

HEC MONTRÉAL

**VIX : estimation de l'indice de volatilité à
partir des cumulants de la distribution neutre
au risque**

Par

Adil CHHAIBI

Sciences de la gestion

(Ingénierie financière)

Mémoire présenté en vue de l'obtention du

grade de maîtrise ès sciences (M.Sc.)

Sous la direction de

Pascal François

20 juin 2017

Résumé

15 juillet 2017

Depuis leur création dans les années 70, les options sont utilisées par les investisseurs pour la couverture, la spéculation, l'arbitrage, ou encore pour inférer de l'information de marché. Dans le présent mémoire, nous construisons la distribution implicite neutre au risque des rendements de l'indice S&P 500 selon la méthode de Fildeski (2008). Nous calculons ensuite les moments de cette distribution et testons la formule de Martin (2013) qui relie l'indice VIX au carré aux cumulants risque-neutres des rendements du S&P 500. L'étude sur la période 1996-2013 montre que les cumulants d'ordre 2 à 5 sont significatifs mais leurs coefficients ne sont pas conformes à la formule théorique de Martin (2013).

Remerciements

Je tiens à remercier vivement les personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'achever ce mémoire. Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à mon directeur de mémoire, Monsieur Pascal François, pour ses conseils avisés, sa bienveillance et le temps qu'il a consacré à la lecture et la relecture de plusieurs parties de ce travail. Monsieur François fut, pour moi, un directeur de recherche attentif et disponible, en dépit de ses nombreux engagements. Sa compétence, sa rigueur et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. Je suis également très reconnaissant envers les membres de mon jury.

Ma gratitude va, aussi, à tous mes ami(e)s ainsi qu'aux personnes qui m'ont aidé, de près ou de loin, dans la réalisation de ce travail. Je remercie toutes les personnes formidables que j'ai rencontrées à HEC Montréal. Votre soutien et vos encouragements ont été décisifs.

J'aimerais, enfin, remercier du fond du cœur mes amis les plus proches ainsi que ma famille, et plus particulièrement mes parents, qui m'ont apporté un soutien inconditionnel tout au long de mes études.

Table des matières

1	Introduction	7
2	Revue de littérature	9
2.1	L'indice VIX	9
2.1.1	Définition	9
2.1.2	Corrélation entre l'indice VIX et le S&P500	10
2.1.3	Modélisation du VIX	11
2.2	L'indice VIX et les cumulants	13
2.3	L'histogramme implicite neutre au risque	15
2.3.1	Méthodologie	15
2.3.2	Forces et faiblesses	15
2.4	L'interpolation directe des prix des options	16
2.4.1	Méthodologie	16
2.4.2	Forces et faiblesses	17
3	Méthodologie de l'estimation du VIX	18
3.1	L'estimation de la densité implicite neutre au risque	18
3.1.1	Estimation du milieu de la densité implicite neutre au risque	18
3.1.2	Estimation des queues de la densité implicite neutre au risque	24
3.2	La densité des prix relatifs et la densité des rendements	28
4	Description des données	31
5	Résultats	32
5.1	Les statistiques descriptives de l'estimation à partir des log-rendements	32
5.2	L'analyse des sous-périodes	34
5.3	L'analyse par composante	35
6	Conclusion	36
7	Annexes	38
	Références	44

Table des figures

1	L'indice VIX et l'indice S&P500 (1996-2014)	10
2	La corrélation dynamique dans le temps entre le VIX et l'indice SP500 (1996-2014)	11
3	La moyenne des bids et des asks des options avec une interpolation cubique	21
4	Les volatilités implicites pour toutes les options d'achat et toutes les options de vente	22
5	Les volatilités implicites avant et après la spline cubique	23
6	Le milieu de la distribution implicite neutre au risque	23
7	La distribution implicite neutre au risque complète avec les queues	27
8	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements	29
9	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 5 mars 1997	39
10	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 31 mars 1998	39
11	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 3 septembre 1999	39
12	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 1 ^{er} mai 2000	40
13	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 27 février 2001	40
14	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 4 juin 2002	40
15	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 30 septembre 2003	41
16	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 6 février 2004	41
17	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 10 septembre 2008	41
18	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 30 mars 2009	42
19	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 25 février 2010	42
20	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 1 ^{er} août 2011	42
21	Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 11 juillet 2012	43

Liste des tableaux

1	Paramètres de l'optimisation	26
3	Régression du VIX^2 de marché sur les cumulants de la distribution des log-rendements (1996-2013)	32
4	Régression du VIX^2 de marché moins le cumulants 2 sur les autres cumulants de la distribution des log-rendements (1996-2013)	32
2	Statistiques descriptives des cumulants à partir de la distribution des log-rendements	33
5	Régression du VIX^2 de marché sur les cumulants de la distribution des log-rendements (1996-2003)	34
6	Régression du VIX^2 de marché sur les cumulants de la distribution des log-rendements (2003-2013)	35
7	Régression du VIX^2 de marché sur les trois cumulants de la distribution des log-rendements (1996-2013)	35
8	Régression du VIX^2 de marché sur les deux cumulants de la distribution des log-rendements (1996-2013)	36
9	Régression du VIX^2 de marché sur le deuxième cumulant de la distribution des log-rendements (1996-2013)	36

1 Introduction

Les trente dernières années ont témoigné d'une forte croissance sur le marché des options. Depuis leur introduction par la Bourse de Chicago en 1973, les transactions sur ces produits n'ont pas cessé d'augmenter. L'importance de cette classe d'actifs sur les marchés financiers rend indispensables la compréhension et l'évaluation des risques qui y sont associés. La volatilité est l'élément le plus difficile à maîtriser lors de l'évaluation des options. De plus, nous avons assisté au développement de certains produits dérivés dont le sous-jacent est la volatilité, comme les swaps de variance et d'autres produits dont le sous-jacent est l'indice VIX. D'où l'importance cruciale de bien comprendre et modéliser la volatilité pour évaluer les produits dérivés dont la volatilité est, en premier lieu, une composante essentielle et, en second lieu, pour évaluer les produits dérivés dont la volatilité est l'actif sous-jacent. Tout comme le taux de change et le taux d'intérêt, la volatilité suit souvent un processus de retour à la moyenne à long terme : elle augmente lorsque beaucoup d'incertitudes entourent le marché et revient à la normale quand le marché est plus calme. Il existe plusieurs indices de volatilité. Le plus connu est l'indice VIX, qui mesure le niveau d'anxiété des investisseurs sur le marché. Il est souvent décrit comme l'indice de la peur. Les investisseurs le considèrent comme une mesure clé des attentes du marché à l'égard de la volatilité à court terme transmise par les prix des options sur le S&P500. L'indice VIX est une sorte de baromètre mondial du sentiment des investisseurs et de la volatilité du marché.

Il y a eu plusieurs publications et travaux académiques sur l'indice VIX. Nous avons choisi de nous concentrer sur l'article de Ian Martin (2013)[12]. Plus précisément dans la première partie de son article, Martin (2013)[12] a démontré un lien direct entre le niveau de l'indice VIX et les cumulants de la distribution neutre au risque de l'actif sous-jacent. Ceci est un point crucial, car il sera le fond du présent mémoire. Ensuite, Martin a utilisé ce résultat pour évaluer un swap de variance. Cette formule, qui lie l'indice VIX et les cumulants, a permis de voir l'indice VIX comme une somme des cumulants annualisés extraits à partir de la distribution risque-neutre du S&P 500. Nous proposons de tester empiriquement cette formule en reprenant les mêmes démarches, mais avec des données du marché et une estimation précise pour les queues de la distribution risque-neutre.

Nous utilisons la méthode de Figlewski (2008)[6] pour extraire les distributions risque-neutre et nous modélisons les queues, afin de mieux quantifier les risques des événements extrêmes. Par la suite, nous appliquons la formule de Martin (2013)[12] et nous étudions les résultats de l'estimation et les coefficients. L'étude sur la période 1996-2013 montre que les cumulants d'ordre 2 à 5 sont significatifs mais leurs coefficients ne sont pas conformes à la formule théorique de Martin (2013).

Ce mémoire sera divisé en trois grandes sections. Dans un premier temps, une revue de la littérature pertinente nous permettra de situer notre travail par rapport aux recherches académiques actuelles sur l'indice VIX. Dans un deuxième

temps, nous nous pencherons sur la méthodologie à utiliser pour mener à terme notre étude empirique incluant tous les éléments requis pour l'application de la formule, en partant de l'estimation de la densité implicite neutre au risque jusqu'à l'extraction des cumulants annualisés. Finalement, nous discuterons de l'ensemble des résultats et ferons une régression pour déterminer la robustesse de la formule de Martin (2013)[12] sur des sous-périodes et sa robustesse par composante, afin de comparer les résultats avec les vraies valeurs de l'indice VIX.

2 Revue de littérature

En 2004, la Bourse de Chicago a introduit le CFE CBOE Futures Exchange pour fournir aux investisseurs des dérivés de volatilité négociés sur un marché organisé, en l'occurrence les contrats à terme sur l'indice VIX. En 2006, elle en a fait de même avec les options sur le VIX. Dans ce qui suit, nous allons définir l'indice de volatilité VIX, discuter de sa modélisation et analyser des approches afin de déterminer la distribution neutre au risque. À cette fin, nous supposons les trois conditions suivantes :

1. absence d'opportunité d'arbitrage ;
2. absence de frais de transaction ;
3. absence de contraintes sur les ventes à découvert.

2.1 L'indice VIX

2.1.1 Définition

Le VIX est un indice de volatilité sur le marché financier américain calculé quotidiennement depuis 1993 et connu également sous le nom d'indice d'incertitude. Jusqu'en 2003, le VIX était calculé sur le S&P100, mais, depuis cette date, pour obtenir un indice robuste, le CBOE l'établit de façon continue afin de mesurer la volatilité implicite du S&P500 au moyen d'options de vente et d'options d'achat hors de la monnaie avec une échéance de moins de 30 jours. Cet indice est largement utilisé par les négociateurs pour mesurer le niveau d'anxiété du marché. Il est calculé sous la forme d'une moyenne des volatilités implicites sur les options d'achat et les options de vente hors de la monnaie sur le S&P500. C'est une moyenne mobile, puisque, chaque jour, le calcul est fait sur les options dont l'échéance est inférieure à 30 jours. En premier lieu, l'indice VIX permet de donner aux investisseurs une espérance fiable de la volatilité de marché pour les 30 prochains jours. L'espérance de la volatilité du marché est une information capitale pour les investisseurs. En second lieu, ce même indice sert de sous-jacent sur lequel les investisseurs peuvent prendre des positions à travers des contrats à terme. De tels instruments financiers doivent être basés sur des indices très liquides. Aussi, le VIX prend-il appui sur le S&P500, l'indice le plus liquide sur le marché américain.

L'indice VIX est calculé et diffusé en temps réel par le Chicago Board Options Exchange selon la formule générale suivante :

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} \exp(RT) Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2$$

où σ est la volatilité tel que $\frac{VIX}{100} \implies VIX = \sigma * 100$. Le temps T à maturité des options. Le taux d'intérêt R pour une durée égale au temps à maturité des options. F est le niveau d'indice à terme. Le premier prix d'exercice K_0 en dessous du niveau d'indice à terme F . Le prix d'exercice K_i de la i ème option hors de la monnaie, une option d'achat si $k_i > k_0$, une option de vente si $k_i < k_0$ et l'un et l'autre, une option d'achat et une option de vente, si $k_i = k_0$. L'intervalle entre les prix d'exercice ΔK_i , la moitié de la différence entre les deux prix d'exercice des deux côtés de K_i selon la formule : $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$. Finalement $Q(K_i)$ représente le point médian entre le prix offert et le prix demandé pour chaque option avec un prix d'exercice K_i .

2.1.2 Corrélation entre l'indice VIX et le S&P500

L'un des aspects les plus importants de l'indice VIX est sa corrélation négative avec les rendements du marché, et particulièrement avec le S&P500. En d'autres termes, lorsque la volatilité du marché est élevée, le rendement du marché, en l'occurrence le S&P500, est faible voire négatif, d'où l'importance, pour les gestionnaires de fonds, d'ajouter des produits dérivés sur l'indice VIX afin de profiter de cette corrélation négative avec le marché.

La figure 1 montre l'évolution des indice VIX et S&P500 entre 1996 et 2014. Nous constatons ainsi la corrélation entre les deux indices. Par ailleurs, on remarque clairement que l'indice VIX a connu des pics lors des crises que le monde financier a connues. Autrement dit, en 1998, lors du défaut de paiement de la Russie et à l'occasion de la la faillite du fond LTCM, en 2001, à la suite des malheureux attentats du 11 septembre, en 2008 avec la chute de Lehman Brothers, Bear Stearns et la crise financière mondiale et, enfin, en 2011, pendant la crise de la dette grecque.

FIGURE 1 – L'indice VIX et l'indice S&P500 (1996-2014)

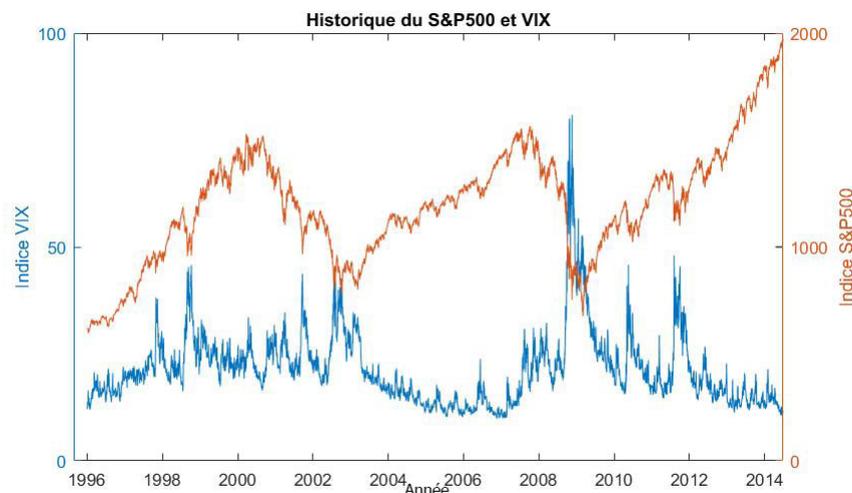
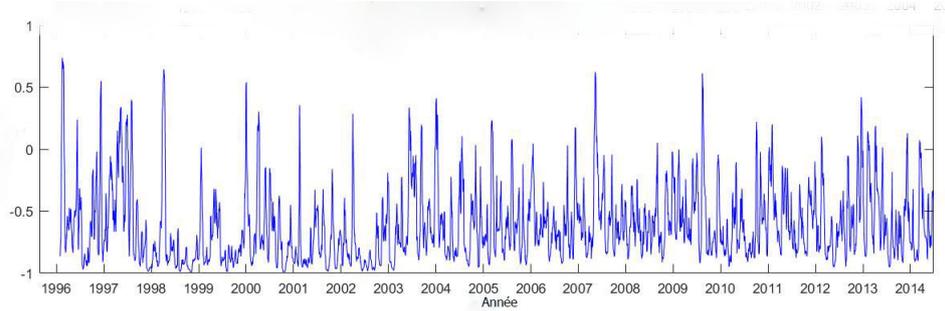


FIGURE 2 – La corrélation dynamique dans le temps entre le VIX et l'indice SP500 (1996-2014)



2.1.3 Modélisation du VIX

Plusieurs recherches ont traité le sujet de la modélisation de l'indice VIX. Par exemple, Grunbichler et Longstaff (1996)[7] supposent que l'indice VIX peut être modélisé avec un processus CIR, c'est-à-dire un processus racine-carré et retour à la moyenne.

$$dVIX_t = k(\theta - VIX_t)dt + \sigma\sqrt{VIX_t}dW_t$$

Avec k , la vitesse de retour à la moyenne, et θ , la moyenne à long terme de la variance. Ce modèle a permis d'évaluer les options sur le VIX avec des formules fermées. En revanche, il requiert une seule source d'aléa (une unique source de risque) et une moyenne constante à long terme. Zhang et Zhu (2006)[16] ont proposé une autre méthode pour la modélisation de l'indice VIX. Sous la mesure neutre au risque, ils supposent que l'actif sous-jacent peut être modélisé avec le modèle de Heston avec une volatilité stochastique :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sqrt{V_t}dW_t^s \\ dV_t &= k(\theta - V_t)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_t^v \end{aligned}$$

Avec $dW_t^s dW_t^v = \rho dt$, ρ est la corrélation entre les deux mouvements browniens de l'actif sous-jacent S_t et de sa variance V_t , k , la vitesse de retour à la moyenne, et θ , la moyenne à long terme de la variance.

Ensuite, ils calculent le VIX_t^2 comme étant l'espérance conditionnelle pour 30 jours de la variance :

$$VIX_t^2 = E_t^Q \left[\frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} V_s ds \right] = A + B.V_t$$

$$\text{Avec } \tau_0 = \frac{30}{365}, A = \theta \left[1 - \frac{1}{k\tau_0} \left[1 - e^{-k\tau_0} \right] \right] \text{ et } B = \frac{1}{k\tau_0} \left[1 - e^{-k\tau_0} \right].$$

Ce modèle ajoute une nouvelle source d'aléa (un risque associé à l'actif sous-jacent et un risque associé à la variance avec une corrélation entre les deux), mais il prend toujours en compte une moyenne de volatilité constante à long terme.

Zhu et Zhang (2007)[18] ont modifié le modèle en permettant à la moyenne à long terme d'être une fonction de temps $\theta = \theta_t$ sous la mesure neutre au risque.

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sqrt{V_t}dW_t^s \\ dV_t &= k(\theta_t - V_t)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_t^v \end{aligned}$$

Avec $dW_t^s dW_t^v = \rho dt$, ρ est la corrélation entre les deux mouvements browniens de l'actif sous-jacent S_t et de sa variance V_t , k , la vitesse de retour à la moyenne, et θ_t , la moyenne à long terme de la variance.

Sachant que $VIX = \sqrt{VIX^2}$, ils calculent le VIX_t^2 de la façon suivante :

$$VIX_t^2 = E_t^Q \left[\frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} V_s ds \right] = A + B.V_t$$

$$\text{Avec } A = \frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} \left[1 - e^{-(t+\tau_0-s)} \right] \theta_t ds \text{ et } B = \frac{1}{k\tau_0} \left[1 - e^{-k\tau_0} \right].$$

Ce modèle permet d'avoir deux sources de risque et une moyenne à long terme non constante.

Des expansions du même modèle ont été proposées en supposant que la moyenne à long terme est une variable stochastique (voir Zhang, Shu et Brenner 2010)[17]. D'autres auteurs ont repris le modèle de Zhang et Zhu (2006)[16] et ont ajouté des sauts au processus de l'actif sous-jacent ainsi qu'au processus de sa variance (voir Lin 2007)[8].

2.2 L'indice VIX et les cumulants

L'estimation de la densité implicite neutre au risque représente l'élément le plus important dans l'estimation de l'indice de volatilité VIX. Martin (2013)[12] prouve que, même sous l'hypothèse de la présence de sauts au niveau des trajectoires du S&P500, le VIX peut être mis en relation avec les moments de la distribution risque-neutre des rendements du S&P500.

Pour démontrer cela, il considère un contrat à terme de swap de variance. Ce contrat consiste à échanger

$$\left(\ln \frac{S_{\Delta t}}{S_0}\right)^2 + \left(\ln \frac{S_{2\Delta t}}{S_{\Delta t}}\right)^2 + \dots + \left(\ln \frac{S_{(K+1)\Delta t}}{S_{K\Delta t}}\right)^2 + \dots + \left(\ln \frac{S_{n\Delta t}}{S_{(n-1)\Delta t}}\right)^2$$

contre le prix d'exercice V . La valeur du swap est nulle au début du contrat donc, en l'absence d'arbitrage, on doit avoir :

$$V = E^Q \left[\left(\ln \frac{S_{\Delta t}}{S_0}\right)^2 + \left(\ln \frac{S_{2\Delta t}}{S_{\Delta t}}\right)^2 + \dots + \left(\ln \frac{S_{(K+1)\Delta t}}{S_{K\Delta t}}\right)^2 + \dots + \left(\ln \frac{S_{n\Delta t}}{S_{(n-1)\Delta t}}\right)^2 \right]$$

Posons $T = n\Delta t$ l'échéance du swap. En prenant la limite lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, le prix d'exercice devient :

$$V = E^Q \left[\int_0^T (d \ln S_t)^2 \right]$$

Sous l'hypothèse que les rendements de S suivent un processus de diffusion de volatilité σ_t sous la mesure risque-neutre, nous avons

$$d \ln S_t = \left(r - \frac{\sigma_t^2}{2}\right)dt + \sigma_t dZ_t$$

et ainsi

$$(d \ln S_t)^2 = \sigma_t^2 dt$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
V &= E^Q \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right] \\
&= 2E^Q \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \int_0^T d \ln S_t \right] \\
&= 2rT - 2E^Q \left[\ln \frac{S_T}{S_0} \right].
\end{aligned}$$

Définissons le rendement simple $R_T = \frac{S_T}{S_0}$. En remarquant que $E^Q [R_T] = \exp(rT)$, nous pouvons écrire que

$$V = 2 \ln E^Q [R_T] - 2E^Q [\ln R_T]$$

Si les rendements de S suivent un processus de diffusion (et donc en l'absence de sauts), nous pouvons interpréter le VIX au carré comme le prix d'exercice V annualisé. Ce qui donne

$$VIX^2 = \frac{2}{T} (\ln E^Q [R_T] - E^Q [\ln R_T])$$

Introduisons à présent la fonction génératrice des cumulants des log-rendements $\ln R_T$

$$K(\theta) := \ln E^Q [\exp(\theta \ln R_T)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{k}_n \theta^n}{n!}$$

où \tilde{k}_n désigne le cumulante (risque-neutre) d'ordre n de $\ln R_T$. Nous remarquons que $K(1) = \ln E^Q [R_T]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2}{T} (K(1) - E^Q [\ln R_T]) \\
&= \frac{2}{T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{k}_n}{n!} - E^Q [\ln R_T] \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tilde{k}_n}{n!} \right).
\end{aligned}$$

Posons k_n le cumulante annualisé (risque-neutre) d'ordre n de $\ln R_T$. Nous obtenons finalement

$$VIX^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2k_n}{n!}$$

2.3 L'histogramme implicite neutre au risque

2.3.1 Méthodologie

L'histogramme neutre au risque est la méthode discrète la plus simple pour trouver la densité implicite neutre au risque. Cette méthode permet d'utiliser directement les prix des options. L'équation évaluant les probabilités permet d'avoir la valeur d'un « Butterfly spread centré » à $S_T = X$, qui est, ensuite, capitalisé au taux sans risque jusqu'à la date d'échéance des options, ce qui donne une approximation de la probabilité neutre au risque que le prix de l'actif sous-jacent prenne la valeur X à l'échéance T .

$$f(S_T = X) = \exp(rT) \left[\frac{[c(S_T + \Delta S_T, \tau) - c(S_T, \tau)] - [c(S_T, \tau) - c(S_T - \Delta S_T, \tau)]}{\Delta S_T} \right]$$

Les variables de cette équation sont le taux d'intérêt sans risque r , le prix de l'actif sous-jacent S_T à temps l'échéance T , le temps τ restant jusqu'à l'échéance de l'option et $c(S_T + \Delta S_T, \tau)$, le prix d'une option d'achat dont l'actif sous-jacent est $S_T + \Delta S_T$ et dont le temps à maturité est τ .

On applique cette formule à tous les prix des options d'achat disponibles avec les mêmes échéances. Avec différents prix d'exercice X , on peut trouver l'histogramme des probabilités neutres au risque de l'actif sous-jacent.

2.3.2 Forces et faiblesses

La faiblesse de cette méthodologie réside dans le fait que le calcul de l'histogramme des probabilités implicites neutres au risque confère le même poids à toutes les options et suppose que la différence entre chaque deux prix d'exercices successifs est constante. En outre, les queues de la distribution sont traitées de la même façon que le reste de la distribution. Ce qui est loin d'être observable sur les marchés.

Par ailleurs, il arrive assez souvent que le prix du marché d'une option profondément hors de la monnaie ne soit pas représentatif de la vraie valeur de l'option en raison du faible volume, voire même des opportunités d'arbitrage sur le marché. Cette méthodologie ne s'ajuste pas à ce problème. La distance entre l'offre (bid) et la demande (ask) représente aussi une difficulté, car sur le marché, on voit plutôt des prix offerts (bids) et des prix demandés (ask). Souvent, on calcule le prix comme une moyenne entre le prix offert (bid) et le prix demandé

(ask). Plus la distance est grande, plus le nombre d'erreurs dans les résultats sera important. Parfois, aussi, les prix des options ne sont pas synchronisés avec les prix d'exercice. Pour une raison de volume ou de liquidité, les options, qui n'ont pas été transigées aujourd'hui, vont garder les prix de la veille. Ce qui peut entraîner un biais sur les résultats.

À part les quelques lacunes citées plus haut, l'histogramme des probabilités implicites neutres au risque donne un résultat acceptable. D'autres méthodes alternatives permettent de travailler sur les prix des options afin de trouver une distribution continue en minimisant les erreurs évoquées ci-dessus. Nous pouvons citer la méthodologie du lissage des prix, qui permet d'obtenir une distribution cohérente, ou encore la méthodologie du lissage des volatilités implicites.

2.4 L'interpolation directe des prix des options

2.4.1 Méthodologie

L'interpolation directe des prix des options figure parmi les méthodes les plus efficaces et intuitives pour estimer la densité implicite neutre au risque. Après avoir fait un lissage sur la fonction des prix des options d'achat, nous pouvons appliquer directement la formule de Breeden et Litzenberger (1978)[4].

$$F(X) = \exp(rT) \frac{dC}{dX} + 1$$

Où F est la distribution cumulative des prix de l'actif sous-jacent, r , le taux d'intérêt sans risque, T , le temps d'échéance de l'option et $\frac{dC}{dX}$, la variation instantanée du prix de l'option par rapport au prix d'exercice.

Le lissage peut être fait avec une spline d'ordre 4, ce qui permettra de respecter la condition de la convexité. On peut imposer également plus de paramètres sur la fonction de lissage, afin de passer par tous les points des prix en utilisant la méthode des moindres carrés, ou n'en imposer aucun en faisant un lissage avec des méthodes statistiques comme la régression de Kernel.

Justement, Ait-Sahalia et Lo (1995)[1], dans leur méthode d'estimation de la densité implicite neutre au risque, ont utilisé une méthode non paramétrique et appliqué une régression de Kernel de Nadaraya-Waston afin d'estimer toute la fonction des prix des options d'achat. Plus précisément, ils ont appliqué un estimateur de Kernel sur les prix d'exercice d'une série temporelle afin de trouver tous les autres paramètres. Bates (1991)[2], quant à lui, a utilisé la méthode de l'interpolation cubique sur l'ensemble des prix des options d'achat observés sur le marché en imposant une contrainte de convexité et de monotonie de la cumulative.

2.4.2 Forces et faiblesses

Nous savons que le nombre d'options disponibles sur le marché en fonction des prix d'exercice au quotidien est limité. Or la méthode de la régression de Kernel, qui est une méthode non paramétrique, utilise beaucoup de régresseurs couplés avec la nécessité de pouvoir faire la dérivée de deuxième ordre (voir Ait-Sahalia et Lo)[1]. Cela rend cette méthode difficile à appliquer, car il faut recourir à de nombreuses suppositions et contraintes pour forcer la convergence à partir d'un petit échantillon des données. Le fait que le nombre des données des options sur un support de prix d'exercice au quotidien est limité rend cette approche difficile à mettre en oeuvre.

3 Méthodologie de l'estimation du VIX

3.1 L'estimation de la densité implicite neutre au risque

3.1.1 Estimation du milieu de la densité implicite neutre au risque

Dans la suite de nos développements, nous utilisons la méthode alternative de Breeden et Litzenberger(1978). Au lieu d'interpoler directement les prix des options, nous procédons à l'interpolation des volatilités implicites, puis nous les convertissons en prix des options après avoir fait un lissage sur la courbe des volatilités implicites. Enfin, nous modélisons les queues de la distribution différemment, plus précisément de la même façon que Stephen Figlewski (2008)[6].

La formule d'évaluation fondamentale dans la finance consiste toujours à calculer la valeur actuelle des flux futurs. La valeur d'une option d'achat peut être exprimée sous la forme d'une espérance actualisée de la valeur d'exercice à l'échéance sous la mesure neutre au risque. Cette espérance est calculée sous des probabilités neutres au risque et actualisée à un taux sans risque de la même échéance comme le prescrit la formule suivante :

$$C = \int_X^\infty \exp(-rT)(S_T - X)f(S_T)dS_T \quad (1)$$

C : le prix de l'option

S : le prix de l'actif sous-jacent (dans notre cas, le S&P500)

X : le prix d'exercice de l'option

r : le taux sans risque

T : le temps d'échéance de l'option

$f(x)$: la fonction de densité des probabilités neutres au risque

$F(x) = \int_\infty^x f(z)dz$: la fonction cumulative des probabilités neutres au risque

Afin d'avoir une continuité des prix d'options, nous combinons tous les prix des options qui ont le même actif sous-jacent, la même maturité et différents prix d'exercice. Ainsi, nous obtenons une série de prix pour les options dont la seule variable est le prix d'exercice. Nous pouvons constater que la différence entre les prix de deux options d'achat successives et un prix d'exercice adjacent reflète la valeur attachée à la capacité d'exercer les options lorsque le prix de l'actif sous-jacent termine sa trajectoire entre les deux prix d'exercice. Cela dépend

évidemment de la probabilité que le prix de l'actif sous-jacent se situe dans cet intervalle.

Afin de vérifier la sensibilité de la valeur de l'option par rapport à la variation du prix, nous dérivons la formule (1) par rapport au prix d'exercice.

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dX} &= \frac{d}{dX} \left[\int_X^\infty \exp(-rT) (S_T - X) f(S_T) dS_T \right] & (2) \\
&= \exp(-rT) \frac{d}{dX} \left[\int_X^\infty (S_T - X) f(S_T) dS_T \right] \\
&= \exp(-rT) \left[-(X - X) f(X_T) + \int_X^\infty -f(S_T) dS_T \right] \\
&= -\exp(-rT) \int_X^\infty f(S_T) dS_T \\
&= -\exp(-rT) [1 - F(X)] & (3)
\end{aligned}$$

En analysant cette dernière équation, nous constatons que, lorsqu'il y a une augmentation du prix d'exercice par dX , la valeur de l'option change pour les deux raisons suivantes :

- une augmentation du prix d'exercice réduit le nombre des valeurs de S_T pour lesquelles l'option aura un payoff positif
- une augmentation de X réduit le payoff par $-dX$

Nous résolvons l'équation (3) pour trouver la fonction cumulative des probabilités neutres au risque $F(X)$:

$$F(X) = \exp(rT) \frac{dC}{dX} + 1 \quad (4)$$

L'équation (4) peut être résolue avec la méthode des différences finies des prix des options en ayant différents prix d'exercice sur le marché. Nous supposons des prix d'option pour une maturité T sur N différents prix d'exercice, avec X_1 , le plus bas prix d'exercice, et X_N , le plus haut. Nous utilisons, ensuite, l'arbre des options avec des prix d'exercice successifs.

Soit X_{n-1} , X_n et X_{n+1} trois prix d'exercice avec un petit ΔX ($X_n - X_{n-1}$ peut être différent de $X_{n+1} - X_n$) et $F(X_n)$ centré autour de n sera estimé comme suit :

$$F(X_n) = \exp(rT) \left[\frac{C_{n+1} - C_{n-1}}{X_{n+1} - X_{n-1}} \right] + 1 \quad (5)$$

Afin de trouver la fonction de densité implicite neutre au risque, nous calculons la dérivée de l'équation (5) par rapport à X :

$$\begin{aligned}
f(X) &= \frac{dF(X)}{dX} \\
&= \exp(rT) \frac{d^2C}{dX^2}
\end{aligned}$$

De la même façon que pour l'utilisation de la formule (4), nous estimons $f(X_n)$ avec la méthode des différences finies des prix des options en ayant différents prix d'exercice sur le marché.

$$f(X_n) \approx \exp(rT) \frac{C_{n+1} - 2C_n + C_{n-1}}{(\Delta X)^2} \quad (6)$$

À la lumière des équations précédentes, nous constatons qu'on peut estimer la densité neutre au risque complète entre X_2 et X_{N-1} pour notre échantillon.

De la même façon, nous pouvons estimer la densité neutre au risque pour les prix des options de vente avec les équations suivantes :

$$F(X) = \exp(rT) \frac{dP}{dX} \quad (7)$$

$$F(X_n) \approx \exp(rT) \left[\frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{X_{n+1} - X_{n-1}} \right] \quad (8)$$

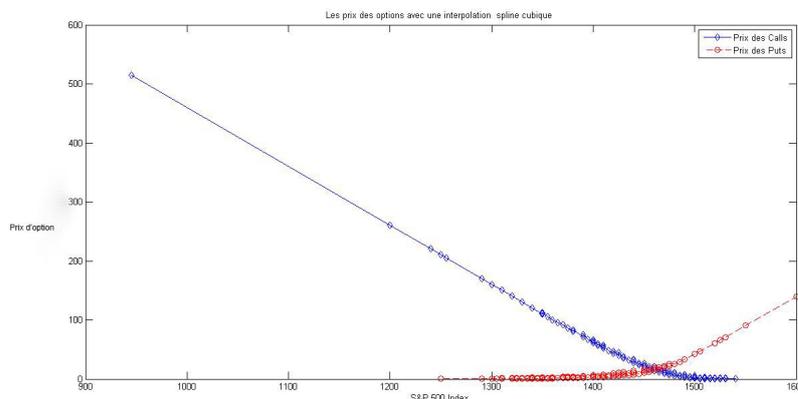
$$f(X) = \exp(rT) \frac{d^2P}{dX^2} \quad (9)$$

$$f(X_n) \approx \exp(rT) \frac{P_{n+1} - 2P_n + P_{n-1}}{(\Delta X)^2} \quad (10)$$

Pour obtenir une bonne estimation de la densité neutre au risque, cette approche suppose que nous ayons un support des prix d'exercice assez dense. Ce qui n'est pas vraiment le cas sur les marchés. Afin d'avoir un tel support et, en même temps, de minimiser les erreurs liées aux imperfections des marchés, nous allons estimer la densité neutre au risque à partir de la moyenne des prix quotidiens offerts (bids) et demandés (asks) des options sur le S&P500 à la fermeture des marchés.

La figure 3 présente le résultat d'une interpolation cubique des prix des options de vente et des options d'achat de la journée du 2 janvier 2013.

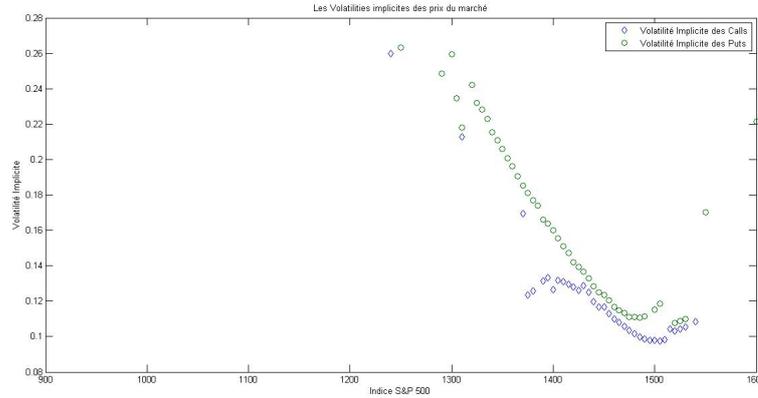
FIGURE 3 – La moyenne des bids et des asks des options avec une interpolation cubique



Le lissage des volatilités implicites a été développé en premier par Shimko (1993)[14]. Nous convertissons les prix des options en des volatilités implicites en utilisant la formule inverse de Black-Scholes. Cette méthode permet d’incorporer tout ce qui est inconnu dans la volatilité implicite. C’est précisément la méthode que les négociateurs utilisent sur les marchés d’options. Ils évaluent les options en termes de volatilité implicite, ce qui ne veut pas forcément dire que les prix des options sont évalués avec le modèle de Black-Scholes ou que le S&P500 suit une loi log-normale. C’est tout simplement une utilisation de la formule de Black-Scholes visant à migrer de l’espace des prix vers celui des volatilités implicites. Cette inversion permet de trouver le « smirk » de volatilité en fonction des prix d’exercice.

Afin de minimiser davantage les imperfections des prix du marché, nous opérons un lissage de la courbe des volatilités. Ce lissage dans l’espace des volatilités implicites a un effet substantiel sur la fiabilité de la densité neutre au risque. Shimko (2002)[15] utilise une fonction quadratique simple. Figlewski (2008)[6] utilise, pour sa part, une interpolation avec une spline d’ordre 4. Cette seconde méthode a nos faveurs, car elle permet d’avoir une grande flexibilité avec des polynômes d’ordre élevé. De plus, l’effet de la liquidité et du volume peut également influencer les prix des options. Quand on parle de la liquidité, on parle de la liquidité de l’actif sous-jacent et des options. Dans notre cas, l’actif sous-jacent est le S&P500, l’indice le plus liquide au monde. On suppose donc qu’il n’y aura aucun problème au niveau de la liquidité de l’actif sous-jacent. En revanche, la liquidité des options sur le S&P500 dépend du degré d’enjeu de l’option. Les options à la monnaie sont très liquides.

FIGURE 4 – Les volatilités implicites pour toutes les options d’achat et toutes les options de vente



La figure 4 montre les volatilités implicites des options de vente et des options d’achat, inversées directement des prix du marché.

Pour remédier au problème de la liquidité et du volume, la plupart des chercheurs qui ont travaillé sur l’estimation de la distribution neutre au risque proposent d’estimer le milieu de la distribution, c’est-à-dire couper le support des prix d’exercice afin de considérer seulement les options proches de la monnaie et traiter les options profondément hors de la monnaie d’une autre façon, puis les queues (à droite et à gauche) avec une méthode plus appropriée que nous évoquerons un peu plus loin.

Nous avons estimé notre distribution en utilisant des options de vente hors de la monnaie à gauche et des options d’achat hors de la monnaie à droite. Afin d’éviter un saut à la monnaie, puisqu’à la monnaie, une option de vente et une option d’achat n’ont pas la même volatilité implicite, nous avons combiné des options de vente et des options d’achat hors de la monnaie pour obtenir un mixage. Cela permet également d’éviter un saut lors de la transition à la monnaie. Nous avons choisi un intervalle de 20 points pour réaliser ce mixage : 10 points du côté des options de vente et 10 points du côté des options d’achat. Nous calculons les volatilités implicites pondérées avec l’équation suivante :

$$IV_{pondéré}(X) = w * IV_{put}(X) + (1 - w) * IV_{call}(X) \quad (11)$$

Avec

$$w = \frac{X_{high} - X}{X_{high} - X_{low}}$$

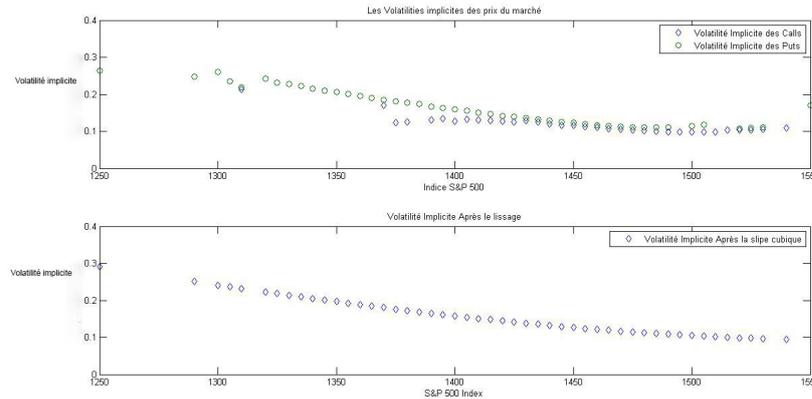
$$S_0 - 10 \leq X_{low} \text{ et } X_{high} \geq S_0 + 10$$

Pour tous les prix entre X_{low} et X_{high} , nous calculons une volatilité

$IV_{pondéré}$ à partir de IV_{call} et IV_{put} .

Nous utilisons, ensuite, la formule directe de Black-Scholes pour revenir vers l'espace des prix. Le mixage fait avec la formule (11) nous a permis d'avoir une courbe des volatilités implicites plus lisse et ce, pour tout le support des prix comme le démontre la figure 5.

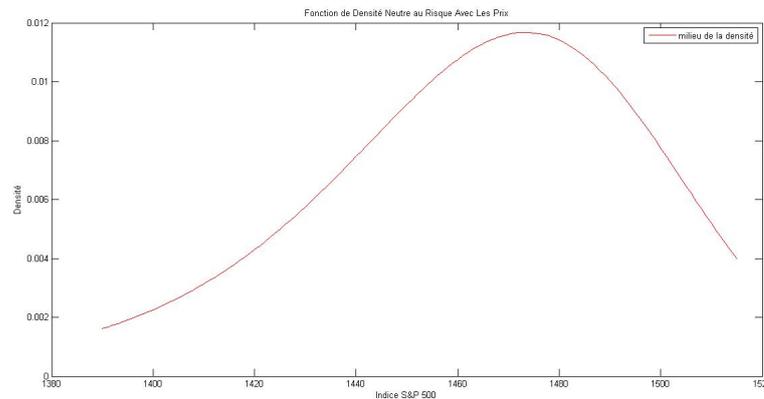
FIGURE 5 – Les volatilités implicites avant et après la spline cubique



La figure 5 montre les volatilités implicites avant et après le mixage. Cela nous permet de voir la valeur ajoutée de la pondération des volatilités implicites autour de la monnaie.

Ensuite, nous convertissons en prix les volatilités implicites après le lissage en utilisant la formule de Black-Scholes. Au moyen des prix des options, nous utilisons les formules (6) et (10) pour trouver le milieu de la densité.

FIGURE 6 – Le milieu de la distribution implicite neutre au risque



La figure (6) montre le milieu de la distribution implicite neutre au risque lisse et cohérente que nous avons extraite des prix des options du 2 janvier 2013. Nous avons choisi de couper la distribution à 5% à gauche et à 95% à droite. Nous allons, maintenant, estimer les queues de la distribution.

3.1.2 Estimation des queues de la densité implicite neutre au risque

Après avoir estimé le milieu de la densité implicite neutre au risque, nous devons en faire de même avec les queues de la densité tout en respectant la loi de probabilités et en ayant une densité lisse. Le volume des options profondément hors de la monnaie est peu élevé ; par conséquent, les informations sur les événements extrêmes pouvant affecter l'actif sous-jacent ne sont pas suffisantes. Afin de résoudre cette problématique, des chercheurs ont proposé de forcer les queues de la densité à être log-normales (voir Shimko 1993)[14] et ce, en considérant une volatilité constante extraite avec la formule de Black-Scholes. Au point de transition entre la densité estimée à la section précédente et la densité aux extrêmes, Shimko suppose que le « smile » de volatilité peut être représenté avec une fonction quadratique, ce qui est un peu restrictif, car les volatilités implicites, surtout sur le marché des actions, tendent plutôt vers une forme parabolique. Bliss et Panigirtzoglou (2004)[3] utilisent une méthode différente dans l'estimation du milieu de la densité implicite neutre au risque. Ils font le lissage dans l'espace des deltas. Ensuite, pour les queues de la distribution, ils forcent le lissage de façon linéaire. Dans notre cas, nous allons utiliser la distribution d'extremum généralisée pour produire les valeurs extrêmes de notre distribution. Selon Figlewski (2008)[6], les valeurs extrêmes d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivent une distribution d'extremum généralisée.

La fonction de probabilité cumulative de la distribution d'extremum généralisée est la suivante :

$$F(z) = \exp \left[- (1 + \xi z)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \quad (12)$$

$$\text{Où } z = \frac{S_T - \mu}{\sigma}$$

La fonction (12) dépend de trois paramètres : ξ , S_T et μ .

$\xi > 0$ représente une distribution de Fréchet. Autrement dit, les queues sont plus épaisses que celles de la distribution normale.

$\xi < 0$ représente une distribution de Weibull, de telle sorte que les queues sont, cette fois, plus minces que celles de la distribution normale.

$\xi = 0$ représente une distribution de Gumbel. Partant, les queues sont celles de la distribution normale.

La fonction de densité de la distribution d'extremum généralisée peut être déterminée en calculant la dérivée de F par rapport à z comme suit :

$$f(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial z}$$

$$f(z) = \frac{1}{\xi}(1 + \xi z)^{(-1/\xi)-1} \exp \left[- (1 + \xi z)^{-\frac{1}{\xi}} \right]$$

En premier lieu, nous allons estimer la queue de la distribution à droite, car la fonction de la distribution d'extremum généralisée est faite justement pour les valeurs extrêmes. À cette fin, nous devons déterminer les valeurs des paramètres ξ , S_T et μ et, par conséquent, trouver trois équations pour les trois inconnues. Nous avons choisi le prix $X_{R1}(\alpha_{R1})$, tel que $F_{emp}(X_{95\%}) = 95\%$, le point de départ pour la distribution d'extremum généralisée à droite. Ensuite, afin d'obtenir un lissage de qualité autour du point de l'intersection, nous avons opté pour le point $X_{R2}(\alpha_{R2})$, tel que $F_{emp}(X_{\alpha_{R2}}) = \alpha_{R2}$ et $\alpha_{R2} > \alpha_{R1}$. Au niveau de notre vecteur des prix, nous avons choisi $\Delta X = 1$. C'est pour cela que X_{R2} , le prix venant tout juste après X_{R1} , nous paraissait être un choix adéquat.

Au niveau du point d'intersection α_{R1} , la densité empirique doit être la même que la densité de la loi d'extremum généralisée. Partant, nous égalisons les deux fonctions de densité à ce point. Ensuite, au point α_{R2} , la densité empirique doit être la même que la densité de la loi d'extremum généralisée, bien que nous égalisons les deux fonctions de densité, une fois de plus, à ce point. Pour être certain que les deux distributions auront une forme identique autour du point d'intersection à droite, nous ajoutons une contrainte de plus, ce qui permet d'égaliser non seulement les deux densités, mais aussi les deux fonctions des probabilités cumulatives au point α_{R1} . Ces trois conditions se traduisent par les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} f_{emp}(X(\alpha_{R1})) - f_{gev}(X(\alpha_{R1})) &= 0 \\ f_{emp}(X(\alpha_{R2})) - f_{gev}(X(\alpha_{R2})) &= 0 \\ F_{gev}(X(\alpha_{R1})) - \alpha_{R1} &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons choisi de présenter notre système d'équations sous forme de différences afin de discuter la méthode de résolution. Afin de résoudre ce système d'équations à trois inconnues, nous avons procédé à une optimisation en minimisant la somme des erreurs au carré pour les trois équations, le tout en utilisant la fonction *fminsearch* de Matlab.

En second lieu, nous estimons la queue de la distribution à gauche. Cette estimation ressemble à l'optimisation évoquée ci-dessus, plus haut. Reste que, dans la forme, elle est différente, car nous cherchons les petites valeurs de la distribution d'extremum généralisée. Au lieu de nous intéresser aux valeurs maximales, nous cherchons celles minimales. Pour cela, nous définissons la distribution d'extremum généralisée pour les valeurs inverses, bien que les fonctions resteront les mêmes, mais le μ sera positif et le z , plutôt différent :

$$z = \frac{-S_T - \mu}{\sigma}$$

Ensuite, nous déterminons les valeurs des paramètres ξ , S_T et μ , ce qui implique

de trouver à nouveau les trois équations pour les trois inconnues. Nous avons choisi le prix $X_{L1}(\alpha_{L1})$ tel que $F_{emp}(X_{5\%}) = 5\%$ comme point de départ pour la distribution d'extremum généralisée à gauche (point d'intersection à gauche). Afin de s'assurer d'un lissage de qualité et que les deux fonctions ont la même forme autour du point de l'intersection, nous optons pour le point $X_{L2}(\alpha_{L2})$ tel que $F_{emp}(X_{\alpha_{L2}}) = \alpha_{L2}$ et $\alpha_{L1} > \alpha_{L2}$. La variation du support sera la même à droite et à gauche de la distribution $\Delta X = 1$. C'est pour cela que, nous avons choisi X_{L2} , le prix qui se trouve juste avant X_{L1} .

Au niveau du point d'intersection α_{L1} , la densité empirique doit être la même que la densité de la loi d'extremum généralisée, d'où l'égalité des deux fonctions à ce point : $f_{emp}(X(\alpha_{L1})) = f_{gev}(-X(\alpha_{L1}))$. Au point α_{L2} , la densité empirique doit être la même que la densité de la loi d'extremum généralisée : $f_{emp}(X(\alpha_{L2})) = f_{gev}(-X(\alpha_{L2}))$. Pour être certain que les deux distributions auront la même forme au point d'intersection à gauche, nous ajoutons une contrainte de plus, qui permet d'égaliser les deux fonctions des probabilités cumulatives au point α_{L1} , c'est-à-dire $F_{gev}(X(\alpha_{L1})) = \alpha_{L1}$. Ces trois conditions se traduisent par les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} f_{emp}(X(\alpha_{L1})) - f_{gev}(-X(\alpha_{L1})) &= 0 \\ f_{emp}(X(\alpha_{L2})) - f_{gev}(-X(\alpha_{L2})) &= 0 \\ F_{gev}(X(\alpha_{L1})) - \alpha_{L1} &= 0 \end{aligned}$$

Nous procédons de la même façon pour résoudre le système d'équations, en minimisant la somme des erreurs au carré afin de trouver les inconnues ξ , S_T et μ .

Nous avons appliqué cette méthodologie aux données correspondant à la date choisie précédemment. Les 5% et 95% de distribution neutre au risque, qui sont les points d'intersection à gauche et à droite, sont respectivement 1391 et 1514 :

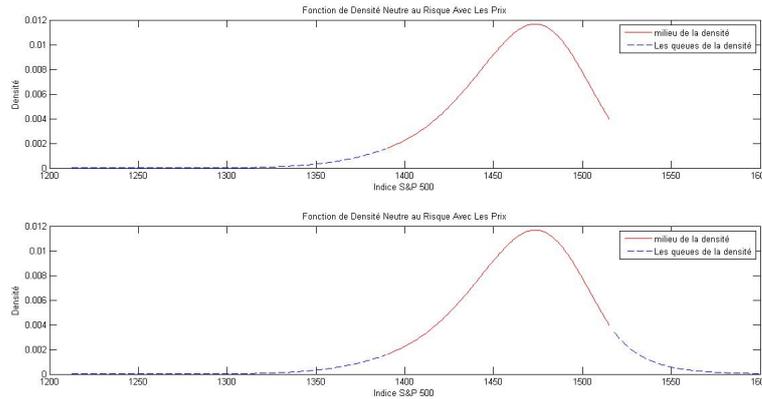
$$\begin{aligned} F(X = 1391) &= 5\% \\ F(X = 1514) &= 95\% \end{aligned}$$

Après avoir réalisé les deux optimisations, à gauche et à droite de la distribution, les paramètres satisfaisant les conditions des trois équations à gauche et à droite sont les suivants :

TABLE 1 – Paramètres de l'optimisation

	μ	σ	ξ
Queue à gauche	1471.00	60.30	-0.2
Queue à droite	1469.30	18.30	-0.1

FIGURE 7 – La distribution implicite neutre au risque complète avec les queues



Les résultats consignés dans ce tableau représentent les paramètres de l'optimisation qui permettent une continuité lisse de la distribution au point d'intersection entre le milieu de la distribution et les queues de la distribution estimées à partir de la distribution d'extremum généralisée. Pour la queue de la distribution à gauche, les paramètres sont $\mu = 1471$, $\sigma = 60.30$, $\xi = -0.20$. Autrement dit, avec ces paramètres et un niveau d'actif sous-jacent à 1391, les trois conditions représentées ci-dessus sont respectées.

Pour la queue de la distribution à droite, les paramètres sont $\mu = 1469.30$, $\sigma = 18.30$, $\xi = -0.10$. Avec ces paramètres et un niveau d'actif sous-jacent à 1469.30, les trois conditions sont respectées. En d'autres termes, la densité empirique est la même que la densité de la loi d'extremum généralisée au point d'intersection. Les deux fonctions de densité à ce point sont donc égales. Au second point, la densité empirique est la même que la densité de la loi d'extremum généralisée et nous y avons égalisé les deux fonctions de densité. Au final, les deux distributions auront la même forme autour du point d'intersection. Dans le but d'aller au-delà de la seule égalisation des deux densités, la troisième condition permet d'égaliser les deux fonctions des probabilités cumulatives au point d'intersection.

Nous ajoutons les résultats trouvés pour les queues avec la fonction de la loi d'extremum généralisée au milieu de la distribution identifiée plus haut. La figure 7 représente le résultat de l'application de notre méthodologie sur les prix des options pour extraire la distribution implicite neutre au risque du S&P500. Nous avons ajouté la queue à gauche, puis la queue à droite. Cette distribution contient beaucoup d'informations sur les préférences des investisseurs incorporées dans le prix. Comme on peut le constater, la densité implicite neutre au risque est lisse au niveau des deux points d'intersection et même au milieu, au point de transition entre les options de vente et les options d'achat.

Après avoir estimé la densité implicite neutre au risque des prix, nous nous intéresserons à la densité des log-rendements en suivant les démarches décrites dans la prochaine section.

3.2 La densité des prix relatifs et la densité des rendements

Les prix des options contiennent de multiples informations sur l'actif sous-jacent. C'est la raison pour laquelle ils sont souvent utilisés pour extraire la distribution neutre au risque de l'actif en question. Martin (2013)[12] a trouvé une relation directe qui lie les cumulants et l'indice de volatilité. Nous allons nous concentrer sur la partie de l'estimation de l'indice de volatilité VIX. Après avoir estimé la densité implicite neutre au risque d'une seule journée, nous utiliserons la même méthodologie pour estimer toutes les densités implicites neutres au risque depuis le 4 janvier 1996 jusqu'au 31 janvier 2013, afin d'en extraire un maximum d'informations qui nous aideront, par la suite, dans notre estimation de l'indice de volatilité. Une fois que nous connaissons la densité des prix S_T , nous convertirons cette densité en une densité implicite neutre au risque, d'abord, des prix relatifs, puis des log-rendements du S&P500, c'est-à-dire en une densité de S_T/S_0 et de $\ln(R_T)$ avec $R_T = S_T/S_0$.

C'est pourquoi nous utilisons le théorème permettant de migrer d'une densité d'une variable vers la densité du logarithme de la même variable.

Soit x , une variable aléatoire continue dont la densité est $f_x(\cdot)$ et g , une fonction de transformation de x , de telle sorte que $y = g(x)$ et $x = g^{-1}(y)$. Il en résulte que la densité de la variable aléatoire continue $Y = g(X)$ est la suivante :

$$f_Y(y) = \left| \frac{\partial(g^{-1}(y))}{\partial y} \right| f_X(g^{-1}(y)) \quad (13)$$

En ce qui concerne notre cas, la fonction g , qui lie les prix et les rendements, est la fonction logarithmique, c'est-à-dire que la fonction inverse g^{-1} est la fonction exponentielle.

$$y_T = \ln \frac{S_T}{S_0} = g(R_T) \text{ et } R_T = \frac{S_T}{S_0}.$$

En appliquant la fonction exponentielle sur les deux cotés de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{S_T}{S_0} &= \exp(\ln(R_T)) \\ S_T &= S_0 \exp(\ln(R_T)) \end{aligned}$$

Après avoir trouvé la fonction g , qui lie les rendements et les prix relatifs, nous avons identifié la fonction inverse g^{-1} avec cette équation :

$$g^{-1}(\ln(R_T)) = \exp(\ln(R_T))$$

Ensuite, nous avons calculé l'équivalent du second facteur de la fonction (13) dans l'équation suivante :

$$f_{S_T}(g^{-1}(\ln(R_T))) = f_{S_T}(\exp(\ln(R_T))) \quad (14)$$

Puis, nous calculons l'équivalent du premier morceau de la fonction (13), la valeur absolue de la dérivée, pour trouver :

$$\left| \frac{\partial(g^{-1}(\ln(R_T)))}{\partial \ln(R_T)} \right| = \exp(\ln(R_T)) \quad (15)$$

Nous rassemblons les deux équations, (14) et (15), pour obtenir :

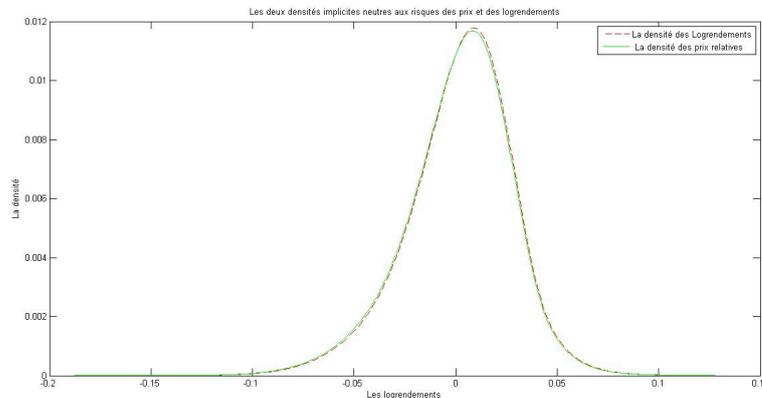
$$\begin{aligned} f_{\ln R_T}(\ln(R_T)) &= \left| \frac{\partial(g^{-1}(\ln(R_T)))}{\partial \ln(R_T)} \right| f_{S_T}(g^{-1}(\ln(R_T))) \\ &= \exp(\ln(R_T)) f_{S_T}(\exp(\ln(R_T))) \end{aligned}$$

L'équation devient :

$$f_{\ln R_T}(\ln(R_T)) = \frac{S_T}{S_0} f_{S_T}\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \quad (16)$$

La procédure nous a permis d'obtenir la densité des prix et la formule, de trouver la densité des rendements. Nous affichons la densité des prix relatifs et celle des log-rendements. La densité des log-rendements (ligne pointillée) est légèrement décalée par rapport à la densité des prix relatifs (ligne continue).

FIGURE 8 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements



À présent, nous calculons l'indice VIX en utilisant la démarche décrite ci-dessus. Nous calculons les cinq premiers moments en utilisant l'intégrale de Riemann. Les résultats nous servent à calculer les cumulants en utilisant les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_1^* &= \mu_1 \\
\tilde{k}_2^* &= \mu_2 - \mu_1^2 \\
\tilde{k}_3^* &= \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 \\
\tilde{k}_4^* &= \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4 \\
\tilde{k}_5^* &= \mu_5 - 5\mu_4\mu_1 - 10\mu_3\mu_2 + 20\mu_3\mu_1^2 + 30\mu_2^2\mu_1 - 60\mu_2\mu_1^3 + 24\mu_1^5
\end{aligned}$$

Où \tilde{k}_n^* est le nième cumulant risque-neutre à partir de la distribution obtenue et μ_n est le nième moment centré de la distribution neutre au risque.

Un cumulant d'une variable aléatoire X est défini à partir de la fonction génératrice des cumulants $K(t)$. Cette dernière s'obtient à partir du logarithme de la fonction génératrice des moments $M(t)$.

$$K(t) = \log M(t) = \log E[\exp(tX)]$$

Une fois le calcul des cumulants opéré, nous recourons à la formule de Martin (2013)[12] pour calculer le VIX^2 et l'indice VIX . Nous compilons les statistiques descriptives afin de vérifier les résultats, puis nous procédons à une régression linéaire avec constante. Nous utilisons le modèle de régression linéaire avec constante suivant :

$$y = b + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + \varepsilon$$

Avec :

y : la variable dépendante

$x_1 \dots x_n$: les variables indépendantes

$a_1 \dots a_n$: les coefficients de la variable indépendante. Ils représentent le changement constaté au niveau y pour un changement d'une unité au niveau de $x_1 \dots x_n$ respectivement

b : la constante de la régression

ε : le résidu (les erreurs)

4 Description des données

Nous estimerons la densité implicite neutre au risque à partir des prix quotidiens des options sur le S&P500 entre le 4 janvier 1996 et le 31 janvier 2013 et sur la base de données OptionMetrics. Sur les marchés financiers, les prix n'existent tout simplement pas. On y trouve des prix offerts (ask) et des prix demandés (bid), la différence entre eux représentant ce qu'on appelle le « spread ». Minimiser ce « spread » permet de minimiser les erreurs des données de prix. Pour cela, nous avons choisi de recourir au plus haut prix offert et au plus bas prix demandé pour chaque option. Puisqu'il n'y a pas vraiment de prix sur le marché, nous avons fait la moyenne entre le plus haut prix offert et le prix demandé le plus faible à la fermeture des marchés.

Nous avons obtenu un total de 1 257 319 options, puis nous avons éliminé toutes les options dont l'échéance était supérieure à trente jours ou inférieure à quinze jours, pour garder seulement celles dont l'échéance était située entre quinze et trente jours. 212340 options remplissaient ce critère. Nous avons alors écarté toutes les options dont le prix offert était inférieur à 0.50\$ ou toutes les options dont le volume est nul.

Chaque jour, nous avons seulement conservé les options de vente et les options d'achat hors de la monnaie. 162 052 options respectaient toutes ces conditions. Pour les taux d'intérêt, nous avons utilisé les taux des bons du Trésor mentionnés sur le site Internet de la Réserve fédérale américaine. Nous avons eu le choix de faire une interpolation en utilisant le modèle Nelson Siegel ou de réaliser une interpolation linéaire, afin de trouver le taux d'intérêt pour l'échéance de chaque option. Puisque ces taux sont inférieurs à trente jours, nous avons supposé qu'il n'y aurait pas une grande différence entre les deux méthodes. Nous avons choisi la seconde. À travers l'interpolation linéaire, nous avons pondéré les taux par le temps à maturité des options. Cela nous a permis d'avoir une série de taux d'intérêt qui correspondent à l'échéance de chaque option.

Ensuite, nous avons compilé tous les dividendes annuels payés sur le S&P500, la difficulté résidant dans le fait que les dividendes sont payés de façon discrète à chaque trois mois. Pour obtenir le taux des dividendes quotidiens dont nous avons besoin, nous avons fait la somme de tous les dividendes payés durant chaque année et nous l'avons divisée par 252 pour obtenir le taux des dividendes quotidien. Cela nous a permis de compléter l'ensemble des données dont nous avons besoin, à savoir les prix des options, les taux d'intérêt, les taux des dividendes et les prix de fermeture quotidiens du S&P 500.

Nous avons constaté que plusieurs options avaient le même prix d'exercice au sein d'une même journée. Afin de disposer d'une seule volatilité implicite pour chaque prix d'exercice par journée, nous avons utilisé la fonction «unique» de Matlab, qui élimine les doublons. Après avoir obtenu toutes les distributions, tous les moments et les cumulants ainsi que le niveau du VIX estimé au sein de la boucle principale, nous avons ajouté les vraies valeurs du VIX à la matrice pour

analyser les résultats.

5 Résultats

5.1 Les statistiques descriptives de l'estimation à partir des log-rendements

Le tableau 2 nous permet de voir l'ordre de grandeur de l'estimation des cumulants et de voir les statistiques descriptives des cumulants, du VIX de marché et du VIX^2 de marché.

Nous avons fait une régression linéaire de l'indice VIX^2 de marché sur les quatre cumulants pour tout l'échantillon. Le tableau 3 présente les résultats de la régression. Les coefficients des deuxième, troisième et quatrième cumulants sont respectivement 10.318, 41.67 et 16.089. Ces trois coefficients sont statistiquement significatifs, puisque qu'ils ont des p-values très basses. En revanche, le coefficient du cumulant 5 est négatif, ce qui est difficilement explicable. Chaque cumulant représentant un niveau de risque, il doit logiquement contribuer positivement à l'indice VIX , ce qui n'est pas le cas pour le cumulant 5.

TABLE 3 – Régression du VIX^2 de marché sur les cumulants de la distribution des log-rendements (1996-2013)

	Coefficient	SE	tStat	p-value	R^2 ajusté
Cumulant 2	10.318	0.617	16.702	1.89E-59	0.352
Cumulant 3	41.670	8.563	4.866	1.21E-06	
Cumulant 4	16.089	6.773	2.375	0.0176	
Cumulant 5	-98.842	16.868	-5.859	5.25E-09	

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'indice VIX est, en théorie, quasi égal à la variance neutre au risque du S&P500. Aussi, nous avons fixé le coefficient du deuxième cumulant 1. Plus précisément, nous avons soustrait le deuxième cumulant de l'indice VIX^2 de marché, puis nous avons fait la régression sur les autres cumulants. Le tableau 4 présente les résultats cette régression.

TABLE 4 – Régression du VIX^2 de marché moins le cumulants 2 sur les autres cumulants de la distribution des log-rendements (1996-2013)

	Coefficient	SE	tStat	pValue	R^2 ajusté
Cumulant 3	-32.15	7.339	-4.381	1.2301e-05	0.192
Cumulant 4	16.68	7.0742	2.357	0.018454	
Cumulant 5	3.48	16.13	0.2162	0.8288	

Les coefficients des troisième, quatrième et cinquième cumulants sont respectivement -32.15, 16.68 et 3.48. Les deux premiers coefficients sont statis-

TABLE 2 – Statistiques descriptives des cumulants à partir de la distribution des log-rendements

	Moyenne	Max	Min	Médiane	Mode	Écart type	Variance
Cumulant 2	0.00297	0.03126	-0.01370	0.00045	-0.01370	0.00594	3.53E-05
Cumulant 3	-0.00041	0.00847	-0.00661	-9.60E-06	-0.00661	0.00103	1.07E-06
Cumulant 4	-0.00028	0.00402	-0.00590	-8.47E-07	-0.00590	0.00075	5.73E-07
Cumulant 5	-8.26E-05	0.00321	-0.00106	-1.46E-07	-0.00106	0.00022	4.97E-08
VIX ² de marché	0.05467	0.62615	0.00978	0.04293	0.04301	0.04811	0.00231
VIX de marché	0.21932	0.7913	0.0989	0.2072	0.2074	0.08106	0.00657

tiquement significatifs, puisqu'ils ont des p-values très basses. En revanche, la p-value du coefficient du cumulants 5 est de 0.8288.

5.2 L'analyse des sous-périodes

De 1996 à 2003, le Chicago Board Options Exchange a utilisé une formule de l'indice conçue par ses soins pour mesurer les attentes de la volatilité implicite à 30 jours en recourant aux options à la monnaie du S&P100. L'indice VIX est rapidement devenu l'indice de référence de premier plan pour la volatilité sur le marché boursier américain. Notre régression sur les données de cette période a produit les résultats du tableau 5. Il est évident que plus le degré du cumulants est élevé, moins le cumulants a de poids dans le calcul de l'indice VIX. De plus, les résultats de cette régression laissent apparaître des coefficients positifs pour les deuxième et quatrième cumulants, ce qui est cohérent avec les résultats théoriques, puisque l'augmentation de l'un d'eux implique une augmentation directe de l'indice VIX.

Au contraire, les coefficients des troisième et cinquième cumulants sont négatifs, ce qui est difficilement explicable, car les cumulants représentent des risques. Autrement dit, une augmentation d'une unité du troisième cumulants doit contribuer à l'augmentation de l'indice VIX. Or dans ce cas, c'est plutôt l'inverse qui se produit. De plus, même si les p-values des quatre coefficients sont très basses, $p - value < 0.01$, ce qui est statistiquement significatif à 99%, les coefficients des troisième et cinquième cumulants sont négatifs.

TABLE 5 – Régression du VIX^2 de marché sur les cumulants de la distribution des log-rendements (1996-2003)

	Coefficient	SE	tStat	p-value	R^2 ajusté
Cumulants 2	5.579	0.603	9.246	1.50E-19	0.341
Cumulants 3	-3.856	9.968	-0.386	6.99E-01	
Cumulants 4	67.320	8.004	8.410	1.49E-16	
Cumulants 5	-125.664	16.702	-7.523	1.24E-13	

En 2003, le Chicago Board Options Exchange, en collaboration avec Goldman Sachs, a modifié la méthode de calcul de l'indice VIX afin de refléter une nouvelle façon de mesurer les attentes de la volatilité. Le nouveau VIX utilise les options hors de la monnaie avec différents prix d'exercice sur l'indice S&P500. Les résultats de la régression avec les données de cette période sont représentés dans le tableau 6.

TABLE 6 – Régression du VIX^2 de marché sur les cumulants de la distribution des log-rendements (2003-2013)

	Coefficient	SE	tStat	p-value	R^2 ajusté
Cumulant 2	4.4349	0.861	5.148	2.98E-07	0.578
Cumulant 3	-49.344	10.669	-4.624	4.07E-06	
Cumulant 4	-31.092	7.868	-3.951	8.12E-05	
Cumulant 5	254.072	24.658	10.303	4.25E-24	

Au niveau des coefficients, nous faisons le même constat qu'avec les données antérieures à 2003 : les coefficients des deuxième et cinquième cumulants sont positifs, mais les coefficients des troisième et quatrième cumulants sont négatifs, ce qui est, encore une fois, difficilement explicable. En revanche, les p-values des quatre coefficients sont très faibles ($p < 0.01$), ce qui représente un résultat statistiquement significatif à 99%. Cette augmentation peut être expliquée par le fait que la nouvelle méthode de calcul permet de mieux capter les attentes du marché en ce qui concerne la volatilité pour les trente jours qui suivent.

5.3 L'analyse par composante

Dans cette section, nous éliminons chaque fois le dernier cumulant pour nous concentrer sur les autres. En premier lieu, nous avons éliminé le cinquième cumulant pour faire la régression sur les trois précédents. Les résultats de cette régression sont présentés dans le tableau 7. Nous avons remarqué que tous les coefficients sont positifs, contrairement aux résultats trouvés dans la section 2. Cela est très cohérent avec la théorie, car chaque risque représenté par un cumulant contribue de façon positive au risque du marché, au calcul de l'indice VIX en l'occurrence. Une unité de plus au niveau de la variance, l'asymétrie ou de l'épaisseur, augmente l'indice VIX en fonction de leurs coefficients respectifs. Reste que le coefficient du quatrième cumulant est plus grand que celui du deuxième. Par ailleurs, nous nous attendions à ce que le premier cumulant ait un poids plus élevé. Enfin, les p-values des coefficients sont très petites, ce qui est statistiquement significatif.

TABLE 7 – Régression du VIX^2 de marché sur les trois cumulants de la distribution des log-rendements (1996-2013)

	Coefficient	SE	tStat	p-value	R^2 ajusté
Cumulant 2	8.862	0.5693	15.565	3.28E-52	0.344
Cumulant 3	0.661	4.967	0.133	8.94E-01	
Cumulant 4	33.757	6.105	5.528	3.56E-08	

Nous éliminons le quatrième cumulant pour utiliser seulement le deuxième et le troisième. Les résultats de cette régression sont présentés dans le tableau 8. Les coefficients des deux cumulants sont respectivement 8.19 et 21.46 avec de

très petites p-values ($p < 0.01$). Qui plus est, la moyenne des distances des vraies valeurs de la ligne de régression est encore plus faible.

TABLE 8 – Régression du VIX^2 de marché sur les deux cumulants de la distribution des log-rendements (1996-2013)

	Coefficient	SE	tStat	p-value	R^2 ajusté
Cumulant 2	8.197	0.559	14.643	1.21E-46	0.336
Cumulant 3	21.461	3.263	6.576	5.86E-11	

Pour la dernière régression, nous utilisons seulement le deuxième cumulant. Les résultats de cette régression sont présentés dans le tableau 9. Nous avons une très petite p-value et la plus petite erreur type de $SE = 0.133$ de toute l'analyse. Cela nous permet d'affirmer que le deuxième cumulant explique une grande partie de l'indice VIX comme l'indique la formule.

TABLE 9 – Régression du VIX^2 de marché sur le deuxième cumulant de la distribution des log-rendements (1996-2013)

	Coefficient	SE	tStat	p-value	R^2 ajusté
Cumulant 2	4.620	0.133	34.654	3.38E-215	0.324

Nous attendions un coefficient proche de 1 pour le deuxième cumulant, de $\frac{1}{3}$ pour le troisième cumulant, de $\frac{1}{12}$ pour le quatrième cumulant, etc. Cela montre que le poids associé au changement d'une unité du deuxième cumulant est plus élevé que celui d'une unité du troisième cumulant, qui est, lui-même, plus élevé que celui du quatrième cumulant dans le changement du niveau de l'indice VIX. La dynamique des distributions trouvées semble être compatible avec le contexte économique. Elle est également cohérente avec les facteurs macro-économiques, de sorte qu'on remarque une augmentation des probabilités de pertes, de l'asymétrie et de l'épaisseur des queues de distribution lors des périodes de crise économique et leur baisse lors des périodes de croissance. Cette estimation de la distribution neutre au risque quotidienne permet aux investisseurs de mieux inférer l'information de marché et mieux estimer son risque, surtout au niveau des queues qui captent plus les risques des événements extrêmes.

6 Conclusion

Dans cette étude empirique, nous avons tenté de démontrer les liens entre l'indice de volatilité du marché boursier américain VIX et les cumulants de la densité du S&P500. Dans un premier temps, nous avons estimé la densité implicite neutre au risque des rendements du S&P500 pour chaque jour. Pour ce faire, nous avons réalisé un lissage sur les volatilités implicites des options de vente et des options d'achat hors de la monnaie. Nous avons, ensuite, démontré les liens entre les moments et les cumulants d'une distribution. Nous avons calculé les moments

pour pouvoir calculer les cumulants des densités trouvées pour construire le VIX^2 estimé. Nous avons alors vérifié les résultats de cette estimation avec les valeurs du marché du VIX^2 .

Cette méthode d'estimation de la densité neutre au risque a donné un résultat cohérent avec la conjoncture économique. Nous avons constaté, lors des calculs, que les probabilités d'une perte substantielle étaient beaucoup plus élevées en 2008, pendant la crise financière, avec une asymétrie des rendements, qu'au cours des autres années. Pour le démontrer, vous trouverez, dans les graphiques annexés à ce mémoire, des densités que nous avons choisies de façon arbitraire. Notre analyse par régression indique que la méthode de calcul du VIX après 2003 permet de mieux capter les attentes du marché en termes de volatilité pour les trente prochains jours. De plus, elle indique aussi qu'un lien existe entre l'indice de volatilité VIX et les cumulants de l'indice S&P500. Néanmoins, ce lien change en fonction du contexte économique. Le poids des cumulants diffère également en fonction du degré du cumulant, de sorte que le deuxième cumulant (lié à la variance) représente un risque prépondérant dans le calcul de l'indice VIX. Une augmentation du deuxième cumulant de 1% affectera plus l'indice VIX qu'une augmentation de 1% du quatrième cumulant.

Cependant, l'indice VIX est lié à tous les cumulants dont le nombre est infini. Le fait de n'en considérer que quatre peut représenter une limite à la méthode empirique. Ajoutons à cela le fait que nous avons calculé des moyennes à partir des prix offerts et des prix demandés pour obtenir un prix moyen.

Les pistes à explorer pour les recherches futures sont nombreuses. L'indice VIX étant un indice précurseur pour le futur, il serait intéressant de voir jusqu'à quel point il peut prévoir les crises financières, comme celle de 2008, en incluant d'autres facteurs comme les facteurs macroéconomiques ou même des facteurs qui touchent directement la politique monétaire.

7 Annexes

Nous avons extrait des distributions des log-rendements et des prix relatifs de façon aléatoire sur la période s'étalant de 1996 à 2003. Les figures suivantes représentent les distributions trouvées.

FIGURE 9 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 5 mars 1997

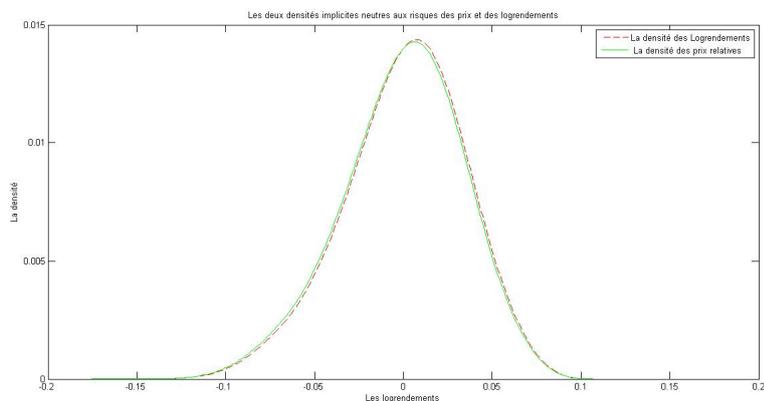


FIGURE 10 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 31 mars 1998

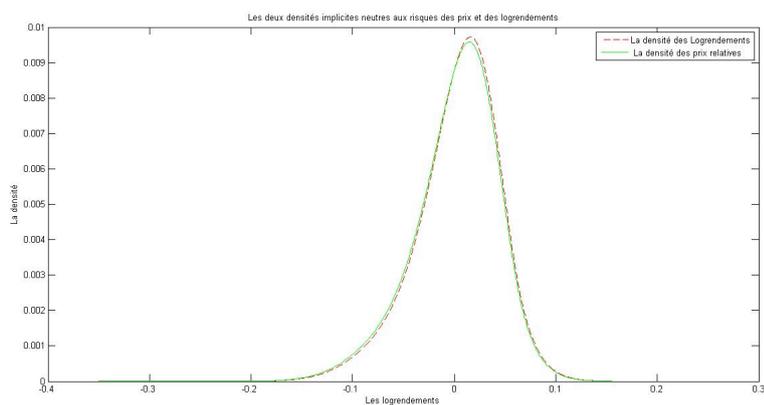


FIGURE 11 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 3 septembre 1999

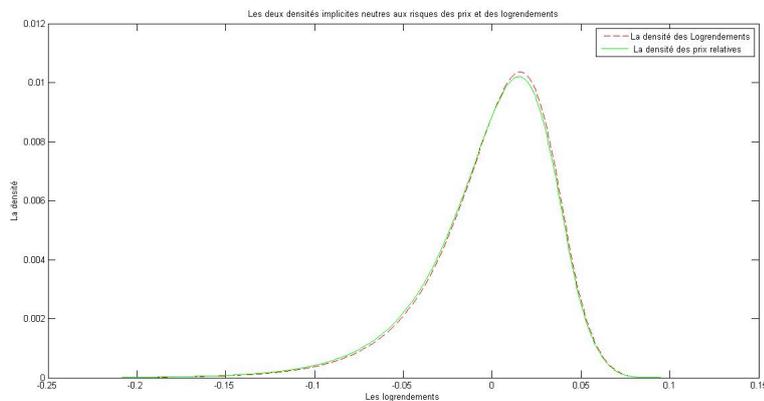


FIGURE 12 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 1^{er} mai 2000

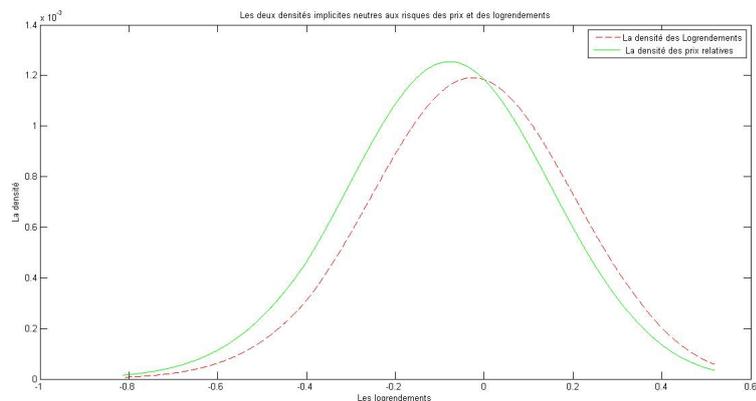


FIGURE 13 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 27 février 2001

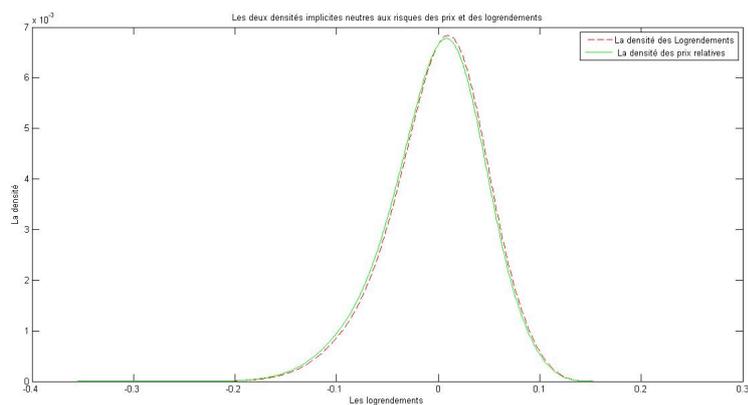


FIGURE 14 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 4 juin 2002

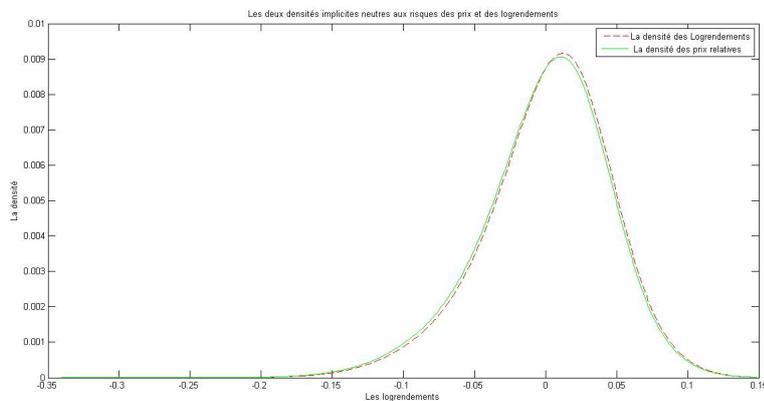


FIGURE 15 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 30 septembre 2003

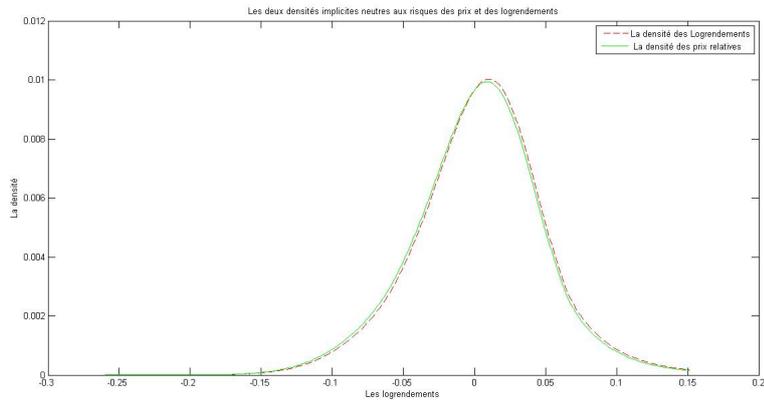


FIGURE 16 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 6 février 2004

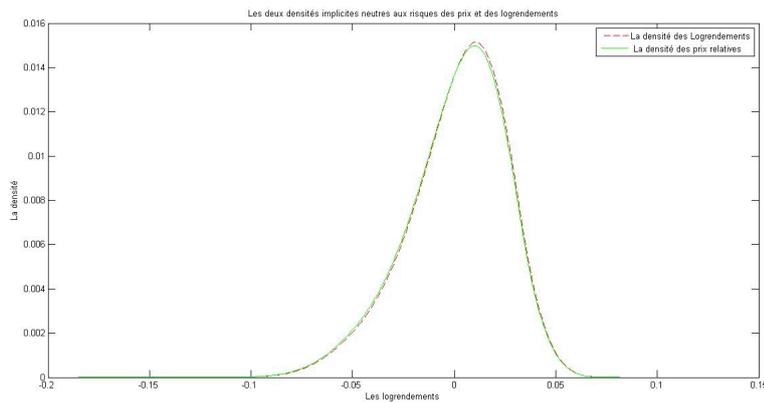


FIGURE 17 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 10 septembre 2008

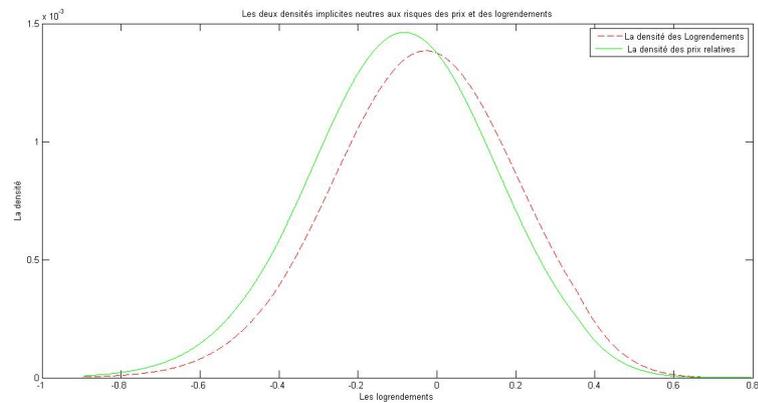


FIGURE 18 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 30 mars 2009

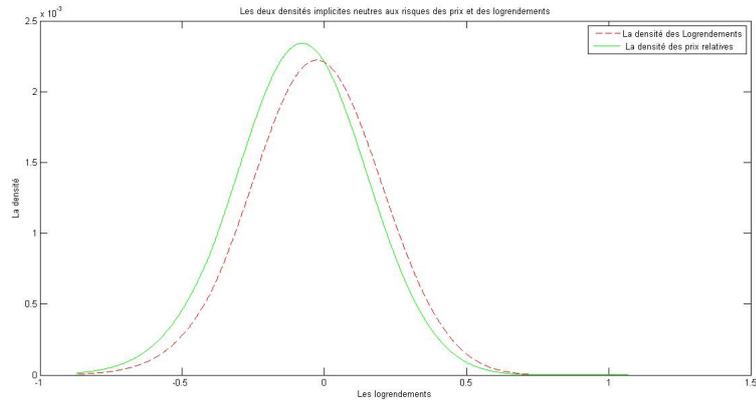


FIGURE 19 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 25 février 2010

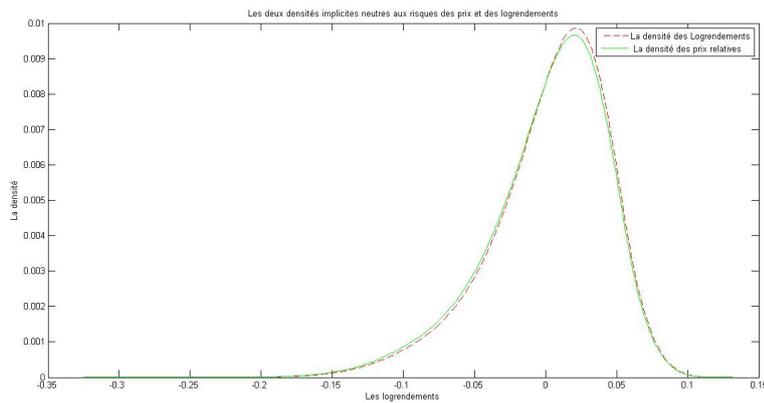


FIGURE 20 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 1^{er} août 2011

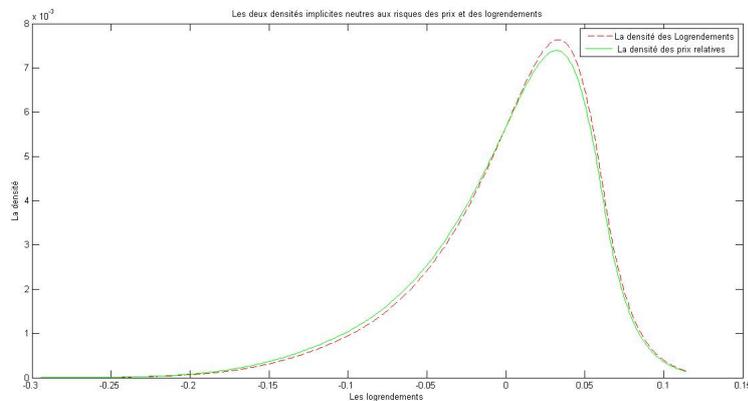
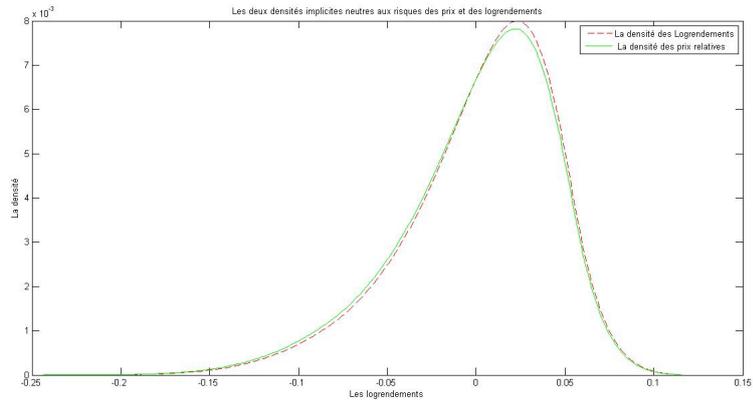


FIGURE 21 – Les deux densités implicites neutres aux risques des prix et des log-rendements du 11 juillet 2012



Références

- [1] Ait-Sahalia. Y et Lo. A (2000) Nonparametric risk management and implied risk aversion. *Journal of Econometrics*, 94, 9-51.
- [2] Bates. D (1991) The crash of '87 : was it expected ? the evidence from option markets. *The Journal of Finance*, Vol. 46, n° 3.
- [3] Bliss. R et Panigirtzoglou. N (2004) Option-implied risk aversion estimates. *The Journal of Finance*, Vol. 59, n° 1.
- [4] Breeden. D et Litzenberger. R (1978) Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, 51, 621-652.
- [5] Derman. E et Kani. I (1994) The volatility smile and its implied tree. *Quantitative Strategies Research Notes*, 41-65.
- [6] Figlewski. S (2008) Estimating the implied risk neutral density for the U.S. market portfolio. Oxford University Press, 58-79.
- [7] Grunbichler. A et Longstaff. F (1996) Valuing futures and options on volatility. *Journal of Banking and Finance*, 20, 985-1001.
- [8] Lin. Y (2007) Pricing VIX futures : Evidence from integrated physical and risk-neutral probability measures. *Journal of Futures Markets*, 27, 1175-1217.
- [9] Lin. Y et Chang. C (2009) VIX option pricing. *Journal of Futures Markets*, 29, 523-543.
- [10] Lin. Y et Chang. C (2010) Consistent modeling of S&P 500 and VIX derivatives. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 34, 2302-2319.
- [11] Lu. Z et Zhu. Y (2010) Volatility components : the term structure dynamics of VIX future. *Journal of Futures Markets*, 30, 230-256.
- [12] Martin. I (2013) Simple Variance Swaps. NBER Working Paper No. 16884.
- [13] McMillan. L (2007) Modern Portfolio Protection. Baron's, M14 récupéré de ABI/INFORM Global, 96-121.
- [14] Shimko. D (1993) The pricing of risky debt when interest rates are stochastic. *The Journal of Fixed Income*, 3 , 58-65.
- [15] Shimko. D (2002) Simulation of prices, rates and cash flows. Harvard Business School Background Note 203-056.
- [16] Zhang. J et Zhu. Y (2006) VIX futures. *Journal of Futures Markets*, 26, 521-531.
- [17] Zhang. J, Shu. J et Brenner. M (2010) The new market for volatility trading. *Journal of Futures Markets*, 30, 809-833.
- [18] Zhu. Y et Zhang. J (2007) Variance term structure and VIX future pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 10, 111-127.