

HEC MONTRÉAL

CONTRÔLE OPTIMAL D'UN SYSTÈME HYDRO-ÉLECTRIQUE PAR
SIMULATIONS ET RÉGRESSIONS

PAR

JEAN-PHILIPPE OLIVIER-MEUNIER

OPTION

INGÉNIERIE FINANCIÈRE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION

DU GRADE DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES

(M. Sc.)

17 janvier 2016

©JEAN-PHILIPPE OLIVIER-MEUNIER, 2014

Sommaire

Ce mémoire étudie le problème de gestion d'eau dans les réservoirs afin de trouver une politique d'exploitation optimale d'un système hydroélectrique. Dans cette optique, nous proposons une méthode de programmation dynamique utilisant des simulations d'apports naturels et des surfaces de régression afin de trouver cette politique optimale. Nous appliquons la méthode sur un système réel de Rio Tinto basé dans la région du Saguenay Lac-Saint-Jean (Québec, Canada). La motivation première derrière l'implantation de cette méthode est de pouvoir utiliser l'information de plus de variables hydrologiques pour prévoir l'apport futur sans ajouter de temps computationnel important, ce que les autres méthodes de la littérature ne permettent pas.

Nous comparons nos résultats à ceux obtenus de la méthode SDP, une méthode de programmation dynamique classique à la littérature. Au final, nous obtenons des résultats comparables autant en matière de production énergétique qu'en matière de respect des contraintes sur les niveaux d'eau, surpassant même les niveaux de production obtenus avec l'approche classique utilisée comme référence. Nous n'avons malheureusement pas pu tester pleinement les capacités de notre algorithme à utiliser plusieurs variables hydrologiques dans les régressions à cause du manque de données statistiques pour le système en question, test qui sera reporté à un travail ultérieur. Nous sommes néanmoins très satisfaits des résultats prometteurs de cette première expérimentation.

Mots-clés : système hydroélectrique, programmation dynamique, simulation, régression, politique d'exploitation, gestion des réservoirs.

Abstract

This thesis examines the problem of water management in reservoirs to find an optimal operating policy of a hydroelectric system. With this aim in mind, we propose a dynamic programming approach using simulations of water inflows and regression surfaces in order to find this optimale policy. We apply the approach on a real system possessed by Rio Tinto based in the Saguenay Lac-Saint-Jean region (Québec, Canada). The primary motivation behind the implantation of this approach is the possibility to use the information given by more hydrological variables to forecast the future inflows without adding important computational effort, which the other approaches in the litterature cannot do.

We are comparing our results with the ones obtain of a SDP approach, a classical dynamic programming method used in the litterature. At the end, we obtain comparable results both in terms of energetic production and respecting the water storage constraints, even surpassing the production level obtain from the classical approach used as benchmark. Unfortunately, we couldn't fully test the capacity of our algorithm to use multiple hydrological variables in the regressions because of the lack of data available at this system. This test will be postponed to a future work. Nevertheless, we are very satisfied with the promising results of this first experiment.

Keywords : hydropower system, dynamic programming, simulation, regression, operating policy, reservoir management.

Table des matières

Sommaire	i
Abstract	ii
Table des matières	iv
Liste des tableaux	v
Liste des figures	vi
Remerciements	vii
1 Introduction	1
1.1 Objectif de recherche et résultats	1
1.2 Revue de littérature	3
1.3 Structure du mémoire	5
2 Description du système hydroélectrique et formulation du programme dynamique	6
2.1 Système à l'étude	6
2.2 Application de la programmation dynamique par simulations et régressions	10
3 Illustration de l'algorithme sur deux périodes	14
3.1 Modélisation du système	14
3.2 Formation de nos échantillons simulés	16
3.3 Formation d'une surface de régression et obtention de la décision optimale	18
4 Description de l'algorithme	24
5 Pseudo-Code	29
5.1 Méthode DP simulation et régression	30
5.2 Analyse comparative	31

6	Tests numériques comparatifs	32
6.1	Design expérimental	32
6.1.1	Description du test comparatif	32
6.1.2	Les bases utilisées	34
6.1.3	Autres paramètres du test	36
6.1.4	Méthode de la politique naïve	36
6.2	Résultats	37
6.2.1	Analyse des résultats de la politique naïve	38
6.2.2	Méthode DP simulations et régressions vs Méthode SDP	39
6.2.3	Implantation technique et temps de calcul	43
6.2.4	L'implantation d'une contrainte saisonnière	44
7	Conclusion	46
A	Descriptions des fonctions	48
B	Obtention de la borne terminale	49
C	Interpolation bilinéaire	50
D	Ajustement pour les volumes impossibles	51
E	Figures et tableaux sorties par notre test numérique	52
	Bibliographie	63

Liste des tableaux

- 1 Comparaison de la production hebdomadaire moyenne obtenue par différentes méthodes sur un intervalle de 58 années . . . 53
- 2 Comparaison de la production hebdomadaire moyenne totale et à chacune des centrales suivi par la fréquence et quantité des inondations entre différentes méthodes sur un intervalle de 58 années 54

Table des figures

1	Schéma du système	9
2	Exemple d'une surface de régression	21
3	Comparaison entre production hebdomadaire moyenne obtenue (ligne pleine bleue) et temps computationnel (ligne pointillée rouge) pour chaque degré maximal utilisé sur les variables de décision	44
4	Trajectoire moyenne des apports Q1, Q2 et Q3 sur une période d'un an effectuée sur 20000 trajectoires (m^3/sec)	55
5	Comparaison des productions hebdomadaires moyennes totales des quatre centrales effectuées sur 58 années entre la méthode DP simulations et régressions et SDP (MW)	56
6	Comparaison des niveaux des réservoirs moyens effectué sur 58 années entre la méthode DP simulations et régressions et SDP (hm^3)	57
7	Comparaison des débits soutirés hebdomadaires moyens effectué sur 58 années entre la méthode DP simulations et régressions et SDP (m^3/sec)	58
8	Comparaison des productions hebdomadaires moyennes de chaque centrale effectué sur 58 années entre la méthode DP simulations et régressions et SDP (MW)	59
9	Comparaison des déversements non-productifs hebdomadaires moyens de chaque centrale effectué sur 58 années entre la méthode DP simulations et régressions et SDP (m^3/sec)	60
10	Surface avec réservoirs à moitiés pleins (graphiques du haut) et avec réservoirs pleins (graphiques du bas), point de vue du 1er (graphiques de gauche) et 2ème (graphiques de droite) réservoir. Les surfaces sont quadratiques.	61
11	Surface avec réservoirs à moitiés pleins (graphiques du haut) et avec réservoirs pleins (graphiques du bas), point de vue du 1er (graphiques de gauche) et 2ème (graphiques de droite) réservoir. Les surfaces sont cubiques.	62

Remerciements

Je voudrais remercier toutes les personnes qui m'ont apporté une aide précieuse dans le cadre de la rédaction de mon mémoire. Ces personnes ont en effet concouru à affiner mes connaissances tant au niveau de la matière en elle-même que de la présentation.

Je remercie d'abord grandement mon directeur, Michel Denault, et co-directeur, Jean-Guy Simonato, pour m'avoir encadré tout au long de mon mémoire, faisant preuve d'une grande disponibilité et qui n'ont pas lésiné de leurs temps et efforts pour m'apporter les orientations et les corrections nécessaires à la réalisation de ce travail.

Je remercie aussi Pascal Côté de Rio Tinto pour sa grande aide à la compréhension du système hydroélectrique sans laquelle ce projet aurait été difficile à accomplir. Je le remercie aussi pour son accueil dans ces locaux lors de mon séjour au Saguenay.

1 Introduction

Tout au long de ce mémoire, nous traiterons le cas du système de production hydroélectrique de Rio Tinto situé dans la région du Saguenay Lac-Saint-Jean (Québec, Canada). Rio Tinto est une multinationale oeuvrant principalement dans l'exploitation minière et plus particulièrement dans la production d'aluminium au Canada depuis le rachat d'Alcan. Au Québec, Rio Tinto a recours à son importante production d'hydroélectricité pour l'aider à subvenir au besoin important en énergie de ses alumineries. En fait, sa production hydroélectrique du Saguenay-Lac-Saint-Jean répond à 90% des besoins énergétiques de ses alumineries en territoire québécois.

L'hydroélectricité est une énergie propre et renouvelable qui utilise l'énergie cinétique du courant d'eau pour produire de l'énergie mécanique grâce à une turbine. Cette énergie mécanique est finalement convertie en énergie électrique à l'aide d'un alternateur. L'électricité ne peut cependant être aisément conservée, d'où l'importance de construire des barrages qui créeront des réservoirs permettant de produire l'électricité en fonction des besoins dans le temps. Les décisions quant à la quantité d'eau soutirée sont prises de façon hebdomadaire là où il y a un réservoir. Ainsi, ces décisions sont cruciales pour maximiser la production énergétique, mais aussi pour une meilleure gestion de l'eau afin d'éviter soit des gaspillages d'énergies, soit d'éventuelles inondations, ou encore, un manque d'électricité pour assurer le bon fonctionnement continu des alumineries.

1.1 Objectif de recherche et résultats

Le but de ce mémoire est de développer un outil d'aide à la prise de décisions dont le but ultime sera d'optimiser la production du système du Saguenay Lac-Saint-Jean. Pour ce faire, nous utiliserons une approche de programmation dynamique implantée à l'aide de simulations et de régressions. Même si le projet traité dans ce mémoire n'a pas de lien direct avec le milieu financier, la méthode utilisée est aussi utilisée pour la gestion de portefeuille et est aussi similaire au célèbre algorithme de Longstaff-Schwartz pour la tarification d'options financières. De plus, même si dans notre cas le

contexte précis ne s'y prêtait pas, le simple fait d'ajouter un tarif de vente sur les surplus d'électricité transforme le problème en un problème d'options financières.

La prise de décision de période en période sera faite en optimisant une surface de régression obtenue à partir de différents scénarios de politique et d'apports d'eau naturel aux réservoirs. Le tout sera optimisé en respectant plusieurs contraintes. Cette méthode nous permettra d'obtenir la meilleure décision sur la quantité d'eau à soutirer maintenant en permettant un changement de décision (diminution ou augmentation de la quantité d'eau à soutirer de chaque réservoir) à chaque période de temps (hebdomadaire dans notre cas) de façon à maximiser la production obtenue à échéance. La fonction permettant le calcul de la production et les simulations des apports d'eau nous ont été fournies par Rio Tinto.

Comme nous le verrons dans la revue de littérature, la programmation dynamique est la méthode de choix pour résoudre ce type de problème de gestion d'eau. Notre méthode se distingue toutefois des autres méthodes de programmation dynamique utilisées dans le domaine par l'utilisation de surface de régression. La motivation première d'une telle méthode était le fait de pouvoir utiliser plus de variables d'états exogènes aidant la prévision des apports d'eau futurs sans ajouter beaucoup de temps de calcul.

Nous avons comparé les résultats obtenus de notre méthode avec ceux obtenus d'une méthode de programmation dynamique stochastique classique à la littérature et utilisée comme modèle interne chez Rio Tinto (sans toutefois être la méthode utilisée pour obtenir leurs politiques de gestion des réservoirs). En utilisant une surface de régression quadratique, nous avons un temps computationnel comparable à celui de la méthode de programmation dynamique classique, mais une production légèrement moindre (0.22% inférieure). Cependant, en utilisant une surface de régression de degré 3, c'est notre méthode qui donne de meilleurs résultats (0.18% de production supplémentaire). Une surface de degré 3 étant plus longue à optimiser sous contraintes qu'une surface quadratique, le temps computationnel triple par rapport au test précédent. Dans tous les cas, notre méthode donne une variabilité de production entre les années considérablement plus faible. Une seule

variable d'état exogène a été utilisée pour faire ces tests, d'autres variables n'étant pas facilement disponibles pour notre système à l'étude. Ceci nous a malheureusement empêchés de tester l'avantage comparatif escompté de notre méthode, et ce test doit être remis à un travail ultérieur.

1.2 Revue de littérature

La programmation linéaire et programmation dynamique sont sans contredit les méthodes les plus populaires pour résoudre des problèmes de politique optimale de gestion de l'eau dans des réservoirs. Toutefois, la programmation linéaire, comme son nom l'indique, requiert des contraintes et une fonction à optimiser linéaire. Cela pose un problème majeur quand l'on sait que la majorité des fonctions objectifs traitant des problèmes du genre sont non linéaire. Malgré tout, même dans ces problèmes il est possible d'utiliser la programmation linéaire en ayant recours à une linéarisation de la fonction objectif. Selon le problème, cette approximation peut mener à des résultats plus ou moins concluants. Un exemple pertinent de problème d'optimisation de gestion d'eau utilisant la programmation linéaire peut être retrouvé dans Reville, Joeres et Kirby (1969). Un article utilisant la programmation linéaire et traitant du cas à plusieurs réservoirs est publié par Windsor (1973).

Plus récemment, c'est cependant la programmation dynamique qui est utilisée par la grande majorité des recherches dans le domaine. Son caractère de résolution séquentielle de sous-problèmes est idéal pour les problèmes de prise de décisions à plusieurs périodes tels les problèmes de gestion d'eau dans les réservoirs. Une des premières utilisations peut être vue dans Hall et al. (1968) qui utilise cette approche afin d'optimiser la politique de gestion de l'eau dans un seul réservoir et plusieurs fonctions objectifs (par exemple : minimisation des coûts de production tout en maximisant la production énergétique).

La majorité des recherches effectuées à l'aide de la programmation dynamique modélisent le caractère stochastique des apports d'eau aux réservoirs avec des chaînes de Markov où les probabilités de transition d'un apport à une certaine période vers un autre apport à la période suivante sont déterminées

par une approximation de la densité de probabilité (Stedinger et al. 1984; Yeh 1985; Tejada-Guibert et al. 1993; Labadie 2004; Turgeon 2007). Cette méthode est référée dans la littérature par *Stochastic Dynamic Programming* (SDP). Dans plusieurs cas de système hydroélectrique, l'utilisation de plus d'une variable hydrologique est nécessaire afin d'estimer avec plus de précision l'apport d'eau pour la période à venir et donc, avoir des politiques de gestion d'eau de meilleure qualité. Turgeon (2005) a par exemple montré qu'avec un pas de temps journalier, le fait de prendre en compte la corrélation des p dernières périodes d'apport augmentait la qualité des politiques obtenues. Une prévision hydrologique d'apport peut aussi être utilisée comme variable hydrologique (Stedinger et al. 1984; Kelman et al. 1990; Karamouz et Vasiliadis 1992; Kim et Palmer 1997). D'autres variables hydrologiques fortement corrélées aux apports ont aussi montré leurs efficacités, comme le *Snow Water Equivalent* (Stedinger et al. 1984; Tejada-Guibert et al. 1993) qui sera d'ailleurs utilisé dans ce mémoire, une mesure de l'humidité du sol près des réservoirs (Mannocchi et Todisco 2006) ou même un mélange des deux (Côté et al. 2011). Bien sûr, l'efficacité de chacune de ces variables dépend grandement de l'emplacement et la constitution du système hydroélectrique étudié.

Une méthode légèrement différente consiste à utiliser toute l'information de plusieurs scénarios d'apport de la période courante jusqu'à la fin de l'horizon comme variable hydrologique. Cette méthode se différencie de la méthode SDP en représentant l'information prévisionnelle par des scénarios d'apports simulés au lieu d'une densité de probabilité des apports. L'espérance du bénéfice qui doit être calculé à chaque période sera obtenue en trouvant la probabilité de transition du scénario i à la période t jusqu'au scénario j à la période $t + 1$, et ce, pour tous les scénarios. Cette méthode appelée *Sampling Stochastic Dynamic Programming* (SSDP) a été utilisée dans Faber et Stedinger (2001) et dans Kim et al. (2007) sur un horizon à court terme.

La méthode de programmation dynamique simulations et régressions n'a pas été utilisée dans ce type de problème auparavant au meilleur de notre connaissance. Une méthode similaire a toutefois été utilisée pour une estimation numérique de la tarification d'une option américaine par Longstaff

et Schwartz (2001). La méthode requiert toujours l'utilisation de programmation dynamique et de régressions, la différence étant que les décisions se limitent à exercer ou non l'option, et une fois l'option exercée il n'y a plus de décision à prendre. La même technique traitée dans ce mémoire a cependant été utilisée dans une optique d'optimisation de portefeuille avec Delage, Denault et Simonato (2014). Les variables d'états endogènes, c'est-à-dire les variables provenant de l'intérieur du modèle et déterminées par les autres variables du modèle, et exogènes, les variables qui sont extérieures au modèle et déterminent les valeurs des autres variables, y sont respectivement le niveau de richesse de l'investisseur et les taux de rendements de chaque actif. Les variables de décision correspondent aux poids mis dans chacun des actifs qui composent le portefeuille. C'est cette approche de Delage, Denault et Simonato qui est adoptée et adaptée dans ce mémoire. Une méthode de simulations et régressions a aussi été utilisée dans un contexte de système hydroélectrique, mais dans un but de maximisation de profit plutôt que dans un but de maximisation de production et gestion des réservoirs. La variable exogène correspond alors au prix de l'électricité au comptant (Denault, Simonato et Stentoft 2013).

1.3 Structure du mémoire

Ce mémoire suit la structure suivante. Au chapitre 2, nous décrivons en détail les caractéristiques de notre système hydroélectrique et formulons le problème à l'aide de la programmation dynamique. L'algorithme utilisé pour résoudre le problème mathématique sera illustré au chapitre 3 par un exemple simple à deux périodes afin d'apporter une intuition de l'approche au lecteur. Les chapitres 4 et 5, décrivent respectivement l'algorithme de manière générale et le pseudo-code de notre méthode. Dans ce dernier chapitre, nous discutons aussi des différences entre la méthode DP simulations et régressions et la méthode SDP. Le chapitre 6 compare les résultats obtenus par notre méthode, la méthode SDP et une politique naïve. Finalement, la conclusion du mémoire se trouve au chapitre 7.

2 Description du système hydroélectrique et formulation du programme dynamique

De manière générale, un système hydroélectrique est constitué d'un ou plusieurs réservoirs qui servent à emmagasiner l'eau. Les opérateurs du système doivent s'assurer que le niveau dans les réservoirs ne soit pas trop bas pour ne pas manquer d'eau ni trop haut pour éviter les risques d'inondations en amont. Une partie de l'eau dans les réservoirs provient de l'apport naturel de la rivière qui s'y découle. Mais les apports naturels au réservoir dépendent aussi des précipitations et de l'eau apportée par la fonte des neiges. Ainsi, ils ont une forte tendance saisonnière et sont très variables d'année en année. Pour s'assurer qu'il y ait le bon niveau d'eau dans les réservoirs, les opérateurs doivent donc prévoir les apports à venir et relâcher une certaine quantité d'eau pour maintenir une bonne gestion des réservoirs.

De plus, chaque réservoir dispose souvent d'au moins une centrale en aval de celui-ci. C'est dans ces centrales que sont placées les turbines qui génèrent l'électricité. La production des centrales situées directement au pied des réservoirs dépend non seulement de la quantité d'eau qui a été soutirée du réservoir, mais aussi de la hauteur de chute de cette eau. Ainsi, avoir un réservoir avec un niveau élevé apporte une meilleure production à ces centrales.

Les opérateurs doivent donc bien gérer l'eau dans les réservoirs pour éviter un manque d'eau ou des inondations, mais aussi s'assurer d'avoir la meilleure production d'énergie possible.

2.1 Système à l'étude

À ses installations hydroélectriques du Saguenay Lac-Saint-Jean, Rio Tinto possède quatre réservoirs d'eau disposés en série. Les deux premiers font partie du système en amont, alors que les deux suivants font partie du système en aval. Pour des fins de recherches et développements nous voulons tester notre méthode sur le système en aval dans ce mémoire. Ces réservoirs, nommés Chute-Du-Diable et Lac-Saint-Jean, retiennent l'eau qui sera plus

tard utilisée comme source d'énergie et sont les deux endroits où les décisions en rapport au volume d'eau à soutirer sont prises. Le système dispose aussi de quatre centrales, aucune décision n'est prise à ces endroits, ils ne servent qu'à convertir l'énergie.

Ainsi, de l'amont à l'aval, on trouve premièrement le réservoir Chute-Du-Diable où l'eau de la rivière Péribonka est emmagasinée. Au même endroit, mais à flan de réservoir, se trouve la centrale Chute-Du-Diable (CCD) qui profite de la hauteur de chute de l'eau pour convertir plus d'énergie. En aval se trouve la centrale Chute-À-La-Savane (CCS) au fil de l'eau (aucun réservoir). Le débit coule ensuite dans le réservoir Lac-Saint-Jean où se trouve, toujours à flan de réservoir, la troisième centrale, c'est-à-dire la centrale de L'Isle-Maligne (CIM). Finalement, la centrale Shipshaw (CSH) sur la rivière Saguenay complète le système.

Chaque centrale a un maximum sur la quantité d'eau qu'elle peut turbiner, le reste sera évacué par l'évacuateur de crue sans être turbiné et sera non seulement considéré comme non-productif à cette centrale, mais engendrera une perte de production. Une décharge (PDECH dans le schéma suivant) est toutefois mise à disposition au réservoir Lac-Saint-Jean. Pour une trop grande quantité d'eau à turbiner pour la centrale CIM il vaut mieux évacuer le surplus par cette décharge au lieu de simplement la laisser aller par l'évacuateur de crue de la centrale CIM. La quantité d'eau déversée dans cette décharge sera toujours non-productive puisque non turbiné, mais n'engendrera pas de perte de production comme l'aurait fait l'évacuateur de la centrale CIM. L'eau dans la décharge n'est toutefois pas perdue puisqu'elle se rend quand même à la quatrième et dernière centrale CSH pour y être turbinée. La capacité maximale de cette décharge est fonction du volume d'eau dans le réservoir Lac-Saint-Jean. Mis à part l'apport d'eau évident de la rivière elle-même, les deux réservoirs ont aussi des apports d'eau naturel provenant de cours d'eau adjacents. Les apports totaux prévisionnels hebdomadaires sont simulés par Rio Tinto à l'aide de données historiques et d'un modèle hydrologique. La figure 1 représente un schéma de système étudié. Les apports d'eau à destination du réservoir Chute-Du-Diable, de la centrale Chute-Savane et du réservoir Lac-Saint-Jean sont représentés respectivement

par Q1, Q2 et Q3.

Nous devons aussi respecter plusieurs contraintes imposées par le système. La première sera la contrainte reliée au minimum et maximum d'eau que peut contenir chacun des deux réservoirs. Ainsi, les quantités d'eau soutirées devront faire en sorte que le niveau d'eau du réservoir Chute-Du-Diable ne soit pas en deçà de 50.00 hm^3 (hectomètre cube) ni au-delà de 396.00 hm^3 . La même chose s'applique pour le réservoir Lac-Saint-Jean avec des limites de 532.04 hm^3 et 5081.79 hm^3 respectivement. La quantité soutirée a aussi une borne inférieure exprimée en débit, $100 \text{ m}^3/\text{sec}$ pour le premier réservoir et $500 \text{ m}^3/\text{sec}$ pour le second. Une autre contrainte est le maximum d'eau qui peut être soutiré en une semaine dans le deuxième réservoir. Ce maximum dépend directement du niveau initial d'eau dans le réservoir.

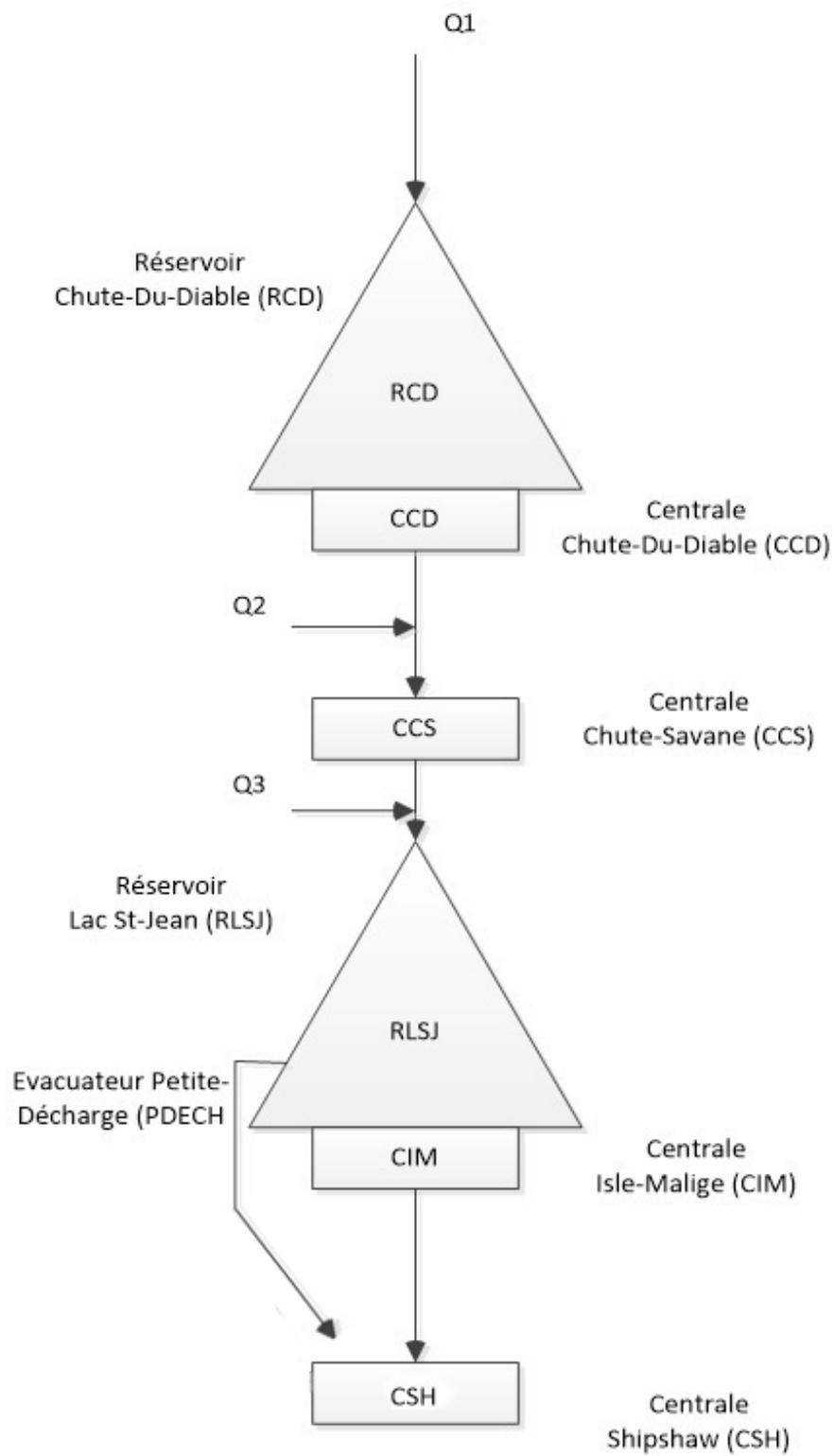


FIGURE 1 – Schéma du système

2.2 Application de la programmation dynamique par simulations et régressions

Notre but sera d'obtenir les quantités d'eau à écouler dans chaque réservoir (politique optimale) à chaque semaine qui maximiseront la production énergétique totale obtenue par ce système sur un horizon de T périodes. Dans ce mémoire, l'horizon choisi sera sur une période d'un an. Plus formellement, nous voulons maximiser la valeur espérée suivante :

$$\mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} P(\mathbf{s}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{q}_t) \right] \quad (1)$$

où \mathbf{s}_t est le vecteur à deux composantes comprenant les niveaux d'eau des deux réservoirs au début de la période de t à $t + 1$ (exprimé en hm^3), \mathbf{u}_t est le vecteur à deux composantes comprenant la quantité d'eau que l'on soutire des réservoirs pour la période de t à $t + 1$ (exprimé en m^3/sec), et \mathbf{q}_t est le vecteur à trois composantes des apports naturels pour la période de t à $t + 1$ (exprimé en m^3/sec). La fonction $P(\mathbf{s}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{q}_t)$ nous retourne la production en gigawatt par heure des centrales de l'ensemble du système durant la période de t à $t + 1$ par l'application d'une certaine politique d'eau soutirée \mathbf{u}_t , d'un certain vecteur d'apports \mathbf{q}_t et de niveaux d'eau \mathbf{s}_t . Le vecteur \mathbf{u}_t représente la quantité soutirée dans les deux réservoirs, mais cette eau ne sera pas nécessairement entièrement turbinée dans chaque centrale. Si la quantité d'eau arrivant dans une centrale excède le maximum que cette centrale peut turbiner, le restant sera évacué par l'évacuateur de crue et engendrera une perte de puissance. Cette espérance en (1) est une espérance conditionnelle prenant en compte l'information disponible à $t = 0$ sur la sommation de T périodes de production.

Les niveaux d'eau des deux réservoirs à $t + 1$ sachant l'information à t sont donnés par les équations de transition respectives suivantes :

$$s_{1,t+1} = s_{1,t} + (q_{1,t} - u_{1,t}) \times 0.6048, \forall t = 0, 1, \dots, T - 1, \quad (2)$$

$$s_{2,t+1} = s_{2,t} + (q_{2,t} + q_{3,t} - u_{2,t} + u_{1,t}) \times 0.6048, \forall t = 0, 1, \dots, T - 1. \quad (3)$$

Où 0.6048 est la facteur de conversion des m^3/sec en $hm^3/semaine$.

Comme mentionné dans la section précédente, nous avons une borne inférieure et supérieure pour les niveaux d'eau dans les réservoirs,

$$s_i^{min} \leq s_{i,t} \leq s_i^{max}, \forall t = 0, 1, \dots, T, \forall i = 1, 2. \quad (4)$$

Nous avons aussi une borne inférieure quant aux volumes d'eau soutirés dans chaque réservoir,

$$u_i^{min} \leq u_{i,t}, \forall t = 0, 1, \dots, T - 1, \forall i = 1, 2. \quad (5)$$

Le but de cette contrainte est d'avoir assez d'électricité afin de conserver la stabilité du réseau. À faible puissance le réseau peut devenir instable. Finalement, une borne supérieure contraint la quantité soutirée du deuxième réservoir et est fonction du niveau d'eau au début de la période allant de t à $t + 1$:

$$u_{2,t} \leq MaxR2(s_{2,t}), \forall t = 0, 1, \dots, T - 1. \quad (6)$$

où $MaxR2$ est la fonction non-linéaire dépendant du niveau d'eau dans le réservoir qui retourne la borne supérieure de la quantité soutirée au deuxième réservoir. La raison de cette borne supérieure est qu'il y a un étranglement rocheux en amont de la centrale de l'Isle-Maligne suivant directement le réservoir Lac Saint-Jean, ce qui limite le débit d'eau pouvant se rendre à la centrale. Le débit passant à travers l'étranglement est fonction du niveau d'eau du Lac Saint-Jean. Il n'y a cependant pas de borne supérieure sur la quantité d'eau soutirée au premier réservoir car la centrale Chute-Du-Diable fait partie intégrante du réservoir.

Pour résoudre le problème d'optimisation formé par les équations (1)-(6), nous utilisons une démarche par programmation dynamique. Le but de la programmation dynamique est de prendre un problème d'optimisation multi-période et de le décomposer en une série de problèmes d'optimisation à une période à résoudre récursivement. Nous commençons de la condition terminale et, à rebours, maximisons la production optimale de la période

courante additionnée à l'espérance de la production des périodes futures pour chaque période. Cette dernière valeur est obtenue d'une fonction que nous appelons fonction valeur (aussi appelé fonction de Bellman). La fonction valeur $v_t(\mathbf{s}_t, h_t)$ dépend à la fois des niveaux d'eau en début de période, mais aussi de la variable h_t qui est une variable d'état exogène qui nous donne l'information hydrologique disponible au temps t afin d'aider à prédire les apports de la période suivante. Nous dissociions la variable des apports \mathbf{q} de la variable h même si les apports passés peuvent être utilisés pour prédire les apports futurs. La raison pour cela est simplement parce que la variable des apports \mathbf{q} est essentielle au fonctionnement de l'algorithme puisqu'elle apparaît dans les équations de transition (2) et (3) des variables endogènes, alors que la variable hydrologique h est optionnelle. Nous voulons donc résoudre l'équation suivante :

$$v_t(\mathbf{s}_t, h_t) = \max_{\mathbf{u}_t} \{ \mathbb{E}_t [P(\mathbf{s}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{q}_t) + v_{t+1}(\mathbf{s}_{t+1}, h_{t+1}) | h_t] \}, \quad (7)$$

où $v_t(\mathbf{s}_t, h_t)$ représente la fonction valeur à t . Notre politique optimale est alors donnée par :

$$\mathbf{u}_t^*(\mathbf{s}_t, h_t) = \arg \max_{\mathbf{u}_t} \{ \mathbb{E}_t [P(\mathbf{s}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{q}_t) + v_{t+1}(\mathbf{s}_{t+1}, h_{t+1}) | h_t] \}. \quad (8)$$

L'optimisation des équations (7) et (8) est effectuée sous contraintes. D'une part, les contraintes sur les quantités soutirées telles que définis par les inéquations (5) et (6) doivent être respectées. D'autre part, la contrainte sur les niveaux d'eau définis par l'inéquation (4) doit aussi être satisfaite.

Comme le montre les équations, l'espérance peut, mais pas nécessairement, être conditionnelle à toutes variables hydrologiques connues en début de période entre t et $t + 1$. Elle pourrait aussi être conditionnelle à une série d'apports d'eau des périodes passées dorénavant connus (en l'occurrence \mathbf{q}_{t-1} , \mathbf{q}_{t-2} , etc, dans ce cas particulier). La politique dépend donc de la (des) variable(s) exogène(s).

Nos variables d'états endogènes sont les niveaux d'eau dans les deux réservoirs (\mathbf{s}_t). Puisqu'il est impossible d'évaluer notre fonction valeur pour toutes les valeurs possibles de \mathbf{s}_t , nous devons discrétiser nos variables d'états

endogènes. Nous voulons alors trouver la valeur et la politique optimale pour tous les états discrétisés de \mathbf{s}_t . Les valeurs associées aux niveaux d'eau à l'échéance $t = T$ sont connues et représentent une valeur productive que l'on accorde au volume d'eau contenu dans les réservoirs ; ce sont les valeurs de borne terminale. Nous devons alors trouver la valeur et la politique optimale pour les niveaux d'eau des périodes $t = 0, 1, \dots, T - 1$. Puisque nous ne savons pas la densité de probabilité des apports naturels nous ne pouvons pas évaluer exactement l'espérance des équations (7) et (8).

Nous approximations donc cette espérance par une surface de régression. Pour construire cette surface de régression, nous devons d'abord simuler un grand échantillon de productions espérées associées à des scénarios basés sur des décisions et des apports possibles. La méthode demande alors une discrétisation de nos variables de décision \mathbf{u}_t et l'utilisation de scénarios simulés d'apports \mathbf{q}_t . Pour chaque couple de politique et d'apports simulés sera alors associé un scénario de production. Une fois notre large échantillon construit, nous régressons sur celui-ci et obtenons notre surface de régression. Nous n'avons qu'à trouver la politique qui maximise cette surface et avons notre approximation de l'équation (8) pour notre politique optimale. Nous réévaluons la politique optimale pour une simulation en particulier et avons notre approximation pour la fonction valeur définie par l'équation (7).

Le chapitre suivant illustre avec un exemple simple et détaillé la procédure afin de donner une bonne intuition de la méthode.

3 Illustration de l’algorithme sur deux périodes

Dans cet exemple très simple, nous décrivons notre approche de programmation dynamique par simulations et régressions en optimisant la quantité d’eau soutirée dans les deux réservoirs sur un intervalle de temps de deux périodes. Nous choisissons ici de faire un exemple à deux périodes puisque c’est le nombre de périodes minimales requis pour bien illustrer le problème. En effet, un exemple à une seule période n’expliquerait pas la prise de décision pour les périodes inférieures à $t = T - 1$, alors qu’un exemple à trois périodes ou plus deviendrait répétitif. Nous ne nous servons pas non plus de l’information passée h_t pour établir nos décisions dans le seul but de rendre l’exemple plus simple. Le cas utilisant l’information passée est présenté au chapitre 4 dans la description générale de l’algorithme. Nous cherchons donc à résoudre les versions simplifiées des équations (7) et (8) suivantes :

$$v_t(\mathbf{s}_t) = \max_{\mathbf{u}_t} \{ \mathbb{E}_t [Prod(\mathbf{s}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{q}_t) + v_{t+1}(\mathbf{s}_{t+1})] \}, \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_t^*(\mathbf{s}_t) = \arg \max_{\mathbf{u}_t} \{ \mathbb{E}_t [Prod(\mathbf{s}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{q}_t) + v_{t+1}(\mathbf{s}_{t+1})] \}. \quad (10)$$

Nous introduisons une fonction *Prod* retournant la quantité d’énergie obtenue du turbinage total de l’eau à chacune des centrales qui constitue le système. Cette fonction prend en compte les coefficients de production de chaque centrale liés à la quantité d’eau turbinée et à la hauteur de chute de celle-ci. Nous introduisons aussi une fonction *VolFin* retournant les volumes résultants dans les réservoirs par l’application d’une certaine politique et de l’arrivée d’un certain apport d’eau. Dans notre cas, la fonction résout les équations (2) et (3) du chapitre précédent. Pour plus de détails sur ces fonctions, le lecteur peut se référer à l’annexe A.

3.1 Modélisation du système

Chaque réservoir (ici nommé réservoir R_1 et réservoir R_2) ne pourra relâcher que deux quantités d’eau possible (quantité soutirée Forte F et faible

f) :

$$u^{R_1} \in \{u_F^{R_1}, u_f^{R_1}\},$$

$$u^{R_2} \in \{u_F^{R_2}, u_f^{R_2}\}.$$

De la même façon que pour les quantités d'eau soutirées, nous ne considérons que deux niveaux d'eau initiaux possibles pour chacun des réservoirs (un niveau initial élevé E et bas b). Cela nous donne donc quatre paires de niveaux d'eau possibles à $t = 1$ comme montré dans le tableau suivant.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t = 0 & t = 1 \\ \hline & (s_E^{R_1}, s_E^{R_2}) \\ & (s_E^{R_1}, s_b^{R_2}) \\ (s_0^{R_1}, s_0^{R_2}) & \\ & (s_b^{R_1}, s_E^{R_2}) \\ & (s_b^{R_1}, s_b^{R_2}) \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

Notez que nous ne discrétisons pas les niveaux d'eau à l'échéance ($t = 2$) puisqu'aucune décision n'est prise à cette période. Les niveaux d'eau à $t = 0$ sont, bien entendu, uniques et connus. Finalement, seulement deux simulations d'apports d'eau aux réservoirs seront utilisées. L'apport \mathbf{q}_{connu} correspond à l'apport qui a eu lieu durant la semaine précédente, et est donc connu. Alors que les apports \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_1 correspondent respectivement aux apports entre le temps $t = 0$ et $t = 1$, et entre le temps $t = 1$ et $t = 2$.

Traj.	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
a		\mathbf{q}_0^a	\mathbf{q}_1^a
	\mathbf{q}_{connu}		
b		\mathbf{q}_0^b	\mathbf{q}_1^b

avec

$$\mathbf{q}_t^{traj} = \begin{bmatrix} Q1_t^{traj} & Q2_t^{traj} & Q3_t^{traj} \end{bmatrix}',$$

où $traj \in \{a, b\}$ et où Q1, Q2 et Q3 sont les trois apports naturels tels qu'illustrés dans le schéma de notre système (Figure 1 page 9).

3.2 Formation de nos échantillons simulés

En utilisant la méthode à rebours de la programmation dynamique, nous nous plaçons à $t = 1$, une période avant échéance. D'ici, nous calculons pour chaque niveau d'eau de la grille ces niveaux d'eau en $t = T = 2$ pour chacun des apports simulés et des politiques possibles quant aux quantités d'eau soutirées à chaque réservoir.

Nous désirons créer un échantillon simulé de productions espérées qui nous permettra de calculer les valeurs espérées à l'aide d'une régression. Cet échantillon de valeurs sera obtenu de toutes combinaisons de quantités soutirées et apports possibles de la discrétisation effectuée plus haut. Pour ce faire, nous aurons besoin de la fonction *VolFin* qui nous retourne les volumes des réservoirs à $t = 2$ et la fonction *Prod* qui retourne la production énergétique entre $t = 1$ et $t = 2$ obtenu des volumes en début de période, des quantités d'eau soutirées et des apports naturels. Dans l'exemple ci-dessous, nous sommes à $t = 1$ dans l'état $\begin{bmatrix} s_E^{R1} & s_E^{R2} \end{bmatrix}'$, prenons la décision $\begin{bmatrix} u_F^{R1} & u_F^{R2} \end{bmatrix}'$ et avons la trajectoire a pour les apports. Nous obtenons alors les niveaux d'eau résultants et la production obtenue de la période en appliquant les fonctions comme suit :

$$VolFin(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_1^a),$$

$$Prod(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_1^a),$$

où

$$\mathbf{u}_{FF} = \begin{bmatrix} u_F^{R_1} \\ u_F^{R_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{EE} = \begin{bmatrix} s_E^{R_1} \\ s_E^{R_2} \end{bmatrix}.$$

Après avoir fait de même pour tous les autres quantités soutirées et simulations d'apports, nous obtenons la matrice de volumes résultants et le vecteur de productions suivants :

$$\left[VolFin(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_1^a) \quad VolFin(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{Ff}, \mathbf{q}_1^a) \quad \cdots \quad VolFin(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_1^b) \right]',$$

$$\left[Prod(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_1^a) \quad Prod(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{Ff}, \mathbf{q}_1^a) \quad \cdots \quad Prod(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_1^b) \right]'$$

Nous avons maintenant toutes les productions et les niveaux d'eau résultants nécessaires à la confection de notre échantillon spécifiquement associé au niveau d'eau $\begin{bmatrix} s_E^{R_1} & s_E^{R_2} \end{bmatrix}'$ à $t = 1$. Ensuite, nous devons associer une valeur de productivité à chaque paire de politique et d'apport simulé de notre échantillon dans le but de créer notre nuage de point dans lequel passera notre surface de régression. Ces valeurs doivent dépendre évidemment de la production énergétique obtenue de la période elle-même par l'application de la politique, mais aussi de la valeur de l'eau restant dans les réservoirs après mise en place de cette politique. Par conséquent, nous voulons attribuer une valeur plus importante à de hauts volumes et une valeur moindre à des volumes plus bas. Nous appelons cette valeur la borne terminale et une valeur de borne terminale est définie pour chaque discrétisation des niveaux d'eau à $t = 2$. Plusieurs valeurs différentes de borne terminale peuvent être utilisées, tout dépendant de la valeur que l'on veut associer à une certaine quantité d'eau derrière les barrages. La manière que nous utilisons afin d'obtenir nos valeurs de borne terminale est discutée plus en détail à l'annexe B.

Nous définissons la valeur à $t = 1$ pour le premier scénario comme suit :

$$\Pi_1(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_1^a) = Prod(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_1^a) + \bar{v}_2(VolFin(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_1^a)).$$

Comme mentionné, une valeur est associée à chaque niveau d'eau sur la borne terminale à $t = 2$. Cependant, il y a de fortes chances que le niveau d'eau résultant d'une certaine paire de politique et d'apport naturel n'arrive pas directement sur l'un des quatre niveaux d'eau de notre discrétisation. La valeur de production espérée \bar{v}_2 est alors obtenue grâce à une interpolation bilinéaire du niveau d'eau dans chaque réservoir sur les valeurs de la borne terminale. Pour plus de détail sur l'interpolation bilinéaire effectuée ici, le lecteur peut consulter l'annexe C.

Ainsi, la valeur à $t = 1$ dépend non seulement de la production de la période elle-même, mais aussi d'une valeur associée au niveau d'eau restant dans les réservoirs après application de la politique.

3.3 Formation d'une surface de régression et obtention de la décision optimale

À partir de là, notre but sera de bâtir une surface de régression pour chaque niveau d'eau. Celle-ci sera formée à l'aide de toutes les combinaisons de politiques et d'apports possibles. Pour ce faire, nous tentons de résoudre le système d'équations linéaires sur-déterminé ci-dessous, où le vecteur de gauche correspond à la valeur de production espérée de chacun de nos points formant notre échantillon. La base est constituée d'une constante, des quantités d'eau soutirées pour chacun des réservoirs, des mêmes quantités élevées au carré et du terme croisé. Le vecteur de β contient nos six coefficients à déterminer. À noter que dans cet exemple nos bases sont constituées de polynômes au plus de degrés deux pour ne pas rendre l'exemple trop lourd. La fonction de production pourrait toutefois nécessiter des bases de degré plus élevé.

$$\begin{bmatrix} \Pi_1(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_1^a) \\ \Pi_1(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{Ff}, \mathbf{q}_1^a) \\ \Pi_1(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_1^a) \\ \Pi_1(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_1^a) \\ \Pi_1(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_1^b) \\ \Pi_1(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{Ff}, \mathbf{q}_1^b) \\ \Pi_1(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_1^b) \\ \Pi_1(\mathbf{s}_{EE}, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_1^b) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & u_F^{R_1} & (u_F^{R_1})^2 & u_F^{R_2} & (u_F^{R_2})^2 & u_F^{R_1} u_F^{R_2} \\ 1 & u_F^{R_1} & (u_F^{R_1})^2 & u_f^{R_2} & (u_f^{R_2})^2 & u_F^{R_1} u_f^{R_2} \\ 1 & u_f^{R_1} & (u_f^{R_1})^2 & u_F^{R_2} & (u_F^{R_2})^2 & u_f^{R_1} u_F^{R_2} \\ 1 & u_f^{R_1} & (u_f^{R_1})^2 & u_f^{R_2} & (u_f^{R_2})^2 & u_f^{R_1} u_f^{R_2} \\ 1 & u_F^{R_1} & (u_F^{R_1})^2 & u_F^{R_2} & (u_F^{R_2})^2 & u_F^{R_1} u_F^{R_2} \\ 1 & u_F^{R_1} & (u_F^{R_1})^2 & u_f^{R_2} & (u_f^{R_2})^2 & u_F^{R_1} u_f^{R_2} \\ 1 & u_f^{R_1} & (u_f^{R_1})^2 & u_F^{R_2} & (u_F^{R_2})^2 & u_f^{R_1} u_F^{R_2} \\ 1 & u_f^{R_1} & (u_f^{R_1})^2 & u_f^{R_2} & (u_f^{R_2})^2 & u_f^{R_1} u_f^{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix}.$$

Par la régression des moindres carrés, nous obtenons une estimation des coefficients du modèle linéaire. Nous optimisons ensuite la surface de régression par rapport à nos quantités soutirées de chaque réservoir.

$$\hat{\mathbf{u}}^{*(1)} \triangleq \arg \max_{\mathbf{u} \in C} \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 u^{R_1} + \hat{\beta}_3 (u^{R_1})^2 + \hat{\beta}_4 u^{R_2} + \hat{\beta}_5 (u^{R_2})^2 + \hat{\beta}_6 u^{R_1} u^{R_2},$$

où C est l'ensemble qui regroupe les contraintes à respecter. Puisque dans cet exemple simple, aucune variable exogène ne fait partie des bases pour la régression, la politique (pour un niveau d'eau donné) ne dépend pas des variables exogènes (elle est la même sans égard aux variables exogènes). Cette politique fixe est évidemment influencée par les apports d'eau futurs à travers la surface de régression, qui tient lieu d'espérance.

De là, nous dérivons les valeurs :

$$\hat{v}_a^{(1)} \triangleq Prod(\mathbf{s}_{EE}, \hat{\mathbf{u}}^{*(1)}, \mathbf{q}_1^a) + \bar{v}_2 (VolFin(\mathbf{s}_{EE}, \hat{\mathbf{u}}^{*(1)}, \mathbf{q}_1^a)),$$

$$\widehat{v}_b^{(1)} \triangleq Prod(\mathbf{s}_{EE}, \widehat{\mathbf{u}}^{*(1)}, \mathbf{q}_1^b) + \bar{v}_2 (VolFin(\mathbf{s}_{EE}, \widehat{\mathbf{u}}^{*(1)}, \mathbf{q}_1^b)).$$

Nous obtenons alors la quantité d'eau soutirée optimale et les valeurs reliées à celle-ci (noté $\widehat{\mathbf{v}}^{(1)}$ dans le tableau ci-dessous) à $t = 1$ pour le niveau d'eau initial (s_E^{R1}, s_E^{R2}) . Il y a une valeur associée à chaque trajectoire d'apport. Notez bien que les quantités d'eau soutirées optimales doivent respecter des contraintes, en l'occurrence, elles doivent être comprises entre le minimum et maximum de notre treillis. Elles doivent aussi faire en sorte que les volumes des réservoirs après l'application de la politique restent dans les limites acceptables. Nous utilisons la même procédure pour les trois autres niveaux d'eau initiaux, nous permettant d'obtenir les valeurs suivantes :

Niveau	Qu. Soutirée	Valeur
(s_E^{R1}, s_E^{R2})	$\widehat{\mathbf{u}}^{*(1)}$	$\widehat{\mathbf{v}}^{(1)}$
(s_E^{R1}, s_B^{R2})	$\widehat{\mathbf{u}}^{*(2)}$	$\widehat{\mathbf{v}}^{(2)}$
(s_B^{R1}, s_E^{R2})	$\widehat{\mathbf{u}}^{*(3)}$	$\widehat{\mathbf{v}}^{(3)}$
(s_B^{R1}, s_B^{R2})	$\widehat{\mathbf{u}}^{*(4)}$	$\widehat{\mathbf{v}}^{(4)}$

Nous avons une valeur et politique différente pour chaque niveau d'eau puisque chacun a sa propre surface de régression. Il est important de conserver ces valeurs en mémoire puisqu'elles serviront de base pour l'interpolation bilinéaire de notre prochaine période. La figure ci-dessous est un exemple de surface de régression bâtie à partir de plusieurs politiques possibles mais d'une seule trajectoire d'apport afin de garder le graphique visible et d'éviter un nuage de points. L'axe de droite représente la politique du premier réservoir et l'axe de gauche, la politique du second.

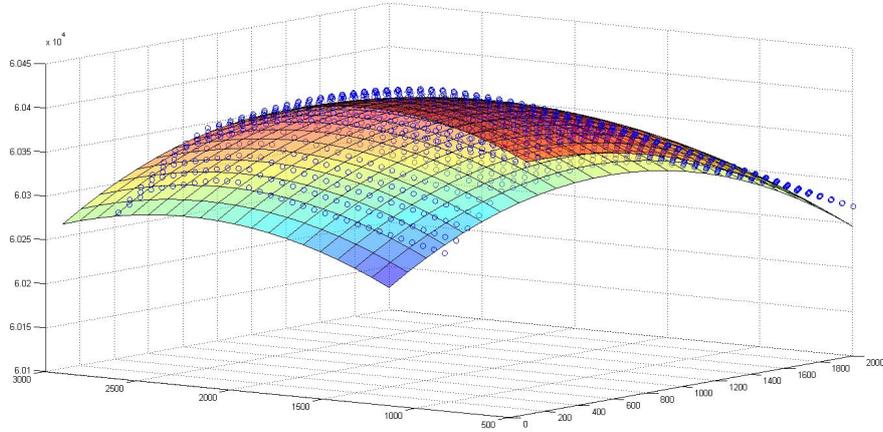


FIGURE 2 – Exemple d’une surface de régression

À partir d’ici, la première période à rebours est terminée. Pour obtenir la décision optimale à appliquer à $t = 0$ nous commençons de la même manière qu’à $t = 1$. C’est-à-dire que nous calculons tous les niveaux d’eau possibles à $t = 1$ en sachant notre niveau initial, nos apports et nos quantités d’eau soutirées possibles. Nous obtenons alors la matrice des niveaux d’eau résultants et la matrice des productions obtenues suivantes :

$$\left[VolFin(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_0^a) \quad VolFin(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{Ff}, \mathbf{q}_0^a) \quad \cdots \quad VolFin(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_0^b) \right]',$$

$$\left[Prod(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_0^a) \quad Prod(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{Ff}, \mathbf{q}_0^a) \quad \cdots \quad Prod(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_0^b) \right]'$$

Avec la matrice des niveaux d’eau résultants, nous pouvons approximer la valeur de production espérée correspondante grâce à une interpolation bilinéaire. Cette fois l’interpolation bilinéaire ne se fera pas sur la borne terminale comme à la période précédente, mais plutôt sur les valeurs de production espérée à $t = 1$ calculées précédemment et conservées dans le tableau plus

haut. Par ailleurs, il faudra faire l'interpolation sur les simulations d'apport correspondante. Par exemple, pour obtenir les valeurs de production espérée de la trajectoire a il faudra faire l'interpolation sur les valeurs de la trajectoire a , et de même pour la trajectoire b .

Nous obtenons à présent la valeur suivante pour l'application de la politique \mathbf{u}_{FF} et l'arrivée de l'apport \mathbf{q}_0^a :

$$\Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_0^a) = Prod(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_0^a) + \bar{v}_1 (VolFin(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_0^a)).$$

Nous faisons de même pour toutes les autres politiques et trajectoires d'apports afin d'obtenir le vecteur de valeurs :

$$\left[\Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_0^a) \quad \Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{Ff}, \mathbf{q}_0^a) \quad \cdots \quad \Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_0^b) \right]'$$

La fonction Π_0 représente la valeur de la production obtenue conditionnelle aux décisions prises à $t = 1$ en ajoutant la production de la politique appliquée à cette période-ci. Par la suite, nous procédons de la même manière qu'au pas de temps précédant en effectuant une régression linéaire par moindres carrés sur ce système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_0^a) \\ \Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{Ff}, \mathbf{q}_0^a) \\ \Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_0^a) \\ \Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_0^a) \\ \Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{FF}, \mathbf{q}_0^b) \\ \Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{Ff}, \mathbf{q}_0^b) \\ \Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_0^b) \\ \Pi_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{u}_{ff}, \mathbf{q}_0^b) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & u_F^{R_1} & (u_F^{R_1})^2 & u_F^{R_2} & (u_F^{R_2})^2 & u_F^{R_1} u_F^{R_2} \\ 1 & u_F^{R_1} & (u_F^{R_1})^2 & u_f^{R_2} & (u_f^{R_2})^2 & u_F^{R_1} u_f^{R_2} \\ 1 & u_f^{R_1} & (u_f^{R_1})^2 & u_F^{R_2} & (u_F^{R_2})^2 & u_f^{R_1} u_F^{R_2} \\ 1 & u_f^{R_1} & (u_f^{R_1})^2 & u_f^{R_2} & (u_f^{R_2})^2 & u_f^{R_1} u_f^{R_2} \\ 1 & u_F^{R_1} & (u_F^{R_1})^2 & u_F^{R_2} & (u_F^{R_2})^2 & u_F^{R_1} u_F^{R_2} \\ 1 & u_F^{R_1} & (u_F^{R_1})^2 & u_f^{R_2} & (u_f^{R_2})^2 & u_F^{R_1} u_f^{R_2} \\ 1 & u_f^{R_1} & (u_f^{R_1})^2 & u_F^{R_2} & (u_F^{R_2})^2 & u_f^{R_1} u_F^{R_2} \\ 1 & u_f^{R_1} & (u_f^{R_1})^2 & u_f^{R_2} & (u_f^{R_2})^2 & u_f^{R_1} u_f^{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons finalement la politique optimale à $t = 0$.

$$\hat{\mathbf{u}}_0^* \triangleq \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 u^{R_1} + \hat{\beta}_3 (u^{R_1})^2 + \hat{\beta}_4 u^{R_2} + \hat{\beta}_5 (u^{R_2})^2 + \hat{\beta}_6 u^{R_1} u^{R_2},$$

Cela conclut donc notre exemple à deux période, et avons finalement nos décisions qui nous permettra d'acquérir une production optimale à échéance. Un exemple avec de plus gros treillis et plus de périodes est faisable de façon semblable. De plus, il est préférable d'ajouter des variables hydrologiques (ex. : apports de la période précédente) sur lesquelles régresser pour bâtir notre surface de régression. Cela ajoute de l'information clé pour obtenir les meilleures décisions possible puisque l'algorithme peut alors s'attendre à une certaine quantité d'apports d'eau et ajuster ces politiques en conséquence. Cet ajout ne demande que certains ajustements à l'exemple simple ci-dessus. Le chapitre suivant présente l'algorithme général en tenant compte des variables hydrologiques supplémentaires.

Traitement des solutions impossibles

Parmi les niveaux d'eau calculés lors de notre formation d'échantillon pour construire la surface de régression, il peut y avoir des niveaux impossibles qui fausseront les résultats de la régression à venir. Ces niveaux impossibles sont obtenus à partir de quantités d'eau soutirées qui mènent à des volumes finaux hors des limites acceptables. La solution naïve de simplement les éliminer de la régression mène à des zones dégagées près des bornes dans le nuage de points servant à bâtir la surface de régression, ce qui rend la régression moins précise. Au lieu de cela, nous préférons ajuster ces solutions possibles et ajuster leurs quantités soutirées, et par le fait même leur production. Le lecteur est invité à lire l'annexe D pour plus amples informations sur le traitement de ces solutions impossibles.

4 Description de l'algorithme

Ce chapitre présente une description complète point par point de l'algorithme de simulations et régressions utilisé pour notre problème d'optimisation. En d'autres termes, nous mettons ici en mots et de manière générale l'exemple du chapitre précédent. En pleine généralité, les régressions seront faites à la fois sur les apports de la période précédente, mais aussi sur un ensemble de variables hydrologiques \mathbf{h}_t . Le chapitre suivant, quant à lui, présentera l'algorithme sous sa forme pseudo-code.

Nous pouvons décomposer l'algorithme en deux grandes étapes : l'étape préliminaire qui comprend la simulation de nos apports d'eau et la formation de nos treillis, et l'étape de la récursion à rebours.

Simulation des apports et formation des treillis

C'est à cette première étape où nous simulerons nos trajectoires d'apports et formerons les treillis pour nos variables de décision et pour nos variables d'états. C'est aussi ici où nous choisirons les bases qui composeront les vecteurs qui formeront nos régressions. C'est l'étape préliminaire à la programmation dynamique.

1. Simuler le nombre de trajectoires annuelles d'apports désiré pour l'algorithme à l'aide du modèle météorologique le plus approprié. Les apports de la trajectoire j à la période allant de t à $t + 1$ sont représentés par $\mathbf{q}_t^{(j)}$. Comme on fait usage de variables hydrologiques (autres que les apports passés), le même nombre de trajectoires pour celles-ci devront être simulées. Chaque trajectoire d'apports correspond à une trajectoire de variable hydrologique. Les variables hydrologiques de la trajectoire j à la période allant de t à $t + 1$ sont représentés par $\mathbf{h}_t^{(j)}$.
2. Discrétiser les quantités d'eau soutirées dans chacun des deux réservoirs

en $N_u^{R_1}$ et $N_u^{R_2}$ intervalles équidistants¹ respectivement. La discrétisation d'eau soutirée pour le premier réservoir sera comprise entre les bornes $u_{min}^{R_1}$ et $u_{max}^{R_1}$. De même, la discrétisation pour le deuxième réservoir sera comprise entre les bornes $u_{min}^{R_2}$ et $u_{max}^{R_2}$. Ces bornes sont soit des contraintes du problème, soit choisies arbitrairement dans le cas contraire. Sauvegarder ensuite dans un treillis \mathbf{u}_i les combinaisons des couples de quantité d'eau soutirée pour $i = 1$ à N_u où $N_u = N_u^{R_1} N_u^{R_2}$.

3. Discrétiser les niveaux d'eau de chacun des deux réservoirs en $N_s^{R_1}(t)$ et $N_s^{R_2}(t)$ intervalles équidistants¹ respectivement. La discrétisation des niveaux pour le premier réservoir sera comprise entre les bornes $s_{min}^{R_1}$ et $s_{max}^{R_1}$. De même, la discrétisation pour le deuxième réservoir sera comprise entre les bornes $s_{min}^{R_2}$ et $s_{max}^{R_2}$. Ces bornes sont nécessairement des contraintes imposées par le système. Sauvegarder ensuite dans un treillis $\mathbf{s}_{i,t}$ toutes les combinaisons possibles des niveaux d'eau pour $i = 1$ à $N_s(t)$ où $N_s(t) = N_s^{R_1}(t)N_s^{R_2}(t)$ et $t = 1$ à $T-1$. La discrétisation de chaque réservoir peut varier dans le temps pour autant qu'elle reste comprise entre les bornes. Noter aussi un unique couple dans le treillis à $t = 0$ représentant le niveau initial dans les réservoirs.
4. Choisir les variables explicatives qui composeront le vecteur de base de la régression. Par exemple, les variables de décision simple et quadratique pourraient être utilisées. Le choix de la puissance la plus élevée à utiliser dépend de la complexité de la fonction *production*. La corrélation entre les deux variables peut être représentée dans la surface de régression en ajoutant le produit-croisé de ces variables. Il est aussi important d'ajouter de l'information permettant à l'algorithme de mieux prévoir les apports à venir durant la période et donc prendre de meilleures décisions. Ces informations seront ajoutées sous forme de variables hydrologiques \mathbf{h}_t et des apports de la période précédente \mathbf{q}_{t-1} .

1. Le cas avec des intervalles de différentes grandeurs pour mettre plus de poids près de certains scénarios plus probables est aussi envisageable.

Réursion à rebours du temps

C'est l'étape où la programmation dynamique entre en jeu. Chaque surface de régression est construite et optimisée pour obtenir les décisions optimales pour chaque noeud du treillis des variables d'état et pour chaque pas de temps. Cette étape comporte trois boucles imbriquées qui se terminent toutes trois à la fin de l'algorithme.

Boucle du temps, de $t = T - 1$ à 0 :

Boucle sur les Volumes, de $k = 1$ à $N_s(t)$:

1. Générer $N_u \times N_q$ niveaux d'eau en fin de période à l'aide des N_q échantillons d'apports et de la discrétisation des débits d'eau soutirés. Générer aussi les productions énergétiques hebdomadaires obtenues de chacun de ces scénarios :

$$VolFin \left(\mathbf{s}_{k,t}, \mathbf{u}_i, \mathbf{q}_t^{(j)} \right),$$

$$Prod \left(\mathbf{s}_{k,t}, \mathbf{u}_i, \mathbf{q}_t^{(j)} \right),$$

pour $i = 1$ à N_u et $j = 1$ à N_q .

2. Calculer les valeurs cumulées espérées pour chaque scénario. Pour ce faire, nous procédons par interpolation des niveaux d'eau à la fin de la période calculée précédemment sur les valeurs cumulées espérées de la période suivante tout en ajoutant la production obtenue de la période elle-même.

$$\begin{aligned} \Pi_t \left(\mathbf{s}_{k,t}, \mathbf{u}_i, \mathbf{q}_t^{(j)} \right) &= Prod \left(\mathbf{s}_{k,t}, \mathbf{u}_i, \mathbf{q}_t^{(j)} \right) \\ &\quad + Interp(\mathbf{s}_t, \hat{\mathbf{v}}_{t+1}, VolFin \left(\mathbf{s}_{k,t}, \mathbf{u}_i, \mathbf{q}_t^{(j)} \right)), \end{aligned}$$

pour $i = 1$ à N_u et $j = 1$ à N_q .

Dans le cas spécifique de la dernière période allant de $t = T - 1$ à T , les valeurs seront obtenues de l'interpolation des niveaux d'eau à la fin de la période sur les valeurs de la borne terminale (voir l'annexe B pour les détails de l'obtention des valeurs de notre borne terminale) en ajoutant toujours la production obtenue de la période. Le vecteur des $\Pi_t \left(\mathbf{s}_{k,t}, \mathbf{u}_i, \mathbf{q}_t^{(j)} \right)$ pour $i = 1$ à N_u et $j = 1$ à N_q est dénoté $\Pi_{t,k}$.

3. Construire la matrice \mathbf{B} composée des vecteurs de base $\mathbf{B}_{i,j}$ qui servira à former notre surface de régression. Chaque vecteur $\mathbf{B}_{i,j}$ est associé à un scénario composé d'un débit soutiré \mathbf{u}_i et d'une trajectoire \mathbf{j} de notre échantillon pour $i = 1$ à N_u et $j = 1$ à N_q .
4. Utiliser la méthode des moindres carrés pour résoudre le système linéaire sous forme matricielle suivant :

$$\Pi_{t,k} = \mathbf{B} \beta_{k,t} + \epsilon,$$

tout en minimisant le vecteur d'erreur ϵ . Le vecteur de coefficients $\hat{\beta}_{k,t}$ résultant définit la surface de régression que nous dénotons par $L_{k,t}(\mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{q}_{t-1}, \mathbf{h}_t)$. Ces surfaces, une associée à chaque instant t et niveau d'eau k , établissent implicitement les politiques de production, voir l'étape suivante.

Boucle sur les Simulations, de $j = 1$ à N_q :

5. Optimiser la surface de régression $L_{k,t}(\mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{q}_{t-1}, \mathbf{h}_t)$ par rapport à \mathbf{u} conditionnel à l'information spécifique de chaque simulation afin d'obtenir le débit soutiré qui maximisera cette dernière :

$$\hat{\mathbf{u}}_{k,t,j}^* = \arg \max L_{k,t} \left(\mathbf{u}, \mathbf{q}_{t-1}^{(j)}, \mathbf{h}_t^{(j)} \right).$$

Nous optimisons pour chaque simulation d'abord parce que des contraintes, notamment celles concernant les niveaux d'eau, peuvent dépendre des apports de la période et doivent être prises en compte lors de l'optimisation. Ensuite, parce que, dépendamment des bases choisies à l'étape préliminaire, la surface elle-même peut dépendre et dépendra habituellement de $\mathbf{q}_{t-1}^{(j)}$ et $\mathbf{h}_t^{(j)}$.

6. Calculer la valeur $\hat{v}_{k,t,j}$ associée au débit soutiré optimal $\hat{\mathbf{u}}_{k,t,j}^*$.

$$\hat{v}_{k,t,j} = Prod\left(\mathbf{s}_{k,t}, \hat{\mathbf{u}}_{k,t,j}^*, \mathbf{q}_t^{(j)}\right) + Interp(\mathbf{s}_t, \hat{\mathbf{v}}_{t+1}, VolFin\left(\mathbf{s}_{k,t}, \hat{\mathbf{u}}_{k,t,j}^*, \mathbf{q}_t^{(j)}\right)).$$

Nous ne prenons donc pas la valeur associée à la surface de régression, mais plutôt la valeur cumulée espérée recalculée avec la politique $\hat{\mathbf{u}}_{k,t,j}^*$.

Fin Boucle sur les Simulations

Fin Boucle sur les Volumes

Fin Boucle du temps

À la fin de l'algorithme, nous aurons N_q décisions optimales $\hat{\mathbf{u}}_{0,0,j}^*$, une pour chaque simulation. À ce point-ci de l'algorithme ces politiques seront très semblables puisqu'elles seront toutes obtenues à partir de l'information connue de la période précédente, peu importe l'information utilisée. S'il y a des différences, ce sera dans les simulations qui ont des apports de première période qui mènent la décision optimale dans des régions interdites par les contraintes. La décision optimale sera alors ajustée en conséquence lors de l'optimisation sous contrainte.

Pour avoir une décision unique au début de la période initiale nous prenons simplement la moyenne des N_q décisions optimales qui devrait converger finalement vers une décision optimale plus le nombre de simulations est élevé.

5 Pseudo-Code

Dans ce chapitre, nous présentons le pseudo-code pour la méthode DP simulation et régression. Par ailleurs, nous faisons une analyse comparative entre la méthode et la méthode SDP, qui sera la méthode à laquelle nous comparerons nos résultats (voir chapitre 6) afin d'avoir une intuition des différences entre celles-ci.

5.1 Méthode DP simulation et régression

D'abord, nous présentons le pseudo-code pour la méthode DP simulations et régressions. Noter que nous présentons ici le cas général où nous régressons non seulement sur les décisions, mais aussi sur les apports \mathbf{q}_{t-1} et les variables hydrologiques \mathbf{h}_t .

Algorithm 1 Algorithme DP simulation et régression

Input : Simulations d'apports, Simulations d'autres variables hydrologiques

Output : Paramètres de surface de régression pour tous les états et périodes

```

Initialiser la grille des niveaux d'eau  $\mathbf{s}_g$ 
2: Initialiser la grille des politiques  $\mathbf{u}_g$ 
   Générer les simulations d'apports  $\mathbf{q}$ 
4: Générer les simulations des variables hydrologiques  $\mathbf{h}$ 
   for  $i = T-1, \dots, 0$  do
6:   for  $j = 1, \dots, \text{length}(\mathbf{s}_g)$  do
8:     for  $k = 1, \dots, \text{length}(\mathbf{q})$  do
10:      for  $l = 1, \dots, \text{length}(\mathbf{u}_g)$  do
12:         $\mathbf{S} \leftarrow \text{VolFin}(\mathbf{s}_g(j), \mathbf{u}_g(l), \mathbf{q}(k, i))$ 
14:         $P \leftarrow \text{Prod}(\mathbf{s}_g(j), \mathbf{u}_g(l), \mathbf{q}(k, i))$ 
16:         $\bar{v}(i+1) \leftarrow \text{Interpolation}(\mathbf{s}_g, \hat{\mathbf{v}}(i+1), \mathbf{S})$ 
18:         $\Pi(\mathbf{q}(k, i), \mathbf{u}_g(l)) \leftarrow P + \bar{v}(i+1)$ 
20:      end for  $l$ 
22:    end for  $k$ 
24:    Construire matrice  $\mathbf{B}$  des bases formées par les variables  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{h}$ 
26:    Obtenir les paramètres de la surface  $L$  en résolvant les
   équations normales
28:     $\mathbf{c}(\mathbf{s}(i), i) \leftarrow \mathbf{B}^T \mathbf{B} \backslash \mathbf{B}^T \mathbf{\Pi}$ 
30:    for  $k = 1, \dots, \text{length}(\mathbf{q})$  do
32:      Maximiser la surface par rapport aux décisions pour chaque
   simulation en respectant les contraintes
34:       $\hat{\mathbf{u}}^* \leftarrow \arg \max L(\mathbf{u}, \mathbf{q}(k, i-1), \mathbf{h}(k, i))$ 
36:       $\hat{v}(i, j) \leftarrow \text{Prod}(\mathbf{s}_g(j), \hat{\mathbf{u}}^*, \mathbf{q}(k, i)) + \bar{v}(i+1)$ 
38:    end for  $k$ 
40:  end for  $j$ 
42: end for  $i$ 
44: return  $\mathbf{c}$ 

```

5.2 Analyse comparative

Ici nous discutons des différences entre la méthode DP simulations et régressions et la méthode SDP qui sera la méthode à laquelle nous nous comparerons au chapitre suivant. D’abord, la méthode SDP demande une discrétisation des apports et des variables hydrologiques optionnelles servant à mieux prédire les apports futurs. La méthode DP simulation et régression ne discrétise pas ces variables, mais prend plutôt ces informations sur un large nombre de scénarios d’apports et de variables hydrologiques précédemment simulés. Notre méthode doit toutefois discrétiser les variables de décisions qui serviront à créer les surfaces de régression.

Dans les deux cas les variables d’état endogènes sont discrétisées pour former une grille, les équations (7) et (8), vues à la section 2.2 et réécrites ci-dessous, étant résolues à chaque point de la grille :

$$v_t(\mathbf{s}_t, h_t) = \max \{ \mathbb{E}_t [P(\mathbf{s}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{q}_t) + v_{t+1}(\mathbf{s}_{t+1}, h_{t+1}) | h_t] \},$$

$$\mathbf{u}_t^*(\mathbf{s}_t, h_t) = \arg \max_{\mathbf{u}_t} \{ \mathbb{E}_t [P(\mathbf{s}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{q}_t) + v_{t+1}(\mathbf{s}_{t+1}, h_{t+1}) | h_t] \}.$$

La différence majeure entre les deux algorithmes est la façon dont l’espérance dans chacune de ces deux équations est approximée. La méthode SDP l’approxime en calculant les probabilités de se retrouver dans chacun des apports discrétisés à la période suivante sachant l’information connue jusqu’à la période présente. Ces probabilités sont obtenues grâce à une densité de probabilité calibrée sur des données historiques. L’espérance est ensuite exprimée sous sa forme discrète pour tous les apports discrétisés possibles et est alors une fonction dépendant seulement des variables de décisions \mathbf{u} . Les équations sont finalement résolues en trouvant la politique qui maximise cette fonction.

Au contraire, la méthode DP simulation et régression approxime l’espérance par une surface de régression créée par la production espérée générée par toutes les paires possibles de décisions discrétisées et d’apports simulés. Cette surface est alors maximisée pour résoudre les deux équations ci-dessus.

6 Tests numériques comparatifs

Dans ce chapitre, nous comparons de façon numérique l’efficacité des politiques obtenues de la méthode simulation et régression par rapport aux politiques de la méthode SDP et à des politiques dites “naïves”. Nous présentons d’abord le test utilisé pour obtenir ces résultats comparatifs et les différents paramètres utilisés dans celui-ci dans le design expérimental. Nous présentons ensuite les résultats et l’analyse de ces derniers. Finalement, nous discutons des possibles recherches et améliorations futures de la méthode de simulation et régression.

6.1 Design expérimental

Ici, nous formulons en détail la façon que nous utilisons afin de comparer l’efficacité des politiques obtenues de la méthode à celles obtenues de la méthode SDP et de la méthode de politiques naïves. Nous introduisons aussi les bases utilisées et les valeurs données aux différents autres paramètres prérequis au fonctionnement de la méthode. Finalement, nous décrivons en quoi consiste la méthode de politiques naïves.

6.1.1 Description du test comparatif

Lors de la phase à rebours traité tout au long de ce mémoire, nous avons gardé en mémoire les coefficients de régression qui définissent nos surfaces pour chaque niveau d’eau de notre grille et pour chaque pas de temps qui constitue notre horizon. Dans cette phase de test, nous partirons des niveaux d’eau initiaux et trouverons de semaine en semaine la politique optimale à appliquer grâce uniquement à ces surfaces de régression emmagasinées.

Nous procédons d’abord par prendre une trajectoire d’apports indépendante de celles utilisées pour obtenir nos surfaces de régression dans la phase à rebours. L’information utilisée dans le test se doit d’être complètement

indépendante de l'information utilisée dans la phase à rebours afin d'éviter tout biais. En partant de nos niveaux d'eau initiaux à $t = 0$, nous voulons trouver la décision optimale associée à celui-ci. Ce niveau d'eau ne correspond cependant probablement pas à un point de la grille formé par la discrétisation initiale de nos niveaux d'eau. Toutefois, puisque chacun de ces points est associé à une surface de régression, nous pouvons effectuer une interpolation bilinéaire des coefficients qui caractérisent les surfaces de régression des quatre paires de niveaux d'eau les plus proches de notre paire de niveaux initiaux données par notre treillis. Ainsi, chaque coefficient qui formera notre surface sera obtenu par interpolation sur les quatre points les plus proches où les coefficients sont connus. Cela nous donne donc une approximation assez précise (dépendant de la discrétisation de nos variables d'état bien sûr) des coefficients associés à notre niveau d'eau, et donc une approximation assez précise de sa surface de régression. Nous maximisons ensuite la surface correspondant à ces coefficients interpolés, et obtenons notre décision pour la première période ; la maximisation doit évidemment être faite dans la dimension "décision" de la surface. La dimension de variable exogène est fixée par la valeur connue de cette variable exogène.

Une autre technique aurait aussi pu être de faire une optimisation sur chacun des quatre niveaux d'eau les plus proches de notre niveau initial pour obtenir quatre décisions optimales correspondant à chacun de ces niveaux d'eau. Une interpolation bilinéaire serait ensuite faite, non pas sur les coefficients des surfaces de régression, mais directement sur les politiques des quatre niveaux les plus près pour obtenir directement notre décision à appliquer. Cette technique a été testée et nous donne des résultats similaires, mais demande plus de temps de calcul dut au fait que l'on doit faire quatre optimisations au lieu d'une seule.

Suite à l'application de la décision et à l'apport donné par notre trajectoire indépendante, nous nous retrouvons avec un nouveau niveau d'eau à $t = 1$ et procédons de même manière pour trouver notre décision optimale à appliquer au début de cette nouvelle période. Nous faisons de même pour toutes les autres périodes suivantes tout en mémorisant la production énergétique obtenue de ces décisions à chaque période.

En pratique, une itération complète à rebours de l'algorithme ne sert qu'à obtenir la décision optimale à $t = 0$ et est réévalué avant chaque début de période (hebdomadaire dans notre cas) pour tenir compte des nouvelles informations disponibles (ex : des nouvelles prévisions d'apports plus récentes). Ainsi, les opérateurs du système hydroélectrique font tourner l'algorithme que pour savoir la décision à appliquer maintenant.

Dans ce test toutefois, nous choisissons de ne fait tourner l'algorithme qu'une seule fois pour obtenir les 52 décisions hebdomadaires qui constitue notre année. La raison de ce choix est qu'il serait plus coûteux en temps de calcul d'exécuter le programme 52 fois pour effectuer chacun de nos tests et que du point de vue de comparaison entre notre méthode et la méthode SDP, il n'est pas clair que cet effort soit utile.

6.1.2 Les bases utilisées

Le choix des bases sur lesquelles nous régressons est le choix le plus important de la méthode puisque c'est ce choix qui définit la qualité de notre approximation de l'espérance dans l'équation (7) vue précédemment (page 11).

En plus de régresser sur nos deux variables de décision, nous avons essayé d'ajouter de l'information connue qui aiderait la régression à mieux prévoir les apports naturels de la période à venir. Cela permettant d'avoir des décisions plus productives en terme d'énergie, mais aussi des décisions qui minimiseront les débordements des contraintes établies sur les niveaux des réservoirs. En somme, des décisions plus adaptées à court terme et à long terme.

Nous avons d'abord essayé l'apport naturel Q1 (apport au premier réservoir) de la semaine précédente. Il est en effet logique de supposer que l'apport de la semaine précédente nous apporte de l'information non négligeable du l'apport à venir. Nous prenons l'apport Q1 puisque nous supposons que les deux autres apports par leur proximité géographique nous apporteraient la même

information. Les résultats obtenus sont bien meilleurs que ceux obtenus en ne régressant que sur les variables de décision.

Nous avons ensuite essayé de régresser sur une variable correspondant à la quantité de neige au sol appelée *snow water equivalent* (SWE). Cette variable est importante puisqu'au Canada la fonte des neiges a une contribution importante aux apports naturels. Les résultats sont encore meilleurs qu'avec l'apport de la semaine précédente, nous gardons donc cette variable pour les tests de la section suivante. Nous avons aussi essayé une combinaison des deux variables, mais sans obtenir de meilleurs résultats.

Finalement, nous devons choisir le degré de nos polynômes pour chacune de nos variables. Ce choix est essentiellement dicté par la fonction *production* puisque c'est elle qui donne l'allure de la surface de régression. Dans nos résultats, nous élevons d'abord jusqu'au degré 2 nos variables de décision et jusqu'au degré 2 nos deux variables hydrologiques puisque c'est ce qui modélisait le mieux notre nuage de points tout en restant avec des temps de calcul respectable puisqu'il est alors possible d'utiliser un algorithme d'optimisation quadratique (voir sous-section 6.2.3 pour plus de détails). Nous prenons aussi les produits croisés pour modéliser l'effet de corrélation entre les variables. Notre vecteur de bases devient alors :

$$\mathbf{B} = [1 \quad u^{R_1} \quad (u^{R_1})^2 \quad u^{R_2} \quad (u^{R_2})^2 \quad u^{R_1}u^{R_2} \quad h_t \quad (h_t)^2 \quad h_t u^{R_1} \quad h_t u^{R_2}],$$

où h_t représente notre variable hydrologique SWE à la période entre t et $t+1$.

D'autre part, nous observons aussi les résultats obtenus lorsque les variables de décision sont élevées jusqu'au degré 3. Le vecteur de bases devient alors :

$$\mathbf{B} = [1 \quad u^{R_1} \quad (u^{R_1})^2 \quad (u^{R_1})^3 \quad u^{R_2} \quad (u^{R_2})^2 \quad (u^{R_2})^3 \quad u^{R_1}u^{R_2} \quad h_t \quad (h_t)^2 \quad h_t u^{R_1} \quad h_t u^{R_2}].$$

D'autres bases auraient pu être explorées, en particulier les familles de bases orthogonales ; ce travail fait partie des suites éventuelles de ce mémoire.

6.1.3 Autres paramètres du test

Pour le test, nous avons choisi de discrétiser la variable d'état des niveaux d'eau avec 15 points équidistants pour le premier réservoir et 21 points équidistants pour le second, allant du minimum possible jusqu'au maximum. Pour la variable de décision, les quantités soutirées par les réservoirs sont discrétisées avec 30 et 90 points pour le premier et second réservoir respectivement. Ces niveaux de discrétisation ont été choisis suite à des tests et offrent un bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats. Finalement, nous avons utilisé 100 trajectoires d'apports indépendants. Puisque le temps de calcul de l'algorithme augmente de façon linéaire avec le nombre de trajectoires utilisé, nous n'augmentons pas au-delà de 100 trajectoires. De plus, la différence de qualité des résultats est très peu significative au-delà de 100 simulations.

6.1.4 Méthode de la politique naïve

La politique naïve est une méthode créée dans le seul but de comparer notre méthode à une méthode simpliste qui prend ses décisions sur la base seule du niveau d'eau dans les réservoirs. Nous voulions savoir non seulement quelle quantité d'énergie supplémentaire notre méthode pouvait apporter comparée à ce genre de méthode, mais aussi voir les bénéfices sur la gestion de l'eau dans les réservoirs notamment sur les inondations d'eau qu'apporte une méthode de programmation dynamique.

Plus concrètement, la gestion de la politique naïve est faite de sorte à toujours viser à atteindre des réservoirs à moitié remplis. Puisqu'il y a cependant la composante aléatoire des apports à tenir compte dans l'évaluation de la politique, nous prenons simplement une moyenne des apports prévus de la période sur un échantillon de 20000 trajectoires d'apports simulés comme apports prévus. Les équations suivantes nous donnent la politique naïve pour

les deux réservoirs :

$$u_{1,t}^* = \max \left(s_{1,t} - \frac{s_1^{max} + s_1^{min}}{2} + \bar{q}_{1,t}, u_1^{min} \right), \forall t = 0, 1, \dots, T - 1, \quad (11)$$

$$u_{2,t}^* = \max \left(s_{2,t} - \frac{s_2^{max} + s_2^{min}}{2} + \bar{q}_{2,t} + \bar{q}_{3,t} + u_{1,t}^* u_2^{min} \right), \forall t = 0, 1, \dots, T - 1. \quad (12)$$

où \mathbf{s}_t sont les niveaux d'eau en début de période et $\bar{\mathbf{q}}_t$ est la moyenne des 20000 trajectoires d'apports pour la période de t et $t + 1$. La fonction max sert simplement à s'assurer que la politique reste au-dessus de la borne inférieure tolérée et évite les quantités d'eau 'négatives par la même occasion. Comme nous pouvons le voir, la méthode est minimaliste et vise à toujours retrouver un certain point d'équilibre dans le niveau des réservoirs. Elle ne fait pas non plus appelle à des données simulées permettant la prévision des apports futurs.

6.2 Résultats

Nous avons effectué le test décrit dans la section précédente dans le but de comparer l'efficacité en terme de production totale moyenne par semaine de chacune des trois méthodes. Pour avoir des résultats plus précis, nous avons répété le test 58 fois sur 58 trajectoires d'apports naturels indépendantes d'une année simulées par Rio Tinto. Ceci est important puisque certaines années ont des apports beaucoup moins ou beaucoup plus élevés que la moyenne générale historique. Nous n'en utilisons pas plus simplement parce que Rio Tinto nous en a fourni ce nombre pour faire la comparaison. Refaire le test 58 fois nous permet donc de réduire l'incertitude sur les variabilités extrêmes des apports et permet une meilleure comparaison entre les méthodes. Les 58 trajectoires sont ensuite jointes bout à bout afin de supposer une période continue de 58 années. Le but de cela étant de n'avoir qu'un niveau d'eau initial et final au lieu d'en avoir 58. Les décisions sont basées sur un cycle de 52 semaines. En d'autres mots, la phase à rebours d'obtention des surfaces de régression n'est faite qu'une seule fois sur les 52 périodes et

nous appliquons la phase *Forward* 58 fois avec 58 trajectoires indépendantes. Nous utilisons cette façon de faire simplement parce que s'est celle utilisée par le partenaire (en l'occurrence Rio Tinto) afin de comparer notre méthode à la méthode SDP.

Le tableau 1 montre l'efficacité de la méthode proposée sur cette période de 58 années comparée à une méthode de programmation dynamique stochastique et à une politique naïve. Le test sur la méthode DP simulations et régression est effectué sur les deux ensembles de bases présentés à la sous-section 6.1.2. Les chiffres présents dans le tableau représentent la production énergétique hebdomadaire moyenne pour chacune des 58 années en terme de puissance en mégawatt.

6.2.1 Analyse des résultats de la politique naïve

Les résultats du tableau 1 démontrent l'efficacité de la programmation dynamique dans la résolution de ce genre de problème d'optimisation par rapport à une simple politique naïve; une différence de production d'environ 14% avec la méthode DP simulations et régressions et la méthode SDP. La différence peut paraître relativement faible pour une méthode qui peut être appliquée sans grande aide computationnelle, mais ce que le tableau ne montre pas c'est que la méthode ne respecte souvent pas les contraintes en lien au niveau d'eau dans les réservoirs. En effet, le fait que la méthode ne tienne en aucun cas compte de l'information passée et se contente de retrouver un point "milieu" dans les réservoirs au maximum de ces capacités fait en sorte que les niveaux d'eau se retrouvent souvent en dessous du minimum toléré ou au-dessus du maximum toléré (surtout pendant la période des crues où les apports d'eau sont beaucoup plus importants). Donc, même si le gain de production ne semble pas si grand, le gain en matière de gestion de l'eau et du maintien des contraintes est énorme.

6.2.2 Méthode DP simulations et régressions vs Méthode SDP

D'autre part, la différence de production moyenne sur les 58 années entre la méthode traitée dans ce mémoire et la méthode SDP est moins notable. La méthode SDP produit en moyenne 0.22% de production supplémentaire que notre méthode lorsque nous régressons sur un polynôme de degré 2 (voir sous-section 6.1.2 pour voir l'ensemble des bases utilisé). C'est toutefois notre méthode qui donne de meilleurs résultats (0.18% de production supplémentaire) lorsque nous régression sur nos variables de décision élevées jusqu'au troisième degré. Il est aussi intéressant de noter que l'écart-type des productions hebdomadaires moyennes sur les 58 années est plus faible pour la méthode DP simulations et régressions peu importe le degré de régression utilisé. Notre méthode a un coefficient de variation de 5.1 %, alors que la méthode SDP a un coefficient de variation de 5.6 %. Le coefficient de variation est simplement le rapport entre l'écart-type et la moyenne. Même si cela n'a pas été pris comme critère, une moins grande variabilité de la production à travers les années ne peut être une mauvaise chose.

Le tableau 2 résume les données importantes du tableau 1 et donne plus de détails sur la production hebdomadaire moyenne par année pour chacune des quatre centrales. Il montre aussi qu'un certain nombre de périodes ont reçu des apports anormalement élevés qui n'ont pas pu être ajustés par les deux méthodes et ont donc mené à des inondations en amont des réservoirs. Les inondations surviennent lorsque le niveau d'eau dans l'un ou l'autre des réservoirs dépasse le niveau maximum toléré soit 396.00 hm^3 pour le premier réservoir et 5081.79 hm^3 pour le second. Ceux-ci restent toutefois peu fréquents, peu importe la méthode : 8 fois pour la méthode SDP, 13 fois pour la méthode DP simulations et régressions avec degré 2 et 12 fois avec degré 3 sur un total de 3016 périodes d'une semaine traitées dans ce test. Ils ont mené respectivement à des inondations totales de 4731.1 hm^3 , 4678.1 hm^3 et 4333.1 hm^3 pour l'ensemble des deux réservoirs.

La figure 4 montre la trajectoire moyenne sur un échantillon de 20000 trajectoires des apports naturels Q1, Q2 et Q3 en m^3/sec (se référer au schéma du système, page 9). La saison des crues, qui commence en début

avril et prend fin en début juillet, fait augmenter tout les apports, mais particulièrement l'apport Q3 qui passe de $500 \text{ m}^3/\text{sec}$ à plus de $3000 \text{ m}^3/\text{sec}$ en un mois. L'apport Q3 est celui qui va directement au réservoir LSJ d'où l'importance d'une bonne gestion du réservoir durant et avant cette période afin de vider les réservoirs en prévision d'apports plus importants.

Les figures 5, 6, 7, 8 et 9 sont les graphiques obtenus de notre test qui nous aide à analyser l'approche de gestion d'eau utilisée par chaque méthode. Nous comparons la méthode DP simulations et régressions degré 2 (illustré par une trajectoire magenta discontinue), la méthode DP simulations et régressions degré 3 (illustré par une trajectoire bleue pleine) et la méthode SDP (illustré par une trajectoire noire pointillée).

La figure 5 représente la production moyenne à chaque semaine sur l'ensemble d'une année effectué par la moyenne de nos 58 années. On peut surtout voir une grande différence de production en fin/début d'année entre DP simulations et régressions degré 2 et SDP. La méthode SDP produit beaucoup plus pendant cette période, alors que la méthode avec degré 3 se situe entre les deux durant cette période. En fait, la production moyenne de la méthode avec degré 3 se situe la majeure partie du temps entre les deux autres. On peut aussi voir que la production de la méthode SDP baisse énormément au mois de mars, juste avant la période des crues, alors que celle de la méthode DP simulations et régressions reste pratiquement inchangé.

La figure 6 nous montre l'évolution moyenne des niveaux d'eau, toujours à partir de nos 58 années, dans chacun des deux réservoirs à travers le temps. La figure est intéressante puisque l'on peut voir que la méthode DP simulations et régressions degré 2 donne des politiques qui tendent toujours à vouloir garder les réservoirs plus pleins que la méthode SDP. D'ailleurs, les niveaux d'eau restent la majorité de l'année très proche de la borne supérieure des deux réservoirs. Par contre, similairement pour les deux méthodes, les politiques obtenues font baisser le volume d'eau dans les réservoirs juste avant la crue en prévision des forts apports à venir. Les politiques de la méthode SDP font toutefois baisser plus ces niveaux d'eau, particulièrement au réservoir Chute-du-Diable (RCD) où la baisse commence dès le mois de février à l'opposé d'une baisse à partir d'avril pour notre méthode avec degré

2. La méthode DP simulations et régressions degré 3, quant à elle, obtient des politiques qui maintiennent le niveau d'eau moyen entre les deux autres méthodes la majorité du temps. De plus, sa diminution de niveau d'eau au réservoir Chute-du-Diable se fait de manière plus graduelle et moins brusque.

Comme on peut s'y attendre, les plus fortes quantités soutirées sont enregistrées pendant la saison des crues (particulièrement au réservoir Lac-Saint-Jean où l'apport est le plus important) comme le montre la figure 7. La figure montre aussi un débit beaucoup plus élevé pour la méthode SDP entre février et avril au réservoir Chute-du-Diable, ce qui confirme la baisse du niveau d'eau précoce de la figure 6. Encore une fois, et en toute logique, la trajectoire de quantité soutirée de la méthode avec degré 3 se trouve en majorité entre les deux autres méthodes. La méthode avec degré 3 est particulièrement moins variable au premier réservoir. La même chose peut être observée à la figure 8 qui illustre la production moyenne dans chacune des quatre centrales. La DP simulations et régressions degré 3 donne des trajectoires de production moyenne moins variable que les deux autres, et ce, pour chaque centrale.

Finalement, la figure 9 nous montre les déversements non productifs moyens des deux méthodes à chacune des quatre centrales qui constituent le système. En d'autres mots, les déversements non productifs sont toutes les quantités d'eau soutirées des réservoirs, mais qui ne sont pas turbinées dans les centrales parce que le débit turbiné maximum par la centrale a été atteint. L'eau continue alors vers la prochaine centrale sans avoir été utilisée pour produire de l'énergie dans cette centrale. Sans surprise, la grande majorité des déversements se produisent pendant la saison des crues, où les apports d'eau sont à la fois les plus importants, mais aussi les plus variables. Cela signifie donc des apports plus difficiles à prédire et donc une utilisation plus fréquente des déversements pour éviter des inondations des réservoirs. Ce que l'on peut voir à la figure 9 c'est que les déversements sont beaucoup plus importants pour la méthode DP simulations et régressions degré 2 que pour la méthode SDP, et ce, pour toutes les centrales. Par contre, même si une plus grande quantité de déversement peut paraître comme un point négatif, on a vu à la figure 7 que la méthode prend plus de risque avec des niveaux

d'eau plus près de la borne supérieur que la méthode SDP. Ainsi, il est normal d'avoir plus de déversements non productifs pour éviter un débordement des réservoirs qui produirait des inondations. Des réservoirs plus pleins apportent une meilleure hauteur de chute pour l'eau turbinée aux centrales Chute-du-Diable et de l'Isle-Maligne (en amont respectivement des réservoirs RCD et RLSJ) pour la méthode DP simulations et régressions degré 2, et par conséquent une meilleure production. La méthode SDP, quant à elle, obtient une moins bonne production par sa hauteur de chute inférieure, mais une meilleure production par ces moins grandes quantités d'eau déversée non productive. Au final toutefois, le tableau 2 nous montre que la meilleure production due à la hauteur de chute de la méthode degré 2 n'est pas suffisante pour contre-balancer la perte de nette d'eau non productive. La méthode SDP reste en moyenne plus productive d'environ 3 mégawatts. La méthode DP simulations et régressions avec les bases élevées au degré 3 change la donne et fait un compromis entre la méthode avec degré 2 et la méthode SDP. En effet, la figure 6 nous montre que les niveaux d'eau de la méthode se tiennent entre ceux des deux autres trajectoires, alors que la figure 9 nous montre que ces déversements non productifs moyens sont aussi plus élevés que SDP, mais moins élevé que DP simulations et régressions avec degré 2. Ce compromis tient ses promesses puisque les résultats obtenus sont les plus performants avec 1469.73 MW soit environ 3 mégawatts supérieurs à la méthode SDP.

En conclusion, on pourrait dire que deux stratégies différentes sont utilisées par chacune des deux méthodes. D'une part, notre méthode avec degré 2 garde le niveau des réservoirs près de son maximum la majorité de l'année (sauf bien sûr avant la saison des crues) pour une meilleure hauteur de chute et une moins grande variabilité de la production entre les années. D'autre part, la méthode SDP se concentre à déverser le moins d'eau possible. Finalement, la méthode avec degré 3 fait un compromis entre la hauteur de chute et les déversements non productifs pour obtenir la meilleure production moyenne de tous nos tests effectués.

6.2.3 Implantation technique et temps de calcul

L'implantation de la méthode a été faite en majorité sur *Matlab*. Les constructions de nos équations normales pour faire la régression ont toutefois été faites en langage *C* par souci d'optimisation. Pour notre surface de régression quadratique, nous utilisons la fonction *quadprog* de *Matlab* pour faire notre optimisation. Le fait d'avoir une surface quadratique concave nous donne l'avantage d'utiliser la programmation quadratique pour l'optimisation de celle-ci. Ce qui est considérablement moins coûteux en temps de calcul que de trouver le maximum sous contraintes d'une surface de degré supérieur. Nous avons aussi testé des surfaces de degré supérieur (notamment de degré 3 utilisé dans notre test précédemment) en utilisant alors la fonction *fmincon*. L'optimisation se fait cependant beaucoup plus lentement (environ quatre fois plus lentement qu'en utilisant *quadprog* avec une surface quadratique). Les politiques optimales obtenues donnent toutefois une meilleure production hebdomadaire moyenne avec l'utilisation du degré 3 sur les variables de décisions. L'utilisation des degrés supérieurs ne fait que baisser la qualité des politiques probablement due à de l'*overfitting* du nuage de point. La comparaison des résultats numériques avec le temps de calcul pour le nombre de degrés utilisé lors de la régression est illustrée dans la figure 3 ci-dessous. Un autre système hydroélectrique avec une fonction de production plus complexe pourrait toutefois nécessiter une surface de régression à degré plus élevé, et donc absolument nécessiter l'utilisation de *fmincon*.

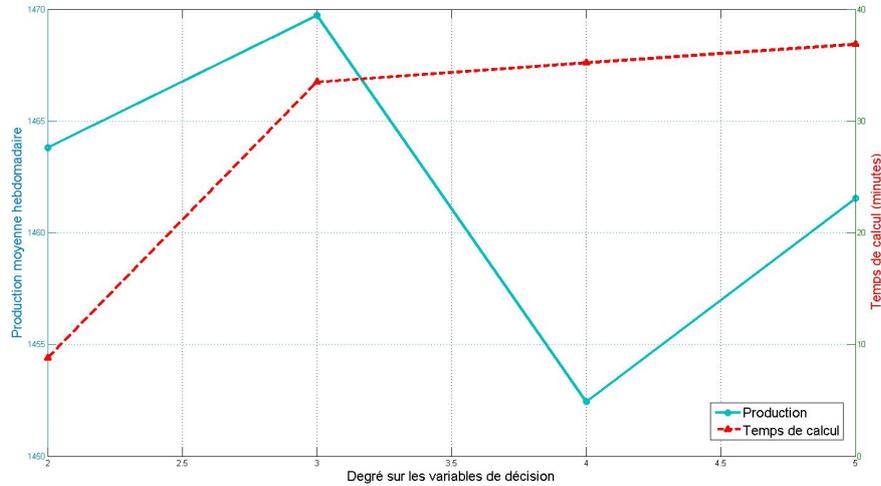


FIGURE 3 – Comparaison entre production hebdomadaire moyenne obtenue (ligne pleine bleue) et temps computationnel (ligne pointillée rouge) pour chaque degré maximal utilisé sur les variables de décision

À titre comparatif, la méthode SDP à un temps d’exécution similaire à la méthode utilisant les bases de degré 2 pour obtenir nos politiques optimales ; c’est-à-dire chacun légèrement en dessous de 10 minutes. Le test comparatif sur les 58 trajectoires d’apports annuelles prend, quant à lui, moins de 30 secondes à exécuter.

6.2.4 L’implantation d’une contrainte saisonnière

Au départ, une contrainte supplémentaire devait apparaître dans notre algorithme pour ce comparer avec la méthode SDP utilisée par Rio Tinto sur leur système. La contrainte était de respecter certains corridors de niveau d’eau dans les réservoirs à certaines périodes de l’année. Mais à la différence de notre contrainte fixe sur le minimum et maximum d’eau à avoir dans nos réservoirs, celle-ci pouvait être transgressée en appliquant une certaine pénalité linéaire. La raison pourquoi nous n’avons finalement pas intégré cette contrainte ni dans notre méthode ni dans la méthode SDP est que les coefficients de pénalité utilisés par Rio Tinto étaient choisis spécifiquement pour s’assurer que seulement un certain faible pourcentage de décisions mèneraient

à des niveaux d'eau en-dehors des corridors. Ces coefficients étant propres à la méthode SDP. Nous avons alors décidé de ne pas ajouter cette contrainte lors de la comparaison de nos algorithmes, mais il est à noter qu'il est toutefois possible de trouver les coefficients qui satisferaient le même pourcentage souhaité pour la méthode DP et régression.

Malgré tout, même si aucune des deux méthodes ne prenait en compte cette contrainte, la méthode DP simulations et régressions (peu importe les bases utilisées) donne des politiques qui font beaucoup moins sortir les niveaux d'eau des corridors prévus initialement.

7 Conclusion

Dans ce projet, nous avons implanté une méthode de programmation dynamique utilisant des simulations d'apports et des surfaces de régression dans le but de maximiser la production énergétique d'un système d'hydroélectrique. Cette méthode a été utilisée récemment en finance pour des problèmes d'optimisation de portefeuille et une technique similaire est utilisée pour la tarification de produits dérivés. La motivation première derrière l'implantation de cette méthode dans un contexte d'optimisation hydroélectrique était de pouvoir utiliser l'information de plus de variables hydrologiques pour prévoir l'apport futur sans ajouter de temps computationnel important, ce que les autres méthodes de la littérature ne permettent pas.

Nous avons obtenu d'excellents résultats autant en matière de production énergétique qu'en matière de respect des contraintes sur les niveaux d'eau. Nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus de la méthode SDP, une méthode de programmation dynamique classique de la littérature. Les résultats obtenus de notre méthode en se limitant à des surfaces de régression quadratique nous donnent une production moyenne légèrement inférieure à la méthode SDP. Par contre, en utilisant des surfaces du troisième degré, nous obtenons en moyenne une meilleure production que SDP. Toutefois, le temps de calcul triplé par rapport à l'utilisation de surfaces quadratiques. Dans tous les cas, notre méthode donne une variabilité de la production entre les années considérablement inférieure à la méthode SDP. Par contre, nous n'avons pas pu profiter de l'avantage premier de la méthode d'utiliser plusieurs variables hydrologiques dans nos régressions puisque nous n'avons accès qu'à des simulations d'apports et de *Snow Water Equivalent*.

À partir de ces résultats, d'autres pistes de recherches pourraient être intéressantes pour tenter d'obtenir des résultats supérieurs en utilisant la méthode DP simulations et régressions. Puisque l'un des avantages clés de la méthode traitée dans ce mémoire est le fait de pouvoir ajouter de l'information facilement et sans ajout de temps de calcul considérable, il serait intéressant d'ajouter d'autres variables hydrologiques à la régression. Ici, nous n'avons testé que l'apport naturel de la semaine précédente et le *Snow Water*

Equivalent comme variables hydrologiques dans nos régressions, et n'avons finalement que gardé cette dernière. D'autres variables comme un facteur d'humidité dans le sol, qui a prouvé son efficacité sur la méthode SDP, pourraient être implantées à la méthode. Nous n'avons malheureusement pas cette information disponible à notre système de Saguenay-Lac-Saint-Jean pour effectuer le test. Le défi deviendrait alors de trouver des combinaisons de variables qui ajouteraient de l'information sur les apports futurs sans que l'information devienne trop redondante ce qui ajouterait de la variabilité inutile. D'autre part, il pourrait être intéressant de choisir des ensembles de bases alternatives ; par exemple, explorer les familles de bases orthogonales.

A Descriptions des fonctions

La fonction *VolFin* prend comme arguments les volumes initiaux, les quantités soutirées des réservoirs et les apports d'eau. Centrale après centrale, elle détermine la quantité d'eau qui sera turbinée et la quantité qui passera directement à la centrale suivante sans l'être. Cela est déterminé par la capacité maximale de turbinage hebdomadaire de chaque centrale. Finalement, et comme son nom l'indique, la fonction retourne les volumes finaux en prenant en compte tous les arguments de la fonction.

La fonction *Prod* prend comme arguments les volumes initiaux et finaux dans les réservoirs, et les quantités turbinées et déversées dans chaque centrale obtenues de la fonction *VolFin*. La fonction évalue la production en terme d'énergie de chacune des centrales. Pour les centrales situées au réservoir (CCD et CIM), la production est déterminée par un polynôme bivarié en fonction des quantités turbinées et d'une hauteur moyenne de chute. Pour les deux autres centrales (CCS et CSH), la production est évaluée par interpolation. Une perte de production est associée à la quantité d'eau déversée par chaque centrale et est évaluée comme une pénalité linéaire. La fonction retourne la somme de la production hebdomadaire produite par le système en mégawatt.

B Obtention de la borne terminale

Plusieurs valeurs peuvent être utilisées comme borne terminale \mathbf{v}_T . La manière que nous utilisons pour trouver la nôtre est en transformant notre problème initialement à horizon fini (2 semaines, 52 semaines, etc.) en problème à horizon infini. Pour ce faire, nous utilisons un processus itératif. En d'autres mots, nous commençons avec une borne terminale nulle, peu importe le niveau d'eau restant dans les réservoirs, sa valeur est égale à zéro, et nous exécutons la méthode normalement à rebours jusqu'à $t = 0$. Nous obtenons alors un ensemble de décisions optimales pour le problème à horizon fini, mais sous-optimales pour le problème à horizon infini puisque chacune de ces décisions aura de fortes tendances à terminer la dernière période avec les réservoirs vides. Nous prenons alors le vecteur de valeurs de production espérée à $t = 0$ (\mathbf{v}_0), et le mettons comme borne terminale pour la seconde itération. Nous avons alors $\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_0$ pour démarrer la deuxième itération. Les valeurs de production espérée lors de la deuxième itération sont donc les valeurs cumulées de la première et seconde itération. Nous répétons la procédure pour quelques itérations jusqu'à la convergence des décisions. Par exemple, jusqu'à ce que la norme matricielle de la différence entre la matrice de décision de l'itération présente et celle de l'itération précédente soit inférieure à un certain critère de convergence. Notez que les valeurs espérées ne convergent pas, puisqu'elles se cumulent, et ce sont les décisions qui convergent. Cette convergence se fait sans problème et rapidement (entre 2 et 4 itérations). Nous avons alors nos décisions optimales et notre borne terminale réutilisable tant que nous avons la même discrétisation de nos variables d'état. Selon le nombre d'itération nécessaire avant convergence des décisions, les valeurs de la borne terminale seront différentes (une borne obtenue avec 4 itérations aura par exemple des valeurs plus élevées qu'une obtenue avec 2). Toutefois, la différence d'échelle entre les bornes n'a pas d'importance pour l'obtention des décisions, c'est la différence entre les valeurs attribuées à chaque niveau d'eau d'une même borne qui influence la décision finale.

C Interpolation bilinéaire

Une interpolation bilinéaire est simplement l'extension à deux variables de l'interpolation linéaire bien connue. Elle permet de calculer la valeur d'une fonction en un point situé dans un rectangle où la fonction a été évaluée dans les quatre coins. Une interpolation linéaire est simplement effectuée dans les deux axes orthogonaux pour trouver la valeur du point cherché. Si on dénote par P la valeur recherchée aux coordonnées (x, y) , et $V_{1,1}$, $V_{2,1}$, $V_{1,2}$ et $V_{2,2}$, les valeurs associées respectivement aux coordonnées (x_1, y_1) , (x_2, y_1) , (x_1, y_2) et (x_2, y_2) , l'équation suivante nous donne une approximation par interpolation bilinéaire de la valeur P :

$$P \approx \frac{(x_2 - x)(y_2 - y)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} V_{1,1} + \frac{(x - x_1)(y_2 - y)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} V_{2,1} \\ + \frac{(x_2 - x)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} V_{1,2} + \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} V_{2,2}.$$

Dans notre cas, les quatre coins du rectangle représentent des niveaux d'eau possibles selon notre grille construite précédemment. Chaque niveau d'eau de notre treillis à une valeur espérée associée.

D Ajustement pour les volumes impossibles

Il est possible que la fonction *VolFin* nous retourne des volumes considérés comme impossibles. Dans notre cas, les volumes impossibles seront ceux qui descendront sous ou monteront au-dessus d'un certain seuil acceptable d'eau dans les réservoirs et correspondent donc à une politique de turbinage trop élevé ou trop basse respectivement. La solution naïve de simplement les éliminer de la régression mène à des zones dégagées près des bornes ce qui rend la régression moins précise. Au lieu de cela, nous préférons garder ces points, mais ajuster la production pour que celle-ci soit équivalente à la production obtenue par la politique qui nous fait atteindre la borne inférieure (dans le cas d'un dépassement de la contrainte inférieure) ou la borne supérieure (dans le cas d'un dépassement de la contrainte supérieure). Nous ajoutons aussi une pénalité linéaire à ces points hors normes de sorte que plus la politique nous entraîne vers des volumes sous la borne, plus la pénalité sera élevée. Le coefficient utilisé pour la pénalité a été obtenu par tâtonnement et reste une valeur très faible. Il ne sert qu'à éloigner l'algorithme d'optimisation de ces régions. Ainsi, la régression prend en compte les volumes impossibles en leur attribuant une production plus faible qu'il aurait eue en ne faisant rien. Les figures 10 et 11 montrent des surfaces de régression et les points utilisés pour former celle-ci de la perspective des deux réservoirs. Pour garder les graphiques lisibles, seule une simulation d'apport a été utilisée. Dans les deux figures, nous pouvons voir l'effet de la pénalité linéaire surtout sur le graphique du point de vue du réservoir Lac-Saint-Jean lorsqu'il est complètement plein (graphique en bas à droite des figures 10 et 11). La pénalité linéaire commence à être appliquée à partir d'une politique qui demande de soutirer environ $2400 \text{ m}^3/\text{sec}$ jusqu'à $3000 \text{ m}^3/\text{sec}$ (maximum que nous avons fixé dans notre algorithme).

E Figures et tableaux sorties par notre test numérique

Année	DP sim rég (degré 2)	DP sim rég (degré 3)	SDP	Naïve	Année	DP sim rég (degré 2)	DP sim rég (degré 3)	SDP	Naïve
1	1345,80	1363,27	1317,00	1244,00	30	1429,87	1448,33	1464,95	1284,77
2	1419,71	1414,47	1442,43	1305,68	31	1454,43	1463,58	1457,28	1215,36
3	1563,38	1602,54	1558,25	1346,87	32	1308,93	1282,30	1248,93	1122,91
4	1416,39	1403,64	1414,29	1271,95	33	1497,66	1507,56	1496,86	1307,01
5	1396,98	1412,29	1419,53	1217,66	34	1469,10	1479,71	1499,60	1281,34
6	1419,02	1426,26	1400,97	1237,10	35	1441,44	1436,70	1409,32	1190,32
7	1530,39	1502,62	1498,41	1302,21	36	1312,19	1345,42	1361,66	1145,09
8	1489,59	1511,44	1498,13	1326,54	37	1477,75	1473,09	1482,86	1287,84
9	1419,28	1435,94	1427,49	1217,37	38	1551,51	1544,82	1527,50	1339,14
10	1543,91	1549,63	1553,05	1371,41	39	1523,15	1528,06	1528,40	1378,79
11	1635,24	1622,33	1661,96	1440,65	40	1472,61	1487,35	1494,90	1318,72
12	1470,31	1516,49	1508,85	1323,46	41	1512,94	1513,63	1548,12	1322,31
13	1377,25	1373,14	1320,69	1130,37	42	1514,72	1547,51	1539,60	1334,31
14	1474,85	1471,27	1496,60	1338,01	43	1431,86	1436,84	1418,67	1263,75
15	1513,73	1538,67	1516,85	1320,86	44	1528,47	1508,88	1535,33	1322,98
16	1470,79	1473,65	1463,30	1298,37	45	1536,33	1570,63	1559,07	1352,13
17	1360,18	1362,68	1363,75	1191,75	46	1616,84	1593,55	1607,30	1420,26
18	1485,38	1485,51	1483,03	1275,36	47	1519,07	1554,57	1537,15	1326,17
19	1365,61	1347,12	1379,12	1225,61	48	1457,71	1444,33	1450,69	1327,78
20	1436,09	1463,35	1435,90	1276,06	49	1375,92	1391,44	1361,24	1188,82
21	1428,72	1410,98	1410,45	1206,44	50	1459,46	1452,85	1475,84	1287,27
22	1372,84	1396,51	1389,80	1197,07	51	1550,64	1566,20	1582,07	1314,43
23	1434,95	1420,62	1410,81	1257,43	52	1414,62	1439,85	1405,54	1236,48
24	1553,98	1549,34	1585,41	1370,40	53	1501,23	1504,43	1518,88	1296,30
25	1489,86	1504,23	1466,81	1266,68	54	1524,06	1527,38	1521,48	1359,26
26	1495,98	1511,10	1492,86	1331,41	55	1388,72	1368,55	1351,66	1202,24
27	1423,82	1400,95	1413,65	1250,74	56	1431,15	1462,84	1463,43	1262,17
28	1325,17	1359,04	1351,90	1127,12	57	1616,67	1624,78	1619,84	1421,18
29	1409,17	1384,15	1397,14	1172,85	58	1513,60	1526,17	1541,66	1314,82
Moyenne	1463,81	1469,73	1467,04	1280,44	Écart-Type	73,96	75,94	82,16	73,17

TABLE 1 – Comparaison de la production hebdomadaire moyenne obtenue par différentes méthodes sur un intervalle de 58 années

$$(\Delta u^{R_1} = 30, \Delta u^{R_2} = 90, \Delta_S^{R_1} = 15, \Delta_S^{R_2} = 21, \# \text{ simulations} = 100)$$

	SDP	DP sim rég (degré 2)	DP sim rég (degré 3)
Production hebdomadaire moyenne (MW)	1467.05	1463.81	1469.73
Écart-type	(82.16)	(73.96)	(75.94)
Production Moyenne CCD (MW)	152.20	157.31	154.83
Production Moyenne CCS (MW)	177.01	175.15	176.39
Production Moyenne CIM (MW)	347.51	347.97	350.37
Production Moyenne CSH (MW)	790.34	783.38	788.14
Fréquence hors-limite (# semaine)	8	13	12
Quantité hors-limite (hm ³)	4731.10	4678.10	4333.10

TABLE 2 – Comparaison de la production hebdomadaire moyenne totale et à chacune des centrales suivi par la fréquence et quantité des inondations entre différentes méthodes sur un intervalle de 58 années
($\Delta u^{R_1} = 30$, $\Delta u^{R_2} = 90$, $\Delta s^{R_1} = 15$, $\Delta s^{R_2} = 21$, # *simulations* = 100)

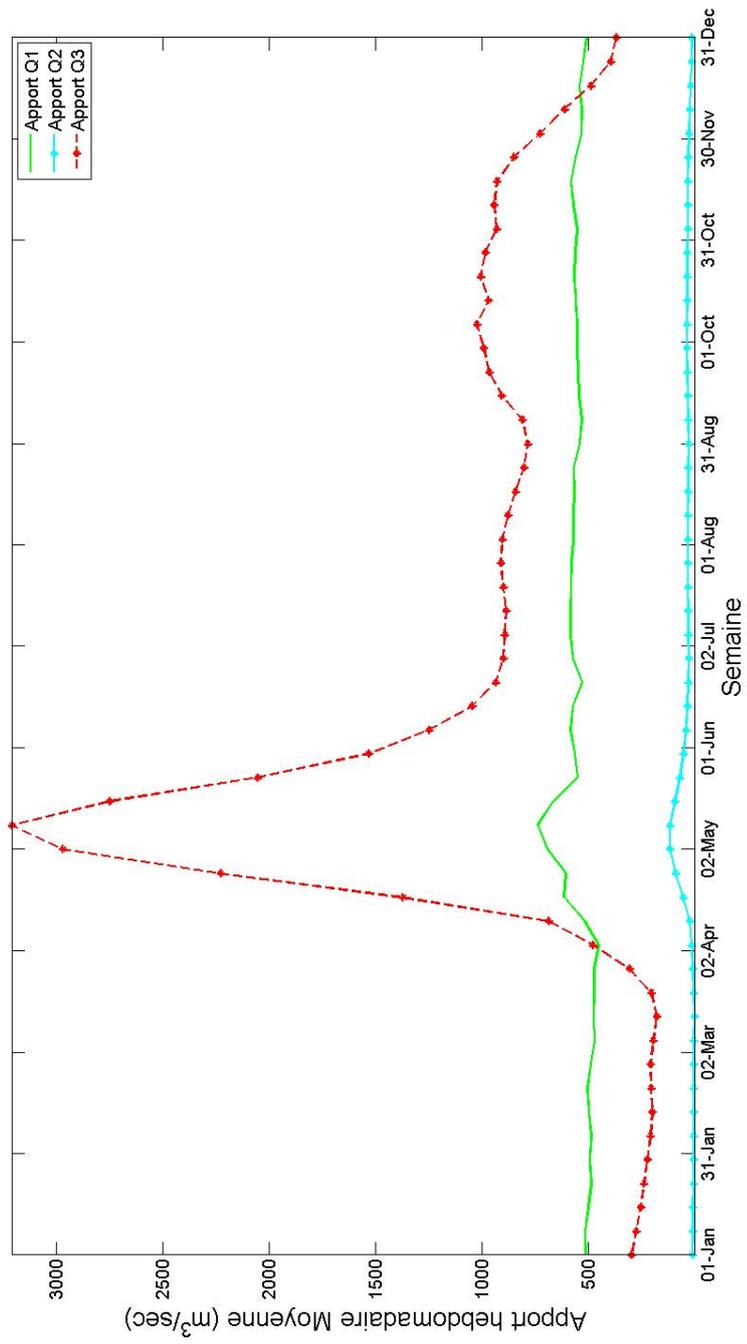


FIGURE 4 – Trajectoire moyenne des apports Q1, Q2 et Q3 sur une période d'un an effectuée sur 2000 trajectoires (m^3/sec)

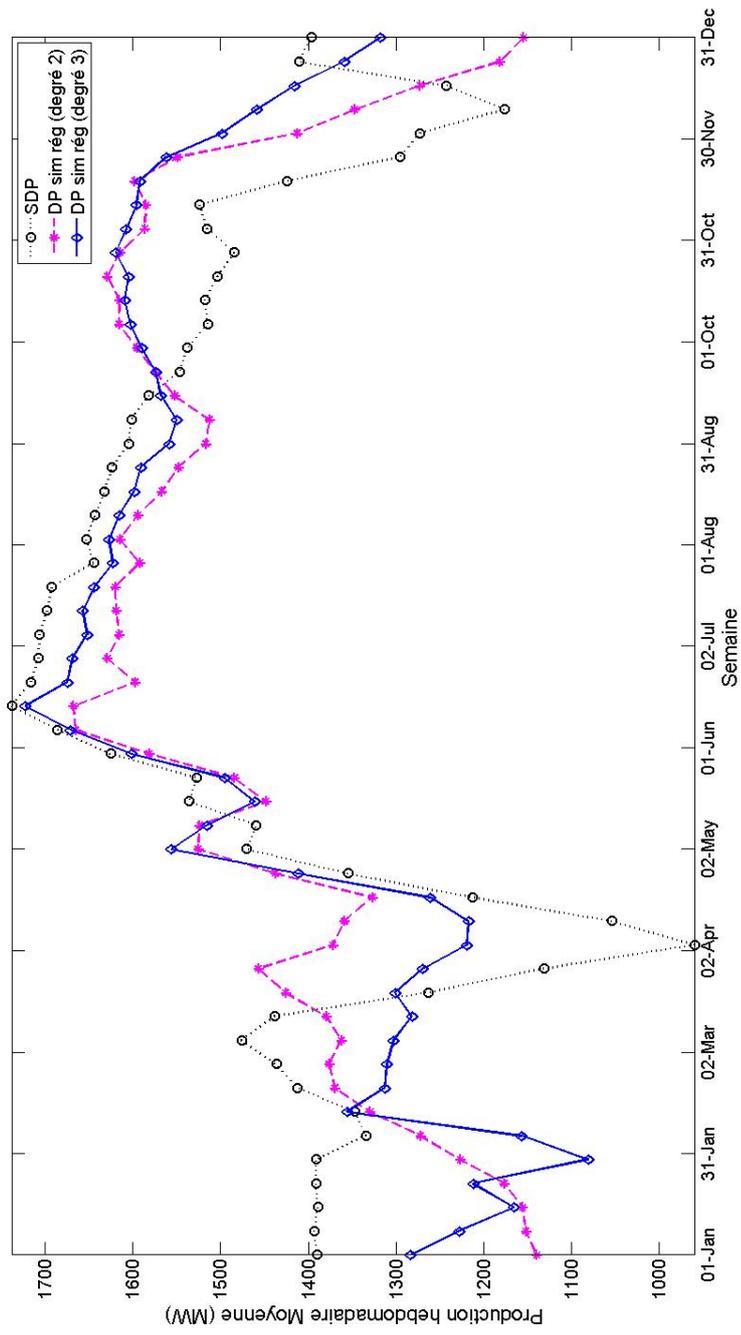


FIGURE 5 – Comparaison des productions hebdomadaires moyennes totales des quatre centrales effectuées sur 58 années entre la méthode DP simulations et régressions et SDP (MW)

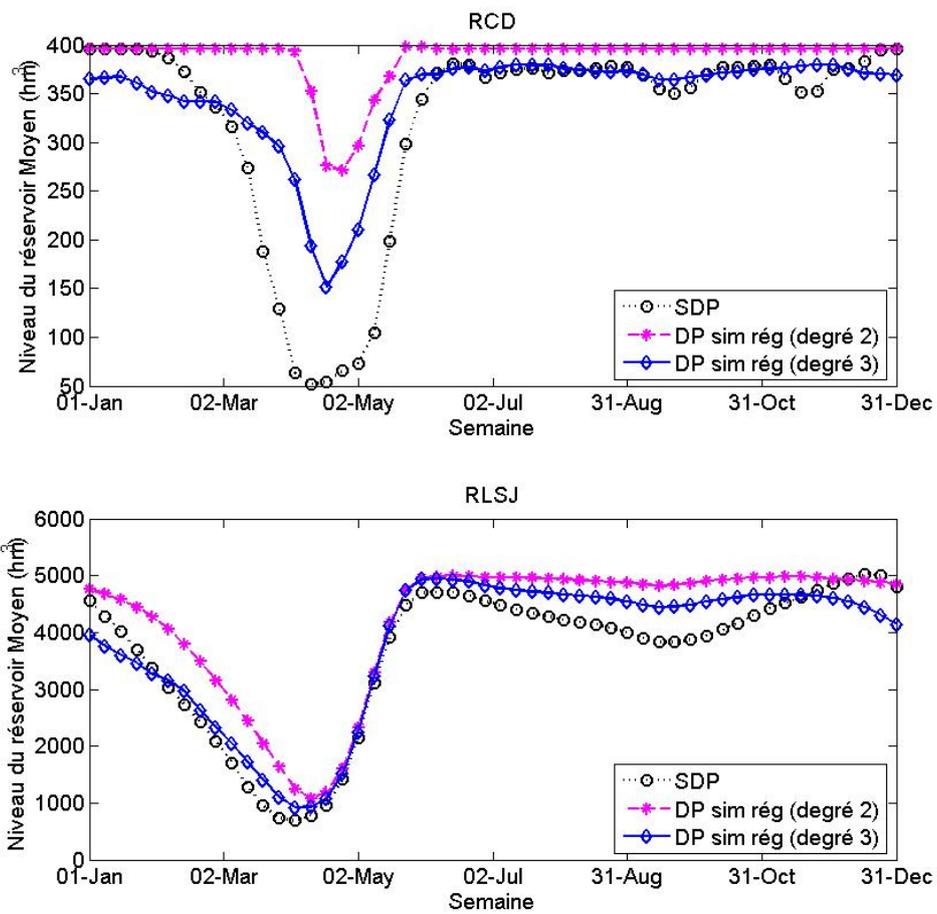


FIGURE 6 – Comparaison des niveaux des réservoirs moyens effectué sur 58 années entre la méthode DP simulations et régressions et SDP (hm^3)

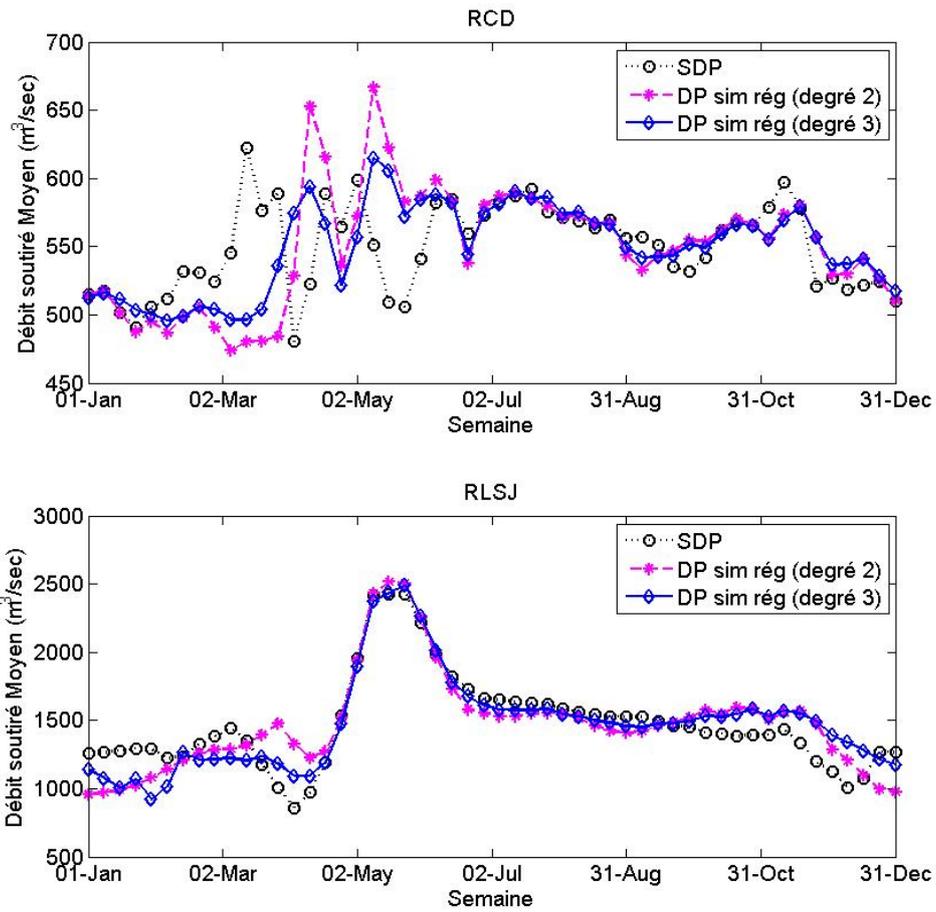


FIGURE 7 – Comparaison des débits soutirés hebdomadaires moyens effectué sur 58 années entre la méthode DP simulations et régressions et SDP (m^3/sec)

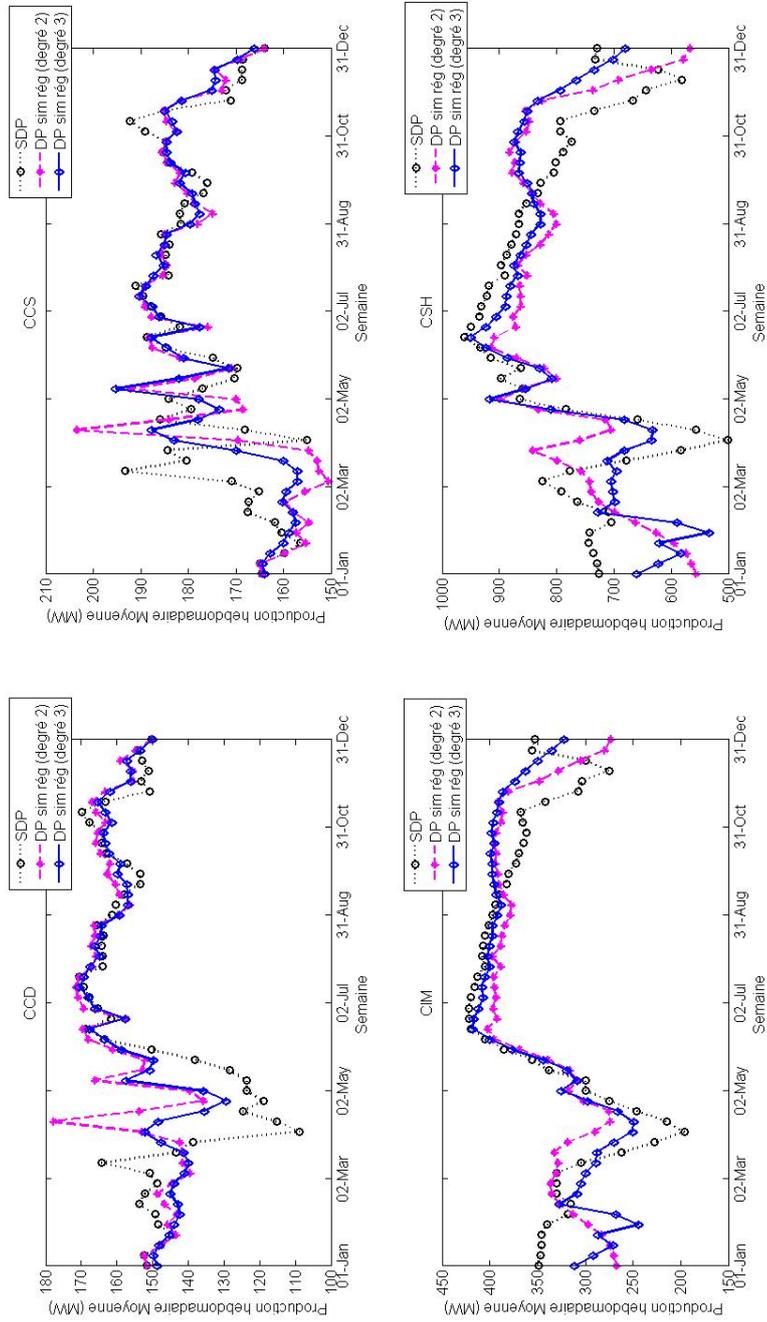


FIGURE 8 – Comparaison des productions hebdomadaires moyennes de chaque centrale effectué sur 58 années entre la méthode DP simulations et régressions et SDP (MW)

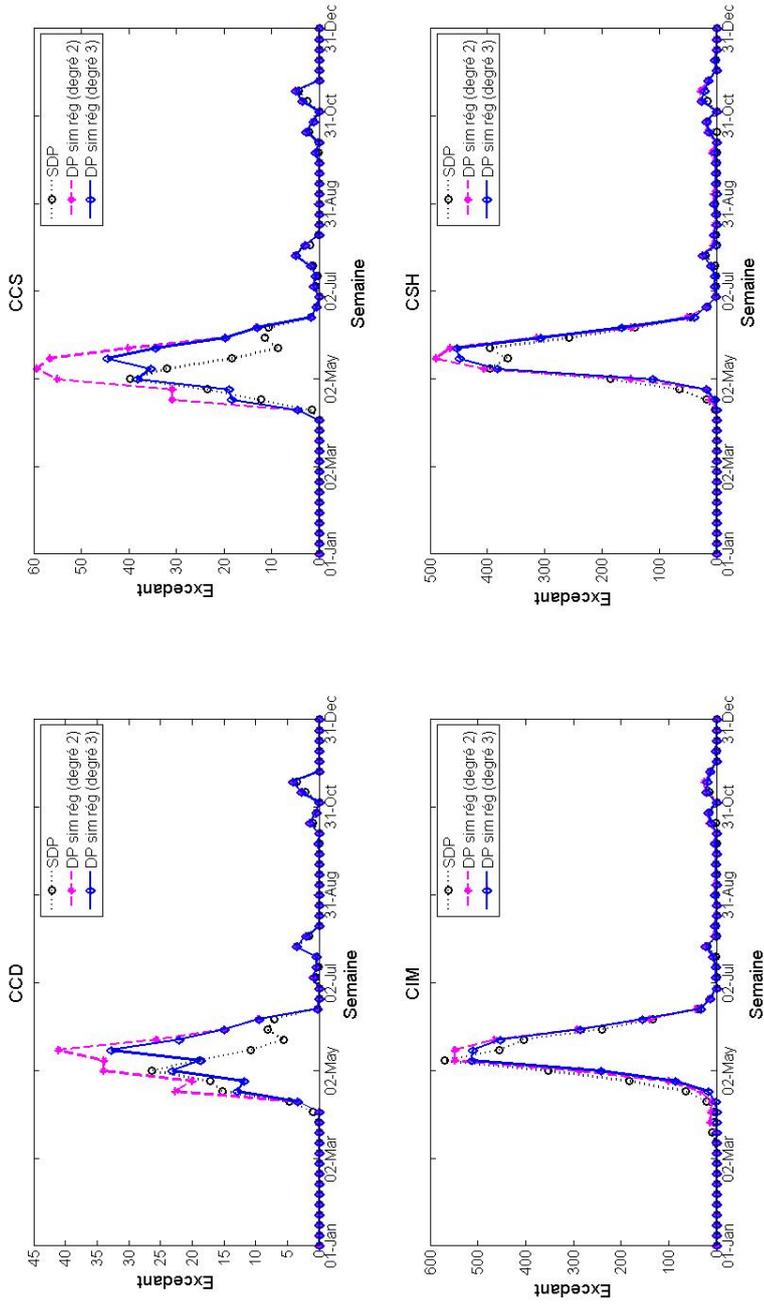


FIGURE 9 – Comparaison des déversements non-productifs hebdomadaires moyens de chaque centrale effectué sur 58 années entre la méthode DP simulations et régressions et SDP (m^3/sec)

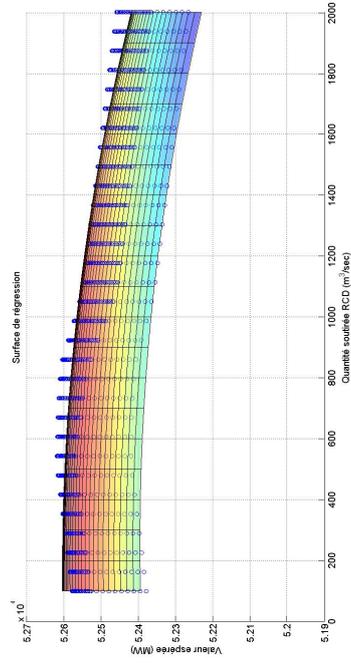
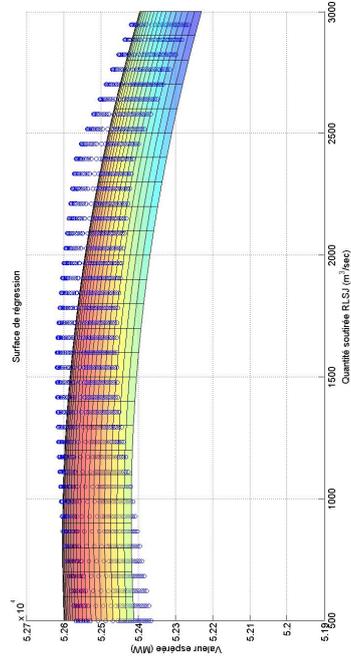
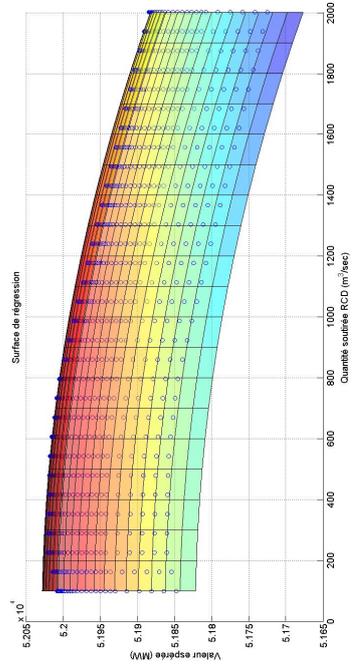
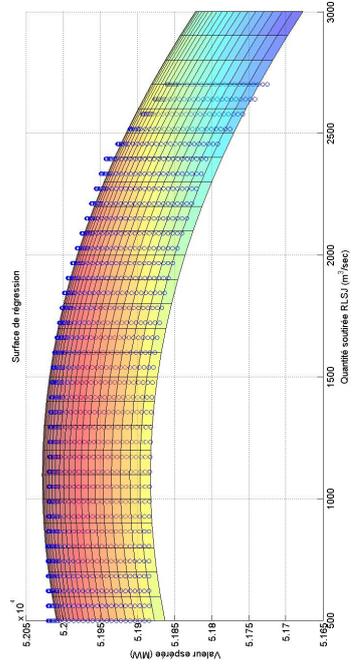


FIGURE 10 – Surface avec réservoirs à moitiés pleins (graphiques du haut) et avec réservoirs pleins (graphiques du bas), point de vue du 1er (graphiques de gauche) et 2ème (graphiques de droite) réservoir. Les surfaces sont quadratiques.

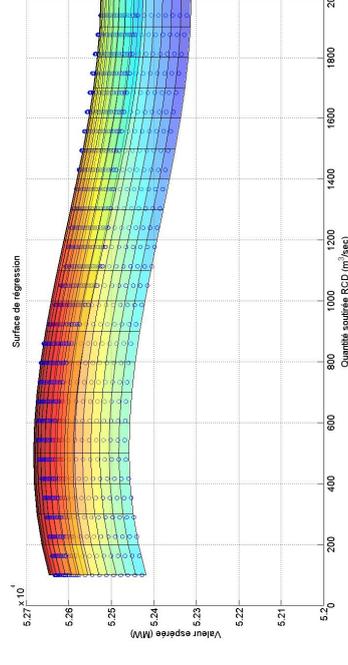
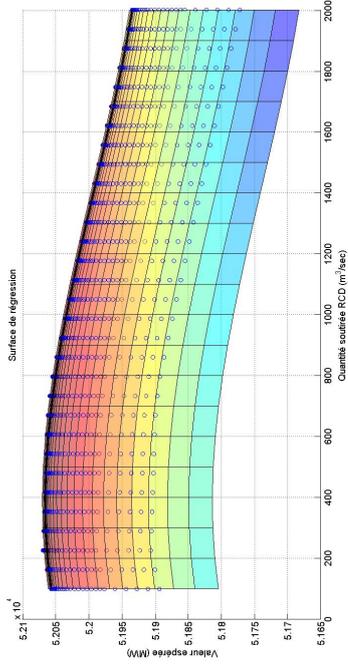
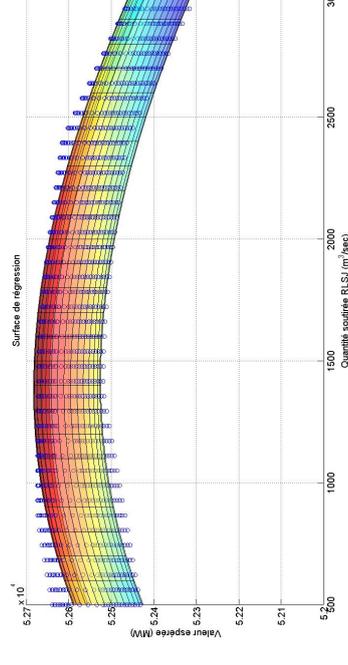
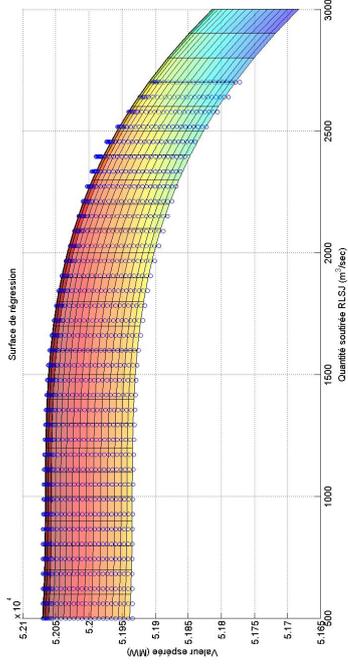


FIGURE 11 – Surface avec réservoirs à moitiés pleins (graphiques du haut) et avec réservoirs pleins (graphiques du bas), point de vue du 1er (graphiques de gauche) et 2ème (graphiques de droite) réservoir. Les surfaces sont cubiques.

Bibliographie

Côté, P., Haguma, D., Leconte, R., and Krau, S. 2011. Stochastic optimisation of Hydro-Quebec hydropower installations : a statistical comparison between SDP and SSDP methods. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 38(12) : 1427–1434.

Delage, E., Denault, M. and Simonato, J.-G.. 2014. A simulation-and-regression approach for dynamic programming, and its application to portfolio choice. *Les cahiers du GERAD*, G-2014-42.

Denault, M., Simonato, J.-G., Stentoft, L. 2013. A Simulation-and-Regression Approach for Stochastic Dynamic Programs with Endogenous State Variables. *Computers & Operations Research*, Vol. 40, no 11, Novembre 2013, p. 2760-2769.

Faber, B.A., and Stedinger, J.R. 2001. Reservoir optimization using sampling SDP with ensemble streamflow prediction (ESP) forecasts. *Journal of Hydrology (Amsterdam)*, 249(1–4) : 113–133.

Hall W.A., Butcher W.S., Esogbue A. 1968. Optimization of the operation of a multiple-purpose reservoir by dynamic programming. *Water Resour Res* 4 :471–477.

Karamouz, M., and Vasiliadis, H.V. 1992. Bayesian stochastic optimization of reservoir operation using uncertain forecasts. *Water Resources Research*, 28(5) : 1221–1232.

Kelman, J., Stedinger, J.R, Cooper, L.A., Hsu, E., and Yuan, S.Q. 1990. Sampling stochastic dynamic programming applied to reservoir operation. *Water Resources Research*, 26(3) : 447–454.

Kim, Y.O., Eum, H.I., Lee, E.G., and Ko, I.H. 2007. Optimizing operational policies of a Korean multireservoir system using sampling stochastic dynamic programming with ensemble streamflow prediction. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 133(1) : 4–14.

Kim, Y.O., and Palmer, R.N. 1997. Value of seasonal flow forecasts in Bayesian stochastic programming. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 123(6) : 327–335.

Labadie, J.W. 2004. Optimal operation of multireservoir systems : state-of-the-art review. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 130(2) : 93–111.

Longstaff F. A. and Schwartz E.S. 2001. Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-Squares Approach. *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No.1.

Mannocchi, F., and Todisco, F. 2006. Optimal reservoir operations for irrigation using a three spatial scales approach. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 132(2) : 130–142.

Revelle C., Joeres E. Kirby W. 1969. The linear decision rule in reservoir management and design 1. Development of the stochastic model. *Water resources research*, 5(4) : 767-777.

Stedinger, J.R., Sule, B.F., and Loucks, D.P. 1984. Stochastic dynamic programming models for reservoir operation optimization. *Water Resources Research*, 20(11) : 1499–1505.

Tejada-Guibert, J.A., Johnson, S.A., and Stedinger, J.R. 1993. Comparison of two approaches for implementing multireservoir operating policies derived

using stochastic dynamic programming. *Water Resources Research*, 29(12) : 3969–3980.

Turgeon, A. 2005. Solving a stochastic reservoir management problem with multilag autocorrelated inflows. *Water Resources Research*, 41 :W12414.

Turgeon, A. 2007. Stochastic optimization of multireservoir operation : the optimal reservoir trajectory approach. *WaterResourcesResearch*,43 :W05420.

Windsor J. 1973. Optimization model for the operation of flood control systems. *Water resources research. Res.*, 9(5), 1219–1226.

Yeh, W.W.G. 1985. Reservoir management and operations model : a state-of-the-art review. *Water Resources Research*, 21(12) : 1797–1818.