)^l}{l!}\right)\end{aligned}$$

with $\Gamma(i,x)$ is the incomplete gamma function (see Gradshteyn and Ryzhik [2000], p. 342).

Consequentely, combining Eqs.(1.3.16) and (1.3.17) and taking into account the fact that $G(\rho_k)-\alpha=0$ for all $k=1,2,\ldots,S$, we obtain

$$\begin{aligned}0 \;=\; &\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij}e^{-\eta_j(x-h)}\int_{-\infty}^{0}\frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!}g(y+h)\sum_{l=0}^{i-1}\binom{i-1}{l}(x-h)^l(-y)^{i-1-l}e^{\eta_j y}dy\\ &+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{ij}e^{\theta_j(x-H)}\int_{0}^{+\infty}\frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!}g(y+H)\sum_{l=0}^{i-1}\binom{i-1}{l}(H-x)^l(y)^{i-1-l}e^{-\theta_j y}dy\\ &+\sum_{k=1}^{S}Q_k e^{\rho_k h}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j}-p_{ij}e^{-\eta_j(x-h)}\frac{(\eta_j)^i}{(\eta_j+\rho_k)^i}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{[(\eta_j+\rho_k)(x-h)]^l}{l!}\\ &+\sum_{k=1}^{S}Q_k e^{\rho_k H}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j}-q_{ij}e^{\theta_j(x-H)}\frac{(\theta_j)^i}{(\theta_j-\rho_k)^i}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{[(\theta_j-\rho_k)(x-H)]^l}{l!}.\end{aligned}$$

Comparing $e^{-\eta_j(x-h)}$ and $e^{\theta_j(x-H)}$ yields (1.3.10), which entails the desired result.

Lemma 1.3.2. *For a given value of $\alpha>0$ the matrix A given by Eq.(1.3.11) is invertible.*

Proof. Assume that $AC=0$ for some vector $C=(C_1,C_2,\ldots,C_S)^T$. Consider the function $V(x)=\sum_{k=1}^{S}C_k e^{\rho_k x}$ for $x\in(h,H)$, and $V(x)=0$ otherwise, with $\rho_1,\ldots,\rho_S$ be the distinct zeros of the equation $G(x)-\alpha=0$. Since $AC=0$ and $V(x)$ is a solution to the boundary value problem

$$\begin{cases}(\mathcal{L}-\alpha)\,\phi(x)=0, & \text{in } (h,H),\\ \phi(x)=0, & \text{on } (-\infty,h]\cup[H,+\infty).\end{cases} \tag{1.3.18}$$

From the uniqueness of solutions to the boundary value problem (1.3.18), $V(x) \equiv 0$ in (h, H). Now, since $\{e^{\rho_k x}, 1 \leq k \leq S\}$ are linearly independend then $C = 0$ and A is invertible.

In the following, $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ is written for the usual inner product of the vector $\mathbf{y}$ and $\mathbf{z}$ in $\mathbb{C}^S$ and for every real value x, $\mathbf{e}_\alpha^\rho(x) = [e^{\rho_1 x}, e^{\rho_2 x}, \ldots, e^{\rho_S x}]$, where $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_S$ are the $S = N + M + 2$ roots of the equation $G(\zeta) = \alpha$. Our main result is the following.

Theorem 1.3.1. *For any $\alpha \geq 0$ and a nonnegative bounded measurable function g on $(h, H)^c$, the following assertions are equivalent :*

(**a**) $\phi(x) = \mathbb{E}_x[e^{-\alpha\tau} g(X_\tau)]$, *where* $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t < h \text{ or } X_t > H\}$.

(**b**) *The function $\phi(x)$ solve the boundary problem* (1.3.6).

(**c**) *The function $\phi(x)$ is given by the formula*

$$\phi(x) = \begin{cases} \mathbf{Q}(g) \cdot \mathbf{e}_\alpha^\rho(x), & \text{if } x \in (h, H), \\ g(x), & \text{if } x \notin (h, H), \end{cases}$$

with $\mathbf{Q}(g) = A^{-1} V_g$ and A and V_g are given by the formulas (1.3.11) *and* (1.3.14), *respectively.*

Proof. The fact that (**b**) implies (**c**) is straightforward consequence of Proposition 1.3.2. Conversely, consider the function $V(x) = \sum_{k=1}^S Q_k e^{\rho_k x}$ for $x \in (h, H)$, and $V(x) = g(x)$ otherwise, where g is a bounded function on $(h, H)^c$ and Q_k's are given constants. Then the same reasoning as in Proposition 1.3.2 shows that,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}-\alpha)\,V(x) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij}e^{-\eta_j(x-h)}\int_{-\infty}^{0}\frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!}g(y+h)(x-h-y)^{i-1}e^{\eta_j y}dy \\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{ij}e^{\theta_j(x-H)}\int_{0}^{+\infty}\frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!}g(y+H)(y+H-x)^{i-1}e^{-\theta_j y}dy \\ &\quad+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij}\sum_{k=1}^{S}Q_k e^{\rho_k x}\frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!}\int_{0}^{x-h} y^{i-1}e^{-(\eta_j+\rho_k)y}dy \\ &\quad+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} q_{ij}\sum_{k=1}^{S}Q_k e^{\rho_k x}\frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!}\int_{x-H}^{0} y^{i-1}e^{(\theta_j-\rho_k)y}dy.\end{aligned}$$

Thanks to Eq. (1.3.10), we conclude that (**c**) implies (**b**).
Let us finally assume that (**a**) holds. Then by Feynman-Kac formula, the function $\phi(x)$ solves the boundary problem (1.3.6) ; hence (**b**) holds. Conversely, thanks to Proposition 4.1 in the work of Chen et al. [2007], the boundary problem (1.3.6) has a unique solution, consequently (**b**) implies (**a**). The proof is complete.

As an illustrate of the main result Theorem 1.3.1, we can obtain closed-form expressions for the expectations of a variety functions with respect to τ and X_τ. For instance, choosing $g(x) = e^{\gamma x}$ in the above theorem, we can derive the joint Laplace transform of (τ, X_τ), which is presented in the following corollary.

Corollary 1.3.1. *For any $\alpha > 0, \gamma > 0$,*

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha\tau+\gamma X_\tau}\right] = \begin{cases} Q\cdot\mathbf{e}_\alpha^\rho(x), & \text{if } x\in(h,H) \\ e^{\gamma x}, & \text{if } x\notin(h,H).\end{cases} \tag{1.3.19}$$

where $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_S)^T = A^{-1}V(\gamma)$, A is given by the formula (1.3.11) *and $V(\gamma)$ is given by*

$$V(\gamma) = \Big(\frac{e^{\gamma h}}{(\gamma+\eta_j)^i}, e^{\gamma h}, \frac{e^{\gamma H}}{(\gamma-\theta_j)^i}, e^{\gamma H}\Big). \tag{1.3.20}$$

$j = 1, 2 \ldots, m, i = 1, 2 \ldots, m_j$ *and* $j = 1, 2 \ldots, n, i = 1, 2 \ldots, n_j$.

As another consequence of Theorem 1.3.1 and Lebesgue's dominated convergence theorem, we get the following for the asymptotic case when $h \to -\infty$ and $H \to +\infty$ respectively.

Corollary 1.3.2. *For two flat barriers h and $H(h < H)$, define the first downwards passage time under h and the first upwards passage time over H by*

$$\tau_h^+ := \inf\{t \geq 0 : X_t < h\}, \qquad \tau_H^- := \inf\{t \geq 0 : X_t > H\}.$$

Then for $\alpha > 0$, one has the following,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha\tau_h^+} g(X_{\tau_h^+})\right] = \begin{cases} Q_1 \cdot \mathbf{e1}_\alpha^\rho(x), & \text{if } x \geq h \\ g(x), & \text{if } x < h. \end{cases} \tag{1.3.21}$$

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha\tau_H^-} g(X_{\tau_H^-})\right] = \begin{cases} Q_2 \cdot \mathbf{e2}_\alpha^\rho(x), & \text{if } x \leq H \\ g(x), & \text{if } x > H. \end{cases} \tag{1.3.22}$$

with

$$\begin{aligned} Q_1 &= (Q_1, Q_2, \ldots, Q_{M+1})^T = A_+^{-1} V_+, \qquad Q_2 = (Q_{M+2}, Q_{M+3}, \ldots, Q_S)^T = A_-^{-1} V_-, \\ \mathbf{e1}_\alpha^\rho(x) &= [e^{\rho_1 x}, e^{\rho_2 x}, \ldots, e^{\rho_{M+1} x}], \qquad \mathbf{e2}_\alpha^\rho(x) = [e^{\rho_{M+2} x}, e^{\rho_{M+3} x}, \ldots, e^{\rho_S x}] \\ V_+ &= (V_{g,+}(j,i), j = 1, 2 \ldots, m, i = 1, 2 \ldots, m_j, g(h)) \\ V_- &= (V_{g,-}(j,i), j = 1, 2 \ldots, n, i = 1, 2 \ldots, n_j, g(H)). \end{aligned}$$

$V_{g,+}(j,i) = \int_{-\infty}^{0} g(y+h)\frac{(\eta_j)^i(-y)^{i-1}e^{\eta_j y}}{(i-1)!}dy, \quad V_{g,-}(j,i) = \int_{0}^{+\infty} g(y+H)\frac{(\theta_j)^i y^{i-1}e^{-\theta_j y}}{(i-1)!}dy,$ *and*

$$A_+ = \begin{pmatrix} \frac{\eta_1}{\rho_1+\eta_1}e^{\rho_1 h} & \cdots & \frac{\eta_1}{\rho_{M+1}+\eta_1}e^{\rho_{M+1} h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\eta_1}{\rho_1+\eta_1}\right)^{m_1} e^{\rho_1 h} & \cdots & \left(\frac{\eta_1}{\rho_{M+1}+\eta_1}\right)^{m_1} e^{\rho_{M+1} h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\eta_m}{\rho_1+\eta_m}e^{\rho_1 h} & \cdots & \frac{\eta_m}{\rho_{M+1}+\eta_m}e^{\rho_{M+1} h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\eta_m}{\rho_1+\eta_m}\right)^{m_m} e^{\rho_1 h} & \cdots & \left(\frac{\eta_m}{\rho_{M+1}+\eta_m}\right)^{m_m} e^{\rho_{M+1} h} \\ e^{\rho_1 h} & \cdots & e^{\rho_{M+1} h} \end{pmatrix},$$

$$A_- = \begin{pmatrix} \frac{\theta_1}{\rho_{M+2}-\theta_1}e^{\rho_{M+2} H} & \cdots & \frac{\theta_1}{\rho_S+\theta_1}e^{\rho_S H} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\theta_1}{\rho_{M+2}-\theta_1}\right)^{n_1} e^{\rho_{M+2} H} & \cdots & \left(\frac{\theta_1}{\rho_S-\theta_1}\right)^{n_1} e^{\rho_S H} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\theta_n}{\rho_{M+2}-\theta_n}e^{\rho_{M+2} H} & \cdots & \frac{\theta_n}{\rho_S-\theta_n}e^{\rho_S H} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\theta_n}{\rho_{M+2}-\theta_n}\right)^{n_n} e^{\rho_{M+2} H} & \cdots & \left(\frac{\theta_n}{\rho_S-\theta_n}\right)^{n_n} e^{\rho_S H} \\ e^{\rho_{M+2} H} & \cdots & e^{\rho_S H} \end{pmatrix}.$$

1.4. Pricing double-barrier options

We now show how our theoretical results can be easily applied to derive pricing formulae for standard double-barrier options. We assume the asset price process $\{S_t : t \geq 0\}$ under the risk-neutral probability measure $\mathbb{P}$ is defined as $S_t := e^{X_t}$. The log-return process $\{X_t : t \geq 0\}$ is given by Eq.(1.2.1) where $X_0 = \log(S_0)$ and $\mu := r - \sigma^2/2 - \lambda\mathbb{E}[e^{Y_1} - 1]$ (ie. $\mathbb{E}[e^{-rT}S_T] = S_0$) where $r > 0$ is the risk-free rate. More recently, Cai et al. [2009] presented the following :

The payoff of a standard double-barrier option is activated (knocked in) or extinguished (knocked out) when the price of the underlying asset crosses barriers. For example, a knock-out call option will not give the holder the payoff of a European call option unless the underlying price remains within a pre-specified range before the option matures. More precisely, consider an interval $(L, U), (L < U)$ and the initial asset price S_0 is in it. The holder will receive $(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$ at maturity T, where

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : S_t < U \text{ or } S_t > L\}.$$

Under the risk-neutral probability measure, the price of such option with maturity T and strike K is given by

$$e^{-rT}\mathbb{E}\left[(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} | S_0\right].$$

Make a change variable $\kappa := -\log K$. Then, the expectation can be represented as

$$C(\kappa, T) := e^{-rT}\mathbb{E}_x\left[\left(S_0 e^{X_T} - e^{-\kappa}\right)^+ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}\right]. \tag{1.4.23}$$

Define $\hat{C}(\alpha, \gamma)$ and $\hat{\Delta}(\alpha, \gamma)$ as the double Laplace transforms of the price $C(\kappa, T)$ in (1.4.23) and the delta $\Delta(\alpha, \gamma) = \partial C(\kappa, T)/\partial S_0$ w.r.t. T and κ, respectively, ie.,

$$\hat{C}(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\gamma\kappa - \alpha T} C(\kappa, T) d\kappa dT. \tag{1.4.24}$$

$$\hat{\Delta}(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\gamma\kappa - \alpha T} \Delta(\alpha, \gamma) d\kappa dT. \tag{1.4.25}$$

Theorem 1.4.2. *For any $\gamma > 0$ and $\alpha > \max(G(\gamma + 1) - r, 0)$*

$$\hat{C}(\alpha, \gamma) = \frac{S_0^{\gamma+1}}{\gamma(\gamma+1)\left(G(\gamma+1) - (\alpha + r)\right)} \left(Q \cdot \mathbf{e}^\rho_{\alpha+r}(x) - e^{(\gamma+1)x}\right) \mathbf{1}_{(\log(L/S_0), \log(U/S_0))}(x), \tag{1.4.26}$$

and

$$\hat{\Delta}(\alpha, \gamma) = \frac{S_0^{\gamma}}{\gamma\left(G(\gamma+1) - (\alpha + r)\right)} \left(Q \cdot \mathbf{e}^\rho_{\alpha+r}(x) - e^{(\gamma+1)x}\right) \mathbf{1}_{(\log(L/S_0), \log(U/S_0))}(x), \tag{1.4.27}$$

where $Q = A^{-1}V(\gamma + 1)$ and A associated with $r + \alpha$ is defined as in Theorem 1.3.1 and V is given by the formula (1.3.20).

Proof. Eq.(1.4.27) is an easy consequence of Eq.(1.4.26). To prove (1.4.27), using an idea of Kou et al. [2005] (see also Cai et al. [2009]) along with a change of the ordre of integration and the integral with respect to κ, we obtain

$$\begin{aligned}\hat{C}(\alpha,\gamma) &= \int_0^\infty dT \int_{-\infty}^\infty e^{-\gamma\kappa-\alpha T} C(\kappa,T)d\kappa \\ &= \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau e^{-(\alpha+r)T}dT \int_{-(\log S_0+X_T)}^\infty e^{-\gamma\kappa}\left(S_0 e^{X_T}-e^{-\kappa}\right)d\kappa\right] \\ &= \frac{S_0^{\gamma+1}}{\gamma(\gamma+1)}\mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau e^{-(\alpha+r)T+(\gamma+1)X_T}dT\right]. \end{aligned} \tag{1.4.28}$$

Now, we suppose that $G(\gamma+1)<\alpha+r$ and applying the Itô's formula to the process $\left\{e^{-(\alpha+r)t+(\gamma+1)X_t}, t\geq 0\right\}$, we obtain

$$\begin{aligned} M_t &:= e^{-(\alpha+r)(t\wedge\tau)+(\gamma+1)X_{t\wedge\tau}} - e^{(\gamma+1)X_0} - \int_0^{t\wedge\tau} e^{-(\alpha+r)T}\left(-(\alpha+r)e^{(\gamma+1)X_s}+\mathcal{L}e^{(\gamma+1)X_T}\right)dT \\ &= e^{-(\alpha+r)(t\wedge\tau)+(\gamma+1)X_{t\wedge\tau}} - e^{(\gamma+1)X_0} - \left(G(\gamma+1)-(\alpha+r)\right)\int_0^{t\wedge\tau} e^{-\alpha T+(\gamma+1)X_T}dT, \end{aligned}$$

is a local martingale starting from $M_0=0$. Since $G(\gamma+1)<\alpha+r$, it follows from the Fubini's theorem that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-(\alpha+r)T+(\gamma+1)X_T}dT\right] &= \int_0^t e^{-(\alpha+r)T}\mathbb{E}\left[e^{(\gamma+1)X_T}\right]dT \\ &= \int_0^t e^{(-(\alpha+r)+G(\gamma+1))T}dT \\ &= \frac{1}{(-(\alpha+r)+G(\gamma+1))}\left[e^{(-(\alpha+r)+G(\gamma+1))t}-1\right] \quad \text{for all } t\geq 0.\end{aligned}$$

It follows from the dominated convergence theorem that $\{M_t;\ t\geq 0\}$ is actually a martingale. In particular

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[e^{-(\alpha+r)\tau+(\gamma+1)X_\tau}-e^{(\gamma+1)x}\right] \\ &\quad = \left(G(\gamma+1)-(\alpha+r)\right)\mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau e^{-(\alpha+r)T+(\gamma+1)X_T}dT\right]\end{aligned} \tag{1.4.29}$$

Combining Eq.(1.4.28) and (1.4.29) and appliying Corollary 1.3.1 we can therefore conclude that

$$\begin{aligned}\hat{C}(\alpha,\gamma) &= \frac{S_0^{\gamma+1}}{\gamma(\gamma+1)\left(G(\gamma+1)-(\alpha+r)\right)}\left(\mathbb{E}_x\left[e^{-(\alpha+r)\tau+(\gamma+1)X_\tau}\right]-e^{(\gamma+1)x}\right)\\ &= \frac{S_0^{\gamma+1}}{\gamma(\gamma+1)\left(G(\gamma+1)-(\alpha+r)\right)}\left(Q\cdot\mathbf{e}^{\rho}_{\alpha+r}(x)-e^{(\gamma+1)x}\right)\mathbf{1}_{(\log(L/S_0),\log(U/S_0))}(x),\end{aligned}$$

where $Q = A^{-1}V(\gamma+1)$ and A associated with $r+\alpha$ is defined as in Theorem 1.3.1 and V is given by the formula (1.3.20), which ends the proof.

1.5. Conclusion

This article considers the two-sided first exit problem for a jump diffusion having jumps with rational Laplace transform. Using Feynman-Kac formula, we have obtained an explicit formula for the first passage functional. Also, we have derived the distribution of the first passage time to two-sided barriers and the value at the first passage time.

Bibliographie

[1] Alili. A., and Kyprianou. A. E. (2005). Some remarks on first passage of Lévy processes, the American put and pasting principles. *The Annals of Applied Probability* **15**, 2062-2080.

[2] Avram. F., and Palmowski, Z. and Pistorius, M. R. (2015). On Gerber-Shiu functions and optimal dividend distribution for a Lévy risk-process in the presence of a penalty function. *The Annals of Applied Probability*, **25**, 1868-1935.

[3] Avram. F, Kyprianou. A. E, and M. R. Pistorius. M. R. (2004) Exit problems for spectrally negative Lévy processes and applications to (Canadized) Russian options. *The Annals of Applied Probability*, **14**, 215-238.

[4] Bertoin. J. Lévy Processes.(1998). *Cambridge University Press.*

[5] Cai. C, Chen. N., and Wan. X. (2009). Pricing double-barrier options under a flexible jump diffusion model. *Oper. Res. Lett.* **37**, 163-167.

[6] Cai. N., and Kou. S. G. (2011). Option pricing under a mixed-exponential jump diffsion model. *Management Science.* **57**, 2067-2081.

[7] Cai, N. (2009). On first passage times of a Hyper-Exponential jump diffusion process. *Oper. Res. Lett.* **37**, 127-134.

[8] Chen, Y.T. Lee, C.F., and Sheu, Y.C. (2007). An ODE approach for the expected discounted penalty at ruin in jump diffusion model. *Finance and Stochastics*, **11**,

323-355.

[9] Chen. Y.T., Sheu,Y.C., and M.C. Chang. (2013). A note on first passage functionals for Hyper-Exponential jump-diffusion process. *Electron. Comm. Probab.* **18**, 1-8.

[10] Chi. Y. (2010). Analysis of the expected discounted penalty function for a general jump-diffusion risk model and applications in finance. *Insurance : Mathematics & Economics*, **46**, 385-396.

[11] Geman. H., and Yor. M. (1996). Pricing and hedging double-barrier options : a probabilistic approach. *Mathematical Finance,* **6**, 365-378.

[12] Lewis, A. L. and Mordecki. E. (2008). Wiener-Hopf factorization for Lévy processes having positive jumps with rational transforms. *J. Appl. Probab.* **45** 118-134.

[13] Kou, S. G., Petrella. H., H. Wang. (2005). Pricing path-dependent options with jump risk via Laplace transforms. *Kyoto Econom. Rev.* **74**,1-23.

[14] Gradshteyn. I. S, and Ryzhik. I. (2000). Table of Integrals, Series, and Products, *Sixth Edition Academic Press.*

[15] Karatzas. I, and Shreve. S. (1991). Brownian motion and stochastic calculus. *Springer, Berlin.*

[16] Kuznetsov, A. (2012). On the distribution of exponential functionals for Lévy processes with jumps of rational transform. *Stochastic Process. Appl,* **122**, 654-663.

[17] Kyprianou. A. E. (2000). Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with applications. *Springer Verlag.*

[18] Mordecki. E. (2003). Ruin probabilities for Lévy processes with mixed-exponential negative jumps. *Theory of Probability & Its Applications*, **48**, 188-194.

[19] Rogers. L. (2000). Evaluating first-passage probabilities for spectrally one-sided Lévy processes. *Journal of Applied Probability,* **37**. 1173-1180.

[20] Xing. X, Zhang. H, and Jiang. Y. (2008). On the time to ruin and the deficit at ruin in a risk model with double-sided jumps. *Statistics and Probability Letters*, **78**, 2692-2699.

[21] Yin. C., Wen. Y, Zong. Z., and Shen. Z. (2014). The First Passage Time Problem for Mixed-Exponential Jump Processes with Applications in Insurance and Finance. *Abstract and Applied Analysis*, 1-9.

[22] Zhang. Z.M, Yang. Y, and Li.S. M. (2010). The perturbed compound poisson risk model with two-sided jumps. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**, 1773-1784.

CHAPITRE 2

Évaluation d'options, estimation des paramètres et simulation

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'évaluation d'options européennes et l'estimation des paramètres physiques par la méthode du maximum de vraisemblance. De plus, nous présentons les résultats numériques obtenus suite à une analyse comparative des résultats d'estimation sur des données simulées et des données de marché.

2.1. Le modèle sous la mesure physique

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}\right)$, muni de la mesure physique $\mathbb{P}$. Nous supposons, dans le marché, l'existance d'un actif sans risque accessible à l'investisseur dont la dynamique est définie par

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

où r est le taux sans risque et $B_0 = 1$. On définit le facteur d'actualisation pour un flux monétaire ayant lieu au temps t par

$$\beta_t = B_t^{-1} = e^{-rt}.$$

Sous la mesure de probabilité physique $\mathbb{P}$, Kou (voir Cai et al. [13], Kou [22], Ngou Polynice [29]) a proposé la dynamique suivante pour un titre risqué S_t

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = \mu dt + \sigma dW_t + d[\sum_{i=1}^{N_t}(V_i - 1)], \tag{2.1.1}$$

où la dérive μ et la volatilité $\sigma > 0$ sont supposées constantes, $W = \{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard, $N = \{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson simple de paramètre λ et $\{V_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Aussi, $\{W_t, t \geq 0\}, \{N_t, t \geq 0\}$ et $\{V_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sont mutuellement indépendants.

Supposons que la distribution de V est telle que $Y_1 = \ln(V_1)$ suit une mixture de loi gamma admettant la densité suivante :

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij}\frac{(\eta_j)^i y^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\eta_j y}\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{ij}\frac{(\theta_j)^i(-y)^{i-1}}{(i-1)!}e^{\theta_j y}\mathbf{1}_{\{y<0\}}, \tag{2.1.2}$$

avec, $p_{ij}, q_{ij} \geq 0$ telle que $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{i,j} = 1, \eta_j > 0$, $\theta_j > 0$, $\eta_i \neq \eta_j$ et $\theta_i \neq \theta_j$ pour tout $i \neq j$.

On peut montrer (voir annexe A) que la distribution de la variable aléatoire $V_1 = \exp(Y_1)$ est donnée par

$$f_V(v) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij}\frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!}\frac{(\ln(v))^{i-1}}{v^{\eta_j+1}}\mathbf{1}_{\{v\geq 1\}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{ij}\frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!}(-\ln(v))^{i-1}v^{\theta_j-1}\mathbf{1}_{\{0<v<1\}}. \tag{2.1.3}$$

En utilisant la formule d'Itô (voir par exemple Cai et al. [13] p. 414), la solution de l'équation différentielle stochastique (2.1.1) est donnée par

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \prod_{i=1}^{N_t} V_i && (2.1.4) \\ &= e^{X_t} && (2.1.5) \end{aligned}$$

où le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est donnée (sous la mesure $\mathbb{P}$) par

$$X_t = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa\right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{2.1.6}$$

avec $\kappa = \mathbb{E}\left[e^{Y_1} - 1\right]$.

2.2. Évaluation d'options et estimation

2.2.1. Changement de mesure

L'une des difficultés de la modélisation avec les processus de Lévy est le choix d'une mesure risque neutre pour fin d'évaluation. Afin d'évaluer un produit dérivé, nous devons d'abord transformer le modèle sous une mesure neutre au risque. Ce que nous ferons dans cette section.

Sous la mesure historique $\mathbb{P}$, l'actif sous-jacent a au temps t la valeur S_t donnée par l'équation (2.1.5) et X par l'équation (2.1.6). Pour une fonction positive h telle que $a = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(Y_i)] < \infty$, posons

$$U_t^{b,h} = e^{bW_t - t\frac{b^2}{2} - \lambda t(a-1)} \prod_{i=1}^{N_t} h(Y_i). \tag{2.2.7}$$

Le processus $U^{b,h}$ est une $\mathbb{P}$-martingale positive d'espérance 1 (voir annexe B). De plus, la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}^{b,h}$ associée à b et h est définie par la dérivée de Radon-

Nikodym basée sur la transformée d'Esscher du processus X

$$\frac{d\mathbb{Q}^{b,h}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = U_t^{b,h}. \tag{2.2.8}$$

On note qu'il existe une infinité de mesures équivalentes. Par exemple, plusieurs fonctions h permettent de définir une mesure de Lévy équivalente. Nous nous limitons ici à l'ensemble des mesures risque neutres équivalentes sous lesquelles le processus de rendement $\{X_t\}$ demeure un processus de diffusion avec sauts de distribution gamma.

Maintenant, on applique un résultat de Cont et Tankov (voir [15] et [18], Proposition 9.8 p. 308), on peut affirmer que $\hat{W}_t = W_t - bt$ est un $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{b,h}$ mouvement Brownien et $M_t = e^{-rt}S_t$ est une $\mathbb{Q}^{b,h}$ martingale si et seulement si $b = \left(r - \mu - \hat{\lambda}\hat{\kappa}\right)/\sigma$ avec r le taux sans risque. De plus, la dynamique du processus S sous la nouvelle mesure $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{b,h}$ est

$$S_t = S_0 e^{\hat{X}_t}, \tag{2.2.9}$$

où $\hat{X}$ un processus de Lévy défini par

$$\hat{X}_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \hat{\lambda}\hat{\kappa}\right)t + \sigma\hat{W}_t + \sum_{i=1}^{\hat{N}_t}\hat{Y}_i \tag{2.2.10}$$

avec $\hat{N}$ est un processus de Poisson d'intensité $\hat{\lambda} = \lambda a$, $\{\hat{Y}_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, la densité de la variable $\hat{Y}_1$ est donnée par $\hat{f}(x) = f_Y(x)h(x)/a$ sous la mesure $\mathbb{Q}$ et $\hat{\kappa} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{\hat{Y}_1} - 1]$.

Si $h(x) = e^x$ alors $a = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{Y_1}] = \kappa + 1$ et

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{e^x f(x)}{\kappa + 1} \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij}\frac{(\eta_j)^i x^{i-1}}{(\kappa+1)(i-1)!}e^{-(\eta_j-1)x}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{ij}\frac{(\theta_j)^i(-x)^{i-1}}{(\kappa+1)(i-1)!}e^{(\theta_j+1)x}\mathbf{1}_{\{x<0\}} \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} \hat{p}_{ij}\frac{(\eta_j-1)^i x^{i-1}}{(i-1)!}e^{-(\eta_j-1)x}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} \hat{q}_{ij}\frac{(\theta_j+1)^i(-x)^{i-1}}{(i-1)!}e^{(\theta_j+1)x}\mathbf{1}_{\{x<0\}}
\end{aligned}$$

avec

$$\hat{p}_{ij} = \frac{p_{ij}}{(\kappa+1)}\left(\frac{\eta_j}{\eta_j - 1}\right)^i, \qquad \hat{q}_{ij} = \frac{q_{ij}}{(\kappa+1)}\left(\frac{\theta_j}{\theta_j + 1}\right)^i,\ \eta_j > 1, j = 1, \ldots, n,$$

$$\hat{p}_{ij}, \hat{q}_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j}\hat{p}_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j}\hat{q}_{i,j} = 1,$$

Nous remarquons que le marché est incomplet, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de probabilités équivalentes à $\mathbb{P}$ sous lesquelles le prix actualisé est une martingale. Cette incomplétude des marchés fait surtout ressortir le problème du choix de la mesure martingale à utiliser pour fin d'évaluation. Il y a d'une part la mesure d'Esscher (Gerber et Shiu [17]) et d'autre part, il y a des mesures martingales de distances minimales par rapport à la mesure physique(Goll et Rüschendorf [19] et O. Ngou [29]).

2.2.2. Évaluation d'options européennes

Considérons une option d'achat européenne d'échéance T et de prix d'exercice K. L'actif sous-jacent a au temps t la valeur $S_t = S_0 e^{X_t}$, où le processus $\hat{X}$ est donné par l'équation (2.2.10). Nous supposons que le taux d'intérêt sans risque instantané correspond à la constante $r > 0$ et $\mathbb{Q}$ est la mesure risque-neutre. À l'échéance, la valeur de cette option d'achat est donnée par

$$e^{-rT}\mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_0 e^{X_T} - K\right)^+\right]. \tag{2.2.11}$$

Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, la valeur initiale de cette option est

$$\begin{aligned} e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_0 e^{X_T} - K\right)^+\right] &= e^{-rT}S_0\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{X_T}\mathbf{1}_{\{S_0 e^{X_T} \geq K\}}\right] - e^{-rT}K\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{S_0 e^{X_T} \geq K\}}\right] \\ &= e^{-rT}S_0\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{X_T}\mathbf{1}_{\{X_T \geq \log(K/S_0)\}}\right] - e^{-rT}K\mathbb{Q}\left(X_T \geq \log(K/S_0)\right). \end{aligned}$$

Le calcul de la quantité $\mathbb{Q}\left(X_T \geq \log(K/S_0)\right)$ exige uniquement de connaitre la distibution de X_T sous la mesure $\mathbb{Q}$. Mais, pour calculer la quantité $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{X_T}\mathbf{1}_{\{X_T \geq \log(K/S_0)\}}\right]$ nous allons utiliser le résultat suivant (Gauthier [18], Corollaire 6.5.2) :

Corollaire 2.1. *Supposons que sous une mesure risque neutre* $\mathbb{Q}, X_t = \ln\{S_t/S_0\}$ *est un processus de Lévy de caractéristique* (b, σ^2, υ) *et de fonction de survie* $\bar{F}_{\alpha,\sigma,\upsilon,t}(y) = \mathbb{P}(X(t) > y) = \bar{F}_{0,\sigma,\upsilon,t}(y - \alpha t)$*. Posons*

$$\hat{b} = b + \sigma^2 + \int_{-1}^{1} x(e^x - 1)\upsilon(dx), \tag{2.2.12}$$

et définissons une nouvelle mesure de Lévy $\hat{\upsilon}$ *telle que* $d\hat{\upsilon}/d\upsilon = e^x$*. Alors la valeur au temps* t *d'une option d'achat européenne de prix d'exercice* K *et de maturité* $t + T$ *est donnée par*

$$C(S_0, T) = S_0 \bar{F}_{0,\sigma,\hat{\upsilon},T}(E_1) - K e^{-rT} \bar{F}_{0,\sigma,\upsilon,T}(E_2) \tag{2.2.13}$$

où $E_1 = \ln(K/S_0) - T\hat{b}$ *et* $E_2 = \ln(K/S_0) - Tb$*.*

Pour appliquer ce résultat on définit $\Upsilon\left(\hat{u}, \sigma, \hat{\lambda}, \hat{\eta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{p}_{i,j}, \hat{q}_{i,j}, y, T\right) = \mathbb{Q}(Z_T > y)$ la probabilité qu'un processus de diffusion avec sauts de la forme $Z_t = \hat{u} + \sigma\hat{W}_t + \sum_{k=1}^{N_t} \hat{Y}_k$ excède y au temps T. L'intensité du processus de Poisson $\{\hat{N}_t, t \geq 0\}$ est $\hat{\lambda}$ et $\hat{\eta}_i, \hat{\theta}_i, \hat{p}_{i,j}, \hat{q}_{i,j}$ sont les paramètres de la loi de type (2.1.2) "loi gamma". D'après le Corollaire 2.1, on conclut que

$$\begin{aligned} C(S_0, T, K) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}\left(S_0 e^{X_T} - K\right)_+\right] \\ &= S_0 \Upsilon\left(r + \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa, \sigma, \lambda(\kappa + 1), \eta_i - 1, \theta_i + 1, \hat{p}_{i,j}, \hat{q}_{i,j}, \log\frac{K}{S_0}, T\right) \\ &\quad - e^{-rT} K \Upsilon\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa, \sigma, \lambda, \eta_i, \theta_i, p_{i,j}, q_{i,j}, \log\frac{K}{S_0}, T\right). \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Calcul de la fonction Υ, cas double-exponentiel

Nous allons maintenant illustrer comment calculer la fonction Υ en utilisant la même méthode que celle de Kou [22]. On pose $\Upsilon(u, \sigma, \lambda, \eta, \theta, p, q, a, T) = \mathbb{P}(Z_T > a)$ et supposons que la densité de la variable Y_1 est donnée par (2.1.2) avec $m = n = 1$ et $m_1 = n_1 = 1$, c'est-à-dire Y_1 suit une loi double exponentielle asymétrique admettant la densité suivante :

$$f(y) = p\eta e^{-\eta y}\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}} + (1-p)\theta e^{\theta y}\mathbf{1}_{\{y<0\}}, \tag{2.2.15}$$

donc on a

$$Y_1 \stackrel{d}{=} \begin{cases} \xi^+ & \text{avec probabilité } p \\ -\xi^- & \text{avec probabilité } q = 1-p. \end{cases} \tag{2.2.16}$$

ξ^+ et ξ^- sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f^+ et f^- avec

$$f^+(y) = \eta e^{-\eta y}\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}},$$
$$f^-(y) = \theta e^{-\theta y}\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}}.$$

De plus, par la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle, on a $(\xi^+ - \xi^- | \xi^+ > \xi^-) \stackrel{d}{=} \xi^+$ et $(\xi^+ - \xi^- | \xi^+ < \xi^-) \stackrel{d}{=} -\xi^-$ (voir annexe C). Donc

$$\xi^+ - \xi^- \stackrel{d}{=} \begin{cases} \xi^+ & \text{avec probabilité } \mathbb{P}(\xi^+ > \xi^-) = \frac{\theta}{\eta+\theta} \\ -\xi^- & \text{avec probabilité } \mathbb{P}(\xi^- > \xi^+) = \frac{\eta}{\eta+\theta}. \end{cases} \tag{2.2.17}$$

On applique la Proposition $B1$ ([22] p. 1098, voir aussi annexe C), on déduit alors

$$\sum_{i=1}^n Y_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} \sum_{i=1}^k \xi_i^+ & \text{avec probabilité } P_{n,k}, k = 1,2,\ldots,n \\ -\sum_{i=1}^k \xi_i^- & \text{avec probabilité } Q_{n,k}, k = 1,2,\ldots,n \end{cases} \tag{2.2.18}$$

avec $P_{n,k}$ et $Q_{n,k}$ sont données par

$$P_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-k-1}{i-k}\binom{n}{i}\left(\frac{\eta}{\eta+\theta}\right)^{i-k}\left(\frac{\theta}{\eta+\theta}\right)^{n-i} p^i q^{n-i},\ 1 \leq k \leq n-1$$
$$Q_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-k-1}{i-k}\binom{n}{i}\left(\frac{\eta}{\eta+\theta}\right)^{n-i}\left(\frac{\theta}{\eta+\theta}\right)^{i-k} p^{n-i} q^{i},\ 1 \leq k \leq n-1$$
$$P_{n,n} = p^n, \qquad Q_{n,n} = q^n.$$

On va maintenant calculer la densité de $Z + \sum_{i=1}^n \xi_i^+$. Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée de variance σ^2 indépendante de ξ_i^+ pour tout $i = 1,\ldots,n$. Par les propriétés du produit de convolution sur la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes, la densité de $Z + \sum_{i=1}^n \xi_i^+$ est donnée par

$$f_{Z+\sum_{i=1}^n \xi^+}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sum_{i=1}^n \xi^+}(t-x) f_Z(x) dx.$$

Maintenant, on utilise le fait que la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètres η est de loi gamma de paramètres n et η. On en déduit que

$$\begin{aligned} f_{Z+\sum_{i=1}^n \xi^+}(t) &= e^{-t\eta}(\eta^n) \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{x\eta}(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \\ &= e^{-t\eta}(\eta^n) e^{(\sigma\eta)^2/2} \int_{-\infty}^{t} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\sigma^2\eta)^2/(2\sigma^2)} dx, \end{aligned}$$

on effectue un changement de variable en posant $y = (x - \sigma^2\eta)/\sigma$, on obtient

$$\begin{aligned} f_{Z+\sum_{i=1}^n \xi^+}(t) &= e^{-t\eta} e^{(\sigma\eta)^2} \sigma^{n-1} \eta^n \int_{-\infty}^{t/\sigma - \sigma\eta} \frac{(t/\sigma - x - \sigma\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= (\sigma\eta)^n \frac{e^{(\sigma\eta)^2/2}}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t\eta} \mathrm{Hh}_{n-1}\left(-\frac{t}{\sigma} + \sigma n\right). \end{aligned}$$

Finalement, la densité de $Z + \sum_{i=1}^n \xi_i^+$ est donnée par

$$f_{Z+\sum_{i=1}^n \xi^+}(t) = (\sigma\eta)^n \frac{e^{(\sigma\eta)^2/2}}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t\eta} \mathrm{Hh}_{n-1}\left(-\frac{t}{\sigma} + \sigma n\right), \tag{2.2.19}$$

avec $\mathrm{Hh}_{-1}(x) = e^{-x^2/2}$ et pour tout $n \geq 0$,

$$\mathrm{Hh}_n(x) = \frac{1}{n!} \int_x^{\infty} (t-x)^n e^{-t^2/2} dt.$$

Par le même calcul, la densité de $Z - \sum_{i=1}^n \xi_i^-$ est donnée par

$$f_{Z-\sum_{i=1}^n \xi^-}(t) = (\sigma\theta)^n \frac{e^{(\sigma\theta)^2/2}}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{t\theta} \mathrm{Hh}_{n-1}\left(\frac{t}{\sigma} + \sigma n\right), \tag{2.2.20}$$

et les probabilités $\mathbb{P}\left(Z \pm \sum_{i=1}^{n} \xi^{\pm} \geq x\right)$ sont données par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^+ \geq x\right) &= \int_{-\infty}^{x} f_{Z+\sum_{i=1}^{n} \xi_i^+}(t)dt \\
&= (\sigma\eta)^n \frac{e^{(\sigma\theta)^2/2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{t\theta} \mathrm{Hh}_{n-1}\left(\frac{t}{\sigma} + \sigma n\right) dt \\
&= (\sigma\eta)^n \frac{e^{(\sigma\eta)^2/2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \mathrm{I}_{n-1}\left(x; -\eta, -\frac{1}{\sigma}, -\sigma\eta\right) \qquad (2.2.21)
\end{aligned}$$

avec $\mathrm{I}_n(c;\alpha,\beta,\delta) := \int_c^{\infty} e^{\alpha x}\mathrm{Hh}_{n-1}(\beta x - \delta)dx$. De la même manière on a

$$\mathbb{P}\left(Z - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^- \geq x\right) = (\sigma\theta)^n \frac{e^{(\sigma\theta)^2/2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \mathrm{I}_{n-1}\left(x; \theta, -\frac{1}{\sigma}, -\sigma\theta\right). \qquad (2.2.22)$$

Pour conclure, on définit $\pi_n := \mathbb{P}(N_T = n) = e^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n!$ et $Z(T) = \mu T + \sigma W_T + \sum_{i=1}^{N_T} Y_i$ et on utilise le fait que les processus $\{W_t, t \geq 0\}, \{N_t, t \geq 0\}$ et $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sont mutuellement indépendants. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z(T) \geq a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\mu T + \sigma W_T + \sum_{i=1}^{n} Y_i \geq a\right) \mathbb{P}(N_T = n) \\
&= \pi_0 \mathbb{P}\left(\mu T + \sigma\sqrt{T} W_1 \geq a\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} P_{n,k} \mathbb{P}\left(\mu T + \sigma\sqrt{T} W_1 + \sum_{i=1}^{k} \xi_i^+\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k} \mathbb{P}\left(\mu T + \sigma\sqrt{T} W_1 - \sum_{i=1}^{k} \xi_i^-\right) \qquad (2.2.23)
\end{aligned}$$

Finalement, en combinant les équations (2.2.21), (2.2.22) et (2.2.23), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z(T) \geq a) &= \frac{e^{(\sigma\eta)^2 T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} P_{n,k} \left(\sigma\sqrt{T}\eta\right)^k \mathrm{I}_{k-1}\left(a - \mu T; -\eta, -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta\sqrt{T}\right) \\
&\quad + \frac{e^{(\sigma\theta)^2 T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k} \left(\sigma\sqrt{T}\theta\right)^k \mathrm{I}_{k-1}\left(a - \mu T; \theta, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\theta\sqrt{T}\right) \\
&\quad + \pi_0 \phi\left(-\frac{a - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \qquad (2.2.24)
\end{aligned}$$

Calcul de la fonction Υ, cas gamma

Supposons que la densité de la variable Y_1 est donnée par (2.1.2) avec $m = n = 1, m_1 = n_1 \neq 1$ et $p_{ij} + q_{ij} = 1$, ($p_{i,j} = p$ et $q_{ij} = q$) c'est-à-dire, la variable Y_1 est de densité donnée par

$$f_Y(y) = p\frac{\eta^i y^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\eta y}\mathbf{1}_{\{y>0\}} + q\frac{\theta^i(-y)^{i-1}}{(i-1)!}e^{\theta y}\mathbf{1}_{\{y<0\}}. \qquad (2.2.25)$$

Maintenant, on utilise encore le fait que la somme de i variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre η est de loi gamma de paramètres i et η. On déduit que

$$Y_1 \stackrel{d}{=} \begin{cases} Y_1^+ = \sum_{j=1}^{i} \xi_j^+ & \text{avec probabilité } p \\ Y_1^- = -\sum_{j=1}^{i} \xi_j^- & \text{avec probabilité } q = 1-p, \end{cases} \qquad (2.2.26)$$

avec $\xi_j^+, j = 1, \ldots, i$ (repectivement $\xi_j^-, j = 1, \ldots, i$) sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre η (respectivement de paramètre θ). De plus, en appliquant le Lemme B.1. ([22] page 1098, voir aussi annexe C), on a

$$\sum_{j=1}^{in} \xi_j^+ - \sum_{j=1}^{im} \xi_j^- \stackrel{d}{=} \begin{cases} \sum_{j=1}^{ik} \xi_j^+ & \text{avec prob } A(in, im, \eta, \theta), 1 \leq k \leq n, \\ -\sum_{j=1}^{ik} \xi_j^- & \text{avec prob } A(im, in, \theta, \eta),\ 1 \leq k \leq m, \end{cases} \qquad (2.2.27)$$

avec $A(n, m, \eta, \theta) = \binom{n+m-k-1}{m-1}\left(\frac{\eta}{\eta+\theta}\right)^{n-k}\left(\frac{\theta}{\eta+\theta}\right)^m$. Par le même raisonnement que précédemment on déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z + \sum_{j=1}^{n} Y_j^+ \geq x\right) &= \mathbb{P}\left(Z + \sum_{j=1}^{in} \xi_j^+ \geq x\right) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_{Z+\sum_{i=1}^{in}\xi_j^+}(t)dt \qquad (2.2.28) \\ &= (\sigma\eta)^{in}\frac{e^{(\sigma\eta)^2/2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{t\eta}\mathrm{Hh}_{in-1}\left(\frac{t}{\sigma} + \sigma\eta\right)dt \\ &= (\sigma\eta)^{in}\frac{e^{(\sigma\eta)^2/2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\mathrm{I}_{in-1}\left(x; -\eta, -\frac{1}{\sigma}, -\sigma\eta\right). \qquad (2.2.29) \end{aligned}$$

On définit $\pi_n := \mathbb{P}(N_T = n) = e^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n!$ et $Z(T) = \mu T + \sigma W_T + \sum_{j=1}^{N_T} Y_j$, on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z(T) \geq a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\mu T + \sigma W_T + \sum_{i=1}^{n} Y_i \geq a\right) \mathbb{P}(N_T = n) \\ &= \pi_0 \mathbb{P}\left(\mu T + \sigma\sqrt{T} W_1 \geq a\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} P_{n,k} \mathbb{P}\left(\mu T + \sigma\sqrt{T} W_1 + \sum_{j=1}^{ik} \xi_j^+ \geq a\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k} \mathbb{P}\left(\mu T + \sigma\sqrt{T} W_1 - \sum_{j=1}^{ik} \xi_j^- \geq a\right) \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Finalement, en combinant les deux équations (2.2.21) et (2.2.22), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z(T) \geq a) &= \frac{e^{(\sigma\eta)^2 T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} P_{n,k} \left(\sigma\sqrt{T}\eta\right)^{ik} \mathrm{I}_{ik-1}\left(a - \mu T; -\eta, -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta\sqrt{T}\right) \\ &\quad + \frac{e^{(\sigma\theta)^2 T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k} \left(\sigma\sqrt{T}\theta\right)^{ik} \mathrm{I}_{ik-1}\left(a - \mu T; \theta, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\theta\sqrt{T}\right) \\ &\quad + \pi_0 \phi\left(-\frac{a - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

2.3. Estimation par la méthode de maximum de vraisemblance

La disponibilité de la fonction de densité et de la fonction de répartition nous permet d'estimer les paramètres du modèle par la méthode de maximum de vraisemblance. Cependant, un calcul préliminaire est nécessaire afin d'obtenir l'expression de la fonction de densité que nous proposons d'utiliser.

2.3.1. Estimation : cas double-exponentiel

Grâce à l'équation (2.2.24), on peut exprimer la fonction de répartition de la variable X_T comme suit

$$F_{X_T}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_T}(t)dt = 1 - \mathbb{P}\left(Z(T) \geq x\right), \tag{2.3.32}$$

ainsi, la fonction de densité est donnée par

$$\begin{aligned} f_{X_T}(x) &= -\frac{d}{dx}\mathbb{P}\left(Z(T) \geq x\right) \\ &= -\frac{d}{dx}\{\frac{e^{(\sigma\eta)^2T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n\sum_{k=1}^{n}P_{n,k}\left(\sigma\sqrt{T}\eta\right)^k \mathrm{I}_{k-1}\left(x-\mu T; -\eta, -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta\sqrt{T}\right) \\ &\quad +\frac{e^{(\sigma\theta)^2T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n\sum_{k=1}^{n}Q_{n,k}\left(\sigma\sqrt{T}\theta\right)^k \mathrm{I}_{k-1}\left(x-\mu T; \theta, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\theta\sqrt{T}\right) \\ &\quad +\pi_0\phi\left(-\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\}. \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

En dérivant l'équation (2.2.24) par rapport à x, nous pouvons déduire que la densité $f_{X_T}(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned} f_{X_T}(x) &= \frac{e^{(\sigma\eta)^2T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n\sum_{k=1}^{n}P_{n,k}\left(\sigma\sqrt{T}\eta\right)^k e^{-\eta x}\mathrm{H}_{k-1}\left(-\frac{x}{\sigma\sqrt{T}}+\sigma\eta\sqrt{T}\right) \\ &\quad +\frac{e^{(\sigma\theta)^2T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n\sum_{k=1}^{n}Q_{n,k}\left(\sigma\sqrt{T}\theta\right)^k e^{\theta x}\mathrm{H}_{k-1}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{T}}+\sigma\theta\sqrt{T}\right) \\ &\quad +\frac{\pi_0}{\sigma\sqrt{T}}\varphi\left(-\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \end{aligned} \tag{2.3.34}$$

avec φ est la densité de la loi normale centrée réduite.

Maintenant, soit $R_t = \ln\left(S_{th}/S_{(t-1)h}\right), t = 1, 2, \ldots, T = M/h$, les rendements journaliers du processus de prix, T est la date de la dernière observation et h est un horizon journalier. Par les propriétés du processus de Lévy, dont les accroissements sont stationnaires et indépendants, les rendements sont aussi indépendants et identiquement distribués de même loi que

$$R_1 = \bar{u}h + \sigma W_h + \sum_{i=1}^{N_h} Y_i,$$

avec $\bar{\mu} = \mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa$ et $\kappa = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[e^{Y_1} - 1\right]$. En utilisant l'équation (2.3.34), on déduit que le logarithme de la vraisemblance des variables $R_1, R_2, \ldots, R_M$ est donné par

$$\mathcal{L}(R_t|\bar{\mu}, \sigma, \lambda, \eta, \theta, p) = \sum_{t=1}^{M} \log\left(f(R_t|\bar{\mu}, \sigma, \lambda, \eta, \theta, p)\right), \tag{2.3.35}$$

avec

$$\begin{aligned} f(R_t|\bar{\mu}, \sigma, \lambda, \eta, \theta, p)) \;=\; & \frac{e^{(\sigma\eta)^2 h/2}}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} P_{n,k} \left(\sigma\sqrt{h}\eta\right)^k e^{-\eta(R_t - \bar{\mu}h)} \mathrm{H}_{k-1}\big(- \frac{R_t - \bar{\mu}h}{\sigma\sqrt{h}} + \sigma\eta\sqrt{h}\big) \\ & + \frac{e^{(\sigma\theta)^2 h/2}}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k} \left(\sigma\sqrt{h}\theta\right)^k e^{\theta(R_t - \bar{\mu}h)} \mathrm{H}_{k-1}\big(\frac{R_t - \bar{\mu}h}{\sigma\sqrt{h}} + \sigma\theta\sqrt{h}\big) \\ & + \frac{\pi_0}{\sigma\sqrt{h}} \varphi\big(- \frac{R_t - \bar{\mu}h}{\sigma\sqrt{h}}\big). \end{aligned}$$

Ce résultat est similaire à celui de Ben Ameur et al. (voir [8]).

2.3.2. Estimation : cas gamma

Comme dans le cas double-exponentiel, la fonction densité de $Z(T)$ pour le cas $gamma(\eta, i)$ est donnée par

$$f_{X_T}(x) \;=\; -\frac{d}{dx}\mathbb{P}\left(Z(T) \geq x\right).$$

Ainsi, en dérivant l'équation (2.2.31) par rapport à x, on déduit que la densité de $Z(T)$ est donnée par

$$\begin{aligned} f_{X_T}(x) \;=\; & \frac{e^{(\sigma\eta)^2 T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} P_{n,k} \left(\sigma\sqrt{T}\eta\right)^{ik} e^{-\eta x} \mathrm{H}_{ik-1} \left(-\frac{x}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\eta\sqrt{T}\right) \\ & + \frac{e^{(\sigma\theta)^2 T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k} \left(\sigma\sqrt{T}\theta\right)^{ik} e^{\theta x} \mathrm{H}_{ik-1} \left(\frac{x}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\theta\sqrt{T}\right) \\ & + \frac{\pi_0}{\sigma\sqrt{T}} \varphi\left(-\frac{x - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

Et le logarithme de la vraisemblance des variables $R_1, R_2, \ldots, R_M$ est donné par

$$\mathcal{L}(R_t|\bar{\mu}, \sigma, \lambda, \eta, \theta, p) = \sum_{t=1}^{M} \log \left(f(R_t|\bar{\mu}, \sigma, \lambda, \eta, \theta, p) \right), \tag{2.3.37}$$

avec

$$\begin{aligned} f(R_t|\bar{\mu}, \sigma, \lambda, \eta, \theta, p)) \quad = \quad & \frac{e^{(\sigma\eta)^2 h/2}}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} P_{n,k} \left(\sigma\sqrt{h}\eta\right)^{ik} e^{-\eta(R_t - \bar{\mu}h)} \mathrm{H}_{ik-1}\big(- \frac{R_t - \bar{\mu}h}{\sigma\sqrt{h}} + \sigma\eta\sqrt{h}\big) \\ & + \frac{e^{(\sigma\theta)^2 h/2}}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k} \left(\sigma\sqrt{h}\theta\right)^{ik} e^{\theta(R_t - \bar{\mu}h)} \mathrm{H}_{ik-1}\big(\frac{R_t - \bar{\mu}h}{\sigma\sqrt{h}} + \sigma\theta\sqrt{h}\big) \\ & + \frac{\pi_0}{\sigma\sqrt{h}} \varphi\big(- \frac{R_t - \bar{\mu}h}{\sigma\sqrt{h}}\big). \end{aligned}$$

2.4. Résultats numériques

L'un des problèmes les plus importants en finance du marché est celui de la confrontation des modèles avec la réalité observée. Ainsi, après présentation des différentes théories dont nous faisons usage dans ce mémoire, nous présentons, dans cette section les résultats obtenus en appliquant ces théories, ainsi qu'une analyse comparative des résultats d'estimation sur des données simulées et des données réelles. Nous allons utiliser à cet effet la même méthode que celle utilisée dans Rémillard [33] (chapitre 6) et Chérif [14] pour l'étude du modèle de Merton.

2.4.1. Précision de la méthode du maximum de vraisemblance

Pour mesurer la précision des estimateurs obtenus selon la méthode du maximum de vraisemblance, nous utilisons la matrice d'information de Fisher. En effet, si $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^6$ est l'estimateur de $w = (\mu, \sigma, \lambda, \eta, \theta, p)$ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance, alors pour un nombre d'observations n assez grand, on a

$$\sqrt{n}\big(\hat{\omega} - \omega\big) \sim \mathcal{N}_6\big(0, \hat{\Sigma}\big), \tag{2.4.38}$$

$\hat{\Sigma}$ est la matrice variance covariance telle que $\hat{\Sigma} = \mathcal{I}_n^{-1}$ où $\mathcal{I}_n^{-1}$ est la matrice estimée de l'information de Fisher donnée par $\mathcal{I}_n(\hat{\omega}) = -H(\hat{\omega})/n$ avec $H(\hat{\omega})$ la matrice des dérivées secondes (la matrice hessienne) de la fonction de log-vraisemblance (Rémillard [33] Proposition B.5.1).

Maintenant, supposons qu'il existe une transformation $\mathcal{T} : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ telle que toutes les dérivées partielles $J_{ij} = \frac{\partial \mathcal{T}_i}{\partial \omega_j}$ existent et sont continues dans un voisinage de $\omega \in \mathbb{R}^6$, alors par le Théorème de Slutzky, voir par exemple Rémillard [33] (Théorème B.3.1), on a pour n assez grand

$$\sqrt{n}\big(\mathcal{T}(\hat{\omega}) - \mathcal{T}(\omega)\big) \sim \mathcal{N}_6\big(0, \hat{V}\big), \tag{2.4.39}$$

avec $\hat{V} = J\hat{\Sigma}J'$ et J est la matrice jacobienne associée aux paramètres transformés.
Après avoir établi la matrice de variance covariance $\hat{V}$, nous calculons la marge d'erreur à 95% pour chacun des paramètres estimés, ensuite, nous construisons un intervalle de confiance au niveau 95% pour ces mêmes paramètres.

2.4.2. Résultats sur des données simulées

Nous avons simulé un processus de diffusion avec sauts de distribution double exponentielle (asymétrique) de Kou, ainsi qu'un processus avec sauts de distribution double gamma (avec $i = 2$) sur une période de 2 ans, d'une manière journalière. Les paramètres théoriques du modèle sont fixés à $\mu = -0.01;\ \sigma = 0.02;\ \lambda = 100;\ \eta = 5;\ \theta = 10$ et $p = 0.7$.
Maintenant, soit $R_t = \ln\left(S_{th}/S_{(t-1)h}\right), t = 1, 2, \ldots, T = M/h$, les rendements journaliers du processus de prix, T est la date de la dernière observation et h est un horizon journalier ($h = 1/252$). Nous voulons estimer les paramètres qui commandent le processus des log-rendements journaliers par la méthode du maximum de vraisemblance, ensuite, nous les comparons aux vrais paramètres que nous avons fixés pour la simulation.
Pour éliminer les contraintes de positivité sur les paramètres $\sigma, \lambda, \eta, \theta$ et la contrainte $p \in [0, 1]$, nous effectuons une transformation des paramètres en posant $(\mu, \sigma, \lambda, \eta, \theta, p) = \mathcal{T}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6) = (\omega_1, e^{\omega_2}, e^{\omega_3}, e^{\omega_4}, e^{\omega_5}, e^{-\omega_6^2})$. La matrice variance covariance $\hat{V}$ est donnée par (2.4.39) avec $J = diag\big(1, e^{\omega_1}, e^{\omega_2}, e^{\omega_3}, e^{\omega_4}, e^{\omega_5}, -2\omega_6 e^{-\omega_6^2}\big)$. Ainsi, la marge d'erreur pour chaque paramètre est donnée par la formule $ME = \pm 1.96\sqrt{diag(\hat{V})/n}$ avec $n = 500$ est le nombre de simulations.
Les tableaux 2.1 et 2.2 contiennent les résultats de l'estimation des paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance ainsi que leurs intervalles de confiance avec $M = 2$ ans. Nous constatons que cette méthode présente une certaine stabilité. En effet, dans l'ajustement de la fonction de densité du modèle, l'algorithme donne presque les mêmes

paramètres estimés. De plus, nous remarquons que la moyenne échantillonnale de tous les paramètres reste très proche de leurs valeurs théoriques qui sont, par la même occasion, incluses dans les intervalles de confiance au seuil de 95%. Ainsi, si nous effectuons le **test t** bilatéral (de niveau 5%) sur une moyenne, alors nous ne rejetons pas l'hypothèse nulle d'égalité à la valeur théorique au profit de l'hypothèse alternative.

Tableau 2.1 – Les paramètres estimés sur les données simulées selon la méthode de maximum de vraisemblance pour le modèle double exponentiels avec $M = 2$ ans.

Paramètre	**Valeur théorique**	**Moy**	**Éc**	$\bar{\bar{\mathbf{s}}}$	**IC à** 95%	**p-value**
μ	-0.01	-0.0099	0.0181	0.0176	$[-0.0444; 0.0247]$	0.9934
σ	0.02	0.0200	0.0008	0.0008	$[0.0183; 0.0216]$	0.9604
λ	100	88.8130	6.0909	7.0205	$[75.0392; 102.5868]$	0.1111
η	5	4.4716	0.4642	0.4189	$[3.6497; 5.2935]$	0.2072
θ	10	9.5234	1.5286	1.4328	$[6.7124; 12.3344]$	0.7394
p	0.7	0.7015	0.0347	0.0378	$[0.6273; 0.7756]$	0.9972

500 trajectoires de rendements journaliers ont été simulées sur un horizon de 2 ans. Pour chacune de ces trajectoires, les paramètres ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. **Moy :** présente la moyenne des 500 estimations du paramètre alors que **Éc :** donne l'écart-type échantillonal de ces 500 estimations. **IC :** donne l'intervalle de confiance de niveau 95%. $\bar{\bar{\mathbf{s}}}$: donne la moyenne des 500 estimations de l'erreur-type et **p-value :** donne la p-value du test qui vérifie si la moyenne est significativement différente de la vraie valeur.

Tableau 2.2 – Les paramètres estimés sur les données simulées selon la méthode de maximum de vraisemblance pour le modèle gamma avec $i = 2$ et $M = 2$.

Paramètre	**Valeur théorique**	**Moy**	**Éc**	$\bar{\bar{\textbf{s}}}$	**IC à** 95%	**p-value**
μ	-0.01	-0.0017	0.0178	0.0173	$[-0.0357; 0.0323]$	0.6320
σ	0.02	0.0200	0.0008	0.0008	$[0.0185; 0.0215]$	0.9842
λ	100	88.7612	6.3725	6.9202	$[75.1842; 102.3382]$	0.1044
η	5	4.5497	0.1992	0.2972	$[3.9666; 5.1327]$	0.1297
θ	10	9.4403	0.5752	1.0187	$[7.4418; 11.4388]$	0.5827
p	0.7	0.7155	0.0343	0.0365	$[0.6439; 0.7872]$	0.9583

2.4.3. Résultats sur des données du marché

Nous avons porté notre choix sur les données du Bitcoin (disponibles librement sur le site https ://ca.finance.yahoo.com/quote/BTC-CAD/history ?p=BTC-CAD), en raison de la fluctuation de leurs valeurs. Nous utilisons les données journalières qui couvrent une période de cinq ans allant de l'année 2012 à l'année 2017, la période durant laquelle le Bitcoin a subi une forte variation des prix.

L'ajustement par maximum de vraisemblance des rendements journaliers fournit les paramètres du tableau 2.3 (respectivement tableau 2.4) pour le modèle double exponentiel (le modèle gamma avec $i = 2$). Nous observons que cette méthode présente une stabilité quant aux résultats obtenus. En effet, nous remarquons que quelque soit la valeur de M, l'algorithme converge presque toujours vers la même solution.

Tableau 2.3 – Intervalles de confiance des paramètres du modèle à sauts double exponentiels par la méthode de maximum de vraisemblance obtenus à partir de l'indice **Bitcoin** avec $M = 2$.

Paramètres	**MLE, IC à** 95%
μ	1.1547 ± 0.5778
σ	0.5049 ± 0.0417
λ	87.1441 ± 10.9861
η	6.5222 ± 0.9509
θ	6.5993 ± 0.9299
p	0.4853 ± 0.0579

Tableau 2.4 – Intervalles de confiance des paramètres du modèle à sauts double gamma ($i = 2$) par la méthode de maximum de vraisemblance obtenus à partir de l'indice **Bitcoin** avec $M = 2$.

Paramètres	**MLE, IC à** 95%
μ	0.7098 ± 0.9955
σ	1.2476 ± 0.0616
λ	6.5672 ± 2.5776
η	3.1498 ± 1.0924
θ	3.1373 ± 1.1546
p	0.5186 ± 0.1764

CONCLUSION

Le but poursuivi dans ce mémoire est, dans un premier lieu, de proposer une formule explicite pour la distribution de premier instant où la double barrière est franchie par un modèle de diffusion avec sauts de type Lewis et Mordecki (2008). Notre méthode est basée sur la formule de Feynman-Kac, en résolvant l'équation intégro-différentielle correspondante. Cette solution est obtenue en appliquant le lemme 1.3.1.

Dans un deuxième lieu, on s'est intéréssé à l'évaluation d'options européennes et l'estimation des paramètres physiques. La disponibilité de la fonction de densité et de la fonction de répartition rend possible l'estimation des paramètres du modèle par la méthode de maximum de vraisemblance. Nous avons constaté que cette méthode présente une certaine stabilité. En effet, dans l'ajustement de la fonction de densité du modèle, l'algorithme donne presque les mêmes paramètres estimés. De plus, la moyenne échantillonnale de tous les paramètres reste très proche de leurs valeurs théoriques.

Pour étendre les résultats de ce mémoire, on pourrait aborder le problème d'évaluation d'options européennes et américaines pour les modèles hyper-exponentiels et mixte-gamma avec $n > 1$ et $m > 1$. Aussi, l'estimation des paramètres physiques avec une analyse comparative des résultats d'estimation sur des données simulées et des données du marché.

ANNEXE

2.4.4. Annexe A

Théorème 2.2. *Si la distribution de V est telle que $Y = \ln(V)$ suit une mixture de loi gamma de densité :*

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_j} p_{ij} \frac{(\eta_j)^i y^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\eta_j y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} q_{ij} \frac{(\theta_j)^i (-y)^{i-1}}{(i-1)!} e^{\theta_j y} \mathbf{1}_{\{y<0\}}, \tag{2.4.40}$$

avec, $p_{ij}, q_{ij} \geq 0$ tels que $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_j} p_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} q_{i,j} = 1, Re(\eta_j)$, $Re(\theta_j) > 0$, $\eta_i \neq \eta_j$ et $\theta_i \neq \theta_j$ pour tout $i \neq j$.
Alors la distribution de la variable aléatoire $V = \exp(Y)$ est donnée par

$$f_V(v) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_j} p_{ij} \frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!} \frac{(\ln(v))^{i-1}}{v^{\eta_j+1}} \mathbf{1}_{\{v \geq 1\}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} q_{ij} \frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!} (-\ln(v))^{i-1} v^{\theta_j - 1} \mathbf{1}_{\{0<v<1\}}. \tag{2.4.41}$$

Démonstration. On a pour toute fonction mesurable g :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g(V)\right] &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_j} p_{ij} \int_0^{+\infty} g(e^y) \frac{(\eta_j)^i y^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\eta_j y} dy \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} q_{ij} \int_{-\infty}^{0} g(e^y) \frac{(\theta_j)^i (-y)^{i-1}}{(i-1)!} e^{\theta_j y} dy. \end{aligned}$$

On effectue un changement de variable en posant $v = e^y$, on a alors $y = \ln(v)$ et $dy = (1/v)dv$. De plus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g(V)\right] &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij}\int_1^{+\infty} g(v)\frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!}\frac{(\ln(v))^{i-1}}{v^{\eta_j+1}}dv \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{ij}\int_0^{1} g(v)\frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!}(-\ln(v))^{i-1}v^{\theta_j-1}dv,\end{aligned}$$

Ainsi, la densité de la variable V est donnée par

$$f_V(v) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_j} p_{ij}\frac{(\eta_j)^i}{(i-1)!}\frac{(\ln(v))^{i-1}}{v^{\eta_j+1}}\mathbf{1}_{\{v\geq 1\}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} q_{ij}\frac{(\theta_j)^i}{(i-1)!}(-\ln(v))^{i-1}v^{\theta_j-1}\mathbf{1}_{\{0<v<1\}}.$$

□

2.4.5. Annexe B

Théorème 2.3. *Pour une fonction positive h telle que $a = \mathbb{E}[h(Y_i)] < \infty$, posons*

$$U_t^{b,h} = e^{bW_t - t\frac{b^2}{2} - \lambda t(a-1)}\prod_{i=1}^{N_t} h(Y_i). \tag{2.4.42}$$

Alors le processus $U^{b,h}$ est une $\mathbb{P}$-martingale positive d'espérance 1.

Démonstration. Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ une semi-martingale issue de 0 et posons

$$\begin{aligned}\epsilon(Z)_t &= e^{Z_t - \frac{1}{2}[Z,Z]_t^c}\prod_{0<s\leq t}\left[1+\Delta Z_s\right]e^{-\Delta Z_s} \\ &= e^{Z_t - \frac{1}{2}[Z,Z]_t^c + \sum_{0<s\leq t}[\ln(1+\Delta Z_s) - \Delta Z_s]},\end{aligned}$$

avec $[Z,Z]_t^c$ la partie continue de la variation quadratique qui est adaptée et à variation bornée. D'après la formule de Doléans-Dade (voire par exemple [24] et [15]), on sait que si $(Z_t)_{t\geq 0}$ est martingale, alors $(\epsilon(Z)_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Pour notre cas, on définit $Z_t = bW_t - \lambda t(a-1) + \sum_{i=1}^{N_t} (h(Y_i) - 1)$ avec $a = \mathbb{E}[h(Y_i)] < \infty$. Puisque $\sum_{i=1}^{N_t} (h(Y_i) - 1)$ est à variation bornée et $-\lambda t(a-1)$ aussi, on a

$$[Z, Z]_t^c = [bW, bW]_t^c = b^2 [W, W]_t^c = b^2 t.$$

Ici, on a $\Delta Z_t = h(Y_i) - 1$ si le $k^{\text{ième}}$ saut de N est au temps t. Alors, on a

$$\begin{aligned} \epsilon(Y)_t &= e^{Z_t - \frac{b^2 t}{2} + \sum_{k=1}^{N_t} [\ln(h(Y_i)) - h(Y_i) + 1]} \\ &= e^{bW_t - t\frac{b^2}{2} - \lambda t(a-1) + \sum_{i=1}^{N_t} \ln h(Y_i)} \\ &= e^{bW_t - t\frac{b^2}{2} - \lambda t(a-1)} \prod_{i=1}^{N_t} h(Y_i) \\ &= U^{b,h}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &Z_{1,t} = bW_t, \\ &Z_{2,t} = \sum_{i=1}^{N_t} (h(Y_i) - 1) - \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_t} (h(Y_i) - 1)] = \sum_{i=1}^{N_t} (h(Y_i) - 1) - \lambda t(a-1), \end{aligned}$$

sont des martingales. Donc

$$Z_t = bW_t - \lambda t(a-1) + \sum_{i=1}^{N_t} (h(Y_i) - 1)$$

est aussi une martingale (comme somme de deux martingales). Ceci implique que le processus $U^{b,h}$ est une martingale positive d'espérance constante $\mathbb{E}[U_0^{b,h}] = 1$. $\square$

2.4.6. Annexe C

Lemme 2.4. *Soient ξ^+ et ξ^- deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de densités f^+ et f^- telles que*

$$\begin{aligned} f^+(y) &= \eta e^{-\eta y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}}, \\ f^-(y) &= \theta e^{-\theta y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}}. \end{aligned}$$

Alors, on a $(\xi^+ - \xi^- | \xi^+ > \xi^-) \stackrel{d}{=} \xi^+$ *et* $(\xi^+ - \xi^- | \xi^+ < \xi^-) \stackrel{d}{=} -\xi^-$.

Démonstration. On sait que l'unique loi de probabilité continue ayant la propriété d'absence de mémoire est la loi exponentielle. Ainsi, on a pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\xi^+ - \xi^- > t | \xi^+ > \xi^-\right) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\xi^+ - y > t | \xi^+ > y\right) \theta e^{-\theta y} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\xi^+ > t + y | \xi^+ > y\right) \theta e^{-\theta y} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\xi^+ > t\right) \theta e^{-\theta y} dy \\
&= \mathbb{P}\left(\xi^+ > t\right).
\end{aligned}$$

On a donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\xi^+ - \xi^- > t\right) &= \mathbb{P}\left(\xi^+ - \xi^- > t | \xi^+ > \xi^-\right) \mathbb{P}\left(\xi^+ > \xi^-\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\xi^+ - \xi^- > t | \xi^+ < \xi^-\right) \mathbb{P}\left(\xi^+ < \xi^-\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi^+ > t\right) \frac{\theta}{\eta + \theta} + \mathbb{P}\left(\xi^- > t\right) \frac{\eta}{\eta + \theta},
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\xi^+ - \xi^- \stackrel{d}{=} \begin{cases} \xi^+ & \text{avec probabilité } \mathbb{P}\left(\xi^+ > \xi^-\right) = \frac{\theta}{\eta+\theta} \\ -\xi^- & \text{avec probabilité } \mathbb{P}\left(\xi^- > \xi^+\right) = \frac{\eta}{\eta+\theta}. \end{cases} \tag{2.4.43}$$

□

Lemme 2.5. *Soient* $\{\xi_i^+\}$ *et* $\{\xi_i^-\}$ *deux suites de variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles telles que* $\xi_i^+ \stackrel{i.i.d}{\sim} Exp(\eta)$ *et* $\xi_i^- \stackrel{i.i.d}{\sim} Exp(\theta)$. *Alors on a*

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^+ - \sum_{j=1}^m \xi_j^- \stackrel{d}{=} \begin{cases} \sum_{i=1}^k \xi_i^+ & \textit{avec proba } \binom{n+m-k-1}{m-1} \left(\frac{\eta}{\eta+\theta}\right)^{n-k} \left(\frac{\theta}{\eta+\theta}\right)^m, \ k = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^l \xi_i^- & \textit{avec proba } \binom{n+m-l-1}{m-1} \left(\frac{\eta}{\eta+\theta}\right)^n \left(\frac{\theta}{\eta+\theta}\right)^{m-l}, \ k = l, \ldots, n. \end{cases}$$

Démonstration. On pose

$$A(n,m) = \sum_{i=1}^n \xi_i^+ - \sum_{j=1}^m \xi_j^-, \tag{2.4.44}$$

on note par $\psi(n,m)$ la fonction génératrice des moments de $A(n,m)$

$$\psi(n,m) = \mathbb{E}[e^{tA(n,m)}]. \tag{2.4.45}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\psi(n,m) = \mathbb{E}[e^{tA(n,m)}] &= \mathbb{E}[e^{tA(n-1,m-1)+t(\xi_n^+ - \xi_m^-)}] \\
&= \mathbb{E}[e^{tA(n-1,m-1)+t(\xi_n^+ - \xi_m^-)} | \xi_n^+ > \xi_m^-] \mathbb{P}(\xi_n^+ > \xi_m^-) \\
&\quad + \mathbb{E}[e^{tA(n-1,m-1)+t(\xi_n^+ - \xi_m^-)} | \xi_m^- > \xi_n^+] \mathbb{P}(\xi_m^- > \xi_n^+)
\end{aligned}$$

Or, d'après le Lemme 2.4, on a $(\xi_n^+ - \xi_m^- | \xi_n^+ > \xi_m^-) \overset{d}{=} \xi_n^+$ et $(\xi_n^+ - \xi_m^- | \xi_n^+ < \xi_m^-) \overset{d}{=} -\xi_m^-$. Donc

$$\begin{aligned}
\psi(n,m) = \mathbb{E}[e^{tA(n,m)}] &= \mathbb{E}[e^{t\left(A(n-1,m-1)+\xi_n^+ - \xi_m^-\right)} | \xi_n^+ > \xi_m^-] \mathbb{P}(\xi_n^+ > \xi_m^-) \\
&\quad + \mathbb{E}[e^{t\left(A(n-1,m-1)+\xi_n^+ - \xi_m^-\right)} | \xi_m^- > \xi_n^+] \mathbb{P}(\xi_m^- > \xi_n^+) \\
&= \mathbb{E}[e^{t\left(A(n-1,m-1)+\xi_n^+\right)}] \frac{\theta}{\eta+\theta} + \mathbb{E}[e^{t\left(A(n-1,m-1)-\xi_m^-\right)}] \frac{\eta}{\eta+\theta} \\
&= \mathbb{E}[e^{tA(n,m-1)}] \frac{\theta}{\eta+\theta} + \mathbb{E}[e^{tA(n-1,m)}] \frac{\eta}{\eta+\theta} \\
&= \psi(n,m-1) \frac{\theta}{\eta+\theta} + \psi(n-1,m) \frac{\eta}{\eta+\theta}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que la fonction $\psi(n,m)$ satisfait l'équation de récurrence

$$\psi(n,m) = \psi(n,m-1)\frac{\theta}{\eta+\theta} + \psi(n-1,m)\frac{\eta}{\eta+\theta}$$

En posant $\alpha = \frac{\theta}{\eta+\theta}$ et $\beta = \frac{\eta}{\eta+\theta}$, on déduit que

$$\begin{aligned}
\psi(n,m) &= \alpha\psi(n,m-1) + \beta\psi(n-1,m) \\
&= \alpha^2\psi(n,m-2) + \alpha\beta\psi(n-1,m-1) + \alpha\beta\psi(n-1,m-1) + \beta^2\psi(n-2,m) \\
&\vdots \\
&= \alpha^m\psi(n,0) + \cdots + \binom{n+m-k-1}{m-1}\alpha^m\beta^{n-k}\psi(k,0) \\
&\qquad + \cdots + \binom{n+m-k-1}{n-1}\alpha^{m-k}\beta^n\psi(0,k) + \cdots + \beta^n\psi(0,m) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+m-k-1}{m-1}\beta^{n-k}\alpha^m\psi(k,0) + \sum_{k=1}^{m}\binom{n+m-k-1}{n-1}\alpha^{m-k}\beta^n\psi(0,k).
\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que

$$A(n,m) \stackrel{d}{=} \begin{cases} A(k,0) & \text{avec proba } \binom{n+m-k-1}{m-1}\left(\frac{\eta}{\eta+\theta}\right)^{n-k}\left(\frac{\theta}{\eta+\theta}\right)^{m},\ k = 1,\dots,n \\ A(0,l) & \text{avec proba } \binom{n+m-l-1}{m-1}\left(\frac{\eta}{\eta+\theta}\right)^{n}\left(\frac{\theta}{\eta+\theta}\right)^{m-l},\ l = 1,\dots,n. \end{cases}$$

□

Proposition 2.4.3. *Soit $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que Y_1 suit une loi double exponentielle asymétrique admettant la densité suivante :*

$$f(y) = p\eta e^{-\eta y}\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}} + (1-p)\theta e^{\theta y}\mathbf{1}_{\{y<0\}}. \tag{2.4.46}$$

Alos on a

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\xi_i^{+} & \textit{avec probabilité } P_{n,k}, k = 1, 2, \dots, n \\ -\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{-} & \textit{avec probabilité } Q_{n,k}, k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \tag{2.4.47}$$

avec $P_{n,k}$ et $Q_{n,k}$ sont données par

$$\begin{aligned}
P_{n,k} &= \sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-k-1}{i-k}\binom{n}{i}\left(\frac{\eta}{\eta+\theta}\right)^{i-k}\left(\frac{\theta}{\eta+\theta}\right)^{n-i}p^i q^{n-i},\ 1 \leq k \leq n-1 \\
Q_{n,k} &= \sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-k-1}{i-k}\binom{n}{i}\left(\frac{\eta}{\eta+\theta}\right)^{n-i}\left(\frac{\theta}{\eta+\theta}\right)^{i-k}p^{n-i} q^{i},\ 1 \leq k \leq n-1 \\
P_{n,n} &= p^n, \qquad Q_{n,n} = q^n.
\end{aligned}$$

Démonstration. La variable aléatoire Y_1 suit une loi double exponentielle asymétrique admettant la densité suivante :

$$f(y) = p\eta e^{-\eta y}\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}} + (1-p)\theta e^{\theta y}\mathbf{1}_{\{y<0\}}, \tag{2.4.48}$$

donc on a

$$Y_1 \stackrel{d}{=} \begin{cases} \xi^+ & \text{avec probabilité } p \\ -\xi^- & \text{avec probabilité } q = 1-p. \end{cases} \tag{2.4.49}$$

où ξ^+ et ξ^- sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f^+ et f^- avec

$$\begin{aligned} f^+(y) &= \eta e^{-\eta y}\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}}, \\ f^-(y) &= \theta e^{-\theta y}\mathbf{1}_{\{y\geq 0\}}. \end{aligned}$$

Soit ϕ_n la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Z_n, $\phi_n(t) = \mathbb{E}[e^{tZ_n}]$. De plus, on note U_n, la variable aléatoire égale au nombre de sauts positifs de la variable Z_n

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_i = \xi^+\}}. \tag{2.4.50}$$

On a U_n suit une loi binomiale de paramètres n et p, ce qui implique que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{tZ_n}] &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}[e^{tZ_n}|U_n = i]\mathbb{P}\big(U_n = i\big) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}[e^{t\left(\sum_{j=1}^{i}\xi_j^+ - \sum_{j=1}^{n-i}\xi_j^-\right)}]\binom{n}{i}p^i q^{n-i} \\ &= p^n\mathbb{E}[e^{t\sum_{j=1}^{n}\xi_j^+}] + q^n\mathbb{E}[e^{-t\sum_{j=1}^{n}\xi_j^-}] + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{E}[e^{t\left(\sum_{j=1}^{i}\xi_j^+ - \sum_{j=1}^{n-i}\xi_j^-\right)}]\binom{n}{i}p^i q^{n-i} \\ &= p^n\mathbb{E}[e^{tA(n,0)}] + q^n\mathbb{E}[e^{tA(0,n)}] + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{E}[e^{tA(i,n-i)}]\binom{n}{i}p^i q^{n-i}, \end{aligned}$$

avec $A(i, n-i) = \sum_{j=1}^{i}\xi_j^+ - \sum_{j=1}^{n-i}\xi_j^-$. En appliquant le Lemme 2.5 avec $\psi(n,m)$ la fonction génératrice des moments de $A(n,m)$, $\psi(n,m) = \mathbb{E}[e^{tA(n,m)}]$, $\alpha = \frac{\theta}{\eta+\theta}$ et $\beta = \frac{\eta}{\eta+\theta}$, on trouve

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{tY_n}] &= p^n\mathbb{E}[e^{tA(n,0)}] + q^n\mathbb{E}[e^{tA(0,n)}] + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{E}[e^{tA(i,n-i)}]\binom{n}{i}p^iq^{n-i} \\
&= p^n\psi(n,0) + q^n\psi(0,n) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1}\Big[\sum_{k=1}^{n}\binom{n-k-1}{n-i-1}\beta^{i-k}\alpha^{n-i}\psi(k,0) + \sum_{k=1}^{m}\binom{n-k-1}{i-1}\alpha^{n-i-k}\beta^{i}\psi(0,k)\Big]\binom{n}{i}p^iq^{n-i} \\
&= p^n\psi(n,0) + q^n\psi(0,n) + \sum_{i=k}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-k-1}{i-k}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}\beta^{i-k}\alpha^{n-i}\psi(k,0) \\
&\qquad + \sum_{i=k}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-k-1}{i-1}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}\alpha^{n-i-k}\beta^{i}\psi(0,k) \qquad (2.4.51) \\
&= p^n\psi(n,0) + q^n\psi(0,n) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-k-1}{i-k}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}\beta^{i-k}\alpha^{n-i}\psi(k,0) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-k-1}{i-k}\binom{n}{i}p^{n-i}q^{i}\beta^{n-i}\alpha^{i-k}\psi(0,k) \qquad (2.4.52) \\
&= P_{n,n}\psi(n,0) + Q_{n,n}\psi(0,n) + \sum_{k=1}^{n-1}P_{n,k}\psi(k,0) + \sum_{k=1}^{n-1}Q_{n,k}\psi(0,k).
\end{aligned}
$$

Dans ce dernier calcul, on a utilisé le fait que

1. $\binom{n-k-1}{i-k} = 0$ si $i < k$ donc on a $i \geq k$.
2. on a posé $j = n-i$ et $1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow 1 \leq j \leq n-1$ (passage de l'équation 2.4.51 à 2.4.52).
3. $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$.
4. $\binom{n-k-1}{n-i-1} = \binom{n-k-1}{i-k}$.

On conclut que

$$
Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \overset{d}{=} \begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\xi_i^{+} & \text{avec probabilité } P_{n,k}, k = 1,2,\ldots,n \\ -\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{-} & \text{avec probabilité } Q_{n,k}, k = 1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (2.4.53)
$$

□

2.4.7. Annexe D

Theorem 2.4.3. *Soient $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires continues, indépendantes et identiquement distribuées de densité $f(x)$. Soit ϕ une fonction indéfiniment différentiable. Alors pour tout nombre réel η strictement positif, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *X_1 est de loi exponentielle dont la densité $f(x)$ donnée par.*

$$f_(x) = \eta e^{-\eta x}, \quad x > 0. \tag{2.4.54}$$

(b) *Le processus stochastique à temps discret $M = \{M_n, n \geq 0\}$ défini par*

$$M_n = \begin{cases} \phi(x), & \text{if } n = 0 \\ \frac{1}{\eta^n}\left(\eta + \frac{d}{dx}\right)^{(n)} \phi(x - \sum_{j=1}^n X_j), & \text{if } n \geq 1, \end{cases} \tag{2.4.55}$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, ..., X_n\}$.

(c)
$$(\eta + \frac{d}{dx})\mathbb{E}[\phi(x - X_1)] = \eta\phi(x).$$

avec $(\eta + d/dx)^{(n)}$ est un operator différentiel tel que

$$\left(\eta + \frac{d}{dx}\right)^{(n)} := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \eta^{n-j} d^{(j)}.$$

Démonstration. Montrons que **(a)** implique **(b)**. Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires continues, indépendantes et identiquement distribuées de densité $f(x)$ donnée par (2.4.54). Soit ϕ une fonction indéfiniment différentiable, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\frac{1}{\eta^{n+1}}\left(\eta + \frac{d}{dx}\right)^{(n+1)}\phi(x - \sum_{j=1}^{n+1} X_j)|\mathcal{F}_n] \\ &= \frac{1}{\eta^{n+1}}\left(\eta + \frac{d}{dx}\right)^{(n+1)}\mathbb{E}[\phi(x - \sum_{j=1}^{n+1} X_j)|\mathcal{F}_n] \\ &= \frac{1}{\eta^{n+1}}\left(\eta + \frac{d}{dx}\right)^{(n)}\left(\eta + \frac{d}{dx}\right)\mathbb{E}[\phi(x - \sum_{j=1}^{n} X_j - X_{n+1})|\mathcal{F}_n]. \end{aligned}$$

De plus, on a $\sum_{j=1}^{n} X_j$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable et la variable X_{n+1} est indépemdente de la filtration $\mathcal{F}_n$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \frac{1}{\eta^{n+1}}\Big(\eta+\frac{d}{dx}\Big)^{(n)}\Big(\eta+\frac{d}{dx}\Big)\int_0^{+\infty}\eta e^{-\eta y}\phi(x-\sum_{j=1}^{n}X_j-y)dy \\
&= \frac{1}{\eta^{n}}\Big(\eta+\frac{d}{dx}\Big)^{(n)}\Big(\eta+\frac{d}{dx}\Big)e^{-\eta x}\int_{-\infty}^{x}\phi(y-\sum_{j=1}^{n}X_j)e^{\eta y}dy \\
&= \frac{1}{\eta^{n}}\Big(\eta+\frac{d}{dx}\Big)^{(n)}\Big[\eta e^{-\eta x}\int_{-\infty}^{x}\phi(y-\sum_{j=1}^{n}X_j)e^{\eta y}dy+\phi(x-\sum_{j=1}^{n}X_j) \\
&\qquad -\eta e^{-\eta x}\int_{-\infty}^{x}\phi(y-\sum_{j=1}^{n}X_j)e^{\eta y}dy\Big] \\
&= \frac{1}{\eta^{n}}\Big(\eta+\frac{d}{dx}\Big)^{(n)}\phi(x-\sum_{j=1}^{n}X_j) \\
&= M_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent **(a)** implies **(b)**.

Maintenant, supposons que (**b**) est vraie. Puisque $\{M_n\}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n=\sigma\{X_1,...,X_n\}$, an a alors $\mathbb{E}[M_n]=\mathbb{E}[M_0]$ pour tout n. D'où

$$\frac{1}{\eta}\left(\eta+\frac{d}{dx}\right)\mathbb{E}[\phi(x-X_1)]=\mathbb{E}[M_1]=\mathbb{E}[M_0]=\phi(x). \tag{2.4.56}$$

Ce qui montre que (**b**) implique (**c**).

Finalement, supposons que (**c**) est vraie. On choisit $\phi(x)=e^{-izx}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\Big(\eta+\frac{d}{dx}\Big)\mathbb{E}[\phi(x-X_1)] &= \Big(\eta+\frac{d}{dx}\Big)\mathbb{E}[e^{-iz(x-X_1)}] \\
&= \mathbb{E}[e^{izX_1}]\Big(\eta+\frac{d}{dx}\Big)e^{-izx} \\
&= \mathbb{E}[e^{izX_1}]\Big(\eta-iz\Big)e^{-izx}.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant (2.4.56), on déduit que $\mathbb{E}[e^{izX_1}]=\eta\big(\eta-iz\big)^{-1}$. Donc (**c**) implies (**a**). $\square$

2.4.8. Annexe E

Nous appliquons maintenant le Théorème 2.4.3 (voir Annexe D) pour résoudre le problème de premier instant où la double barrière est franchie par un processus de Lévy avec sauts de type Kou généralisé [6]. Plus précisément, soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus de Lévy avec sauts tel que

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{2.4.57}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ sont respectivement la dérive et la volatilité de la partie diffusive, $W = \{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard, $N = \{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson simple de paramètre λ et $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dont la variable aléatoire parente Y_1 suit la loi de densité f donnée par :

$$f(y) = \sum_{j=1}^{m} p_j \eta_j e^{-\eta_j y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + \sum_{j=1}^{n} q_j \theta_j e^{\theta_j y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}, \tag{2.4.58}$$

avec, $p_j, q_j \geq 0$ tels que $\sum_{j=1}^{m} p_j + \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \eta_j > 0$, $\theta_j > 0$, $\eta_i \neq \eta_j$ et $\theta_i \neq \theta_j$ pour tout $i \neq j$.

On se donne deux réels h et H tel que $h < H$ et on définit τ comme le premier instant où la double barrière est franchie par le processus X_t :

$$\tau := \inf\left\{t \geq 0 : X_t < h \text{ ou } X_t > H\right\}. \tag{2.4.59}$$

On définit la fonction ϕ telle que

$$\phi(x) = \mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha\tau} g(X_\tau)\right]; \tag{2.4.60}$$

avec $\alpha > 0$ et g fonction positive bornée. En appliquant la formule de Feynman-Kac, on obtient

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \alpha)\, \phi(x) = 0 & \text{in } (h, H), \\ \phi(x) = g(x) & \text{on } (-\infty, h] \cup [H, +\infty), \end{cases} \tag{2.4.61}$$

où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal du processus X_t défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\phi(x) &= \mu\phi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(x) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\phi(x-y)-\phi(x)\right)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \mu\phi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(x) + \lambda\mathbb{E}[\phi(x-Y_1)] - \lambda\phi(x).\end{aligned}$$

Par la formule de Lévy-Khintchin (voir [34]), l'exposant de Lévy de X est donné par

$$\begin{aligned}G(\zeta) &= \frac{1}{t}\log\mathbb{E}\left[\exp(\zeta X_t)\right] \\ &= \mu\zeta + \frac{\sigma^2}{2}\zeta^2 + \lambda\left(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\zeta Y_1}] - 1\right) \\ &= \mu\zeta + \frac{\sigma^2}{2}\zeta^2 + \lambda\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i\eta_i}{\eta_i+\zeta} + \sum_{j=1}^{n}\frac{q_i\theta_j}{\theta_j-\zeta} - 1\Big).\end{aligned}$$

De plus, le Lemme 2.1 de Cai [13] montre que l'équation $G(\zeta) = r, \forall r > 0$, admet exactement $S = m+n+2$ racines distinctes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_S$.

Maintenant, soit $\mathcal{P}_0(\zeta) = \prod_{i=1}^{m}(\eta_i - \zeta)\prod_{j=1}^{n}(\theta_j+\zeta)$, alors $\mathcal{P}_1(\zeta) = \mathcal{P}_0(\zeta)(G(\zeta)-r)$ est un polynôme dont l'ensemble des racines coïncide avec celui de $G(\zeta)-r$. Aussi, on note par D, l'opérateur différentiel dont le polynôme caractéristique est donné par $\mathcal{P}_1(\zeta)$.

La proposition suivante est une conséquence directe du théorème 2.4.3.

Proposition 2.4.4. *Supposons que sous les hypothèses du théorème 2.4.3, le problème (2.4.61) admet une solution ϕ. Alors sur $\mathbb{R}\setminus\{h,H\}$, ϕ est indéfiniment différentiable et satisfait l'équation différentielle*

$$D\phi \equiv 0, \ \textit{sur } (h,H). \tag{2.4.62}$$

De plus, sur (h,H), $\phi(x) = \sum_{k=1}^{S} Q_k e^{\rho_k x}$ où les coefficients $\{Q_k, k = 1,2,\ldots,S\}$ sont déterminés par (2.4.61).

Démonstration. En appliquant le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ à la fonction ϕ, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\phi(x) &= \frac{\sigma^2}{2}\phi''(x) + \mu\phi'(x) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x-y)f_Y(y)dy - \lambda\phi(x) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\phi''(x) + \mu\phi'(x) + \lambda\Big(\mathbb{E}[\phi(x-Y_1)] - \phi(x)\Big).\end{aligned}$$

Maintenant, soient $U_1, \ldots, U_m$ des variables aléatoires continues, indépendantes et de lois exponentielles de paramètres $\eta_1, \ldots, \eta_m$. On applique le théorème (2.4.3), on déduit que pour tout $j = 1, \ldots\ldots, m$

$$\big(\eta_j + \frac{d}{dx}\big)\mathbb{E}[\phi(x - U_j)] = \eta_j \phi(x). \tag{2.4.63}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m} \big(\eta_i + \frac{d}{dx}\big)\mathbb{E}[\phi(x - Y_1)\mathbf{1}_{\{Y_1>0\}}] &= \prod_{i=1}^{m} \big(\eta_i + \frac{d}{dx}\big) \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}[\phi(x - U_j)]p_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} [\prod_{i=1, i\neq j}^{m} \big(\eta_i + \frac{d}{dx}\big)]\big(\eta_j + \frac{d}{dx}\big)\mathbb{E}[\phi(x - U_j)]p_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1, i\neq j}^{m} \big(\eta_i + \frac{d}{dx}\big)p_j \eta_j \phi(x).
\end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement, on obtient

$$\prod_{i=1}^{n} \big(\theta_i - \frac{d}{dx}\big)\mathbb{E}[\phi(x - Y_1)\mathbf{1}_{\{Y_1<0\}}] = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \big(\theta_i - \frac{d}{dx}\big)p_j \theta_j \phi(x).$$

Or, sur (h, H) on a $(\mathcal{L} - r)\phi \equiv 0$, donc on en déduit :

$$\begin{aligned}
0 &= \prod_{i=1}^{m} \big(\eta_i + \frac{d}{dx}\big) \prod_{i=1}^{n} \big(\theta_i - \frac{d}{dx}\big)(\mathcal{L} - r)\phi(x) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \big(\eta_i + \frac{d}{dx}\big) \prod_{i=1}^{n} \big(\theta_i - \frac{d}{dx}\big)\big(\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \mu\frac{d}{dx} - \lambda - r\big)\phi(x) \\
&\qquad + \lambda \prod_{i=1}^{m} \big(\eta_i + \frac{d}{dx}\big) \prod_{i=1}^{n} \big(\theta_i - \frac{d}{dx}\big)\big(\mathbb{E}[\phi(x - Y_1)\mathbf{1}_{\{Y_1>0\}}] + \mathbb{E}[\phi(x - Y_1)\mathbf{1}_{\{Y_1<0\}}]\big) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \big(\eta_i + \frac{d}{dx}\big) \prod_{i=1}^{n} \big(\theta_i - \frac{d}{dx}\big)\big(\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \mu\frac{d}{dx} - \lambda - r\big)\phi(x) \\
&\qquad + \lambda \prod_{i=1}^{n} \big(\theta_i - \frac{d}{dx}\big) \sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1, i\neq j}^{m} \big(\eta_i + \frac{d}{dx}\big)p_j \eta_j \phi(x) \\
&\qquad + \lambda \prod_{i=1}^{m} \big(\eta_i + \frac{d}{dx}\big) \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \big(\theta_i - \frac{d}{dx}\big)q_j \theta_j \phi(x).
\end{aligned} \tag{2.4.64}$$

Ainsi, l'équation (2.4.64) implique que résoudre l'équation intégro-différentielle : $(\mathcal{L} - r)\phi \equiv 0$ équivaut à résoudre l'équation différentielle : $\hat{D}\phi \equiv 0$, avec $\hat{D}$ un certain opérateur différentiel.

Maintenant montrons que $\hat{D} \equiv D$. Pour cela, il suffit de montrer que leurs polynômes caractéristiques sont égaux.

On note par $\hat{\mathcal{P}}(\zeta)$ le polynôme caractéristique de $\hat{D}$. Alors par l'équation (2.4.64), $\hat{\mathcal{P}}$ est donné par

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}(\zeta) &= \prod_{i=1}^{m}(\eta_i + \zeta)\prod_{i=1}^{n}(\theta_i - \zeta)\big[\mu\zeta + \frac{\sigma^2}{2}\zeta^2 + \lambda\big(\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j\eta_j}{\eta_j + \zeta} + \sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\theta_j}{(\theta_i - \zeta)} - 1\big) - r\big] \\ &= \mathcal{P}_0(\zeta)\,(G(\zeta) - r)\,.\end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que les deux polynômes caractéristiques $\mathcal{P}_1(\zeta)$ et $\hat{\mathcal{P}}(\zeta)$ coïncident, ce qui complète la démonstration du résultat. $\square$

Bibliographie

[1] Ait Aoudia, D. (2017). Martingale characterization of exponential distribution. *Journal of applied probability and statistics* (accepté pour publication).

[2] Ait Aoudia. D. (2016). A note on first passage functionals for Lévy processes with jumps of rational Laplace transforms. *Abstract and Applied Analysis*, Vol **2016**, ID 5914657.

[3] Ait Aoudia. D. (2016). Occupation time of Lévy processes with jumps rational Laplace transforms. *Electronic communication in probability* (première révision).

[4] Applebaum. D. (2009). Lévy Processes and Stochastic Calculus, Second Edition, *Cambridge University Press.*

[5] Asmussen, S., Avram, F. and Pistorius, M. (2004). Russian and American put options under exponential phase-type Lévy models. *Sto. Process. Appl.* **109**, 79-111.

[6] Bachelier. L. (1900) Théorie de la spéculation. PhD thesis. *École Norm. Sup.*

[7] Bekerman. F. (2012). Modèles d'actifs avec des sauts. Introduction au Domaine de Recherche. *Ecole Normale Superieure.*

[8] Ben Ameur. H, Chérif. R. and Rémillard. B. (2016). *American-style options in jump-diffusion models : estimation and evaluation*, Quantitative Finance, **16**, 1313-1324.

[9] Bertoin. J. (1996). Lévy Processes, *Cambridge University Press*, Cambridge.

[10] Black. F, and Scholes. M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.* , **81** :637-654, 1973.

[11] Cai. N., and Kou. S. G. (2011). Option pricing under a mixed-exponential jump diffsion model. *Management Science.* **57**, 2067-2081.

[12] Cai, N. (2009). On first passage times of a Hyper-Exponential jump diffusion process. *Oper. Res. Lett.* **37**, 127-134.

[13] Cai. C, Chen. N., and Wan. X. (2009). Pricing double-barrier options under a flexible jump diffusion model. *Oper. Res. Lett.* **37**, 163-167.

[14] Chérif. R. (2009). Tarification d'options et ajustement dans un modèle avec sauts. Mémoire de maîtrise. *Publication HEC Montréal.*.

[15] Cont, R. et Tankov, P. (2004a). Financial Modelling with Jump Processes, *2 edn, Chapman & Hall/CRC Press,* London.

[16] El Karoui. N, Gobet. E. (2010). Les outils stochastiques des marchés financiers, *Éditions de l'École Polytechnique.*

[17] Gerber. H. U. and Shiu. E.S. (1994). Option pricing by Esscher transform. *Transaction of society of actuaries,* **46**, 99-11.

[18] Gauthier. G. (2016). Notes de cours méthode statistiques automne 2016.

[19] Goll. T. and R"uschendorf. L. (2001). Minimax and minimal distance martingale mesures and their relationship to portfolio optimization. *Finance Stochast*, 5, 557-581.

[20] Karatzas. I, and Shreve. S. (1991). Brownian motion and stochastic calculus. *Springer, Berlin.*

[21] Kou. K and Wang. H. (2004). Option pricing under a double exponential jump diffusion model. *Management Science*, **9** 1178-1192.

[22] Kou, S.G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, **48**, 1086-1101.

[23] Kyprianou. A.E. (2006). Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications. *Springer*, Berlin.

[24] Labbé. C. (2016). Note de cours clacul stochastique III. *HEC Montréal.*

[25] Lewis, A. L. and Mordecki. E. (2008). Wiener-Hopf factorization for Lévy processes having positive jumps with rational transforms. *J. Appl. Probab.* **45** 118-134.

[26] Lévy, P. (1937). Théorie de l'addition des variables aléatoires. *Paris : Gauthier Villars.*

[27] Merton. R. (1974). On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, **29** :449-470.

[28] Popier. A. (2017). Notes de cours. Culcul stochastique, applications en finance. *ENSAI, 3A, GDRIF.*

[29] Ngou Polynice. O. (2009). Évaluation d'options américaines sous processus de diffusion avec sauts double-exponentiels. Mémoire de maîtrise. *Publication HEC Montréal.*

[30] Quittard-Pinon, F and Randrianarivony. R. (2008). Calibrage d'options pour trois modèles mixtes diffusions et sauts. *Finance*. **29**, 103-130.

[31] Ramezani, C. A. and Zeng, Y. (2007). Maximum likelihood estimation of the double exponential jump-diffusion. *Annals of finance,* **3**, 487-507.

[32] Randrianarivony. R. (2006). Prise en compte des discontinuités de Cours financiers en assurance et finance. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I.

[33] Rémillard, B. (2013). Statistical Methods for Financial Engineering, *Chapman & Hall/CRC.*

[34] Sato. K.I. (1999). Lévy Processes and Infinitely divisible distributions. *Cambridge Univsersity Press.*

[35] Tankov. P. (2004). Lévy process in finance : inverse problems and depenence modelling. *PhD thesis, École Polythechnique.*