



HEC MONTRÉAL

**Indice de volatilité pour le marché des taux d'intérêt  
canadiens**

par

Florian Piermattei

Science de la gestion

Finance

*Mémoire présenté en vue de l'obtention*

*du grade de maîtrise ès sciences*

(MSc.)

Septembre 2015

© Florian Piermattei, 2015



# Sommaire

Ce projet de recherche construit un indice de volatilité des taux d'intérêt pour le marché canadien grâce aux données historiques disponibles sur les caps, qui sont des produits dérivés sur taux d'intérêt. Cet indice est implanté à l'aide de la méthodologie décrite dans l'étude de Mele et Obayashi (2012), qui ont déjà fourni les outils nécessaires à la mise en place d'un tel indice aux États-Unis à l'aide de produits swaptions. La présente recherche se distingue sur plusieurs points. En effet, c'est la première qui s'intéresse à l'implantation d'un indice de volatilité du marché des taux d'intérêt canadiens. De plus, c'est la seule à effectuer ce calcul d'indice à l'aide de données caps en utilisant le modèle SABR afin de modéliser le *smile* de volatilité des caplets. Ainsi, en utilisant un échantillon de 1960 données composé de 300 caps de 10 échéances et de 30 prix d'exercices allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014, on calcul un indice de volatilité quotidien relativement robuste pour les échéances allant de 1 à 9,75 ans.

# Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier mes deux directeurs de mémoire, Jean-Guy Simonato et Simon Lalancette, sans qui ce projet de recherche n'aurait probablement jamais abouti. Leur soutien moral, leur patience et leurs conseils sans égal m'ont permis de me surpasser et d'avancer à un rythme soutenu. Je remercie aussi ma famille et mes amis qui ont toujours su m'appuyer et me soutenir lors de mes projets laborieux. Particulièrement, mes parents Pascal et Nathalie qui ont toujours fait le nécessaire pour que je réussisse dans la vie. Enfin, je souhaite dédicacer ce mémoire à ma chère et tendre Gabrielle qui fut continuellement à mes côtés lors de ce projet de recherche.

# Liste des figures

Figure 3-1 - Cube de volatilités implicites des caps et des floors.....	22
Figure 3-2 - Surfaces des structures à termes des taux zéro-coupon et des taux forward 3 mois.....	28
Figure 3-3 - Exemples de surfaces de volatilités des caplets OTM.....	37
Figure 3-4 - Surface moyenne de volatilités des caplets OTM.....	38
Figure 3-5 - Structure à terme moyenne de volatilités des caplets ATM.....	39
Figure 3-6 - Structure à terme moyenne des paramètres du modèle SABR.....	47
Figure 3-7 - Exemples de surfaces de volatilités SABR des caplets OTM.....	48
Figure 3-8 - Surface moyenne de volatilités SABR des caplets OTM.....	49
Figure 3-9 - Comparaison des volatilités SABR des caplets ATM et des volatilités des caplets issues des caps ATM.....	50
Figure 3-10 - Indices de volatilité du marché des taux d'intérêt canadien.....	59
Figure 5-1 - Structure d'un swap de taux d'intérêt.....	68
Figure 5-2 - Diagramme temporel d'un contrat forward start swap.....	70
Figure 5-3 - Liste des journées supprimées de l'échantillon original.....	77

# Liste des tableaux

Tableau 3-1 - Statistiques descriptives des taux zéro-coupon .....	29
Tableau 3-2 - Statistiques descriptives des taux forward 3 mois.....	30
Tableau 3-3 - Statistiques descriptives des paramètres du modèle SABR .....	46
Tableau 3-4 - Statistiques descriptives des différences entre les volatilités SABR des caplets ATM et des volatilités des caplets issues des caps ATM. ....	51
Tableau 3-5 - Statistiques descriptives des indices de volatilité du marché des taux d'intérêt canadien.....	60

# Liste des abréviations

ATM	<i>At the money</i>
BIS	<i>Bank of international settlements</i>
BSIF	Bureau du Surintendant des Institutions Financières
CBOE	<i>Chicago Board Options Exchange</i>
CDOR	<i>Canadian Dealer Offered Rate</i>
FRA	<i>Forward rate agreement</i>
LIBOR	<i>London Interbank Offered Rate</i>
OTC	<i>Over the counter</i>
OTM	<i>Out of the money</i>
PDTI	Produit dérivé sur taux d'intérêt
PIB	Produit intérieur brut
SRVX	<i>Interest Rate Swap Volatility Index</i>
USV	<i>Unspanned stochastic variance</i>

# Notations

Voici les principales notations permettant de comprendre les formules mathématiques présentées dans la recherche :

Un scalaire du vecteur d'échéances trimestrielles  $[0.25, 0.5, \dots, 9.75, 10]$  est noté  $T_\alpha$  ou  $T_\beta$ . De plus,  $\alpha$  et/ou  $\beta$  sont des entiers naturels qui représentent respectivement la position de  $T_\alpha$  et/ou  $T_\beta$  dans le vecteur d'échéances trimestrielles.

Exemples :

- Le taux d'un produit dérivé  $FRA(0, T_\alpha, T_\beta)$  dont l'échéance est de 3 mois et dont l'emprunt se termine dans 1 an s'écrit  $FRA(0, 0.25, 1)$ . Dans ce cas,  $T_\alpha = 0.25$ ,  $T_\beta = 1$ ,  $\alpha = 1$  et  $\beta = 4$
- Le taux d'un produit dérivé forward start swap  $FS(0, T_\alpha, T_\beta)$  dont l'échéance est de 6 mois et dont le swap se termine dans 5 ans s'écrit  $FS(0, 0.5, 5)$ . Lorsque les échanges de flux monétaires sont trimestriels,  $T_\alpha = 0.5$ ,  $T_\beta = 5$ ,  $\alpha = 2$  et  $\beta = 20$
- La somme de prix d'obligations zéro-coupon servant à l'actualisation des flux monétaires trimestriels de caplets/floorlets qui ont des échéances séquentielles allant de 1,25 an à 2 ans s'écrit  $\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i)$ . Dans ce cas,  $\alpha = 4$  et  $\beta = 8$ .

# Table des matières

1.	Introduction .....	1
2.	Revue de littérature.....	5
2.1	Introduction des premiers indices de volatilité .....	5
2.2	Évolution du VIX.....	6
2.3	Marché des taux d'intérêt.....	9
2.4	Naissance du SRVX.....	11
3.	Méthodologie.....	14
3.1	Introduction .....	15
3.2	Données.....	17
3.2.1	Choix des données .....	17
3.2.2	Caractéristiques des données .....	19
3.2.3	Liquidité du marché canadien.....	22
3.3	Structure à terme des taux d'intérêt des obligations zéro-coupon .....	22
3.3.1	<i>Bootstrapping</i> de taux d'intérêt .....	25
3.3.2	Résultats.....	26
3.4	Extraction des volatilités caplets.....	31
3.4.1	Procédure d'extraction.....	32
3.4.2	Résultats.....	35
3.5	Modélisation du smile de volatilité .....	40
3.5.1	Présentation du modèle SABR.....	40
3.5.2	Estimation du modèle SABR .....	42
3.5.3	Résultats.....	43

3.6	Calcul de l'indice de volatilité .....	52
3.6.1	Présentation du calcul .....	52
3.6.2	Résultats .....	54
3.7	Cas du <i>dual curve pricing</i> .....	62
4.	Conclusion .....	64
5.	Annexes .....	66
A.	Notions sur les PDTI .....	66
A.1.	Taux CDOR .....	66
A.2.	Swap de taux d'intérêt .....	67
A.3.	Forward start swap .....	69
A.4.	Swaptions .....	70
A.5.	Forward rate agreements .....	71
A.6.	Caplets et floorlets de taux .....	72
A.7.	Caps et floors de taux .....	74
B.	Preuve de martingale .....	75
C.	Nettoyage des données .....	77

# 1. Introduction

Actuellement, au Canada, l'indice S&P/TSX 60 VIX (VIXC) estime la volatilité du marché des actions, à partir des options sur l'indice S&P/TSX 60. Cet indice est un outil prisé par les négociateurs qui désirent se couvrir, spéculer ou évaluer un produit dérivé dont le sous-jacent est une action. Les intervenants du marché canadien qui souhaitent réaliser des analyses semblables pour des produits dérivés sur taux d'intérêt (PDTI) utilisent généralement le *Interest Rate Swap Volatility Index* (SRVX), qui est spécifique au marché des taux d'intérêt américains, ou le VIXC, qui est spécifique au marché des actions canadiennes. En notant, certes, que les taux d'intérêt américains et canadiens sont très reliés, le lien n'est pas parfait et des chocs réels ou monétaires spécifiques à chacun des marchés sont susceptibles d'influencer séparément les risques associés aux taux. Par ailleurs, fondamentalement, il n'est pas convenable d'utiliser un indice destiné à mesurer la volatilité d'un certain type de produit financier pour jauger la volatilité d'un autre produit. Ainsi, il paraît pertinent d'implanter un indice de volatilité des taux d'intérêt qui utilise des données canadiennes afin de capter la volatilité des taux d'intérêt *forward* spécifique à ce marché.

Ce projet de recherche examine la possibilité d'introduire, sur le marché canadien, un indice de volatilité des taux d'intérêt, tel que le SRVX disponible à la *Chicago Board Options Exchange* (CBOE). L'objectif est de construire un outil qui permettra aux intervenants du marché d'analyser de manière transparente, une mesure standardisée de la volatilité des taux d'intérêt *forward* au Canada. Cet indice de volatilité, qui serait comparable au VIX pour les actions, serait construit à l'aide de la méthodologie décrite dans l'étude de Mele et Obayashi (2012), qui ont déjà fourni les outils nécessaires à la mise en place d'un tel indice aux États-Unis. En effet, en juin 2012, la CBOE lança son premier indice de volatilité basé sur les taux d'intérêt swap, soit le SRVX, afin de permettre aux investisseurs et

gestionnaires de portefeuille de mesurer et d'appréhender les changements de volatilité des taux swaps *forward*. Cet indice de volatilité devient peu à peu un incontournable pour le marché des taux d'intérêt aux États-Unis puisqu'il permet de mieux mesurer la volatilité de ce marché vis-à-vis de sa contrepartie, le VIX.

À ce jour, aucun indice de volatilité du marché des taux d'intérêt canadien n'existe publiquement. Ce manque, provient sûrement du fait qu'il paraît problématique de trouver des données swaps canadiennes semblables à celles utilisées par l'indice de volatilité déjà présent aux États Unis. Néanmoins, il s'avère que les données d'options sur taux d'intérêt telles que celles disponibles sur les caps de taux au Canada sont adéquates pour construire un tel indice.

Les PDTI transigés *over the counter* (OTC) représentent le marché de produits dérivés OTC le plus convoité dans le monde, avec des valeurs notionnelles s'établissant à plus de 563 trilliards US\$ fin juin 2014, soit plus de 82% de ce marché, selon la *Bank of International Settlements* (BIS, 2014). D'après ce rapport, les swaps de taux d'intérêt sont de loin les PDTI les plus négociés des marchés OTC avec 421 trilliards US\$ de valeur notionnelle encourue dans le monde. Par ailleurs, les statistiques historiques d'utilisation de produits dérivés témoignent d'un attrait florissant des investisseurs pour ce type de produits au Canada. Les PDTI y sont en pleine expansion, avec une croissance de plus de 40% de valeur notionnelle de 2011 à juin 2014, (BIS (2014)).

Les défis reliés à l'implantation d'un nouvel indice de volatilité sur le marché canadien sont nombreux. En effet, la liquidité du marché canadien est-elle assez profonde pour procurer des données robustes permettant la construction d'un indice de volatilité de taux d'intérêt tel que proposé aux États-Unis ? Le marché boursier canadien montre-t-il des spécificités déterminantes qui pourraient permettre aux intervenants du marché de mieux appréhender les changements de volatilité des taux d'intérêt *forward*? Ces questions sont importantes et doivent être répondues afin de bien évaluer la possibilité d'implanter un indice utile pour les praticiens.

La thématique de ce sujet laisse entrevoir de nombreux développements pertinents pour le marché des produits dérivés canadiens. En effet, en plus de

fournir un outil permettant aux investisseurs et gestionnaires de portefeuille d'être en mesure d'appréhender les changements de volatilité des taux d'intérêt *forward* sur le marché canadien, cet indice pourrait être utilisé afin d'évaluer la valeur théorique de certains produits dérivés. À ce titre, la volatilité implicite déduite de l'indice serait intéressante pour les utilisateurs de la formule de Black (1976), qui pourraient mettre en place des modèles permettant d'évaluer plus adéquatement la valeur de certains PDTI. Par ailleurs, au vu de la croissance de l'utilisation des PDTI au Canada il paraît primordial d'avoir un outil qui centralise les données disponibles sur le marché des options pour différentes échéances afin de déterminer une volatilité implicite des taux d'intérêt *forward*. Il en découlerait des instruments de gestion des risques et de couverture qui bénéficieraient d'une mesure de volatilité standardisée et transparente pour les taux d'intérêt. En effet, l'utilisation potentielle de cet indice de volatilité et le développement de produits dérivés sur cet indice pourraient à la fois permettre aux intervenants du marché de spéculer sur les variations de volatilités, de se couvrir contre les mouvements de volatilité sur les titres à revenus fixes, de se couvrir contre la diminution de la liquidité du marché qui accompagne souvent les sursauts de volatilité ou de couvrir leur exposition à la volatilité de produits structurés.

Le thème de ce sujet paraît donc très prometteur d'un point de vue de l'innovation, de la gestion des risques et du développement de produits financiers standardisés. Ces trois piliers de l'industrie financière tendent à procurer un marché de plus en plus efficient tout en prônant une gestion prudentielle des risques liés à une utilisation croissante des produits dérivés.

La suite de ce mémoire est présentée comme suit. Le chapitre 2 présente, à travers la revue de littérature empirique, l'évolution des indices de volatilité pertinents ainsi que les différentes problématiques associées à la construction de ces derniers. Le chapitre 3, met en évidence chaque étape de la méthodologie employée afin de construire l'indice de volatilité des taux d'intérêt au Canada ainsi qu'une présentation et une analyse des résultats obtenus. Enfin, le chapitre 4 résume les faits saillants de cette étude tout en proposant des ouvertures pour les recherches à venir.

À noter que pour les lecteurs moins familiers avec les PDTI, l'annexe A, fait un résumé des notions ainsi que des notations mathématiques nécessaires à la compréhension cette étude. Si tel est le cas, il est fortement conseillé de lire cette annexe avant de poursuivre la lecture.

## 2. Revue de littérature

La revue de littérature met en évidence comment les divers indices de volatilité se sont développés au sein des marchés financiers. Suite à une brève introduction, celle-ci présente l'évolution du VIX depuis sa création. En second lieu, il s'agit de souligner les problématiques apportées spécifiquement par le marché des taux d'intérêt. Enfin, il est question de mettre en avant le SRVX, indice de volatilité des taux d'intérêt swaps aux États-Unis.

### 2.1 Introduction des premiers indices de volatilité

La volonté de créer un indice de volatilité à partir des volatilités implicites d'options est apparue peu après l'introduction des premiers contrats d'options transigés à la CBOE en 1973. En effet, selon Fleming, Ostdiek et Whaley (1995), les praticiens doivent prendre des décisions quotidiennes d'allocation d'actifs ou de couverture qui nécessitent une estimation précise de la volatilité future des actions. De plus, les académiciens s'intéressent à l'époque, de près, à l'étude des relations temporelles entre le taux de rendement espéré et le risque illustré par la volatilité. Ainsi, pour répondre à ces besoins, Gastineau (1977) et Cox et Rubinstein (1985) ont fondé les bases du VIX, premier indice de volatilité implanté par la CBOE en 1993. Gastineau (1977) a introduit un indice de volatilité en calculant la moyenne des volatilités implicites d'options d'achat à la monnaie (ATM) sur 14 actions. Par la suite, Cox et Rubinstein (1985), ont ajusté la méthodologie de Gastineau en utilisant plusieurs options d'achat pour chaque action et en pondérant la volatilité implicite de manière à ce que l'indice reflète la volatilité ATM tout en ayant un temps avant échéance constant.

## 2.2 Évolution du VIX

En 1993, la CBOE introduit le VIX avec l'aide du professeur Whaley, dans le but de mettre en place un indice de volatilité fiable et accessible aux négociateurs. À noter que cette première version du VIX a été renommée VXO en septembre 2003 suite à des révisions de méthodologie.

Selon Fleming et al. (1995), deux changements majeurs viennent significativement améliorer la précision des indices proposés par Gastineau (1977) et Cox et Rubinstein (1985). Tout d'abord, le VXO, est mesuré à l'aide de contrats d'options américaines sur l'indice S&P 100, soit les options OEX. Ces contrats d'options sur indices sont, à cette époque, les plus liquides du marché, ce qui rend l'information extraite par ces dernières, plus pertinente. Par ailleurs, les praticiens s'intéressent particulièrement au niveau de risque présent sur le marché une fois que le risque spécifique des actions individuelles a été diversifié. L'utilisation d'options sur indice vient ainsi, éliminer ce risque spécifique, qui manque d'intérêt pour les négociateurs. Deuxièmement, le VXO, extrait à la fois, la volatilité implicite des options d'achat, mais aussi celle des options de vente afin de mesurer la volatilité espérée du marché sur les 30 prochains jours, ce qui augmente considérablement la quantité de l'information capturée par l'indice et, a posteriori, améliore sa pertinence, d'après Fleming et al. (1995).

À l'origine, selon Whaley (1993), le VXO fut construit à l'aide des volatilités implicites de deux séries de huit options OEX, dont l'une représente les options très proches de l'échéance et l'autre représente les options arrivant à échéance le mois suivant. Les volatilités implicites sont alors pondérées de sorte qu'à chaque instant, l'indice de volatilité représente la volatilité implicite d'une option OEX ATM théorique avec une échéance de 30 jours civils. Afin d'extraire cette volatilité, il suffit d'utiliser un modèle d'évaluation d'options, de posséder les données entrantes du modèle, excepté la volatilité qui est notre inconnue, ainsi que des prix d'options observés sur le marché. Pour le calcul du VXO, l'évaluation du prix théorique des

options se réalise dans le cadre du modèle de Black et Scholes (1973) et Merton (1973). Néanmoins, étant donné que les options OEX sont de style américain, c'est-à-dire, que le détenteur de l'option peut l'exercer avant échéance, la formule de Black et Scholes (1973) ne peut être utilisée afin d'extraire la volatilité implicite. Le modèle d'évaluation à l'aide de l'arbre binomial ajusté pour le dividende est alors employé. Ainsi, la CBOE est capable de fournir aux praticiens un indice de volatilité en temps réel, actualisé chaque minute, permettant d'évaluer la perception du marché de la volatilité future.

Suite à son introduction, le VXO fut le sujet de nombreuses études, à l'image de celle de Fleming et al. (1993), qui étudie les propriétés statistiques de cet indice, ainsi que sa capacité à prédire la volatilité future. Les résultats très prometteurs de cette recherche mettent en évidence une forte corrélation négative asymétrique entre les rendements de l'indice S&P 100 et le VXO. En absolu, les variations des rendements des actions à la baisse sont accompagnées par des variations du niveau de volatilité anticipé plus grandes que ne le sont les variations des rendements des actions à la hausse. Ces résultats soulignent les possibles effets de diversification procurés par les éventuels produits dérivés sur le VXO. Par ailleurs, Fleming et al. (1993), montrent que le VXO est un meilleur prédicteur de la volatilité que ne le sont les prévisions établies par les modèles de volatilité autorégressifs de premier ordre.

Quant à lui, Whaley (1993), explique que les produits dérivés sur la volatilité, tels que les futures sur le VXO, sont des produits de couverture plus efficaces que les options sur indices souvent utilisées. En effet, en plus de coûter moins cher et d'être plus précis, les futures sur le VXO sont des instruments de couverture plus facile à implémenter que les options OEX. Les praticiens font face à divers problèmes de couverture lorsqu'ils utilisent les options sur indice, ce qui peut sensiblement nuire à la qualité de cette dernière. Comme mentionné précédemment, les options OEX sont des options américaines sur indice versant un dividende supposé continu. Ainsi, ces options ne peuvent être évaluées à l'aide d'une formule analytique telle que celle de Black et Scholes (1973), ce qui rend la couverture complexe si le gestionnaire de portefeuille veut tenir compte du droit d'exercice

anticipé. Par ailleurs, Whaley (2000), explique que le VXO est un outil permettant de jauger la peur des investisseurs en faisant une analogie à l'aversion pour le risque. En effet, la demande pour les options du S&P 100 fixe les prix qui sont utilisés dans le calcul du VXO, ce qui est à l'origine de la relation asymétrique entre les rendements du S&P 100 et le niveau du VXO, caractéristique des investisseurs averses aux risques. Enfin, Whaley (2000) observe que sur 14 ans, les hauts niveaux du VXO sont coïncidents avec les crises du marché des actions. Ainsi, considérant sa pertinence, le VXO est rapidement devenu une référence pour estimer la volatilité 30 jours du marché des actions aux États-Unis.

En septembre 2003, la CBOE revoit la définition et le calcul du VIX, par le biais de trois changements majeurs. Premièrement, les options utilisées dans le calcul du VIX sont désormais des options sur l'indice du S&P 500, soit les options SPX. Tel que mentionné dans Whaley (2008), les options SPX sont les options sur indices les plus transigées à cette époque et représentent près de 13 fois le volume des transactions des options OEX. Fait important, les options SPX sont de type européen, ce qui facilite grandement leur évaluation. Deuxièmement, la méthodologie employée pour le calcul du VIX passe d'une approche basée sur un modèle, soit le cadre Black et Scholes (1973) et Merton (1973), à une approche sans modèle. Le VIX est ainsi calculé à l'aide de la formule de la juste valeur de la variance future développée par Demeterfi, Derman, Kamal et Zou (1999). En effet, à l'aide des travaux de Breeden et Litzenberger (1978), Demeterfi et al. (1999) montrent comment la dynamique de couverture d'un contrat log peut capturer la volatilité réalisée. Troisièmement, au lieu d'utiliser des options sur indice ATM, le VIX utilise des options *out of the money* (OTM) afin de mieux pouvoir capter le *smile* de volatilité présent sur le marché des actions.

Suite à cette révision de méthodologie, le VIX est passé d'un concept abstrait à un outil pratique de couverture étant donné qu'un investisseur peut dès lors répliquer les paiements des contrats *futures* sur le VIX et des contrats SPX. La CBOE introduit alors, avec succès, les contrats *futures* sur le VIX, en mai 2004, ainsi que les contrats d'options sur le VIX, en février 2006, qui sont devenus peu à peu des outils incontournables en matière de gestion des risques. Logiquement et de

manière similaire, de nombreuses places boursières calculent un indice de volatilité propre à leur marché, à l'image de la Bourse de Montréal, qui introduit en 2009, l'équivalent du VIX au Canada, soit le VIXC, qui est un indice de volatilité basé sur les options de l'indice S&P/TSX 60.

Malgré cet engouement pour ces indices de volatilité, Jiang et Tian (2007) démontrent qu'il y a encore plusieurs erreurs dans la procédure du calcul du VIX qui sont économiquement significatives. Dans leur étude, les auteurs expliquent que les erreurs de troncature et de discrétisation mènent à un calcul de volatilité erroné, ce qui peut avoir de lourdes conséquences sur l'évaluation de produits dérivés sur la volatilité tels que les *futures* ou les options sur le VIX.

Ainsi, même si la littérature semble relativement développée du côté du marché des actions, celle-ci est largement moins explorée, quoique de plus en plus, du côté du marché des titres à revenus fixes. À ce titre, l'unique indice de volatilité du marché des taux d'intérêt accessible publiquement, le SRVX, est disponible depuis juin 2012 à la CBOE.

## 2.3 Marché des taux d'intérêt

Selon Jarrow, Li et Zhao (2007), la littérature existante sur les PDTI s'est particulièrement concentrée sur deux sujets fondamentaux pour la présente recherche. Le premier problème est appelé l'énigme de la *Unspanned Stochastic Variance* (USV). En effet, même si les swaptions et les caps sont des PDTI de styles européens écrits respectivement sur les taux swap et LIBOR, de nombreuses études telles que celle de Collin-Dufresne et Goldstein (2002) et Heidari et Wu (2003) démontrent qu'il y a des facteurs de risque qui agissent sur les prix de ces PDTI et qui sont non couverts par les facteurs expliquant les variations des taux swaps et LIBOR. Dès lors, les swaptions et les caps sont des actifs non redondants étant donné qu'il est impossible de les répliquer en prenant uniquement des positions dans leurs sous-jacents respectifs. Le deuxième problème est

l'incohérence de l'évaluation relative des prix entre les swaptions et les caps. Certains auteurs, tels que Hull et White (2000) stipulent qu'il y a une erreur significative d'évaluation entre les prix des swaptions et des caps lorsque l'on utilise les modèles multifacteurs de structure à terme dynamique. En effet, la plupart de ces modèles couramment utilisés émettent plusieurs hypothèses restrictives dont l'une est que les PDTI sont des actifs redondants.

Ces deux paradigmes sont en fait très reliés étant donné qu'ils mettent en évidence que les modèles de l'époque ne sont pas capables de capturer efficacement le *smile* de volatilité présent pour les PDTI et ainsi fournir une évaluation juste de ces derniers. Ainsi, Jarrow et al. (2007) contribuent de manière significative à la littérature en présentant une documentation sur le *smile* de volatilité qui caractérise le marché des PDTI. Par ailleurs, ils implantent un modèle de type Heat-Jarrow-Morton (HJM) à trois facteurs avec une volatilité stochastique et un processus de diffusion avec sauts pour les taux permettant de modéliser efficacement le *smile* et arriver à une solution analytique pour le prix des caps.

Les problématiques apportées par le fait que les taux d'intérêt ne sont pas constants dans les modèles d'évaluations de PDTI sont fondamentales. En effet, lorsqu'il s'agit d'un actif du marché des actions, il suffit d'actualiser les paiements futurs à un taux constant afin d'évaluer le prix de l'actif. Ainsi, les produits dérivés sur action font face à une seule source de risque, soit le prix de l'action, le reste étant supposé constant. Néanmoins, comme l'expliquent Mele et Obayashi (2012), lorsqu'il s'agit d'un titre à revenus fixes, le fait que les taux d'intérêt soient stochastiques vient affecter la volatilité par deux sources de risque différentes, ce qui complexifie grandement l'évaluation. La première source aléatoire est le changement du niveau des taux d'intérêt et la deuxième est le changement dans la structure à terme des taux d'intérêt.

Ainsi, les raisons pour lesquelles l'introduction d'un indice de volatilité des taux d'intérêt a été plus longue sont nombreuses. Particulièrement, il est relativement plus complexe de modéliser le *smile* de volatilité des PDTI. Néanmoins, l'attrait grandissant envers l'évaluation et la couverture de PDTI OTC tels que les

swaptions et les caps stimule les académiciens à élucider ce phénomène depuis que ces produits sont parmi les plus transigés du marché. Comprendre le *smile* de volatilité de ces produits dérivés permet d'effectuer une meilleure tarification ainsi qu'une meilleure couverture, puis a posteriori, de standardiser la volatilité implicite du marché. À ce titre, Brigo et Mercurio (2006), présentent une excellente revue des modèles qui tentent de spécifier le *smile* de volatilité des PDTI. Deux catégories de modèles se distinguent, soient les modèles à volatilité locale et les modèles à volatilité stochastique. Les premiers, développés par Dupire (1994) et Derman et Kani (1994), modélisent le *smile* localement en traitant la volatilité en tant que fonction d'une seule source de risque, soit le niveau du sous-jacent. Cependant, Hagan, Kumar, Lesniewski, et Woodward (2002), remettent en question ces modèles en démontrant que leur modélisation évolue dans le sens contraire des observations empiriques. Les seconds, développés par Hagan et al. (2002) viennent corriger ce problème à l'aide du modèle SABR, qui possède la particularité d'utiliser la formule de Black (1976) pour évaluer les PDTI. D'ailleurs, le modèle SABR est employé dans la présente recherche afin de modéliser le *smile* de volatilité des caplets. En effet, en plus d'être très populaire auprès des praticiens, ce modèle permet de spécifier le *smile* de volatilité en absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), ce qui est essentiel à la construction de l'indice présenté.

## 2.4 Naissance du SRVX

Plusieurs lacunes importantes ont motivé les chercheurs à développer un indice de volatilité du marché des taux d'intérêt. Premièrement, malgré le fait que les volumes de transaction dans le marché des swaps et des swaptions soient bien plus élevés que ceux dans le marché des actions, Mele et Obayashi (2012) constatent qu'il n'existe aucune contrepartie du VIX sur ce marché. Par ailleurs, les auteurs montrent qu'il serait important de combler ce vide étant donné que la corrélation moyenne entre la volatilité réalisée des deux marchés est de seulement 51% de

1994 à 2012 et que cette corrélation varie substantiellement dans le temps. Ainsi, il serait inapproprié de choisir le VIX comme proxy de la volatilité attendue sur le marché des swaps de taux d'intérêt aux États-Unis, ce que nombreux gestionnaires de portefeuilles de titres à revenus fixes font, à défaut d'avoir un meilleur outil. Enfin, Mele et Obayashi (2012), mettent en évidence des failles qui proviennent des stratégies de négociation d'options visant à exprimer des vues sur la volatilité du marché des swaps de taux d'intérêt. Particulièrement, le déploiement des stratégies de *straddle* et de couverture delta neutre à l'aide des swaptions résulte en des profils de gains et de pertes relativement imprévisibles qui ne parviennent pas à isoler les variations de volatilité des taux d'intérêt swaps. Bien que ces résultats soient déjà connus par les praticiens sur le marché des actions, ils sont d'autant plus dommageables sur le marché des taux d'intérêt swap.

En juin 2012, la CBOE lance, à l'aide des recherches de Mele et Obayashi (2012), le premier indice de volatilité du marché des taux d'intérêt, soit le SRVX. Cet indice reflète la volatilité espérée du marché des taux swap sous la mesure de probabilité risque neutre et fait ainsi office de contrepartie du VIX pour le marché des taux d'intérêt aux États-Unis. Mele et Obayashi (2012), s'appuient sur les travaux de Bakshi et Madan (2000) et Carr et Madan (2001) afin de reprendre l'esprit du VIX et l'adapter au marché des taux d'intérêt. En effet, la méthodologie employée pour le calcul du SRVX est basée sur une approche sans modèle et utilise uniquement le prix des swaptions, qui représentent l'équivalent des options SPX dans la formule de la juste valeur de la variance future de Demeterfi et al. (1999). De plus, chaque flux monétaire présent dans l'indice est actualisé à l'aide des prix d'obligations zéro-coupon d'échéances correspondantes, ce qui permet de prendre en considération les variations de la structure à terme des taux d'intérêt. Plus précisément, le SRVX utilise des swaptions OTM, qui arrivent à expiration dans un an et dont la durée du swap sous-jacent est de dix ans. Pour obtenir des prix de swaptions, la CBOE rassemble les données en temps réel des plus grands courtiers du marché des swaptions, qui mettent à jour continuellement leur cube de volatilité en se basant sur les flux d'ordres qu'ils observent entre les plus grands teneurs de marchés. Ainsi, en agrégeant les données provenant des différents courtiers, qui

eux-mêmes agrègent les informations provenant des différents teneurs de marché et qui, à leur tour, agrègent les informations obtenues auprès de leurs clients, la CBOE assure une certaine robustesse dans les prix qu'ils utilisent afin de calculer le SRVX.

À ce jour, le SRVX devient peu à peu un incontournable pour les gestionnaires de portefeuille de titre à revenus fixes aux États-Unis. Malheureusement, les praticiens canadiens doivent s'en tenir à cet indice s'ils désirent utiliser un proxy permettant de mesurer la volatilité des taux d'intérêt *forward* au Canada. La présente recherche essaie de combler cette lacune puisque, même si les taux d'intérêt américains et canadiens sont très reliés, le lien n'est pas parfait et des chocs réels ou monétaires spécifiques à chacun des marchés sont susceptibles d'influencer séparément les risques associés aux taux. À notre connaissance, ce projet de recherche est le premier à tenter d'introduire, spécifiquement sur le marché canadien, un indice de volatilité des taux d'intérêt. Comme mentionné dans la section (3.2.1), le calcul de l'indice proposé dans la recherche n'utilise pas des prix de swaptions, mais des prix de caps du marché canadien. À ce titre, la littérature existante concernant l'implantation d'un indice de volatilité qui utilise des caps est très restreinte. Claes et al. (2010) sont les premiers à tenter d'implanter ce type d'indice pour le marché américain. Néanmoins, celui-ci présente plusieurs lacunes que la présente étude s'efforce d'éviter. En effet, à l'image du VXO, la méthodologie de Claes et al. (2010) est fondée sur une approche avec modèle, soit le modèle de marché LIBOR. La dynamique des taux *forward* proposée par ce modèle a pour conséquence une volatilité constante qui ne permet pas de saisir le *smile* de volatilité présent dans le marché des caplets. Par ailleurs, le processus employé afin d'extraire la volatilité des caplets présente dans l'information des cotations de caps, fourni des données qui ne préservent pas la relation d'AOA. Or, respecter cette relation d'AOA est particulièrement important si l'on souhaite que l'indice présenté soit utilisable par les praticiens.

### 3. Méthodologie

L'indice de volatilité introduit par la présente recherche s'appuie sur les travaux de Mele et Obayashi (2012), qui proposent un indice de volatilité fondé sur une approche sans modèle. Tel qu'expliqué dans Bakshi et Madan (2000) et Carr et Madan (2001), l'indice de volatilité calculé représente le prix d'exercice ATM d'un swap de volatilité. Ce produit dérivé n'est rien d'autre qu'un swap, tel que décrit en annexe A.2, mais dont le règlement se réalise en fonction de la volatilité à la place du taux d'intérêt. En reprenant et adaptant les travaux de Mele et Obayashi (Appendice C, 2012) aux caplets et floorlets on obtient la formule suivante pour l'indice de volatilité du marché canadien:

$$IVC^{BP}(0, T_\alpha) = 100^2 \times \sqrt{\frac{2}{T_\alpha P(0, T_{\alpha+1})} \times \left[ \int_{K=0}^{K=F(\cdot)-\varepsilon} flt(F(\cdot), \sigma_{SABR}, K, T_\alpha) dK + \int_{K=F(\cdot)}^{\infty} clt(F(\cdot), \sigma_{SABR}, K, T_\alpha) dK \right]} \quad (1)$$

où  $IVC^{BP}(0, T_\alpha)$  est l'indice de volatilité en point de base, du marché des taux d'intérêt canadiens d'échéance  $T_\alpha$ . De plus,  $flt(F(\cdot), \sigma_{SABR}, K, T_\alpha)$  et  $clt(F(\cdot), \sigma_{SABR}, K, T_\alpha)$  sont respectivement les prix des floorlets et caplets ayant pour sous-jacent le taux  $F(\cdot)$  qui est le taux  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$ , pour volatilité  $\sigma_{SABR}$  et pour prix d'exercice  $K$ . Aussi,  $dK$  représente une variation infinitésimale de  $K$  soit, l'intervalle entre deux prix d'exercices consécutifs, en partant du prix d'exercice le plus faible transigé sur le marché jusqu'au plus élevé. Enfin,  $P(0, T_{\alpha+1})$  est le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T_{\alpha+1}$ .

Ainsi, le calcul de l'indice présenté utilise une approche sans modèle, c'est-à-dire que la formule (1) est obtenue sans postuler de modèle particulier quant au processus de diffusion du taux  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$ . Toutefois, la présente recherche utilise le modèle SABR décrit dans la section 3.5, afin d'estimer les volatilités

$\sigma_{SABR}$  qui sont des données entrantes du calcul de l'indice. À ce titre, le modèle SABR permet de calibrer le *smile* de volatilité des caplets et des floorlets de manière à obtenir un continuum de volatilité en fonction de différents prix d'exercices pour chaque échéance de l'indice. Par la suite, on peut en déduire un continuum de prix de caplets et de floorlets nécessaires à la construction de l'indice.

Dans la mesure du possible, les méthodes de calculs employées pour appliquer cette technologie au marché des caps de taux canadiens seront réalisées dans l'optique de préserver au maximum la relation d'AOA afin que l'indice présenté soit le plus pertinent et robuste possible.

Ce chapitre explique la méthodologie appliquée pour construire l'indice de volatilité du marché des taux d'intérêt au Canada. Dans un premier temps, il s'agit de faire une brève introduction afin de montrer les bases de notre réflexion. Par la suite, il est question de présenter les données utilisées. Enfin, ce chapitre décrit les étapes nécessaires à l'implantation de l'indice, à savoir, la construction d'une structure à terme des taux d'intérêt d'obligations zéro-coupon, l'extraction des volatilités des caplets issues des cotations de caps, la modélisation du *smile* de volatilités et le calcul de l'indice.

## 3.1 Introduction

Dans l'optique de sensibiliser le lecteur, il semble important de présenter, en parallèle, la formule du calcul du VIX ainsi que celle du calcul du SRVX. En effet, si le calcul du VIX émet l'hypothèse que les taux d'intérêt sont constants, le calcul du SRVX prend en considération des taux d'intérêt stochastiques, ce qui vient légèrement altérer le cadre d'évaluation des produits dérivés utilisés. Voici la formule du calcul du VIX provenant de la CBOE (2003) :

$$VIX^{BP}(0,T) = 100^2 \times \sqrt{\frac{2}{TP(0,T)} \times \left[ \sum_{i:K_i < F(T)} Put(0,K_i,T) \Delta K_i + \sum_{i:K_i \geq F(T)} Call(0,K_i,T) \Delta K_i \right]} \quad (2)$$

où  $VIX^{BP}(0,T)$  est le VIX d'échéance  $T$  exprimé en point de base.  $Put(0,K_i,T)$  et  $Call(0,K_i,T)$  sont les prix des options de vente et d'achat européennes OTM dont le sous-jacent est le prix *forward*  $F(T)$  de l'indice du S&P 500, dont les prix d'exercices sont  $K_i$  et dont l'échéance est  $T$ .  $P(0,T)$  est le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T$ . Enfin,  $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$  est l'intervalle entre deux prix d'exercices consécutifs, en partant du prix d'exercice le plus faible transigé sur le marché jusqu'au plus élevé. Voici la formule du calcul du SRVX provenant de la CBOE (2012):

$$SRVX^{BP}(0,T_\alpha) = 100^2 \times \sqrt{\frac{2}{T_\alpha A} \times \left[ \sum_{i:K_i < FS(.)} S_r(0,K_i,T_\alpha,T_\beta) \Delta K_i + \sum_{i:K_i \geq FS(.)} S_p(0,K_i,T_\alpha,T_\beta) \Delta K_i \right]} \quad (3)$$

où  $SRVX^{BP}(0,T_\alpha)$  est le SRVX d'échéance  $T_\alpha$  exprimé en point de base,  $A$  est la somme d'obligations zéro-coupon qui correspond à l'annuité d'une série de flux monétaires, soit  $\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0,T_i)$ . Aussi,  $S_r(0,K_i,T_\alpha,T_\beta)$  et  $S_p(0,K_i,T_\alpha,T_\beta)$  sont respectivement les prix des swaptions receveurs et payeurs européens OTM dont  $FS(.)$  est le taux sous-jacent du forward start swap, soit  $FS(0,T_\alpha,T_\beta)$ , dont les prix d'exercices sont  $K_i$  et dont l'échéance est  $T_\alpha$ . Enfin,  $T_\beta$  représente l'échéance de l'emprunt sous-jacent au taux  $FS(.)$ .

Ainsi, on remarque que deux types de données sont nécessaires pour la construction d'un indice de volatilité des taux d'intérêt au Canada. D'une part, des prix de PDTI OTM pour différents prix d'exercices et dont le sous-jacent suit une martingale sous une certaine mesure de probabilité, qui sera précisée plus tard dans la recherche (voir preuve annexe B). Ces derniers correspondent aux prix des produits dérivés à l'intérieur de la sommation de l'équation (3). D'autre part, des

prix d'obligation zéro-coupon, qui sont les facteurs d'annuités représentés par  $A$  dans cette même équation.

À partir de ces premiers résultats, le principal défi reste d'implanter cette méthodologie au marché des taux d'intérêt canadiens. Pour ce faire, certaines questions essentielles ont fondé les bases de réflexion pour l'indice présenté : quels sont les PDTI utilisables au Canada? Comment conserver les propriétés de la méthodologie du calcul du SRVX avec les données utilisées sur le marché canadien?

## 3.2 Données

Cette section met en évidence la sélection des données nécessaires au calcul de l'indice de volatilité ainsi que les caractéristiques de ces dernières. Par ailleurs, elle souligne le nettoyage de la base de données effectué avant la construction de cet indice.

### 3.2.1 Choix des données

Il est important de comprendre que pour conserver les propriétés de la méthodologie décrite par Mele et Obayashi (2012), il est nécessaire d'utiliser des options sur taux d'intérêt dont le sous-jacent suit une martingale sous une certaine mesure de probabilité. En effet, cette propriété martingale assure un modèle d'évaluation qui est en AOA, d'après Harrison et Kreps (1979). Dès lors, sur le marché canadien, principalement trois PDTI sont à prendre en considération pour le calcul de l'indice.

Dans un premier temps, il est intuitif d'utiliser, des produits dérivés canadiens homologues à ceux qu'utilisent la CBOE pour construire le SRVX, c'est-à-dire des swaptions OTM, qui arrivent à expiration dans un an et dont la durée du swap sous-

jaçant est de dix ans. Ce type de données permettrait une comparaison simple et efficace entre des chocs de volatilité des taux d'intérêt canadiens et américains dans la mesure où il serait possible de comparer directement les résultats obtenus. Ensuite, les PDTI disponibles à la Bourse de Montréal, comme les options OBX, qui portent sur le BAX ou les options OGB, qui portent sur un contrat à terme sur obligations du gouvernement du Canada de dix ans, semblent pertinents pour notre étude. En effet, ces produits dérivés sont négociés de manière centralisés à la Bourse de Montréal, contrairement aux swaptions canadiens, ce qui évite certains problèmes de données présents sur le marché des produits OTC. Enfin, les options sur taux d'intérêt tels que les caps et floors de taux sur le CDOR, sont aussi des PDTI OTC qui permettent de capter la volatilité à terme des taux d'intérêt sur le marché canadien.

Le choix des données a été fondé sur la pertinence, la disponibilité, la liquidité des produits utilisés et la simplicité d'extraction et de manipulation des données. Les données de swaptions OTM sont indisponibles sur le marché canadien étant donné que, dans ce marché OTC, il est souvent difficile et coûteux de centraliser les données concernant les prix ou les volatilités historiques pour des produits OTM. En fait, uniquement les données historiques de swaptions ATM, sont disponibles pour le marché canadien qui semble peu liquide pour les produits OTM. Le choix d'un tel produit pour construire l'indice de volatilité a donc été rapidement écarté. Les données disponibles sur les PDTI proposés par la Bourse de Montréal posent elles aussi certains obstacles. En effet, le manque de liquidité pour les prix d'exercices OTM rend la construction d'un indice de volatilité plus difficile et moins pertinente, puisque des interpolations trop fréquentes, qui pourraient nuire aux valeurs de l'indice, devraient combler le manque de données. Par ailleurs, les contrats d'options OBX ou OGB sont de style américain, ce qui rend leur évaluation très fastidieuse et imprécise. Ainsi, par élimination, le choix des données s'arrête sur les caps et floors de taux sur le CDOR 3 mois, dont les volatilités historiques pour le marché canadien sont disponibles pour divers prix d'exercices et échéances. Ces options sont des PDTI considérés relativement importants étant

donné que leur valeur notionnelle représente 61 milliards US\$ fin juin 2014 au Canada (BIS, 2014).

### 3.2.2 Caractéristiques des données

Il est essentiel de noter que les caps et floors de taux ne sont pas des options dont le sous-jacent suit une martingale. En effet, comme présenté en annexe A, un cap (respectivement floor) est un portefeuille de caplet (respectivement floorlet). Néanmoins, chaque caplet (respectivement floorlet) est une option dont le sous-jacent suit une martingale sous la mesure de probabilité forward-neutre associée au numéraire  $P(0, T_{\alpha+1})$  qui représente le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T_{\alpha+1}$  (Voir annexe B). Ainsi, il est impératif d'utiliser les prix des caplets et des floorlets afin de construire l'indice de volatilité en respectant les propriétés fondamentales du SRVX. Une des principales difficultés de la présente recherche est que les produits dérivés caplets et floorlets, ne sont pas directement négociables sur les marchés financiers, mais uniquement négociables à travers les caps et les floors. Ainsi il est nécessaire d'utiliser les données des caps et des floors disponibles afin d'en extraire des prix de caplets et floorlets OTM.

Bien que le marché des caps et des floors soit OTC, les données utilisées afin de construire l'indice de volatilité proviennent de la plateforme Bloomberg, qui fournit aux utilisateurs un consensus de prix réalisé par des grandes institutions financières. Le fait ces cotations proviennent de divers grands courtiers, qui eux-mêmes, observent les cotations de différents teneurs de marchés procure des données relativement robustes. En pratique, le prix des caps est coté en termes de volatilité implicite issue du modèle de Black (1976). Ainsi, il est facile d'en déduire le prix des floors puisque d'après la parité caps/floors, la volatilité implicite d'un floor et d'un cap ayant les mêmes caractéristiques est exactement la même. De la sorte, Bloomberg procure les volatilités implicites, qui sont, pour le marché canadien, disponibles pour des prix d'exercices allant de 1% à 15% par incrément de 0.5% et

pour des échéances allant de 1 à 10 ans par incrément de 1 an. Les données recueillies sont journalières et s'échelonnent du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014 pour chaque maturité et chaque prix d'exercice, pour un total de 2020 jours ouvrables.

Les contrats caps utilisés présentent les caractéristiques suivantes :

- Le montant notionnel est de 10 millions de dollars CAD.
- Le sous-jacent est le CDOR 3 mois.
- La fréquence des dates de paiements et de règlements est trimestrielle.
- Les paiements sont effectués 3 mois après la date de règlement.
- Le nombre de jours dans l'année est de 365 jours.

Tout au long de la recherche, le prix des caps/floors sont évalués à l'aide de la formule de Black (1976) :

$$Cap(0, T_\beta) = \tau \times \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} P(0, T_{\alpha+1}) \times [FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1}) \phi(d_1) - K \phi(d_2)] \quad (4)$$

$$Floor(0, T_\beta) = \tau \times \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} P(0, T_{\alpha+1}) \times [K \phi(-d_2) - FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1}) \phi(-d_1)] \quad (5)$$

où  $Cap(0, T_\beta)$  est le prix d'un cap et  $Floor(0, T_\beta)$  est le prix d'un floor d'échéance  $T_\beta$ ,  $P(0, T_{\alpha+1})$  est le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T_{\alpha+1}$  et  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  est le taux sous-jacent de chaque caplet/floorlet constituant le cap/floor de prix d'exercice  $K$ .  $\phi(x)$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})}{K}\right) + \frac{\sigma^2 T_\alpha}{2}}{\sigma \sqrt{T_\alpha}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T_\alpha}$$

enfin,  $\sigma$  est la volatilité du taux  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  de 0 à  $T_\alpha$  et  $\tau$  représente la fréquence de règlement des caps/floors soit 0,25.

Par ailleurs, les données recueillies afin de construire les facteurs d'actualisation présents dans l'indice proviennent également de la plateforme Bloomberg. Pour le début de la structure à terme des taux d'intérêt, les taux CDOR d'échéances 1 mois, 3 mois et 6 mois sont extraits alors que pour le reste de la structure à terme, les données utilisées sont les taux swaps canadiens d'échéances correspondantes à celles des caps de l'échantillon.

Afin de comprendre plus aisément la suite de la recherche, il est important de visualiser la structure de départ de la base de données des volatilités des caps et des floors. À cet effet, la Figure 3-1 met en évidence le cube de volatilités implicites extrait de la plateforme Bloomberg. Pour chaque journée d'observation, on possède 300 cotations de volatilité composées de 30 prix d'exercices et 10 échéances.

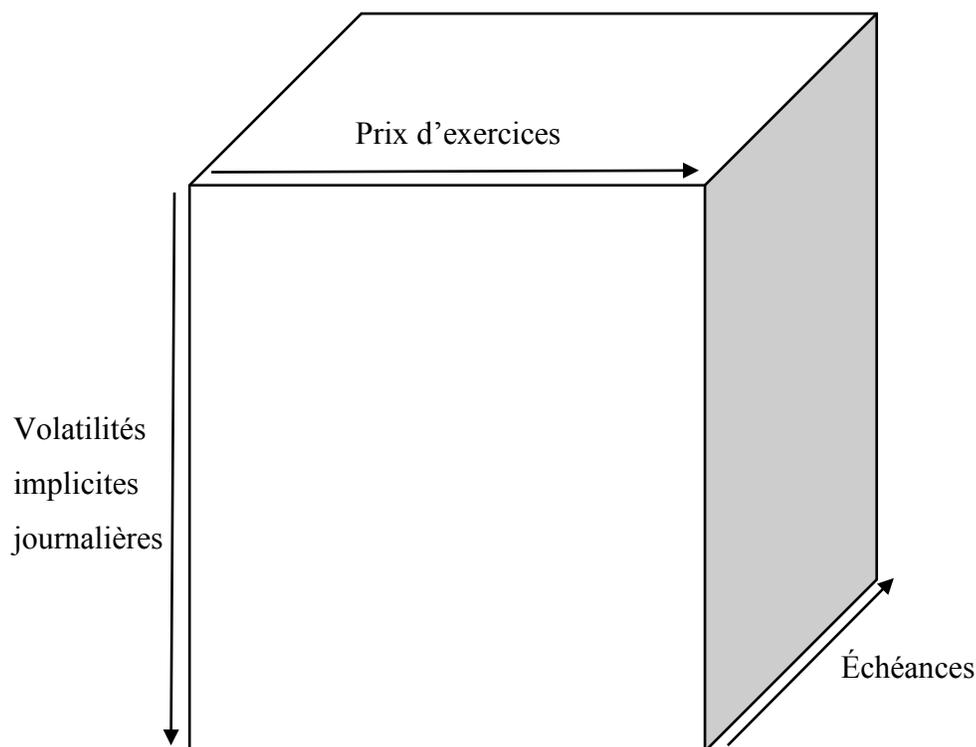


Figure 3-1 - Cube de volatilités implicites des caps et des floors.

La figure 3-1 illustre le cube de volatilités implicites des caps et des floors en fonction des différents prix d'exercices et échéances.

### 3.2.3 Liquidité du marché canadien

Un travail de nettoyage des données a été nécessaire avant de commencer la construction de l'indice de volatilité. En effet, du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014, on observe des anomalies dans les volatilités des caps fournies par Bloomberg. Certaines données forment des *smiles* de volatilité ainsi que des structures à terme totalement constants. Par ailleurs, on remarque des sauts de volatilité anormaux qu'aucun événement marquant ne justifie entre des volatilités journalières subséquentes. Selon la recherche, ces anomalies dans les cotations nous apparaissent dues à un manque de liquidité du marché canadien pour certains prix d'exercices et échéances. Aussi, ces anomalies correspondent parfois à des jours fériés canadiens alors que le marché américain est ouvert ou à des journées durant lesquelles la séance de négociation se déroule sur une demi-journée au Canada. Ainsi, après une inspection rigoureuse, 60 journées d'observations ont été éliminées de la base de données, soit 3% de notre échantillon quotidien. Après ce traitement de la base de données, la présente recherche s'effectue avec un total de 1960 journées qui s'échelonnent du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014. À noter que la liste des journées supprimées lors de ce nettoyage de données est disponible en annexe C.

## 3.3 Structure à terme des taux d'intérêt des obligations zéro-coupon

D'après la formule (3), deux raisons justifient l'utilisation d'une structure à terme des taux d'intérêt des obligations zéro-coupon pour le calcul de l'indice de volatilité. Premièrement, les prix d'obligations zéro-coupon avec un notional d'un dollar sont des facteurs d'actualisation directement nécessaires pour l'évaluation du prix des caplets et des floorlets ainsi que pour le calcul de l'indice. En effet, d'après l'annexe C de Mele et Obayashi (2012), des facteurs d'actualisation doivent être calculés lorsque l'on adapte la formule de l'indice SRVX aux caplets et aux floorlets. Deuxièmement, les règlements des caplets et des floorlets sont réalisés à partir des taux à terme sous-jacents  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  présentés dans l'annexe A. Plus précisément, il s'agit d'extraire les taux d'intérêt des obligations zéro coupon pour chaque date et pour chaque échéance, puis d'en déduire les taux à terme implicites à l'aide de la formule (8). À noter que l'on actualise et effectue le règlement des PDTI avec le même objet. Ainsi, le cadre d'évaluation des PDTI de la présente recherche s'effectue à l'aide d'une actualisation à courbe unique, communément appelé *single curve discounting*. Plus de détails sont donnés à cet effet dans la section 3.7.

Dès lors, il est essentiel de posséder une structure à terme complète des taux d'intérêt des obligations zéro-coupon, pour chaque date de l'échantillon, avec des échéances trimestrielles correspondantes à la fréquence de règlement des caplets et des floorlets. À ce titre, les données observées sur le marché ne permettent pas d'en déduire directement une structure à terme utilisable pour la recherche. En effet, pour de nombreuses échéances, il n'existe pas de cotation de taux d'intérêt qu'il faut alors estimer via une modélisation de la structure à terme. En revanche, comme l'expliquent certains auteurs tels que Ron (2000) et Hagan et West (2006), de nombreuses méthodes, toutes plus ou moins imparfaites, permettent de modéliser la structure à terme des taux d'intérêt. À noter que l'implantation d'une méthode ou d'une autre se justifie généralement par l'utilisation que l'on souhaite faire de la courbe et qu'il faut nécessairement réaliser un compromis entre précision et parcimonie. Dans le cadre de la recherche, il s'agit d'obtenir des prix d'obligations zéro-coupon et a posteriori des taux à terme fiables qui respectent, dans la mesure du possible, la relation d'AOA. De plus, il est important de considérer un modèle

relativement souple, qui s'accommode à différentes configurations de marché étant donné la taille de l'échantillon étudié. Enfin, il est primordial de retenir une modélisation qui est en cohérence avec le travail d'optimisation subséquent à la construction de la structure à terme.

Ainsi, la présente recherche opte pour une modélisation de la structure à terme via une méthode de *bootstrapping* non paramétrique qui respecte la relation d'AOA pour certains points de la structure à terme des taux d'intérêt, à savoir, les taux qui possèdent des échéances observables sur le marché. Néanmoins, entre ces points observables, il faut supposer une structure des taux à terme afin de pouvoir résoudre un algorithme itératif. De ce fait, entre les points observables de la structure à terme, la relation d'AOA n'est pas garantie et des taux à terme négatifs sont possibles<sup>1</sup>. À cet effet, on réalise une interpolation linéaire souvent utilisée dans la pratique, bien que d'après Hagan et West (2006) celle-ci mène parfois à des taux à termes en dent-de-scie ou négatifs pouvant être indésirables pour certaines études. Cependant, pour la présente recherche, le respect de la relation d'AOA pour chaque échéance observable sur le marché prime sur l'obtention de taux à terme lisses. Aussi, comme le montre la section 3.3.2, les taux à terme négatifs sont très peu fréquents (1.58% de l'échantillon) et seront remplacés par des taux termes arbitrairement petit pour la suite de l'étude, soit un point de base, afin de pouvoir utiliser correctement le modèle de Black (1976).

Enfin, il est important de savoir que la structure à terme des taux d'intérêt obtenue via un quelconque modèle dépend des produits financiers utilisés dans la construction de cette dernière. En effet, même si aucun instrument n'est péremptoire, il existe un consensus des praticiens qui séparent généralement la courbe en trois parties distinctes à l'aide de produits financiers différents. Néanmoins, pour des raisons de simplification, la structure à terme de la présente étude est séparée en deux parties, soit la partie court terme composée des taux *spot* et la partie long terme composée des taux swaps.

---

<sup>1</sup> Les modèles paramétriques de Nelson et Siegel (1987) et Svensson (1994) ont également été examinés dans ce mémoire. Cependant, ces techniques menaient à une proportion importante de taux à terme négatifs dans la portion courte de la structure à terme.

### 3.3.1 *Bootstrapping* de taux d'intérêt

La technique de *bootstrapping*, particulièrement efficace pour la partie courte de la structure à terme, calcule de manière itérative, à une fréquence semestrielle le taux des obligations zéro-coupon, en allant de l'échéance la plus courte à l'échéance la plus longue utilisée. Cette technique est itérative puisqu'à chaque étape on résout le taux de l'obligation zéro-coupon conditionnellement à l'information disponible. Le segment court terme est modélisé avec les taux CDOR 1 mois, 3 mois et 6 mois et le segment long-terme est modélisé avec les taux swaps canadiens ayant une échéance allant de 1 à 10 ans par incréments de 1 an. Ainsi, les taux choisis couvrent un horizon temporel relativement large et sont suffisamment liquides aux fins de la recherche. À noter que les facteurs d'actualisation sont incorporés dans la formule de Black (1976) en capitalisation continue, alors que les taux à terme  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  sont utilisés en capitalisation simple, trimestrielle, identique à celle de la fréquence de règlement des caplets et des floorlets.

La partie court terme de la structure à terme est directement obtenue via les taux CDOR étant donné que ces derniers sont des taux *spot*. Comme mentionné en annexe A, les taux CDOR servent de taux de référence pour le marché monétaire canadien. On obtient les prix des obligations zéro-coupon correspondant aux taux CDOR à l'aide de la formule suivante :

$$P(0, T) = \exp(-R(0, T) \times T) \quad (6)$$

où  $R(0, T)$  est le taux d'une obligation zéro-coupon, soit le taux CDOR d'échéance  $T$ , qui a été converti en taux à capitalisation continue.

Cependant, la partie long terme de la structure à terme est plus complexe à résoudre. Il s'agit ici de trouver à l'aide du *bootstrapping*, les taux des obligations zéro-coupon correspondant aux dates de versement semestrielles des coupons du swap. En effet, les taux swaps extraits sont annuels et leurs coupons sont versés

semestriellement. À chaque itération, il est alors nécessaire d'incorporer l'information disponible sur les taux des obligations zéro-coupon jusqu'à cette date, puis de connaître le taux swap d'échéance subséquente, à savoir 6 mois plus tard, afin de résoudre l'équation (7) de manière récursive. Ainsi, la méthodologie utilisée consiste à dériver le taux des obligations zéro-coupon en inversant la formule d'évaluation du swap présentée en annexe A.2. On obtient ainsi l'équation de résolution suivante :

$$Swap(0, T_\beta) \times \sum_{i=1}^{\beta} \tau P(0, T_i) + P(0, T_\beta) = 1 \quad (7)$$

où  $\tau$  désigne la fréquence semestrielle des versements de coupons, soit 0,5.

À noter que les taux des obligations zéro-coupon, calculés à l'aide de l'équation (7), sont à une fréquence semestrielle alors que la fréquence de règlement des caps est trimestrielle. De ce fait, on réalise une interpolation linéaire avec les taux obtenus via l'équation (7) afin d'obtenir ces derniers à une fréquence trimestrielle. Dès lors, on peut en déduire les taux à terme implicites à capitalisation continue à l'aide de l'équation suivante :

$$FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})^* = \frac{R(0, T_{\alpha+1}) \times T_{\alpha+1} - R(0, T_\alpha) \times T_\alpha}{T_{\alpha+1} - T_\alpha} \quad (8)$$

Enfin, il s'agit de convertir ces taux en capitalisation simple trimestrielle à l'aide de la formule suivante :

$$FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1}) = \frac{1}{\tau} \times \left[ \exp((FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})^* \times \tau) - 1) \right] \quad (9)$$

où  $\tau$  désigne la fréquence trimestrielle de règlement des caplets et de floorlets, soit 0,25.

### 3.3.2 Résultats

Les structures à terme des taux zéro-coupon et des taux forward 3 mois pour la

période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014 sont illustrées à la Figure 3-2. On observe des structures à terme des taux zéro-coupon relativement plates, voire inversées pour le début de l'échantillon qui est caractérisé par la crise financière 2007-2008. Par la suite, vers janvier 2009 les structures à terme des taux zéro-coupon retrouvent une forme plus classique. À savoir, on note un léger creux pour la partie court terme de la courbe, puis à plus long terme on remarque des taux croissants en fonction de l'échéance. Comme souligné par Hagan et West (2006), la procédure de *bootstrapping* établi en 3.3.1 mène à des taux forward en dent-de-scie et parfois négatifs. En effet, lorsque les taux zéro-coupon sont à leur plus bas, à savoir pour l'échéance 0,75 an qui représente le bas du creux énoncé ci-dessus, il arrive que les taux forward calculés soient négatifs. À noter que ce phénomène est particulièrement localisé autour de janvier 2009. À cet effet les taux forward négatifs représentent 1.58% de l'échantillon étudié et sont remplacés pour la suite de l'étude par des taux d'un point de base afin de pouvoir utiliser correctement la formule d'évaluation de Black (1976).

Enfin, les tableaux 3.1 et 3.2 présentent respectivement les principales statistiques descriptives des taux zéro-coupon et des taux forward 3 mois en niveau et en première différence à une fréquence trimestrielle. Les résultats statistiques de notre modélisation sont cohérents avec la littérature existante à ce sujet. En effet, les deux objets calculés sont caractérisés par des premières différences nulles, asymétriques et ayant des queues de distribution relativement épaisses.

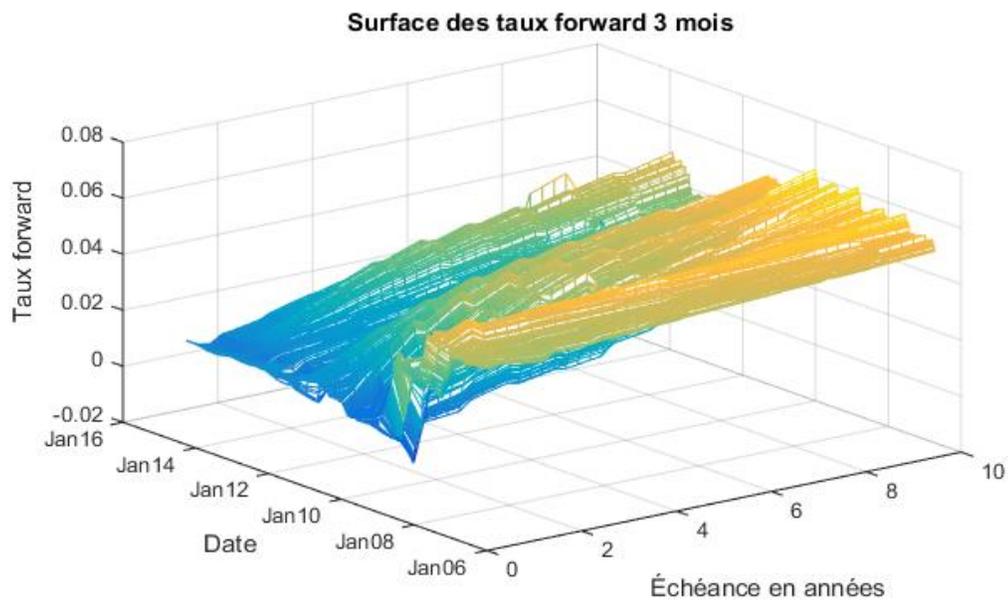
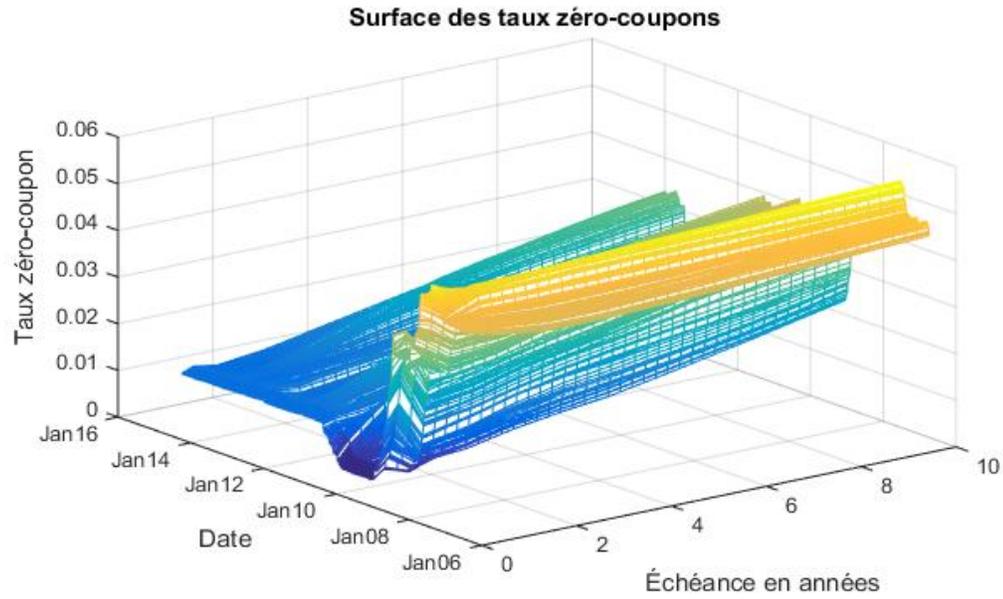


Figure 3-2 : Surfaces des structures à terme des taux zéro-coupon et des taux forward 3 mois.

Cette figure illustre les résultats de la modélisation des structures à terme des taux zéro-coupon et des taux forward 3 mois issus de la méthode de *bootstrapping* présentée à la section 3.3.1, pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014.

Tableau 3-1 - Statistiques descriptives des taux zéro-coupon

Ce tableau présente les principales statistiques descriptives des taux zéro-coupon obtenus via la méthode de *bootstrapping* présentée à la section 3.3.1, pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014. Ces taux sont calculés tous les trimestres pour une échéance allant de 0,25 à 10 ans.

	Échéances (en années)							
	0,25	0,5	1	2	3	5	7	10
<b>Panel A : Statistiques descriptives des taux zéro-coupon en niveau</b>								
Moyenne	0,0190	0,0201	0,0191	0,0210	0,0233	0,0271	0,0302	0,0342
Médiane	0,0128	0,0141	0,0131	0,0149	0,0190	0,0248	0,0289	0,0341
Minimum	0,0043	0,0060	0,0045	0,0082	0,0103	0,0130	0,0161	0,0198
Maximum	0,0506	0,0494	0,0494	0,0498	0,0505	0,0513	0,0520	0,0529
Écart-type	0,0139	0,0131	0,0130	0,0119	0,0111	0,0101	0,0093	0,0083
Asymétrie	1,0230	1,0259	1,1454	1,1541	1,0331	0,7239	0,5182	0,2258
Applatissement	2,5122	2,5005	2,8041	2,7834	2,6435	2,3270	2,1396	1,9730
<b>Panel B : Statistiques descriptives des taux zéro-coupon en première différence</b>								
Moyenne	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Médiane	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Minimum	-0,0040	-0,0042	-0,0030	-0,0033	-0,0031	-0,0028	-0,0024	-0,0024
Maximum	0,0025	0,0021	0,0040	0,0033	0,0030	0,0026	0,0026	0,0023
Écart-type	0,0002	0,0002	0,0004	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
Asymétrie	-7,2913	-5,6465	-0,0646	-0,1681	-0,1714	-0,0547	-0,0732	-0,0937
Applatissement	139,8504	101,6675	18,4612	8,7920	7,3256	5,2313	4,7736	4,4492

Tableau 3-2 - Statistiques descriptives des taux forward 3 mois

Ce tableau présente les principales statistiques descriptives des taux forward 3 mois issus de la méthode de *bootstrapping* présentée à la section 3.3.1, pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014. Ces taux sont calculés tous les trimestres pour une échéance allant de 0,25 à 10 ans.

	Échéances (en années)							
	0,25	0,5	1	2	3	5	7	10
<b>Panel A : Statistiques descriptives des taux forward en niveau</b>								
Moyenne	0,0213	0,0187	0,0216	0,0263	0,0300	0,0357	0,0405	0,0477
Médiane	0,0153	0,0128	0,0157	0,0235	0,0289	0,0362	0,0423	0,0502
Minimum	0,0077	0,0035	0,0084	0,0117	0,0140	0,0204	0,0214	0,0303
Maximum	0,0494	0,0508	0,0504	0,0517	0,0524	0,0534	0,0551	0,0628
Écart-type	0,0125	0,0132	0,0117	0,0107	0,0099	0,0083	0,0072	0,0071
Asymétrie	1,0311	1,1721	1,1244	0,7142	0,3442	-0,0270	-0,3856	-0,6253
Applatissement	2,5036	2,9311	2,7562	2,2915	1,9770	1,8412	2,0412	2,3035
<b>Panel B : Statistiques descriptives des taux forward en première différence</b>								
Moyenne	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Médiane	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Minimum	-0,0044	-0,0043	-0,0034	-0,0028	-0,0032	-0,0037	-0,0067	-0,0050
Maximum	0,0018	0,0051	0,0032	0,0027	0,0030	0,0025	0,0064	0,0057
Écart-type	0,0003	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0012
Asymétrie	-2,6267	-0,2106	-0,1567	-0,1267	0,0049	-0,0662	0,0223	0,0884
Applatissement	41,9091	17,4334	7,8168	5,4486	4,8521	4,0966	10,4592	4,2964

### 3.4 Extraction des volatilités caplets

Comme mentionné dans la section 3.2.2, la construction de l'indice de volatilité utilise des prix de caplets et de floorlets qui ne sont pas directement observables sur les marchés financiers. Ainsi, une première étape consiste à extraire les volatilités des caplets des cotations des volatilités caps de Bloomberg. Cette procédure est généralement appelée *volatility bootstrapping* ou *cap stripping*. À noter qu'en raison de la parité caplet/floorlet, seule l'extraction des volatilités caplets est nécessaire aux fins de l'étude. Pour chaque volatilité cap, quatre volatilités caplets sont extraites, excepté pour le cap 1 an qui est constitué, selon les conventions du marché, de trois caplets. En plus de la structure à terme des volatilités caplets, le *volatility bootstrapping* permet d'obtenir la volatilité implicite du taux à terme sous-jacent jusqu'à la date qui correspond au règlement du caplet. Par ailleurs, il est important de souligner que l'on réalise cette extraction pour le cas des caplets OTM et ATM afin de pouvoir insérer les volatilités ATM dans la calibration du modèle SABR effectuée dans le chapitre suivant. En effet, les caplets ATM sont considérés comme les données les plus liquides du marché et ainsi permettent supposément d'affiner les résultats de l'estimation du *smile* de volatilité.

Tout d'abord, il est important de rappeler que le prix d'un cap coté correspond à la somme des prix des caplets auxquels la volatilité du cap est appliquée de manière constante (voir annexe A.7) :

$$Cap(t, \bar{\sigma}, K, T_\beta) = \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} Caplet(t, \bar{\sigma}, K, T_\alpha) \quad (10)$$

où  $Cap(t, \bar{\sigma}, K, T_\beta)$  est le prix d'un cap au temps  $t$  dont le prix d'exercice est  $K$ , l'échéance est  $T_\beta$  et  $\bar{\sigma}$  est la volatilité cotée, appelée volatilité *flat*.  $Caplet(t, \bar{\sigma}, K, T_\alpha)$  est le prix d'un caplet au temps  $t$  d'échéance  $T_\alpha$  constituant le  $Cap(t, \bar{\sigma}, K, T_\beta)$ .

Cependant, l'étude mène à faire la procédure inverse et ainsi déterminer les volatilités individuelles des caplets selon l'équation suivante :

$$Cap(t, \bar{\sigma}, K, T_\beta) = \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} Caplet(t, \sigma, K, T_\alpha) \quad (11)$$

où  $\sigma$  est la volatilité individuelle d'un caplet constituant le  $Cap(t, \bar{\sigma}, K, T_\beta)$ .

### 3.4.1 Procédure d'extraction

Les modèles d'évaluation qu'utilisent les grandes institutions financières afin de déterminer les volatilités individuelles des caplets, servant à établir le prix des caps, sont très opaques. De ce fait, la littérature propose peu de solutions afin de retrouver ces volatilités individuelles des caplets. Cependant, l'étude de Hagan et Konikov (2004) expose, contrairement aux précédentes recherches, plusieurs techniques permettant de résoudre ce problème tout en préservant la relation d'AOA. Ainsi, considérant la cohérence et la qualité des solutions proposées, la procédure d'extraction des volatilités caplets de la présente recherche s'appuie sur leurs travaux. À noter qu'il faut utiliser deux procédures différentes pour extraire les volatilités des caplets OTM et ATM étant donné les différentes conventions d'évaluation inhérentes à ces deux produits. En effet, le cas OTM est relativement simple sachant qu'entre des caps de différentes échéances les prix d'exercices sont identiques. Il est alors possible de calculer directement la différence de prix de caps d'échéances adjacentes tel que nécessaire dans l'équation (12). Néanmoins, le cas ATM est plus complexe puisque les prix d'exercices des caps ATM représentent les taux swaps correspondant aux échéances de ces derniers. Dès lors, les caps ATM d'échéances adjacentes ne sont pas cotés avec des prix d'exercices identiques.

- Exemple : Le prix d'exercice du cap 1 an ATM correspond au taux swap 1 an de 4%, alors que le prix d'exercice du cap 2 ans ATM correspond au taux swap 2 ans de 4,5%. Cependant, pour résoudre l'équation (12) il est

essentiel de faire la différence de prix de caps dont les prix d'exercices sont identiques. Ainsi, il est nécessaire de trouver le prix du cap 1 an ATM ayant un prix d'exercice de 4,5%, soit celui du cap 2 ans ATM.

### *Le cas OTM*

Selon Hagan et Konikov (2004), le point de départ consiste à calculer la différence de prix entre les caps 1 an et 2 ans ayant les mêmes prix d'exercices. Ensuite, en considérant que les trois premiers caplets formant le cap 1 an ont une volatilité constante, qui n'est autre que celle du cap 1 an, il est possible de résoudre l'équation (12) pour les volatilités des caplets subséquentes, soit les volatilités des caplets quatre à sept qui constituent le cap 2 ans. On détermine ces volatilités individuellement en supposant une structure de ces dernières. Enfin, il s'agit de continuer la résolution en réalisant un *bootstrapping* itératif, entre les caps d'échéances adjacentes ayant le même prix d'exercice, dans le but d'obtenir les volatilités caplets suivantes et ainsi construire une structure à terme de volatilités.

Dans leur étude, Hagan et Konikov (2004) réalisent ce *bootstrapping* en utilisant des méthodes d'interpolation constante linéaire ou cubique par morceau. Ces méthodes d'interpolations aboutissent à des combinaisons de volatilités individuelles de caplets différentes. Néanmoins, il faut souligner que la véritable structure est inconnue, mais que cela n'est pas dommageable pour la présente étude. En effet, l'essentiel est de garantir que les prix des caps estimés à l'aide des volatilités caplets issues du *bootstrapping* sont bien égaux aux prix des caps observés afin de préserver la relation d'AOA.

Dans leur étude, Hagan et Konikov (2004) suggèrent d'utiliser la méthode la plus simple, à savoir constante par morceau, lorsque les méthodes plus complexes ne convergent pas ou aboutissent à des anomalies d'évaluation. Aussi, ils indiquent que si cette méthode fournit des volatilités caplets irréalistes, les données entrantes devraient être remises en question.

Lors de la présente étude, quelques essais infructueux ont été effectués avec la méthode linéaire par morceau, qui suppose, contrairement à la méthode constante par morceau, une structure linéaire des volatilités individuelles inconnues. En effet,

lors de ces essais, les volatilités caplets obtenues avaient une forme en dent-de-scie très prononcée, possiblement dommageable à la calibration du modèle SABR effectuée dans le chapitre suivant, et a posteriori au calcul de l'indice. Ainsi, la technique de *cap stripping* de la présente recherche s'appuie sur la méthode d'interpolation constante par morceau. Cette méthode simple et efficace consiste à estimer les volatilités caplets à l'aide de l'équation suivante :

$$Cap(\bar{\sigma}, K, T_\beta) - Cap(\bar{\sigma}, K, T_\alpha) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} Caplet(\bar{\sigma}_{pc}, K, T_i) \quad (12)$$

où  $Cap(\bar{\sigma}, K, T_\beta) - Cap(\bar{\sigma}, K, T_\alpha)$  est la différence entre deux caps d'échéances adjacentes. À chaque itération,  $T_\beta - T_\alpha$  représente 1 an.  $Caplet(\bar{\sigma}_{pc}, K, T_i)$  est le prix d'un caplet ayant pour volatilité, la volatilité issue du *bootstrapping* constant par morceau, soit  $\bar{\sigma}_{pc}$ .

Ainsi, en partant du cap 2 ans, on résout l'équation (12) pour les quatre premières volatilités caplets constantes inconnues, soit les volatilités du quatrième au septième caplet, puis cette opération est répétée jusqu'à obtenir une structure à terme de volatilités. À noter que la structure à terme obtenue possède une forme en escalier, mais respecte la relation d'AOA. Pour des raisons de liquidité, la structure à terme qui fait l'objet de la présente étude s'arrête au cap 10 ans, soit au 39e caplet.

#### *Le cas ATM*

Comme mentionné précédemment, les prix d'exercices des caps ATM sont les taux swaps correspondant aux échéances de ces derniers. Par exemple, le cap 1 an ATM utilise comme prix d'exercice le taux swap 1 an et le cap 2 ans ATM utilise comme prix d'exercice le taux swap 2 ans. Par conséquent, il est impossible d'utiliser directement la même procédure que pour le cas OTM sachant que les caps d'échéances adjacentes ne possèdent pas les mêmes prix d'exercice.

Ainsi, la procédure de *cap stripping* pour le cas ATM consiste, dans un premier temps, à déterminer pour chaque différence entre deux caps d'échéances

adjacentes, la volatilité du cap dont l'échéance est la plus courte et dont le prix d'exercice est celui du cap dont l'échéance est la plus longue.

À noter que cette volatilité est obtenue à l'aide d'une interpolation linéaire réalisée sur les volatilités caplets issues du *bootstrapping* OTM. De cette manière, on peut évaluer le cap manquant afin de se retrouver dans la même situation initiale que dans le cas OTM, c'est-à-dire, avec des prix de caps d'échéances adjacentes ayant les mêmes prix d'exercices. Enfin, il s'agit de réaliser le *bootstrapping* ATM, comme précédemment, à l'aide de l'équation suivante :

$$Cap(\bar{\sigma}, K_{T_\beta}^{ATM}, T_\beta) - Cap(\bar{\sigma}, K_{T_\beta}^{ATM}, T_\alpha) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} Caplet(\bar{\sigma}_{pc}, K_{T_\beta}^{ATM}, T_i) \quad (13)$$

où  $K_{T_\beta}^{ATM}$  est le prix d'exercice d'un cap ATM ayant pour échéance  $T_\beta$ .

$Cap(\bar{\sigma}, K_{T_\beta}^{ATM}, T_\alpha)$  est le prix du cap obtenu à l'aide d'une interpolation linéaire réalisée sur les volatilités caplets issues du *bootstrapping* OTM.

### 3.4.2 Résultats

Les résultats du *volatility bootstrapping* OTM sont illustrés pour quelques dates représentatives à la Figure 3-3. Dans un premier temps, on observe que dépendamment de la période visualisée, les surfaces de volatilités des caplets OTM ont des formes relativement similaires. À savoir, on obtient majoritairement, pour chaque échéance de caplet une courbe de volatilité décroissante en fonction des prix d'exercices et de l'échéance. Cet effet de la volatilité qui s'écrase lorsque le prix d'exercice augmente est parfois désigné par le *smirk* de volatilité. Ce dernier constitue une légère distinction avec le *smile* de volatilité, qui lui exhibe une volatilité qui réaugmente une fois le prix d'exercice ATM dépassé. Pour ne pas mener le lecteur à des confusions, la présente recherche emploie le terme plus général de *smile* de volatilité pour référer au vecteur de volatilités en fonction des différents prix d'exercices, même si celui-ci n'est pas tout à fait exact dans le cadre

des données utilisées. De plus, comme prévu par la procédure d'extraction de volatilité choisie en 3.4.1, les structures à terme de volatilités caplets exposent une forme en escalier. Cependant, on remarque que le *volatility bootstrapping* donne parfois des volatilités caplets nulles pour certains points de la surface. Comme le précisent Hagan et Konikov (2004), ces anomalies proviennent très probablement des données entrantes du *cap stripping*. Évidemment, lors de l'estimation du *smile* de volatilité présenté à la section 3.5.2 nous avons pris le soin de corriger ces problèmes afin d'améliorer la calibration. En effet, lorsque les volatilités caplets provenant du *cap stripping* sont nulles, on substitue ces volatilités par les volatilités des caplets dont le prix d'exercice inférieur est le plus proche.

En adéquation avec la littérature existante, la surface moyenne de volatilité des caplets OTM illustrée par la Figure 3-4 expose une bosse pour les volatilités des caplets d'échéance environ deux ans et de prix d'exercices inférieurs à 10%. Enfin, la Figure 3-5 montre les résultats moyens de la procédure de *volatility bootstrapping* pour le cas ATM. On peut apprécier une forme moyenne de structure à terme en escalier, comme l'impose la procédure établie en 3.4.1.

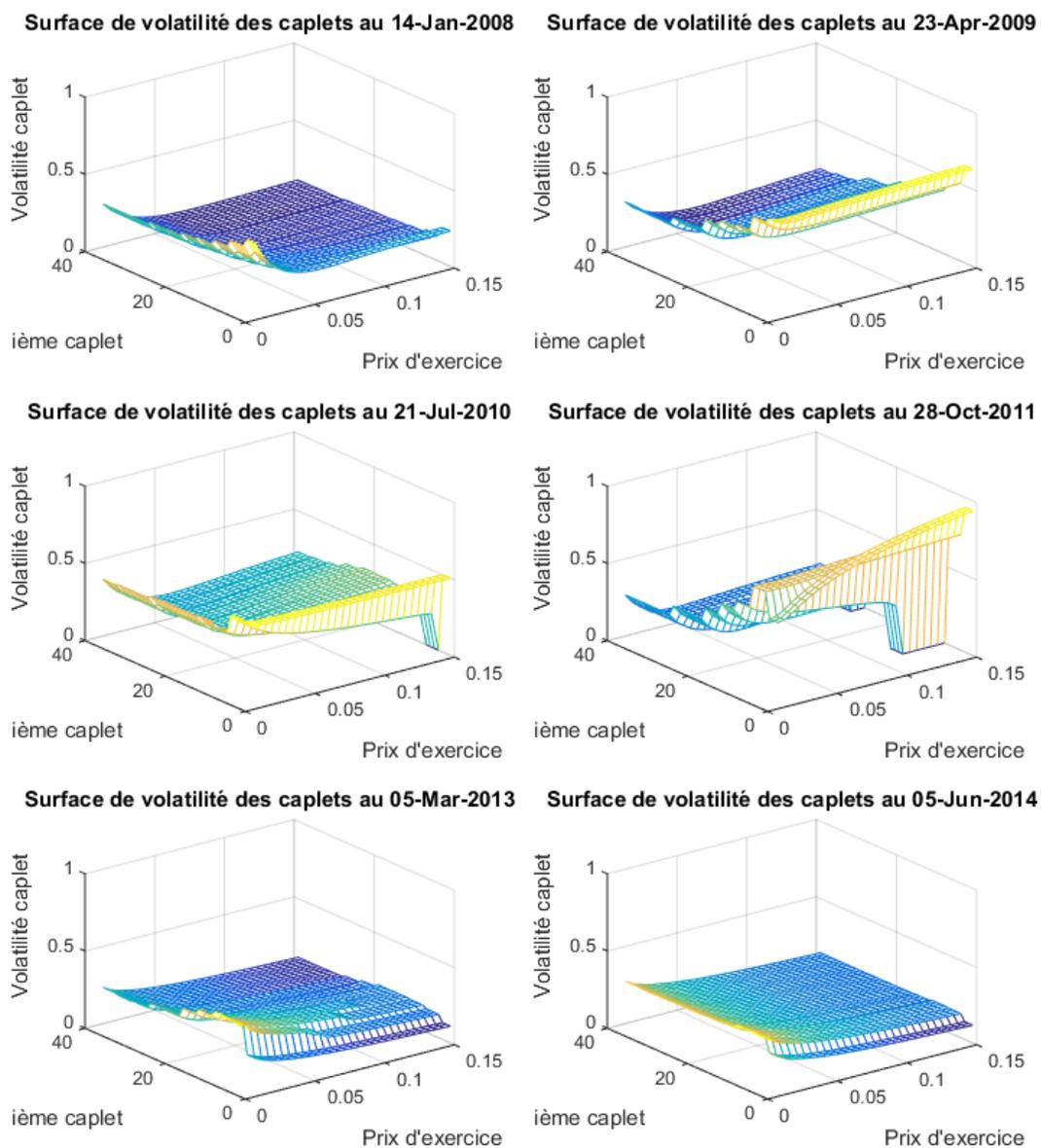


Figure 3-3 - Exemples de surfaces de volatilités des caplets OTM

Cette figure illustre les surfaces de volatilités des caplets OTM issues du *volatility bootstrapping* pour six dates de l'échantillon, à savoir, le 14 janvier 2008, le 23 avril 2009, le 21 juillet 2010, le 28 octobre 2011, le 5 mars 2013 et le 5 juin 2014.

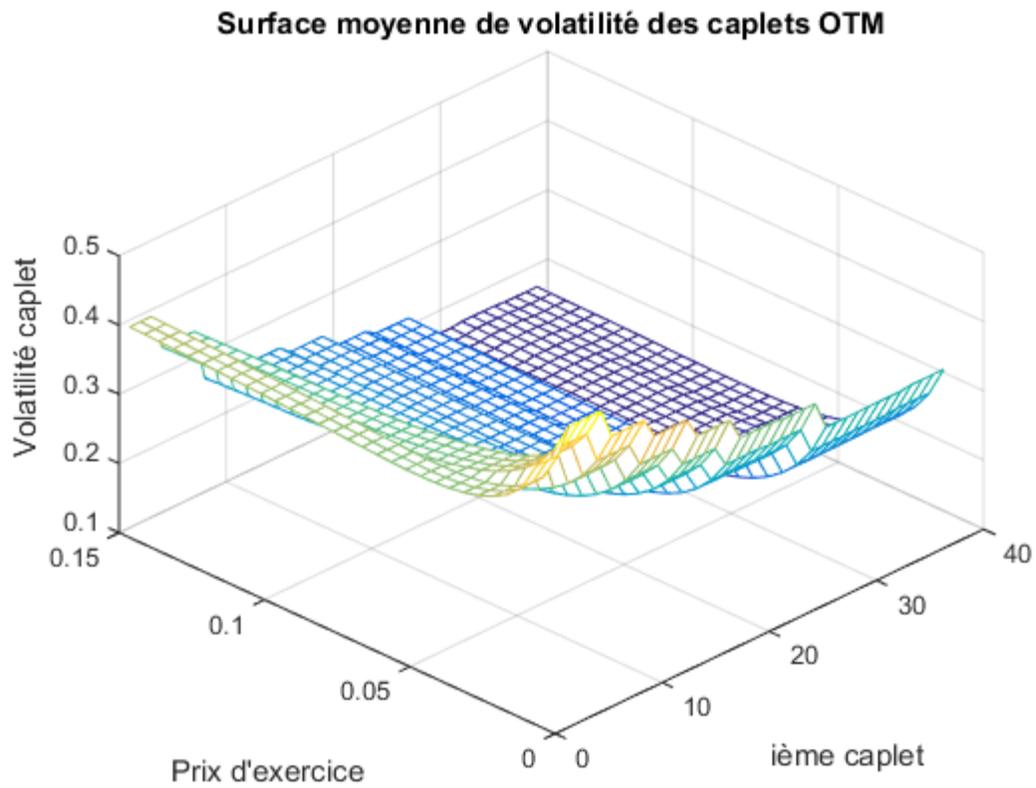


Figure 3-4 - Surface moyenne de volatilités des caplets OTM

Cette figure illustre la surface moyenne de volatilités des caplets OTM issues du *volatility bootstrapping* pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014.

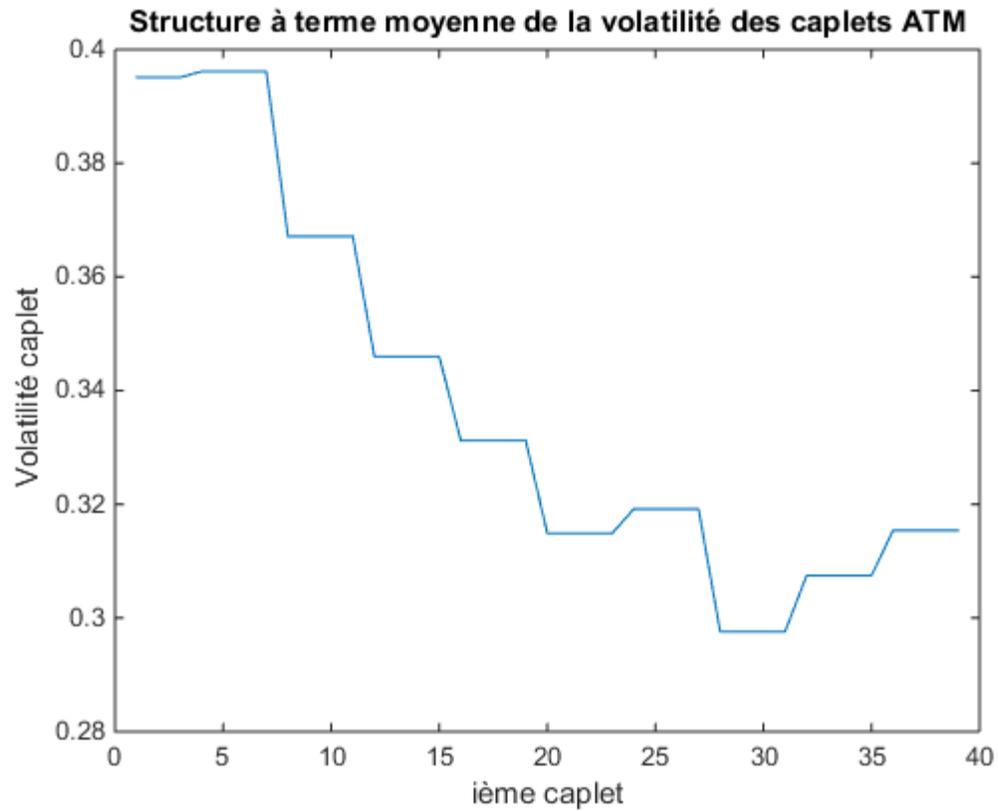


Figure 3-5 - Structure à terme moyenne de volatilités des caplets ATM

Cette figure illustre la structure à terme moyenne de volatilités des caplets ATM issues du *volatility bootstrapping* pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014.

### 3.5 Modélisation du smile de volatilité

Une fois la structure à terme des taux d'intérêt construite et l'extraction des volatilités caplets réalisée, la dernière étape de la méthodologie consiste à calibrer le *smile* de volatilité des caplets afin d'obtenir un continuum de volatilité en fonction de différents prix d'exercices pour chaque échéance. En effet, les sommations présentes dans les formules (2) et (3) du calcul du VIX et du SRVX sont en réalité des approximations d'intégrales numériques (voir Mele et Obayashi (2012)). Selon Jiang et al. (2007), ces approximations se traduisent par des erreurs de troncature et de discrétisation qui peuvent biaiser la volatilité implicite estimée. Néanmoins, le modèle SABR à volatilité stochastique introduit par Hagan et al. (2002) permet de calibrer le *smile* de volatilité des caplets de manière relativement robuste, tout en réduisant ces possibles erreurs de discrétisation et en préservant la relation d'AOA. Ce modèle, très populaire auprès des praticiens est devenu une référence sur le marché des PDTI selon Rebonato (2007) et Rebonato et White (2009). Cette popularité s'explique notamment par le fait que le modèle SABR possède l'avantage d'utiliser une formule analytique qui fournit une volatilité implicite, directement insérable dans la formule de Black (1976) afin d'évaluer les options sur taux d'intérêt. À noter qu'en raison de la parité caplet/floorlet, seule la calibration des volatilités caplets est nécessaire aux fins de l'étude.

#### 3.5.1 Présentation du modèle SABR

Le modèle SABR spécifie la dynamique du taux  $FRA(t, T_\alpha, T_{\alpha+1})$ , sous la mesure de probabilité forward-neutre  $Q^i$  à l'aide du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} dFRA(t, T_\alpha, T_{\alpha+1}) = \sigma(t)FRA(t, T_\alpha, T_{\alpha+1})^b dZ(t) \\ d\sigma(t) = v\sigma(t)dW(t) \\ \sigma(0) = a \end{cases} \quad (14)$$

où  $dZ(t)$  et  $dW(t)$  sont des mouvements browniens sous la mesure de probabilité  $Q^i$  avec  $dZ(t)dW(t) = \rho dt$ . Aussi,  $\sigma(t)$  est la volatilité stochastique de  $FRA(t, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  et  $[a, b, v, \rho]$  sont les paramètres du modèle à estimer. À noter que  $a$  et  $v$  sont strictement positifs et que  $\rho \in [-1, 1]$ .

De la sorte, le modèle SABR comporte quatre paramètres afin de modéliser le *smile* de volatilité en continu. Cependant, pour simplifier le travail d'optimisation, la présente recherche fixe le paramètre  $b$  à 0.5, comme préconisé par les études de Hagan et al. (2002), Rebonato (2007) et Rebonato et White (2009) pour le marché des PDTI, puis on estime les trois autres paramètres à l'aide d'une minimisation non linéaire. Enfin, la volatilité implicite dérivée par Hagan et al. (2002) prend la forme suivante :

$$\sigma_{SABR}^K = \frac{a}{(F(.)K)^{(1-b)/2} \left[ 1 + (1-b)^2 \ln^2 \left( \frac{F(.)}{K} \right) + \frac{(1-b)^4}{1920} \ln^4 \left( \frac{F(.)}{K} \right) + \varepsilon \right]} \times \left( \frac{z}{x(z)} \right) \quad (15)$$

$$\times \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-b)^2 a^2}{24(F(.)K)^{(1-b)}} + \frac{\rho b v a}{4(F(.)K)^{(1-b)}} + v^2 \frac{2-3\rho^2}{24} \right] T_\alpha + \varepsilon \right\}$$

$$\text{où } z = \frac{v}{a} (F(.)K)^{(1-b)/2} \times \ln \left( \frac{F(.)}{K} \right) \text{ et } x(z) = \ln \left( \frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho} \right).$$

$\varepsilon$  représente des termes négligeables et  $F(.)$  est le taux  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$ .

### 3.5.2 Estimation du modèle SABR

Il s'agit ici de définir une fonction de minimisation appropriée afin d'estimer les paramètres  $[a, v, \rho]$  pour chaque date de l'échantillon et échéance de caplets. Cette tâche qui peut paraître anodine s'avère en fait être relativement complexe. En effet, lors de la visualisation des résultats du *volatility bootstrapping* (voir section 3.4.2), on peut remarquer des sauts discontinus anormaux de volatilités pour certains prix d'exercices élevés, qui s'expliquent probablement par un manque de liquidité de ces produits. De nombreuses études telle que celle de Jarrow et al. (2007) contournent le problème de liquidité en coupant le *smile* de manière à conserver uniquement les données de volatilité qui semblent liquides. Cette troncature du *smile* est très souvent effectuée à l'aide d'un critère d'exclusion arbitraire. À titre illustratif, Jarrow et al (2007), sélectionnent les volatilités qui ont une *moneyness*<sup>2</sup> allant de 0.8 à 1.2 afin de calibrer leur modèle. Ce critère d'exclusion est particulièrement bien adapté aux données de leur étude, à savoir des observations de volatilités caps s'échelonnant de 2000 à 2003, mais semble inadéquat pour les configurations du marché post-crise 2008 qui est caractérisé par des niveaux de taux d'intérêt relativement faibles. En effet, en conservant ce critère d'exclusion pour des taux relativement faibles, on élimine la majorité de l'échantillon post-crise 2008. Par ailleurs, il ne faut pas oublier que tronquer le *smile* de volatilité enlèverait de l'information potentiellement pertinente pour le calcul de l'indice de volatilité. Par conséquent, pour pallier au problème de liquidité, la présente étude suggère de pondérer les volatilités caplets par leur *moneyness*. Ainsi, le modèle SABR est calibré de sorte que l'on attribue un poids plus faible aux volatilités caplets très OTM, qui sont associés généralement aux caplets les moins liquides du marché. Par ailleurs, lorsque les volatilités caplets provenant du *cap stripping* sont nulles pour différents prix d'exercices, tel qu'observé à la Figure 3-3, on substitue ces volatilités par les volatilités des caplets dont le prix d'exercice inférieur est le plus

---

<sup>2</sup> Généralement et dans leur étude, la *moneyness* est définie par la valeur du taux forward divisée par la valeur du prix d'exercice

proche. Ainsi on élimine certaines anomalies liées aux données entrantes de la procédure de *volatility bootstrapping*. Les poids utilisés pour chaque volatilité sont les suivants :

$$w_i = \begin{cases} \frac{FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})}{K_i} & \text{Si } FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1}) \leq K_i \\ \frac{K_i}{FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})} & \text{Si } FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1}) > K_i \end{cases} \quad (16)$$

Ainsi, la fonction de minimisation employée pour chaque caplet d'échéance  $T_\alpha$  est :

$$f_{obj}(a, v, \rho) = \text{Min} \left( \sum_{i=1}^N w_i (\sigma_{SABR}^{K_i} - \sigma_{obs}^{K_i})^2 \right) \quad (17)$$

où  $\sigma_{obs}^{K_i}$  est la volatilité d'un caplet issue du *volatility bootstrapping*, d'échéance  $T_\alpha$  et de prix d'exercice  $K_i$ .  $N$  est le nombre de prix d'exercice disponibles sur le marché, soit 30. Les paramètres  $[a, v, \rho]$  sont ainsi obtenus à l'aide d'une optimisation non linéaire, sous les contraintes évoquées précédemment en 3.5.1. À noter que l'on inclue les volatilités caplets issues du *cap stripping* ATM afin d'affiner la calibration. Un poids de 1 est attribué à ces volatilités, considérées comme les plus liquides du marché des caps. Enfin, il est important de mentionner que les volatilités et les poids de l'équation (17) sont associés à des caplets de mêmes échéances et que la procédure est répétée de manière séquentielle pour chacune des échéances  $T_\alpha$ .

### 3.5.3 Résultats

Les Figures 3-7 et 3-8 mettent en évidence deux résultats importants. Dans un premier temps, la Figure 3-7 montre que l'estimation du modèle SABR spécifiée en 3.5.2 corrige les problèmes de liquidité énoncés en 3.4.2. De plus, cette correction

permet de conserver la forme générale de la surface de volatilités préalablement construite. Le succès de cette correction est aussi visible à la Figure 3-9. En effet, on observe qu'aux Figures 3-7 et 3-9, les volatilités qui étaient nulles lors du *volatility bootstrapping* réalisé en 3.4.1 (voir Figure 3-3) semblent désormais avoir des valeurs plausibles grâce à la calibration du modèle SABR. En second lieu, la Figure 3-8 confirme que l'allure moyenne de la surface de volatilités des caplets OTM estimée via le modèle SABR est similaire à celle issue du *volatility bootstrapping*.

La Figure 3-6 permet de visualiser la structure à terme des paramètres SABR moyens estimés. Il existe très peu de littérature à ce sujet. À ce titre, Lesniewski (2014) montre que les paramètres  $a$  et  $\rho$  devraient décroître lentement en fonction de l'échéance afin de jauger la stabilité des paramètres obtenus. Néanmoins, ses résultats proviennent de volatilités swaptions cotées formant des *smiles* et non des *smirks* de volatilité. La forme en dent-de-scie de la structure à terme moyenne des paramètres estimés via la présente recherche découle notamment de la procédure de *bootstrapping* de volatilité utilisée en 3.4.1. À noter que la Figure 3-6 met en évidence une instabilité du paramètre  $a$  pour les caplets du cap 1 an et au-delà de l'échéance 8 ans. En effet, cette dernière montre qu'en moyenne le paramètre  $a$  est plus faible pour les trois premiers caplets constituant le cap 1 an que pour les caplets composant le cap 2 ans. Par ailleurs, le paramètre  $a$  est en moyenne plus élevé pour les caplets constituant les caps 9 et 10 ans que pour les caplets composant le cap 7 ans. Ces anomalies sont largement répertoriées dans les études de Hagan et al. (2002) et Obloj (2007) qui mettent en évidence les limites du modèle SABR pour les échéances et prix d'exercices extrêmes. Toutefois, la structure à terme moyenne de paramètre  $\rho$  décroît lentement en fonction de l'échéance ce qui reste en adéquation avec les résultats obtenus dans l'étude de Lesniewski (2014). Le tableau 3-3 présente les statistiques des paramètres SABR estimés. On peut apprécier le fait que l'ordre de grandeur de ces statistiques est semblable à celui des valeurs obtenues lors de l'étude de Rebonato et White (2009) pour des produits caplets américains.

Enfin, la Figure 3-9 met en évidence la qualité des paramètres estimés en comparant les volatilités des caplets ATM issues du *volatility bootstrapping* de la section 3.4.1 et les volatilités des caplets ATM issues du modèle SABR de la section 3.5.2. À noter que ces deux objets sont légèrement différents étant donné que pour les mêmes échéances et taux sous-jacents, ces caplets ne possèdent pas les mêmes prix d'exercices. En effet, les caplets ATM issus du *volatility bootstrapping* ont des prix d'exercices correspondant au taux swap de l'échéance du cap ATM auquel elles appartiennent. Toutefois, les caplets ATM issus du modèle SABR possèdent des prix d'exercices correspondant au taux sous-jacent du caplet, à savoir le taux  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$ .

- Exemple : Le caplet 1,25 ans ATM dont la volatilité est issue du *bootstrapping* de la section 3.4.1 possède un prix d'exercice de 4,5% qui correspond au taux swap 2 ans. Le caplet 1,25 an ATM dont la volatilité est issue de la calibration du modèle SABR de la section 3.5.2 possède un prix d'exercice de 4,75% qui correspond au taux sous-jacent  $FRA(0, 1.25, 1.5)$ .

Intuitivement ces deux objets doivent rester cohérents afin de confirmer la robustesse des résultats obtenus. Comme le montre la Figure 3-9, ces deux volatilités ATM sont très similaires pour l'échéance 1 an. Par ailleurs, le tableau 3-4 montre les statistiques obtenues des différences absolues entre les deux volatilités ATM. À noter que nous avons pris le soin de ne pas inclure les volatilités nulles issues du *volatility bootstrapping* de la section 3.4.1 lors de l'estimation de ces statistiques. On remarque que la différence entre les deux objets est relativement faible en moyenne et exhibe peu d'écart-types. Cependant, on constate, encore ici, les limites du modèle SABR sachant que, généralement, plus l'échéance augmente plus cette différence augmente jusqu'à atteindre en moyenne 12.20% pour l'échéance du 39<sup>e</sup> caplet.

Tableau 3-3 - Statistiques descriptives des paramètres du modèle SABR

Ce tableau présente les principales statistiques descriptives des paramètres du modèle SABR obtenus pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014.

		Échéances (en années)								
		0,25	0,5	1	2	4	5	6	8	9,75
Statistiques descriptives des paramètres du modèle SABR										
Moyenne	$a$	0,0477	0,0442	0,0547	0,0529	0,0465	0,0434	0,0444	0,0448	0,0580
	$b$	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
	$\rho$	0,1701	0,1108	0,1201	0,1134	-0,0137	-0,0444	-0,0749	-0,1432	-0,2676
	$\nu$	0,3594	0,3795	0,2301	0,1696	0,1869	0,1794	0,1614	0,1586	0,3091
Min	$a$	0,0151	0,0150	0,0241	0,0249	0,0240	0,0239	0,0239	0,0131	0,0168
	$b$	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
	$\rho$	-0,9317	-0,9246	-1,0000	-1,0000	-0,9999	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000
	$\nu$	0,0044	0,0055	0,0003	0,0002	0,0007	0,0008	0,0012	0,0002	0,0000
Max	$a$	0,1611	0,1341	0,1128	0,1104	0,1186	0,1830	0,2683	0,4186	0,4077
	$b$	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
	$\rho$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	$\nu$	1,6737	2,1814	1,0911	1,0212	0,6004	0,6304	1,2375	1,2398	1,5013
Écart-type	$a$	0,0244	0,0204	0,0170	0,0145	0,0112	0,0103	0,0112	0,0316	0,0434
	$b$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$\rho$	0,6062	0,6429	0,5568	0,6358	0,5466	0,5326	0,5352	0,5641	0,5863
	$\nu$	0,3677	0,4389	0,1750	0,1210	0,1208	0,1114	0,1003	0,1677	0,3866

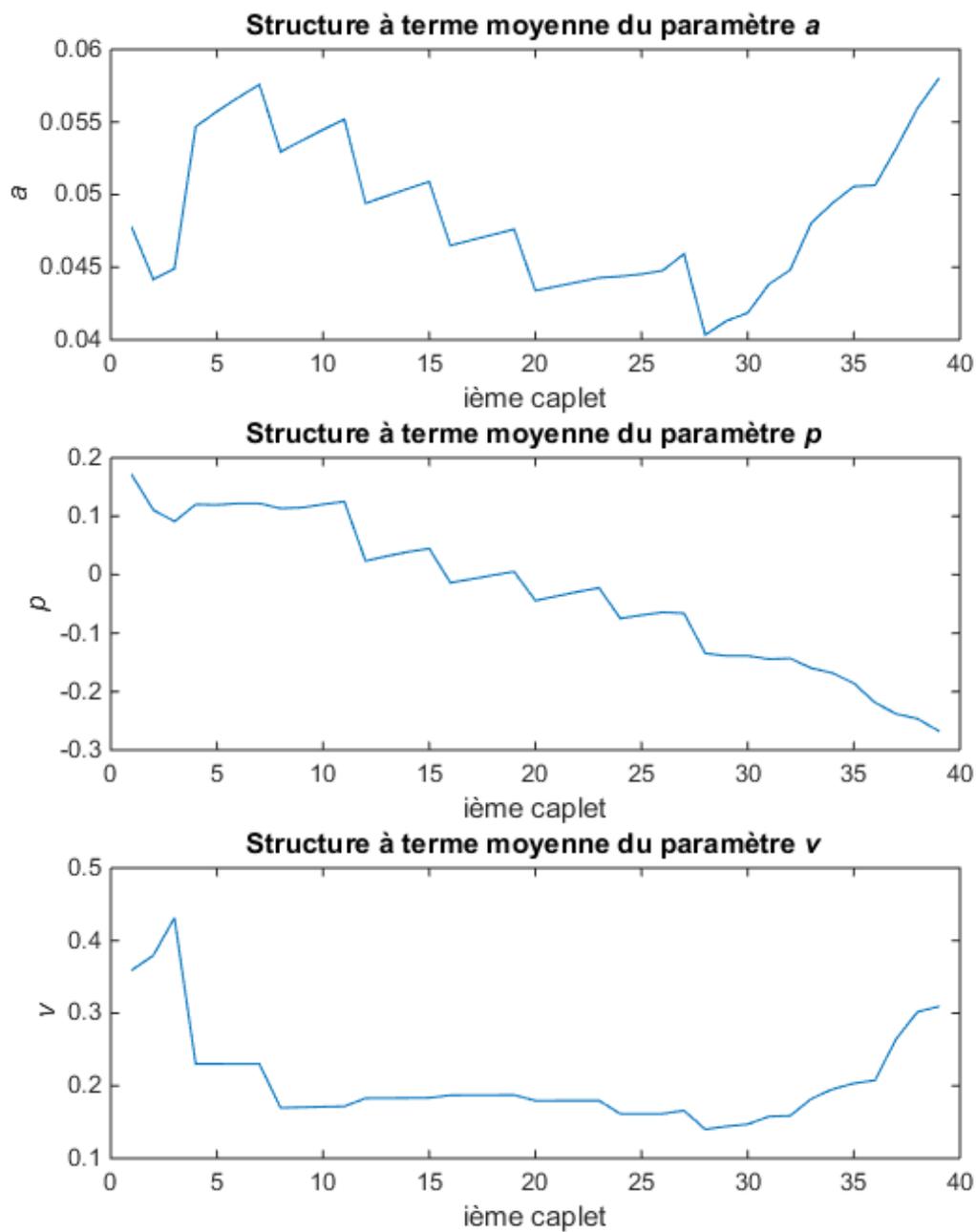


Figure 3-6 - Structure à terme moyenne des paramètres du modèle SABR

Cette figure illustre la structure à terme moyenne des paramètres du modèle SABR estimés via la méthodologie présentée en 3.5.2 pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014.

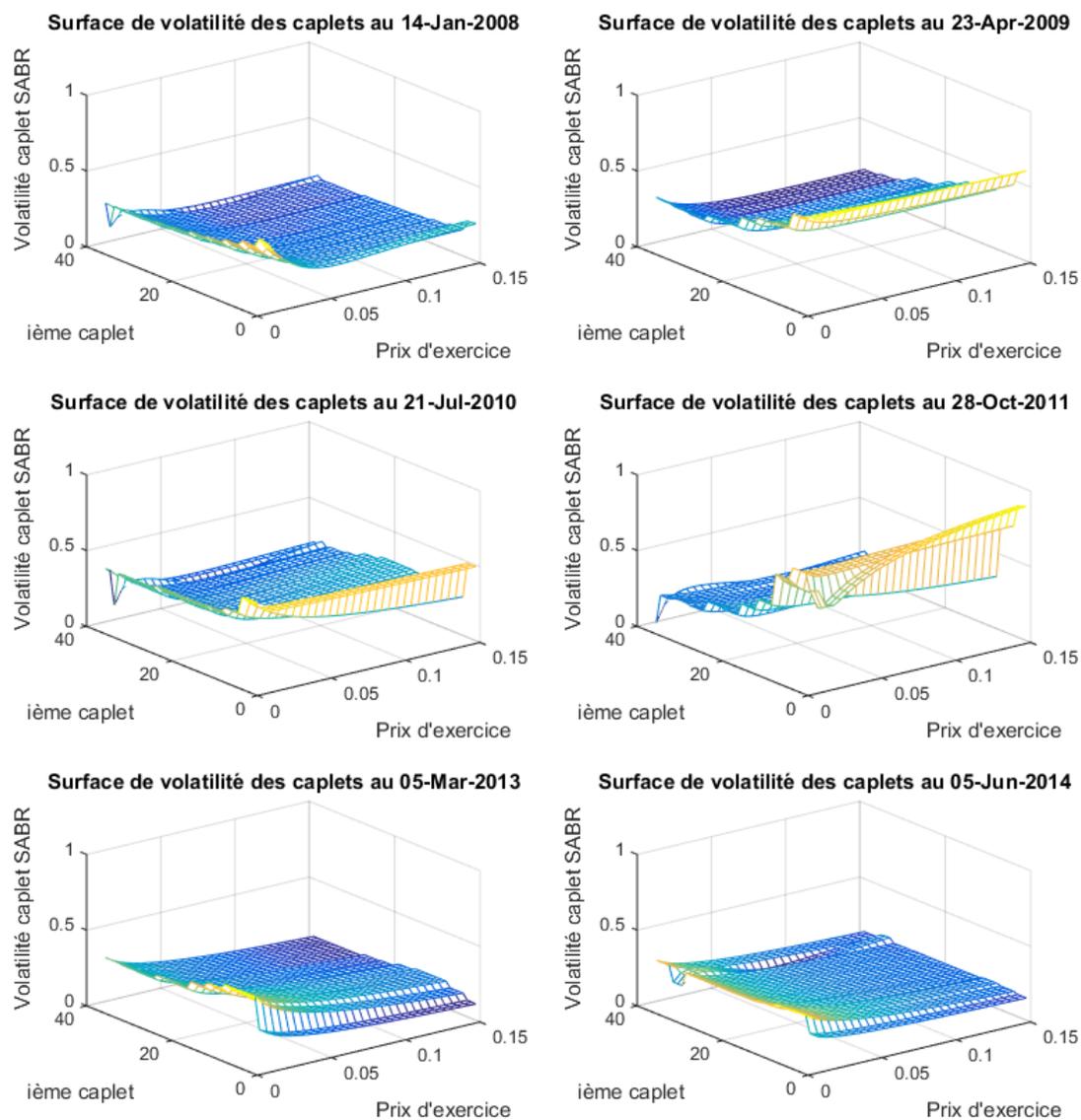


Figure 3-7 - Exemples de surfaces de volatilités SABR des caplets OTM

Cette figure illustre les surfaces de volatilités SABR des caplets OTM pour les six mêmes dates de l'échantillon que la figure 3-3, à savoir, le 14 janvier 2008, le 23 avril 2009, le 21 juillet 2010, le 28 octobre 2011, le 5 mars 2013 et le 5 juin 2014.

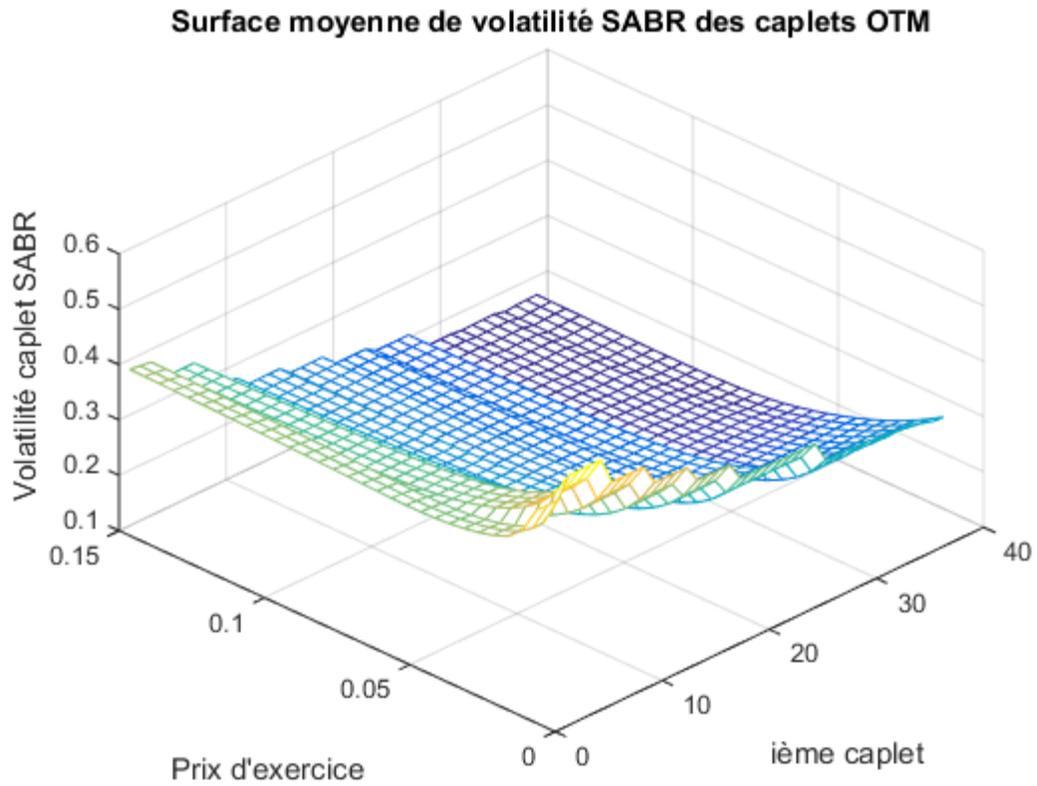


Figure 3-8 - Surface moyenne de volatilités SABR des caplets OTM

Cette figure illustre la surface moyenne de volatilités SABR des caplets OTM pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014.

Figure 3-9 - Comparaison des volatilités SABR des caplets ATM et des volatilités des caplets issues des caps ATM.

Cette figure permet de faire graphiquement la comparaison entre les volatilités des caplets ATM issues du modèle SABR de la section 3.5.2 et les volatilités des caplets ATM issues du *volatility bootstrapping* de la section 3.4.1. Seule l'échéance 1 an est présentée pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014. Les volatilités caplets nulles après 2014 illustrent les problèmes issus de la procédure de *cap stripping* évoqués en 3.4.2.

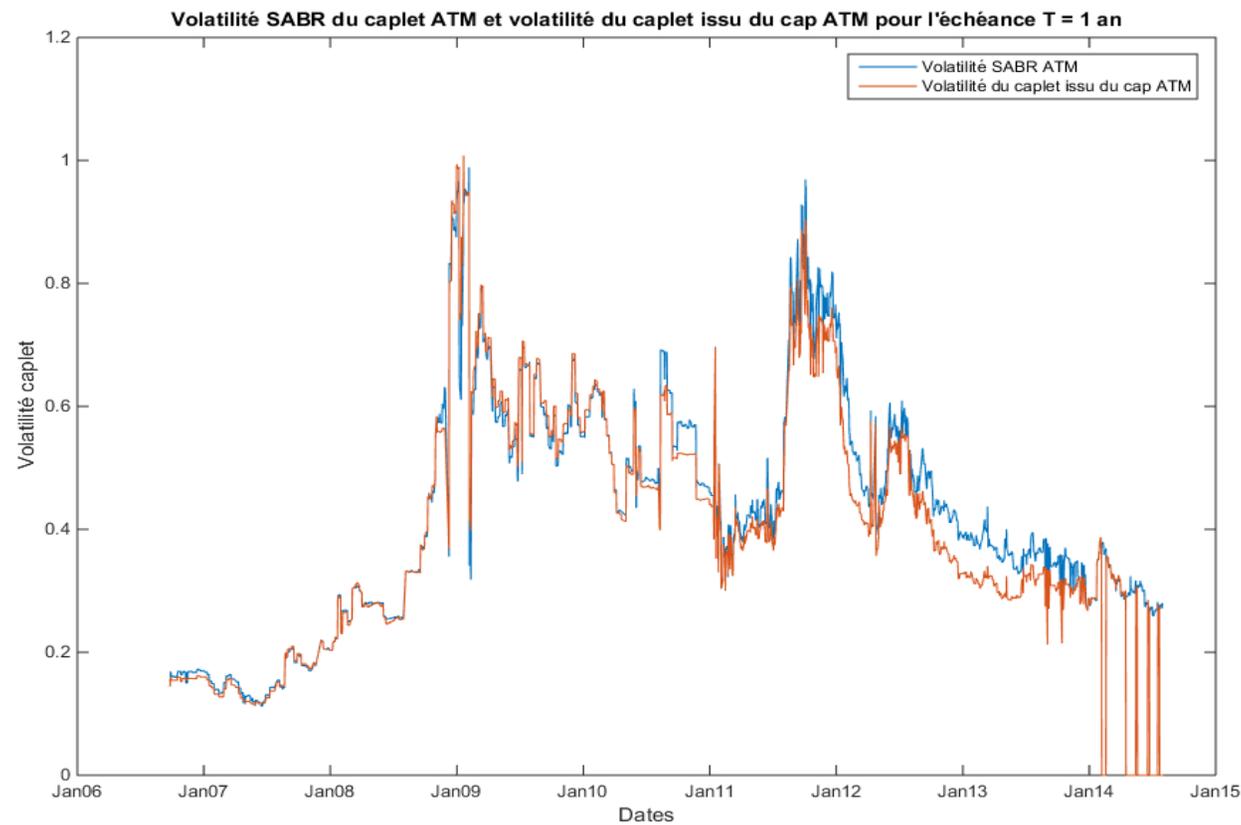


Tableau 3-4 - Statistiques descriptives des différences entre les volatilités SABR des caplets ATM et des volatilités des caplets issues des caps ATM.

Ce tableau présente les principales statistiques des différences en absolu entre les volatilités SABR des caplets ATM et des volatilités des caplets issues des caps ATM pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014. À noter que les statistiques suivantes ne contiennent pas les anomalies de volatilités caplets issues du *bootstrapping*.

	Échéances (en années)								
	0,25	0,5	1	2	4	5	6	8	9,75
Statistiques descriptives des différences en absolue entre les volatilités SABR des caplets ATM et des volatilités des caplets issues des caps ATM									
Moyenne	0,0205	0,0251	0,0245	0,0298	0,0647	0,0791	0,0877	0,1113	0,1220
Minimum	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000
Maximum	0,2744	0,4627	0,1393	0,1688	0,3486	0,4074	0,4194	0,4174	0,4942
Écart-type	0,0351	0,0418	0,0249	0,0273	0,0562	0,0653	0,0701	0,0861	0,0934

### 3.6 Calcul de l'indice de volatilité

Après avoir construit la structure à terme des taux d'intérêt canadiens, extrait les volatilités caplets/floorlets des volatilités des caps/floors et modélisé le *smile* de volatilité du marché canadien, il s'agit de calculer l'indice de volatilité.

#### 3.6.1 Présentation du calcul

En reprenant et adaptant les travaux de Mele et Obayashi (Appendice C, 2012) aux caplets et floorlets, les formules de calcul l'indice de volatilité sont les suivantes:

$$IVC^{BP}(0, T_\alpha) = 100^2 \times \sqrt{\frac{2}{T_\alpha P(0, T_{\alpha+1})} \times \left[ \int_{K=0.01}^{K=F(\cdot)-\varepsilon} flt(F(\cdot), \sigma_{SABR}, K, T_\alpha) dK + \int_{K=F(\cdot)}^{0.15} clt(F(\cdot), \sigma_{SABR}, K, T_\alpha) dK \right]} \quad (18)$$

où  $IVC^{BP}$  est l'indice de volatilité en point de base, du marché des taux d'intérêt canadiens d'échéance  $T_\alpha$ .

$$IVC^n(0, T_\alpha) = 100 \times \sqrt{\frac{2}{T_\alpha P(0, T_{\alpha+1})} \times \left[ \int_{K=0.01}^{K=F(\cdot)-\varepsilon} \frac{flt(F(\cdot), \sigma_{SABR}, K, T_\alpha)}{K^2} dK + \int_{K=F(\cdot)}^{0.15} \frac{clt(F(\cdot), \sigma_{SABR}, K, T_\alpha)}{K^2} dK \right]} \quad (19)$$

où  $IVC^n(0, T_\alpha)$  est l'indice de volatilité en pourcentage du marché des taux d'intérêt canadiens d'échéance  $T_\alpha$ .

Ainsi, d'après la formule (19), on constate que le calcul de l'indice en pourcentage est effectué en échelonnant les prix des PDTI OTM par leur prix d'exercice au carré puis en ajustant la volatilité par un facteur de 100.

Comme précisé dans la section 3.5, les calculs du VIX et du SRVX sont réalisés de manière approximative. En effet, d'après l'étude de Jiang et al. (2007), en

discrétisant les intégrales de l'équation (18) avec des prix d'exercices allant du plus faible au plus élevé parmi ceux observés sur le marché américain, ces indices introduisent un biais de discrétisation et de troncature significatif. Néanmoins, tel que suggéré dans leurs travaux, il est possible d'améliorer la précision des volatilités implicites estimées en calculant l'indice de façon quasi continue. Dès lors, les auteurs soulèvent deux aspects qui ne sont pas à négliger : comment choisir les bornes d'intégration du calcul d'un indice de volatilité? Comment discrétiser les intégrales de prix présentes dans ce calcul? Malheureusement, il n'existe pas de réponse indiscutable à ces questions. Pour le marché des produits dérivés sur actions, Jiang et Tian (2005) mettent en évidence qu'à partir de 3,5 écarts-types du prix *forward* sous-jacent, les erreurs de troncature ne sont plus significatives, que ce soit celles liées à la borne inférieure ou celles liées à la borne supérieure de l'intégrale du calcul du VIX. Par ailleurs, ils stipulent qu'en utilisant une procédure numérique d'intégration trapézoïdale avec un nombre de points entre les bornes d'intégrations de  $\eta = 100$ , les erreurs de discrétisation sont négligeables.

Dans le cadre de la recherche sur les PDTI canadiens, les bornes d'intégration ont été définies de manière conservatrice. Lorsque le taux  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  est entre 1% et 15%, la borne minimum d'intégration du prix des floorlets est de 1% et la borne maximum du prix des caplets est de 15%. Lorsque le taux  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  est inférieur à 1%, comme cela est le cas particulièrement après la crise financière 2007-2008, on élimine les prix de floorlets de l'indice qui représente désormais l'intégrale du prix des caplets allant du prix d'exercice correspondant au taux du  $FRA(0, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  jusqu'à 15%. En éliminant les prix de floorlets dont le taux sous-jacent est inférieur à 1%, la présente recherche évite certains problèmes de modélisation issus de la calibration du modèle SABR de la section 3.5.2. En effet, selon Obloj (2007), une des limites principales du modèle SABR est que l'estimation des paramètres pour des prix d'exercices très faibles peut mener à des volatilités négatives. En adéquation avec son étude, les résultats de la modélisation du *smile* de volatilité de la section 3.5.3 soulèvent qu'il est imprudent d'extrapoler les volatilités caplets pour des prix d'exercices qui sont excessivement à l'extérieur

des bornes [1%–15%]. Ainsi, en utilisant le critère précédemment établi, on exclut toute présence de volatilités négatives qui biaiseraient considérablement le calcul de l'indice de volatilité.

Enfin, l'intégrale du calcul de l'indice a été calculée par le biais de la règle de Simpson en prenant 1000 points d'intégration, comme préconisé par Trolle (2009), ce qui réduit les erreurs de discrétisation. La présente étude calcule l'indice de volatilité du marché canadien pour les échéances allant de 1 à 9,75 ans à une fréquence trimestrielle.

### 3.6.2 Résultats

La Figure 3-10 illustre les indices de volatilité calculés pour les échéances allant de 1 à 9,75 ans. Intuitivement on remarque que pendant la crise financière 2007-2008 la volatilité du marché des taux d'intérêt canadien a drastiquement augmenté. En effet, comme le souligne Whaley (2000), un indice de volatilité permet de jauger la peur des investisseurs. Ainsi, on peut interpréter les périodes de haute volatilité comme des phases où les intervenants du marché anticipent un avenir relativement incertain. Qui plus est, on observe que les niveaux de volatilité sont plus grands pour la période 2008-2012, ce qui est aussi observable sur d'autres indices tel que le VIXC. Ceci s'explique particulièrement par des conditions de marchés tumultueuses en Amérique du Nord durant ces années.

Toutefois, l'indice de volatilité construit et le VIXC sont des objets complètement différents. En effet, le VIXC dépend d'opérateurs de marché sur les actions et sur les produits dérivés sur actions alors que l'indice de volatilité de la présente recherche découle d'opérateurs de marché sur les taux swaps et sur les instruments qui s'y rattachent. Les facteurs déterminants de ces marchés sont très différents et reflètent ainsi des anticipations distinctes de la part de leurs intervenants respectifs.

Comme le montre Chun (2010), les variations des taux d'intérêt sont fortement reliées à certaines variables macroéconomiques telles que l'inflation attendue, les prévisions de croissance du PIB et les actions anticipées de la banque centrale en matière de politique monétaire. Dans son étude, il met en évidence que la politique monétaire, les variables macroéconomiques ci-dessus et les fluctuations des taux d'intérêt forment un trio interdépendant. En effet, d'après ses résultats, la banque centrale établit la politique monétaire de manière préventive par rapport à l'inflation attendue, alors que celle-ci s'adapte aux prévisions de la croissance du PIB et aux anticipations du marché de sa propre politique. Par ailleurs, Chun (2010), souligne que la politique monétaire agit directement sur les taux à court terme par le biais d'opérations sur le marché libre, mais que cela entraîne indirectement des mouvements sur toute la structure à terme des taux d'intérêt puisque les intervenants du marché forcent les taux de chaque échéance à répondre aux changements des taux à court terme. Enfin, dans son étude, il montre que la variation des taux d'intérêt à long terme est causée principalement par les perspectives d'inflation et que les prévisions de croissance du PIB jouent un rôle important dans les variations des taux d'intérêt à moyen et à long terme.

Parallèlement, Beber et Brandt (2006) montrent que les variations des taux d'intérêt dépendent de changements dans les anticipations de variables macroéconomiques<sup>3</sup> et de changements dans les préférences pour le risque des investisseurs. En effet, en comparant les prix d'état d'obligations inférés du prix d'options sur contrats *futures* d'obligations gouvernementales américaines, avant et après l'annonce d'une nouvelle macroéconomique, ils obtiennent des résultats très intéressants. Ils constatent qu'en moyenne, après l'annonce, la volatilité du prix d'état diminue, quel que soit le contenu de l'information, mais que les changements d'asymétrie et d'aplatissement de ces prix d'état dépendent du caractère bon ou mauvais de cette nouvelle pour les perspectives économiques. Particulièrement, une bonne nouvelle pour les perspectives économiques est associée en moyenne, à une

---

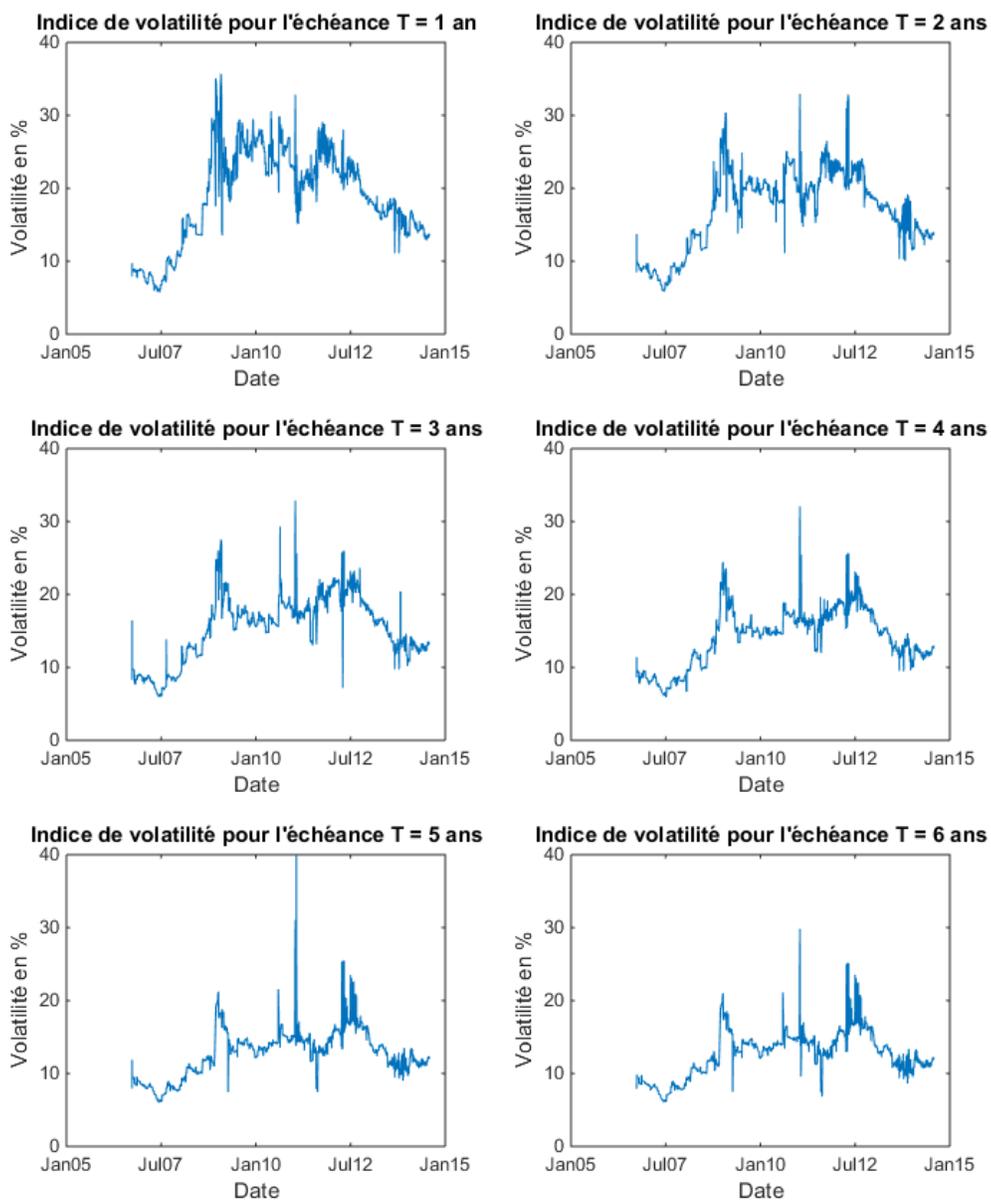
<sup>3</sup> Beber et Brandt (2006) étudient les effets de l'annonce 10 variables macroéconomiques américaines telles que le Consumer Price Index (CPI), le Producer Price Index (PPI), l'Industrial Production (IP), le Civilian Unemployment rate (CUR) etc.

diminution de l'asymétrie négative et du coefficient d'aplatissement des prix d'état. Enfin, Beber et Brandt (2006) mettent en évidence que les bonnes nouvelles pour les perspectives économiques mènent les investisseurs à devenir moins averse au risque. Ainsi, les changements dans les anticipations des variables économiques et les changements dans les préférences pour le risque expliquent les fluctuations dans les prix d'état et donc dans les taux d'intérêt.

Depuis fin 2012, on remarque que la Figure 3-10 exhibe des niveaux de volatilité en baisse. Cette période correspond notamment à un regain de confiance de la part des consommateurs et, a posteriori, des investisseurs. À titre informatif, les indices de confiance des consommateurs canadiens établis par la *Conference Board of Canada* sont en hausse depuis cette période, The Conference Board of Canada (2015). À noter que l'on constate certaines dates où l'on a des pics et des creux de volatilité. Malheureusement, il est difficile de décerner si ce phénomène provient d'événements marquants, de problèmes de modélisation ou d'anomalies dans les données.

Le tableau 3-5 présente les statistiques descriptives des indices de volatilité du marché des taux d'intérêt canadien. On peut souligner deux points importants. Dans un premier temps, on constate que la moyenne de l'indice calculé diminue en fonction de l'échéance. Ceci s'explique notamment par le fait que les structures à termes moyennes de volatilités caplets/floorlets visibles à la Figure 3-8 diminuent en fonction de l'échéance. Deuxièmement, on remarque l'écart-type des valeurs d'indice diminue, lui aussi, en fonction de l'échéance. Ce phénomène provient probablement du caractère dilutif d'une nouvelle information sur les produits de longue échéance. En effet, une nouvelle information sur les conditions de marché a un poids plus important sur la volatilité d'un produit d'échéance courte que longue. Ceci s'explique en partie par le fait que les probabilités qu'il y ait une information subséquente qui pourrait changer le profil de gains/pertes est plus faible pour les produits dont la date d'expiration est proche. Pour finir, on observe que les indices possèdent de faibles coefficients d'asymétries et d'aplatissement qui suggèrent une distribution quasi gaussienne de l'indice.





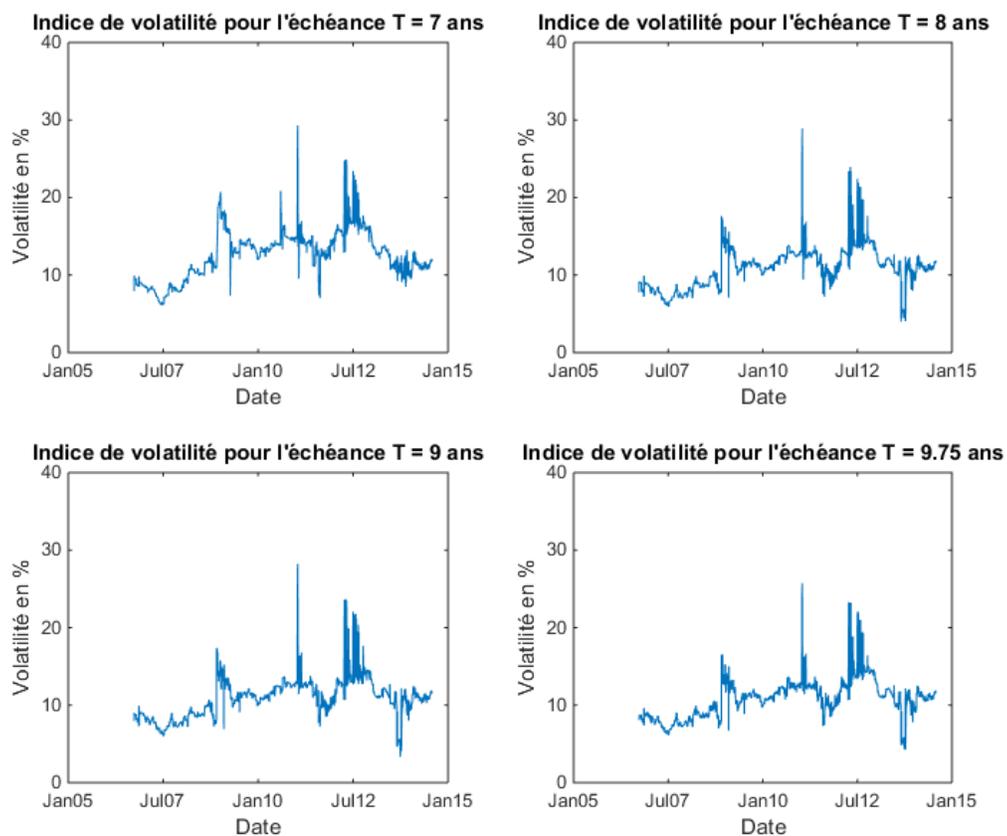


Figure 3-10 - Indices de volatilité du marché des taux d'intérêt canadien.

Cette figure permet de visualiser les indices de volatilité, exprimés en pourcentages. Ces derniers ont été obtenus via la méthodologie du chapitre 3. Les échéances 1 à 9,75 ans sont présentées annuellement pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014.

Tableau 3-5 - Statistiques descriptives des indices de volatilité du marché des taux d'intérêt canadien.

Ce tableau présente les principales statistiques descriptives des indices de volatilité exprimés en pourcentage et obtenus via la méthodologie du chapitre 3. Les échéances 1 an à 9,75 ans sont présentées trimestriellement pour la période allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014.

Échéance (en années)	Statistiques descriptives de l'indice de volatilité						
	Moyenne	Médiane	Minimum	Maximum	Écart-type	Asymétrie	Applatissement
1	18,9624	19,5773	5,8028	35,7158	6,4644	-0,2349	2,2433
1,25	18,9608	19,6368	5,8266	35,9699	6,4781	-0,1920	2,2297
1,5	18,9001	19,4856	5,8516	35,9574	6,4403	-0,1506	2,2323
1,75	18,8213	19,3462	5,8754	35,8196	6,3786	-0,1139	2,2405
2	17,1601	18,1966	5,8717	32,9459	5,2976	-0,2779	2,3941
2,25	17,0874	18,0343	5,8913	32,6847	5,2604	-0,2493	2,3789
2,5	17,0167	17,8845	5,9125	32,4400	5,2217	-0,2234	2,3650
2,75	16,9490	17,7758	5,9349	32,2110	5,1829	-0,2002	2,3516
3	15,4249	16,1342	6,0011	32,8694	4,4787	-0,1224	2,5795
3,25	15,3731	16,0379	6,0342	32,6330	4,4485	-0,1007	2,5593
3,5	15,3242	15,9576	6,0682	32,4051	4,4192	-0,0807	2,5399
3,75	15,2776	15,8743	6,1028	32,1840	4,3910	-0,0621	2,5209
4	14,1195	14,7013	5,9526	32,0734	3,8900	-0,0016	2,7767
4,25	14,0838	14,6353	5,9835	31,8643	3,8661	0,0149	2,7583
4,5	14,0496	14,5769	6,0145	31,6596	3,8431	0,0303	2,7400
4,75	14,0170	14,5235	6,0456	31,4587	3,8211	0,0448	2,7218
5	12,8009	13,1246	6,0170	39,8706	3,2632	0,6478	6,3075
5,25	12,7737	13,0812	6,0520	39,4245	3,2422	0,6527	6,2172
5,5	12,7475	13,0516	6,0872	38,9937	3,2222	0,6571	6,1294
5,75	12,7223	13,0124	6,1222	38,5760	3,2029	0,6609	6,0431
6	12,6543	12,9383	6,0299	29,8548	3,1153	0,3646	4,0008

Échéance (en années)	Statistiques descriptives de l'indice de volatilité						
	Moyenne	Médiane	Minimum	Maximum	Écart-type	Asymétrie	Applatissement
6,25	12,6288	12,9009	6,0532	29,6684	3,1016	0,3864	4,0501
6,5	12,6030	12,8674	6,0765	29,4865	3,0845	0,3955	4,0430
6,75	12,5746	12,8358	6,0996	29,3077	3,0614	0,3960	4,0289
7	10,9706	11,1570	4,0340	29,4159	2,6719	0,9467	7,4851
7,25	10,9418	11,1232	4,0151	29,2460	2,6480	0,9340	7,4478
7,5	10,9154	11,0939	3,9943	29,0789	2,6316	0,9413	7,4880
7,75	10,8814	11,0604	3,9764	28,9154	2,5925	0,8717	7,0981
8	10,9216	11,1057	3,4113	28,7221	2,5817	0,9091	7,5075
8,25	10,8865	11,0642	3,3793	28,5649	2,5519	0,8890	7,3944
8,5	10,8553	11,0422	3,3486	28,4097	2,5313	0,9170	7,5900
8,75	10,8285	11,0122	3,3186	28,2572	2,5159	0,9431	7,6320
9	10,8534	11,0604	4,3428	27,8158	2,4912	0,9512	7,4827
9,25	10,8182	11,0216	4,3245	26,0535	2,4932	0,9345	7,0876
9,5	10,7888	11,0058	4,3033	25,8917	2,4759	0,9421	7,2016
9,75	10,7679	10,9856	4,2851	25,7393	2,4706	0,9217	7,0985

### 3.7 Cas du *dual curve pricing*

Tel qu'énoncé dans la section 3.3, la présente recherche se réalise dans un cadre d'évaluation appelé *single curve pricing*. À cet effet, les taux CDOR sont utilisés, à la fois pour les règlements et pour l'actualisation des flux monétaires des caplets et des floorlets. Cet environnement suppose que les prix d'obligations zéro-coupon issus des taux CDOR sont sans risque de crédit. Cependant, comme le suggèrent Hull et White (2013), depuis la crise financière de 2007-2008, les praticiens se sont lentement tournés vers un cadre d'évaluation appelé *dual curve pricing*. En effet, suite aux changements structurels dans les taux d'intérêt provoqués par des événements tels que la faillite de la banque Lehman Brother en septembre 2008, on observe un accroissement des écarts entre les taux LIBOR et les taux Overnight Index Swap (OIS). Ce fait historique met en évidence que les taux LIBOR incluent un risque de crédit, indésirable pour des fins d'évaluation de produits dérivés. Dans leur étude, Hull et White (2013) précisent qu'il n'existe pas de taux sans risque à proprement dit, mais que le taux OIS est certainement le meilleur proxy disponible actuellement.

L'indice de volatilité présenté sera calculé dans un cadre d'évaluation *single curve pricing* pour deux raisons principales. Premièrement, tant aux États-Unis qu'au Canada, il n'y a pas de date exacte à partir de laquelle les opérateurs de marchés ont changé de méthode d'évaluation pour les caps. C'est une phase de transition qu'il s'avère difficile de délimiter étant donné que ce marché est OTC, d'autant plus que cette transition s'est très probablement effectuée plus rapidement aux États-Unis qu'au Canada. Vraisemblablement, le *dual curve pricing* s'est développé fin 2011-début 2012 au Canada ce qui suggère qu'il faudrait utiliser des méthodologies différentes au sein de l'échantillon étudié. Deuxièmement, le niveau de complexité impliqué par le cadre du *dual curve pricing* n'en mérite pas, selon nous, les potentiels résultats plus précis. Comme le montrent Bianchetti et Carlicchi (2011), les erreurs d'évaluation des caps liées au *single curve pricing* seraient d'approximativement de 5 à 10 points de base en termes de volatilité implicite.

Toutefois, dans une perspective plus long-terme, il semble important de souligner que le *dual curve pricing* est désormais une pratique incontournable dans le marché. En se s'appuyant sur les articles de Mercurio (2010) et de Bianchetti et Carlicchi (2011), il serait possible de réaliser le présent travail dans un cadre d'évaluation en *dual curve pricing*. En effet, il s'agirait tout d'abord d'adapter la formule de Mele et Obayashi (2012) afin de tenir compte des changements de mesures probabilistes. Par ailleurs, il faudrait utiliser les formules d'évaluation des caplets et floorlets, ainsi qu'une version modifiée du modèle SABR en utilisant les entrants appropriés. L'idée des formules reste les mêmes, mais il s'agit ici de considérer les changements de mesures probabilistes impliqués par le fait que l'on utilise deux produits différents pour l'actualisation et le règlement.

## 4. Conclusion

La présente étude examine la possibilité d'implanter un indice de volatilité du marché des taux d'intérêt dans un contexte canadien. Les données disponibles sur les PDTI canadiens permettent effectivement de construire un indice relativement robuste en adaptant la méthodologie décrite dans l'étude de Mele et Obayashi (2012) au marché des caps de taux d'intérêt. Ainsi, la Bourse de Montréal pourrait fournir un outil qui permettrait aux intervenants du marché d'analyser de manière transparente, une mesure standardisée de la volatilité des taux d'intérêt forward au Canada. Cet indice a été réalisé en quatre étapes successives. Dans un premier temps, nous avons construit la structure à terme des taux d'intérêt canadiens à l'aide d'une méthode de *bootstrapping* de taux d'intérêt. En second lieu, on a extrait les volatilités caplets des volatilités des caps cotés par le biais d'un *volatility bootstrapping* réalisé selon une procédure constante par morceau. Troisièmement, nous avons modélisé le *smile* de volatilité du marché canadien grâce au modèle SABR. Enfin, après avoir rassemblé tous les résultats intermédiaires, nous avons calculé les valeurs de l'indice pour les échéances 1 à 9,75 ans.

La présente recherche soulève plusieurs problèmes, dont celui de la liquidité, rencontré spécifiquement sur le marché des PDTI canadiens. En fait, cette question de liquidité fut un point central de notre étude. Après un travail de nettoyage des données et d'ajustement de la procédure de modélisation du *smile* de volatilité des caplets, nous proposons un indice de volatilité pertinent et facile à reconstruire avec des caps de taux d'intérêt de n'importe quel marché suffisamment liquide. Par ailleurs, l'éventail de modèles et de procédures disponibles lors de chaque étape de la construction de l'indice a alourdi considérablement la charge de travail en sachant que chaque méthode possède ses qualités et ses défauts. Dès lors, dans le cadre de cette recherche, nous avons dû peser le pour et le contre de chaque méthode pour chaque étape de calcul et trouver une combinaison qui donne des résultats cohérents. Les résultats de la recherche exhibent une cohésion entre la

procédure de *volatility bootstrapping* constante par morceau et la méthode de calibration du *smile* de volatilité des caplets via le modèle SABR. Cependant cette cohérence semble être discutable lorsque l'on étudie les caplets qui constituent le cap 1 an et ceux qui constituent les caps d'une échéance supérieure à 6 ans. Encore une fois, on peut remettre en question la liquidité des volatilités caps utilisées, ainsi que la validité du modèle SABR pour des échéances et des prix d'exercices extrêmes. Par ailleurs, les valeurs d'indices calculés sont en adéquation avec les conditions de marchés observées au Canada. À savoir, on constate une hausse des niveaux de volatilité pour la période 2008-2012 qui vont de pair avec la crise financière et les changements structurels des taux d'intérêt. Enfin tel qu'envisagé, on remarque que la moyenne et l'écart-type de l'indice calculé diminuent en fonction de l'échéance des produits utilisés. Ce phénomène est en cohérence avec le fait que les taux à long terme varient généralement moins.

Les avenues de recherche à explorer sont nombreuses et très intéressantes d'un point de vue du comportement des marchés des taux d'intérêt. En effet, il serait intuitif de comparer ces indices de volatilités implicites calculées avec les volatilités réalisées du marché. La différence entre ces deux objets représente la prime de risque que l'opérateur de marché facture à son client. Ainsi, il serait pertinent d'étudier les comportements de cette prime afin de pouvoir la modéliser et mieux cerner les fonctions d'utilités de ces opérateurs de marché. Par ailleurs, il serait intéressant de reproduire ce travail avec les données d'un autre marché afin de pouvoir étudier les chocs réels ou monétaires spécifiques à chacun des deux marchés. Enfin, il serait envisageable d'étudier la sensibilité de l'indice en fonction des différentes procédures offertes qui pourraient constituer les quatre étapes du projet.

## 5. Annexes

### A. Notions sur les PDTI

L'objectif de cette annexe est d'introduire différentes notions utiles à la compréhension du projet de recherche tout en présentant les notations associées à certains produits dérivés sur taux d'intérêt. À noter que pour cette annexe,  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  ne sont pas nécessairement des échéances de fréquences trimestrielles.

#### A.1. Taux CDOR

Le *Canadian Dealer Offered Rate* (CDOR) sert de taux de référence pour le marché monétaire canadien, plus précisément, pour les contrats d'acceptations bancaires d'échéances inférieures à un an. En fait, le CDOR n'est autre que la version canadienne du *London Interbank Offered Rate* (LIBOR), qui est le taux de référence auquel les plus grandes banques de Londres se facturent entre elles, pour des prêts à court terme libellés en cinq devises différentes<sup>4</sup>. Ainsi, comme le LIBOR, le CDOR est déterminé quotidiennement à partir d'un sondage auprès de sept banques canadiennes<sup>5</sup>. L'organisme responsable de surveiller la gouvernance et le contrôle interne de ce processus suivi par les banques est le Bureau du Surintendant des Institutions Financières (BSIF). Par ailleurs, le taux CDOR est

---

<sup>4</sup> À savoir, le dollar américain (USD), l'euro (EUR), la livre sterling (GBP), le yen japonais (YEN) et le franc Suisse (CHF)

<sup>5</sup> Ces banques sont les suivantes : Banque HSBC Canada, BMO Nesbitt Burns, Financière Banque Nationale, Marchés mondiaux CIBC, RBC Dominion valeurs mobilières, Scotia Capitaux Inc. Et Valeurs Mobilières TD Inc.

aussi le taux de référence pour le marché des produits dérivés étant donné qu'il sert de prix de règlement final pour les contrats à terme transigés à la Bourse de Montréal tels que le BAX<sup>6</sup> ou l'OBX<sup>7</sup> et pour les produits dérivés OTC tels que les FRA ou les *swaps*, présentés ci-après.

La méthodologie du sondage utilisée afin de déterminer les taux CDOR est sensiblement la même que celle employée pour son homologue anglais. À savoir, pour chaque échéance (un jour, un mois, deux mois, trois mois, six mois et un an), chaque banque canadienne fait part du taux auquel elle envisage de prêter à une autre des banques du sondage des dollars canadiens (CAD). Ensuite, le taux CDOR de chaque échéance est déterminé à l'aide de la moyenne arithmétique des taux fournis par le sondage, en excluant les cours acheteurs les plus élevés et les plus faibles.

## A.2. Swap de taux d'intérêt

De manière générale, un swap de taux d'intérêt est un contrat transigé OTC dans lequel deux contreparties s'engagent à échanger des flux monétaires à une fréquence de paiement déterminée et jusqu'à une date d'échéance donnée. Ces flux monétaires sont échangés sur la base d'un taux de référence associé à un montant notionnel, par exemple, le taux LIBOR aux États-Unis ou le taux CDOR au Canada. On distingue la position longue, qui est la contrepartie qui s'engage à payer un montant fixe à une certaine fréquence de paiement ainsi que la position courte, qui est la contrepartie qui s'engage à payer un montant variable à cette même fréquence de paiement.

---

<sup>6</sup> Aux États-Unis, les équivalents des contrats BAX sont les contrats *futures* sur Eurodollars.

<sup>7</sup> Les contrats d'options OBX sont des options sur le BAX.

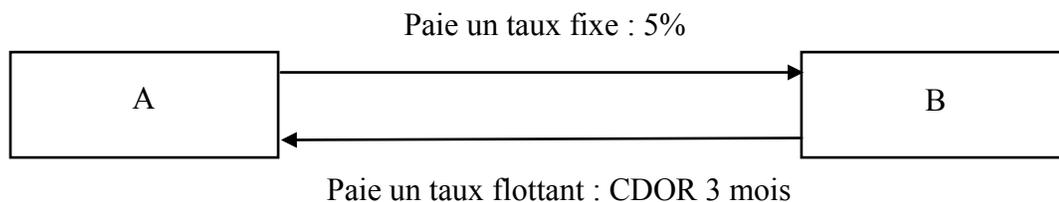


Figure 5-1 - Structure d'un swap de taux d'intérêt

Cette figure illustre un swap de taux d'intérêt dans lequel la contrepartie A paie un taux d'intérêt fixe de 5% sur un notionnel de 10 millions de dollars à la contrepartie B et la contrepartie B paie un taux d'intérêt variable, soit le CDOR 3 mois, à la contrepartie A sur ce même montant notionnel pendant toute la durée du contrat.

Le taux  $Swap(0, T_\beta)$  où  $T_\beta$  est la date d'échéance du contrat swap, correspond au taux d'intérêt fixe du contrat, qui est défini de manière à ce que, à l'initiation, la valeur du contrat swap soit égale à zéro : En date  $t = 0$ ,

$$Swap(0, T_\beta) = \frac{1 - P(0, T_\beta)}{\sum_{i=1}^{\beta} P(0, T_i)} \times \frac{1}{\tau} \quad (20)$$

où  $\tau$  est la fréquence des paiements par année,  $P(0, T_\beta)$  est le prix d'une obligation zéro-coupon ayant pour échéance la date  $T_\beta$  sur un notionnel de 1\$ et les  $i$  représentent chaque échange de flux monétaire de la patte fixe du contrat swap. Généralement, au Canada et aux États-Unis, la fréquence des paiements est semi-annuelle alors qu'en Europe, celle-ci est annuelle.

Ainsi, à chaque date de versement, lorsque la fréquence des paiements de la patte fixe correspond à la fréquence de règlement de la patte flottante, le paiement net de la position longue  $\Pi_{T_i}$  correspond à la différence entre le taux d'intérêt fixe et le taux d'intérêt flottant de référence qui prévaut sur la période passée. En date de versement  $T_i$ ,

$$\Pi_{T_i} = [Swap(0, T_\beta) - CDOR(T_{i-1}, T_i)] \times N\tau \quad (21)$$

où  $N$  correspond à la valeur notionnelle du contrat swap et  $CDOR(T_{i-1}, T_i)$  est le taux d'intérêt CDOR qui prévaut sur la période  $T_{i-1}$  à  $T_i$ .

### A.3. Forward start swap

Un forward start swap est un contrat à terme OTC dans lequel une partie s'engage à entrer dans un swap à une date future fixée. La position longue forward start swap s'engage à devenir le payeur du taux fixe du swap dans le futur et la position courte s'engage à devenir le payeur du taux flottant du swap dans le futur. Comme pour le swap, le taux d'un forward start swap  $FS(0, T_\alpha, T_\beta)$  est défini de manière à ce qu'à l'initiation, la valeur du contrat soit égale à zéro. En date  $t = 0$ ,

$$FS(0, T_\alpha, T_\beta) = \frac{P(0, T_\alpha) - P(0, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i)} \times \frac{1}{\tau} \quad (22)$$

où  $T_\alpha$  correspond, à la fois, à l'expiration du contrat forward start swap et à l'initiation du contrat  $Swap(T_\alpha, T_\beta)$ .

Ainsi, en  $T_\alpha$ , en AOA, la convergence du prix *forward* vers le prix *spot* implique que l'on a :

$$FS(T_\alpha, T_\alpha, T_\beta) = \frac{P(T_\alpha, T_\alpha) - P(T_\alpha, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i)} \times \frac{1}{\tau} = Swap(T_\alpha, T_\beta). \quad (23)$$

Généralement, la position forward start swap est réglée au comptant à l'expiration du contrat à terme. Ainsi, la différence entre le taux réalisé  $Swap(T_\alpha, T_\beta)$  et le taux d'exercice anticipé en  $t = 0$  du contrat  $FS(0, T_\alpha, T_\beta)$  est actualisée et payée en  $T_\alpha$ , ce qui représente le paiement net de la position longue.

À l'expiration, en date  $T_\alpha$ , le paiement net de la position longue d'un forward start swap est :

$$\Pi_{T_\alpha} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \times [FS(T_\alpha, T_\alpha, T_\beta) - FS(0, T_\alpha, T_\beta)] \times N\tau \quad (24)$$

où, en AOA,  $FS(T_\alpha, T_\alpha, T_\beta)$  représente le taux du  $Swap(T_\alpha, T_\beta)$  en  $T_\alpha$  et  $FS(0, T_\alpha, T_\beta)$  représente le prix d'exercice du contrat à terme.

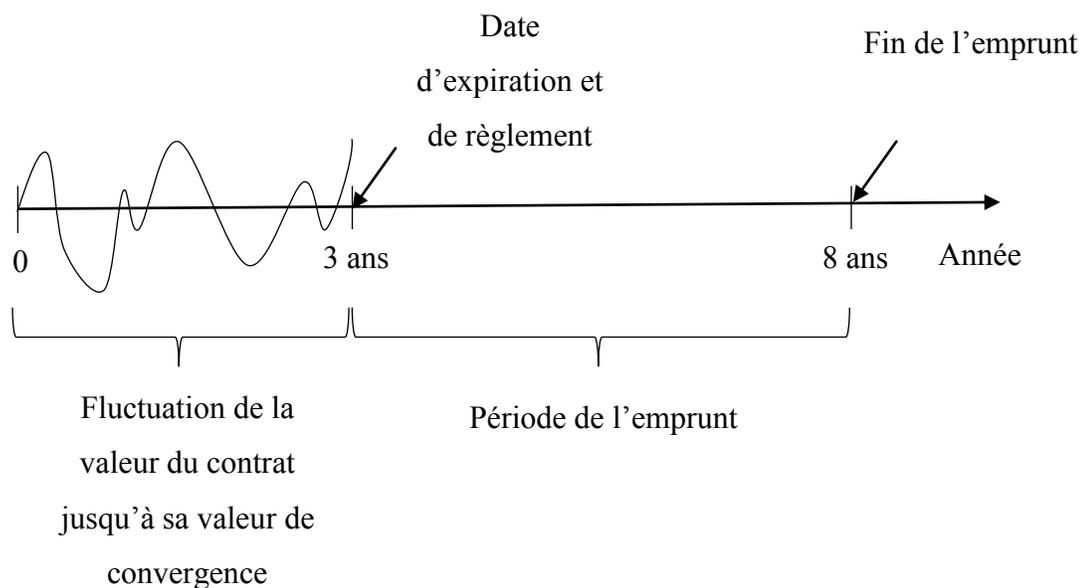


Figure 5-2 - Diagramme temporel d'un contrat forward start swap

Cette figure illustre le diagramme temporel d'un contrat forward start swap expirant dans 3 ans, pour un swap de 5 ans.

## A.4. Swaptions

Un swaption européen est une option OTC qui procure à l'acheteur le droit d'entrer dans un forward start swap en tant que payeur fixe ou receveur fixe du swap sous-jacent à l'expiration de l'option. Le détenteur d'un payeur swaption a le droit de d'entrer dans la position longue forward start swap. De manière alternative, le détenteur d'un swaption receveur a le droit d'entrer dans la position courte forward

start swap. Le prix d'une telle option est généralement coté à l'aide de la formule de Black (1976). En date  $t$ ,

$$Swaption_p(t, T_\alpha, T_\beta) = N\tau \times \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \times [FS(\cdot)\phi(d_1) - K\phi(d_2)] \quad (25)$$

$$Swaption_r(t, T_\alpha, T_\beta) = N\tau \times \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \times [K\phi(-d_2) - FS(\cdot)\phi(-d_1)] \quad (26)$$

où  $Swaption_p(t, T_\alpha, T_\beta)$  est le prix d'un swaption payeur et  $Swaption_r(t, T_\alpha, T_\beta)$  est le prix d'un swaption receveur dont  $FS(\cdot)$  est le taux du forward start swap sous-jacent, soit  $FS(t, T_\alpha, T_\beta)$  et  $K$  est le taux d'exercice du swaption,  $\phi(x)$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,  $T_\alpha$  est la date d'expiration du swaption et

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{FS(\cdot)}{K}\right) + \frac{\sigma^2 T_\alpha}{2}}{\sigma\sqrt{T_\alpha}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_\alpha}$$

où  $\sigma$  est la volatilité de Black (1976) du forward start swap de  $t$  à  $T_\alpha$ .

## A.5. Forward rate agreements

Un *forward rate agreement* (FRA) est contrat à terme OTC portant sur un taux de référence qui est généralement le taux LIBOR aux États-Unis ou le taux CDOR au Canada. La position longue FRA s'engage à emprunter dans le futur à un taux fixé aujourd'hui et la position courte FRA s'engage à prêter dans le futur à un taux fixé aujourd'hui. Le taux d'un  $FRA(0, T_\alpha, T_\beta)$  est établi de manière à ce qu'à l'initiation, la valeur du contrat soit de zéro. En date  $t = 0$ ,

$$FRA(0, T_\alpha, T_\beta) = \frac{P(0, T_\alpha) - P(0, T_\beta)}{P(0, T_\beta)} \times \frac{1}{\tau} \quad (27)$$

Ainsi, en date  $T_\alpha$ , en AOA, la convergence du prix *forward* vers le prix *spot* implique que l'on a :

$$CDOR(T_\alpha, T_\beta) = FRA(T_\alpha, T_\alpha, T_\beta) \quad (28)$$

Encore une fois, habituellement, la position FRA est réglée au comptant en date  $T_\alpha$ . Ainsi, la différence entre le taux auquel la partie s'est engagée à emprunter et le taux de référence prévalent sur la période de l'emprunt est échangée à expiration du contrat, en  $T_\alpha$ . À l'expiration, en date  $T_\alpha$ , le paiement net de la position longue FRA est :

$$\Pi_{T_\alpha} = P(T_\alpha, T_\beta) \times [CDOR(T_\alpha, T_\beta) - FRA(0, T_\alpha, T_\beta)] \times N\tau. \quad (29)$$

En faisant un parallèle avec un contrat forward start swap, on constate qu'un FRA est en fait un cas particulier d'un forward start swap. En effet, la position longue FRA s'engage à être payeur fixe d'un swap ayant une seule date de versement. Ainsi, il est possible de montrer qu'un forward start swap est équivalent à un portefeuille de FRA.

Il est important de noter que les *futures* sur Eurodollar et le BAX sont les homologues des FRA, transigés de manière centralisée respectivement au CBOE et à la Bourse de Montréal. Même si les cotations diffèrent sensiblement entre le marché OTC et standardisé, l'esprit de ces contrats reste le même.

## A.6. Caplets et floorlets de taux

Un caplet est une option plafond OTC qui fixe un taux d'intérêt maximum futur pour un FRA. Un caplet est structuré de manière similaire à une option d'achat européenne pour laquelle l'échéance de l'option coïncide avec la date de règlement du FRA. Par analogie, un floorlet européen est une option plancher OTC portant sur un FRA. Comme pour les swaptions, le prix d'un caplet ou d'un floorlet est coté en

termes de volatilité de Black (1976). Néanmoins, il est primordial de souligner deux particularités de ces options. Premièrement, les caplets et les floorlets ne sont pas négociés directement sur les marchés, mais sont respectivement négociés indirectement par l'intermédiaire des caps et des floors que le chapitre présente ci-après. Deuxièmement, la date de versement du flux monétaire de ces options est une période après la date de règlement, ce qui se répercute dans la manière d'actualiser les flux monétaires. Ainsi, en date  $t$ , le prix d'un caplet et d'un floorlet est :

$$cIt(t, T_\alpha, T_{\alpha+1}) = N\tau \times P(t, T_{\alpha+1}) \times [F(\cdot)\phi(d_1) - K\phi(d_2)] \quad (30)$$

$$fIt(t, T_\alpha, T_{\alpha+1}) = N\tau \times P(t, T_{\alpha+1}) \times [K\phi(-d_2) - F(\cdot)\phi(-d_1)] \quad (31)$$

où  $cIt(t, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  est le prix d'un caplet et  $fIt(t, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  est le prix d'un floorlet dont  $F(\cdot)$  est le taux  $FRA(t, T_\alpha, T_{\alpha+1})$  du sous-jacent et  $K$  est le taux d'exercice de l'option et

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(\cdot)}{K}\right) + \frac{\sigma^2 T_\alpha}{2}}{\sigma\sqrt{T_\alpha}}$$

où  $\sigma$  est la volatilité de Black (1976) du FRA de  $t$  à  $T_\alpha$ .

Tout comme les autres options européennes, le paiement net de la position longue à l'expiration du caplet correspond à la partie positive de la différence entre le taux du FRA sous-jacent et le taux d'exercice. À l'expiration, en date  $T_\alpha$ , le paiement net de la position longue caplet est

$$\Pi_{T_\alpha} = P(T_\alpha, T_{\alpha+1}) \times N\tau \times [FRA(T_\alpha, T_\alpha, T_{\alpha+1}) - K]^+ \quad (32)$$

Il est important de mentionner que les options sur *futures* sur Eurodollar et les options sur le BAX, soit les options OBX, sont les homologues des caplets et des floorlets, transigés de manière standardisée respectivement au CBOE et à la Bourse de Montréal. La principale différence entre les produits respectifs des deux marchés

est que les options sur *futures* sur Eurodollar et que les options OBX sont des options de style américain.

## A.7. Caps et floors de taux

Un cap de taux est un portefeuille de *caplets* européens arrivant à échéance séquentiellement. Sur les marchés, les prix des caps sont cotés en termes de volatilité du modèle de Black (1976). Il est important de noter que le prix d'un cap correspond à la somme des prix des caplets auxquels la volatilité du cap est appliquée de manière constante. En effet, cette volatilité porte le nom de volatilité *flat* étant donné, qu'en réalité, chaque caplet constituant le cap possède sa propre volatilité implicite. Parallèlement, un floor européen est une option planché OTC qui représente une série de floorlets arrivant à échéance successivement.

$$Cap(t, T_\beta) = N\tau \times \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} P(t, T_{\alpha+1}) \times [FRA(t, T_\alpha, T_{\alpha+1})\phi(d_1) - K\phi(d_2)] \quad (33)$$

$$Floor(t, T_\beta) = N\tau \times \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} P(t, T_{\alpha+1}) \times [K\phi(-d_2) - FRA(t, T_\alpha, T_{\alpha+1})\phi(-d_1)] \quad (34)$$

où  $Cap(t, T_\beta)$  est le prix d'un cap et  $Floor(t, T_\beta)$  est le prix d'un floor d'échéance  $T_\beta$ . Ici, les dates de règlement correspondent à l'expiration de chaque caplet/floorlet constituant le cap/floor.

## B. Preuve de martingale

Pour appliquer la méthodologie de Mele & Obayashi (2012), il est primordial d'utiliser des produits dérivés ayant des caractéristiques semblables, c'est-à-dire, des options européennes dont le processus de diffusion du sous-jacent suit une martingale sous une certaine mesure de probabilité. Cette propriété martingale assure un modèle d'évaluation qui est en AOA, d'après Harrison et Kreps (1979).

Le forward start swap suit une martingale sous le numéraire  $\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i)$ . Ainsi,

les produits dérivés utilisés afin d'extraire la volatilité du marché nécessaire au calcul du SRVX sont des swaptions européens dont le processus de diffusion du sous-jacent suit une martingale sous la mesure de probabilité associée au numéraire

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i).$$

Dans le cadre de la présente recherche, il s'agit de montrer que le processus de diffusion du taux  $FRA(t, T_{\alpha}, T_{\alpha+1})$ , sous-jacent des caplets/floorlets, suit une martingale sous une certaine mesure de probabilité.

*Preuve : Le taux  $FRA(t, T_{\alpha}, T_{\alpha+1})$  suit une martingale sous la mesure de probabilité associée au numéraire  $P(0, T_{\alpha+1})$ .*

Pour utiliser la propriété martingale et se retrouver en AOA, il faut trouver le numéraire  $n(t)$  tel que :

$$\frac{P(0, T_{\alpha}) - P(0, T_{\alpha+1})}{n(0)} = E^{Q^n} \left[ \frac{P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\alpha+1})}{n(t)} \right] \quad (35)$$

où,  $0 \leq t \leq T_{\alpha}$  et  $E^{Q^n} [\cdot]$  est l'opérateur d'espérance sous la mesure  $Q^n$ .

Or, avec  $n(t) = P(t, T_{\alpha+1})$  et en multipliant le terme de droite et de gauche de l'équation (35) par  $\frac{1}{\tau}$  on obtient :

$$\frac{P(0, T_{\alpha}) - P(0, T_{\alpha+1})}{P(0, T_{\alpha+1})} \times \frac{1}{\tau} = E^{Q^{\alpha+1}} \left[ \frac{P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\alpha+1})}{P(t, T_{\alpha+1})} \right] \times \frac{1}{\tau} \quad (36)$$

d'après (27), on a :

$$FRA(0, T_{\alpha}, T_{\alpha+1}) = E^{Q^{\alpha+1}} [FRA(t, T_{\alpha}, T_{\alpha+1})] \quad (37)$$

ainsi, le taux FRA suit une martingale sous  $Q^{\alpha+1}$  et donc:

$$\frac{dFRA(t, T_{\alpha}, T_{\alpha+1})}{FRA(t, T_{\alpha}, T_{\alpha+1})} = \sigma(t) dW(t)^{Q^{\alpha+1}} \quad (38)$$

où  $dW(t)^{Q^{\alpha+1}}$  est un mouvement brownien sous la mesure  $Q^{\alpha+1}$  et  $\sigma(t)$  est la volatilité stochastique du taux FRA.

## C. Nettoyage des données

Voici la liste des journées supprimées de l'échantillon original provenant de la plateforme Bloomberg. Les raisons de ce traitement de données ont été discutées à la section 3.2.3 de la présente recherche. Les 60 journées supprimées représentent 3% de l'échantillon original de 2020 observations quotidiennes.

Liste des journées supprimées		
2006-11-17	2011-09-09	2012-12-25
2006-11-20	2012-04-03	2012-12-26
2007-04-27	2012-04-06	2012-12-27
2008-12-01	2012-04-18	2012-12-28
2008-12-03	2012-04-19	2012-12-31
2008-12-05	2012-04-20	2013-01-01
2008-12-08	2012-04-23	2013-01-02
2009-04-09	2012-08-31	2013-01-18
2009-04-10	2012-09-03	2013-01-21
2010-11-24	2012-09-04	2013-01-23
2010-11-25	2012-09-11	2013-01-28
2010-11-26	2012-09-17	2013-01-30
2010-11-29	2012-09-25	2013-02-04
2010-11-30	2012-10-31	2013-09-16
2011-01-18	2012-11-06	2013-10-11
2011-08-10	2012-11-12	2013-11-11
2011-08-11	2012-11-22	2013-12-06
2011-08-12	2012-11-30	2013-12-24
2011-08-15	2012-12-03	2013-12-25
2011-08-16	2012-12-12	2013-12-26

Figure 5-3 - Liste des journées supprimées de l'échantillon original

Cette figure montre la liste des journées supprimées de l'échantillon original allant du 25 septembre 2006 au 31 juillet 2014. Les raisons de ce nettoyage de données sont évoquées à la section 3.2.3.

# Bibliographie

Bakshi, G., & Madan, D. (2000). Spanning and derivative-security valuation. *Journal of Financial Economics*, 55(2), 205-238.

Bank of International Settlements (2014). « OTC derivatives market activity in the first half of 2014 » [en ligne], Bâle, Monetary and Economic Department. <[http://www.bis.org/publ/otc\\_hy1411.pdf](http://www.bis.org/publ/otc_hy1411.pdf)>.

Beber, A., & Brandt, M. W. (2006). The effect of macroeconomic news on beliefs and preferences: Evidence from the options market. *Journal of Monetary Economics*, 53(8), 1997-2039.

Bianchetti, M., & Carlicchi, M. (2011). Interest rates after the credit crunch: Multiple curve vanilla derivatives and sabr. *Available at SSRN 1783070*.

Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, 637-654.

Black, F. (1976). The pricing of commodity contracts. *Journal of financial economics*, 3(1), 167-179.

Breeden, D. T., & Litzenberger, R. H. (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of business*, 621-651.

Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit. Springer Science, 2nd edition.

Carr, P., & Madan, D. (2001). Optimal positioning in derivative securities. *Quantitative Finance*, 19-37.

Chun, A. L. (2010). Expectations, bond yields, and monetary policy. *Review of Financial Studies*, hhq090.

Claes, A. G., De Ceuster, M. J., Lópezc, R., & Navarroc, E. (2010). *Constructing the US interest rate volatility index*. Working Paper, Louvain School of Management.

C. B. O. E. (2003). VIX White Paper. URL: <http://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf>.

C. B. O. E. (2012). VIX White Paper. URL: [http://www.cboe.com/framed/pdf/framed.aspx?content=/micro/srvix/srvix.pdf&section=SECT\\_MINI\\_SITE&title=CBOE+Interest+Rate+Swap+Volatility+Index+%28SRVIX+Index%29+White+Paper](http://www.cboe.com/framed/pdf/framed.aspx?content=/micro/srvix/srvix.pdf&section=SECT_MINI_SITE&title=CBOE+Interest+Rate+Swap+Volatility+Index+%28SRVIX+Index%29+White+Paper).

Collin-Dufresne, P., & Goldstein, R. S. (2002). Do bonds span the fixed income markets? Theory and evidence for unspanned stochastic volatility. *The Journal of Finance*, 57(4), 1685-1730.

Cox, J. C., & Rubinstein, M. (1985). *Options markets* (Vol. 340). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., & Zou, J. (1999). More than you ever wanted to know about volatility swaps. *Goldman Sachs quantitative strategies research notes*, 41.

Derman, E., & Kani, I. Riding on a Smile Risk Magazine, 7, 32-39 (1994). Derman E., Kani I., Zou JZ, The Local Volatility Surface: Unlocking the Information in Index Options Prices Financial Analysts Journal, (July-Aug 1996), 25-36.

Dupire, B. (1994). Pricing with a smile. *Risk*, 7(1), 18-20.

Fleming, J., Ostdiek, B., & Whaley, R. E. (1995). Predicting stock market volatility: a new measure. *Journal of Futures Markets*, 15(3), 265-302.

Gastineau, G. L. (1977). An index of listed option premiums. *Financial Analysts Journal*, 33(3), 70-75.

Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A. S., & Woodward, D. E. (2002). Managing smile risk. *Wilmott Magazine*, 84-108.

Hagan, P., & Konikov, M. (2004). *Interest rate volatility cube: Construction and use*. Technical report, Bloomberg technical report.

Hagan, P. S., & West, G. (2006). Interpolation methods for curve construction. *Applied Mathematical Finance*, 13(2), 89-129.

- Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, 20(3), 381-408.
- Heidari, M., & Wu, L. (2001). Are interest rate derivatives spanned by the term structure of interest rates?. *Journal of Fixed Income* 13, 75–86.
- Hull, J. C., & White, A. (2000). Forward rate volatilities, swap rate volatilities, and the implementation of the LIBOR market model. *Journal of Fixed Income* 10, 46-62.
- Hull, J. C., & White, A. (2013). Libor vs. ois: The derivatives discounting dilemma. *The Journal of Investment Management*, Forthcoming.
- Jarrow, R., Li, H., & Zhao, F. (2007). Interest rate caps “smile” too! but can the Libor market models capture the smile?. *The Journal of Finance*, 62(1), 345-382.
- Jiang, G. J., & Tian, Y. S. (2005). The model-free implied volatility and its information content. *Review of Financial Studies*, 18(4), 1305-1342.
- Jiang, G. J., & Tian, Y. S. (2007). Extracting model-free volatility from option prices: An examination of the VIX index. *Journal of Derivatives*, 14(3).
- Lesniewski, A. (2014). Option Smile and the SABR Model of Stochastic Volatility.
- Mele, A. and Obayashi, Y., 2012, An Interest Rate Swap Volatility Index and Contract, Technical White Paper underlying the CBOE Interest Rate Swap Volatility Index.
- Mercurio, F. (2010). Modern LIBOR market models: using different curves for projecting rates and for discounting. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(01), 113-137.
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, 141-183.
- Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, 473-489.
- Oblój, J. (2007). Fine-tune your smile: Correction to Hagan et al. *arXiv preprint arXiv:0708.0998*.

- Rebonato, R. (2007). Interest rates: A time-homogeneous, SABR-consistent extension of the LMM. *Risk-london-risk magazine limited*, 20(11), 92.
- Rebonato, R., & White, R. (2009). Linking caplets and swaptions prices in the LMM-SABR model. *Journal of Computational Finance*, 13(2), 19.
- Ron, U. (2000). *A practical guide to swap curve construction* (pp. 2000-17). Ottawa: Bank of Canada.
- Svensson, L. E. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994* (No. w4871). National Bureau of Economic Research.
- The Conference Board of Canada (2015). Economic Data [en ligne], Ottawa. <<http://www.conferenceboard.ca/e-data/browsedirectories.aspx?did=23>>.
- Trolle, A. B. (2009, September). The price of interest rate variance risk and optimal investments in interest rate derivatives. In *EFA 2009 Bergen Meetings Paper*.
- Whaley, R. E. (1993). Derivatives on market volatility: Hedging tools long overdue. *The journal of Derivatives*, 1(1), 71-84.
- Whaley, R. E. (2000). The investor fear gauge. *The Journal of Portfolio Management* 26(3), 12-17.
- Whaley, R. E. (2008). Understanding vix. *The Journal of Portfolio Management* 35, 98-105.