

HEC MONTRÉAL

Caractérisation de la dépendance entre les rendements de fonds de
couverture de divers styles et le rendement d'indices du marché

Par
Abdelghani Sbai Idrissi

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Maîtrise ès Science de
la gestion (M.Sc.) Ingénierie Financière

Mars 2014
©Abdelghani Sbai Idrissi, 2014

Table des matières

Sommaire	i
Remerciements	ii
Introduction	iii
1 Revue de littérature	1
1.1 Les études précédentes dans ce domaine	1
1.1.1 Mitchell and Pulvino (2001)	1
1.1.2 Fung and Hsieh (1997)	3
1.1.3 Fung and Hsieh (2001)	4
2 Étude de la dépendance	6
2.1 Comment étudier une relation de dépendance?	6
2.1.1 La corrélation linéaire	6
2.2 Qu'est ce qu'une copule?	8
2.2.1 Première définition d'une copule	8
2.2.2 Le théorème de Sklar	9
2.3 Les copules les plus importantes	11
2.3.1 Les copules fondamentales	11
2.3.2 Les copules implicites	12
2.3.3 Les copules explicites	13
2.3.4 Le générateur d'une copule archimédienne	15
2.4 Les mesures de dépendances	16
2.4.1 La fonction de Kendall	16
2.4.2 Estimation de la fonction de Kendall	16
2.4.3 Le Tau de Kendall	17
2.4.4 Estimation du Tau de Kendall	17

2.4.5	Le rho de Spearman	18
2.4.6	Estimation du rho de Spearman	18
2.4.7	Le rho de van der Waerden	18
2.4.8	Estimation du rho de van der Waerden	19
2.5	Tests d'adéquation pour les copules	19
2.5.1	Le test basé sur la transformation de Kendall	20
2.5.2	Le test basé sur la transformation de Rosenblatt	22
3	Démarche	24
4	Résultats empiriques pour les stratégies d'options	31
4.1	Les options d'achats	31
4.1.1	Une option d'achat avec $K = S$	32
4.1.2	Une option d'achat avec $K = 1.05S$	33
4.2	Les options de vente	34
4.2.1	Une option de vente avec $K = 0.95S$	34
4.2.2	Une option de vente avec $K = S$	35
4.2.3	Une option de vente avec $K = 1.05S$	36
4.3	Les écarts haussiers (<i>Bull Spreads</i>)	37
4.3.1	Un <i>Bull Spread</i> avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.05S$	38
4.3.2	Un <i>Bull Spread</i> avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.10S$	39
4.4	Les écarts baissiers (<i>Bear Spreads</i>)	40
4.4.1	Un <i>Bear Spread</i> avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = S$	40
4.4.2	Un <i>Bear Spread</i> avec $K_1 = 0.90S$ $K_2 = S$	41
4.5	<i>Straddle</i>	42
4.6	Une stratégie <i>Short Put</i>	43
5	Résultats empiriques pour les stratégies de <i>Merger Arbitrage</i> et <i>CTAs</i>	46
5.1	Les résultats pour les stratégies de <i>Merger Arbitrage</i>	47
5.2	Les résultats pour les stratégies des <i>CTAs</i>	48
6	Conclusion	50
A	Simulation d'une copule	52
A.1	Simulation d'une copule de Student	52
A.2	Simulation d'une copule gaussienne	52
A.3	Simulation d'une copule de archimédienne	53

B	Le test de <i>Change point</i>	54
C	Principales formules	56
C.1	Stratégie avec option d'achat	56
C.2	Stratégie avec option de vente écrite	56
C.3	Stratégie de type <i>Bull Spread</i>	56
C.4	Stratégie de type <i>Bear Spread</i>	57
C.5	Stratégie de type <i>Straddle</i>	57
C.6	Stratégie de type <i>Butterfly</i>	58
C.7	Calcul des rendements	58
C.8	Les résultats du test d'indépendance basé sur la copule empirique	59
D	Tests d'adéquation supplémentaires	60
D.1	Les options de type <i>Butterflies</i> et <i>Condors</i>	60
D.1.1	<i>Butterfly</i> avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$	60
D.1.2	<i>Butterfly</i> avec $K_1 = 0.975S$ $K_2 = 1.025S$	61
D.1.3	<i>Condor</i> avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$	62
D.1.4	<i>Condor</i> avec $K_1 = 0.925S$ $K_2 = 0.95S$ $K_3 = 1.05S$ $K_4 = 1.075S$	63
D.2	Les options de type <i>Strangle</i>	64
D.2.1	<i>Strangle</i> avec $K_1 = 0.95S$ et $K_2 = 1.05S$	64
D.2.2	<i>Strangle</i> avec $K_1 = 0.975S$ et $K_2 = 1.025S$	65
D.3	Options d'achat avec données transformées	66
D.3.1	Une option d'achat avec $K = S$ et données transformées	66
D.3.2	Une option d'achat avec $K = 1.05S$ et données trans- formées.	67
D.4	Options de vente avec données transformées	69
D.4.1	Une option de vente avec $K = 0.95S$ et données trans- formées.	69
D.4.2	Une option de vente avec $K = S$ et données transformées	70
D.4.3	Une option de vente avec $K = 1.05S$ et données trans- formées	71
E	Tests d'indépendance pour les fonds de couverture	72
E.1	Tests d'indépendance pour les rendements des stratégies de Merger Arbitrage	72
E.2	Tests d'indépendance pour les rendements des stratégies CTAs	73

Table des figures

3.1	Les rendements des options d'achat contre le S&P 500.	27
3.2	Test d'autocorrelation des rendements du marché.	27
3.3	Nuage de points des rendements après suppression des valeurs -1.	28
3.4	Nuage de points des rangs normalisés.	28
3.5	Nuage de points des rangs normalisés en utilisant des uniformes.	29
4.1	Nuage de points des rangs normalisés pour un Call avec prix d'exercice de 0.95 S	32
4.2	Nuage de points des rangs normalisés pour un Call avec prix d'exercice de 1.05 S	33
4.3	Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice de 0.95 S	34
4.4	Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice $K = S$	35
4.5	Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice $K = 1.05S$	36
4.6	Nuage de points des rangs normalisés pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.05S$	38
4.7	Nuage de points des rangs normalisés pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.10S$	39
4.8	Nuage de points des rangs normalisés pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = S$	40
4.9	Nuage de points des rangs normalisés pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.90S$ $K_2 = S$	41
4.10	Nuage de points des rangs normalisés pour un Straddle.	42
4.11	Nuage de points des rangs normalisés pour un Short Put avec $K = 0.96S$	44

5.1	Nuage de points des rangs normalisés pour le rendement des stratégies de <i>Merger-Arbitrage</i>	47
5.2	Nuage de points des rangs normalisés pour le rendement des stratégies des <i>CTAs</i>	48
D.1	Nuage de points des rangs normalisés pour un Butterfly avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$	60
D.2	Nuage de points des rangs normalisés pour un Butterfly avec $K_1 = 0.975S$ $K_2 = 1.025S$	61
D.3	Nuage de points des rangs normalisés pour un Condor avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$	62
D.4	Nuage de points des rangs normalisés pour un Condor avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$	63
D.5	Nuage de points des rangs normalisés pour un Strangle avec $K_1 = 0.95S$ et $K_2 = 1.05S$	64
D.6	Nuage de points des rangs normalisés pour un Strangle avec $K_1 = 0.975S$ et $K_2 = 1.025S$	65
D.7	Nuage de points des rangs normalisés pour un Call avec prix d'exercice de 0.95 S et données transformées.	67
D.8	Nuage de points des rangs normalisés pour un Call avec prix d'exercice de 1.05 S et données transformées.	68
D.9	Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice de 0.95 S et données transformées.	69
D.10	Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice $K = S$ et données transformées.	70
D.11	Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice $K = 1.05 S$ en utilisant des données transformées.	71

Liste des tableaux

2.1	Générateurs de copules archimédiennes	15
3.1	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = 0.95S$	29
3.2	Les tests d'adéquation des copules de survie pour un Call avec $K = 0.95S$	29
3.3	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = 0.95S$ en utilisant des uniformes.	30
3.4	Les tests d'adéquation des copules de survie pour un Call avec $K = 0.95S$ en utilisant des uniformes.	30
4.1	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = S$	32
4.2	Les tests pour les copules de survie pour un Call avec $K = S$	32
4.3	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = 1.05S$	33
4.4	Les tests pour les copules de survie pour un Call avec $K = 1.05 S$	33
4.5	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = 0.95S$	35
4.6	Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = 0.95S$	35
4.7	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = S$	36
4.8	Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = S$	36
4.9	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = 1.05S$	37
4.10	Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = 1.05S$	37

4.11	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.05S$	38
4.12	Les tests pour les copules de survie pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.05S$	38
4.13	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.10S$	39
4.14	Les tests pour les copules de survie pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.10S$	39
4.15	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = S$	40
4.16	Les tests pour les copules de survie pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = S$	41
4.17	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.90S$ $K_2 = S$	41
4.18	Les tests pour les copules de survie pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.90S$ $K_2 = S$	42
4.19	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Straddle.	43
4.20	Les tests pour les copules de survie pour un Straddle.	43
4.21	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Short Put avec $K = 0.96S$	44
4.22	Les tests pour les copules de survie pour un Short Put avec $K = 0.96S$	44
5.1	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour le rendement des stratégies de <i>Merger-Arbitrage</i>	47
5.2	Les tests pour les copules de survie pour le rendement des stratégies de <i>Merger-Arbitrage</i>	47
5.3	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour le rendement des stratégies des <i>CTAs</i>	49
5.4	Les tests pour les copules de survie pour le rendement des stratégies des <i>CTAs</i>	49
C.1	Les résultats du test d'indépendance basé sur la copule empirique.	59
D.1	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Butterfly avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$	61

D.2	Les tests pour les copules de survie pour un Butterfly avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$	61
D.3	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Butterfly avec $K_1 = 0.975S$ $K_2 = 1.025S$	62
D.4	Les tests pour les copules de survie pour un Butterfly avec $K_1 = 0.975S$ $K_2 = 1.025S$	62
D.5	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Condor avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$	63
D.6	Les tests pour les copules de survie pour un Condor avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$	63
D.7	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Condor avec $K_1 = 0.925S$ $K_2 = 0.95S$ $K_3 = 1.05S$ $K_4 = 1.075S$	64
D.8	Les tests pour les copules de survie pour un Condor avec $K_1 = 0.925S$ $K_2 = 0.95S$ $K_3 = 1.05S$ $K_4 = 1.075S$	64
D.9	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Strangle avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$	65
D.10	Les tests pour les copules de survie pour un Strangle avec $K_1 = 0.95S$ et $K_2 = 1.05S$	65
D.11	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Strangle avec $K_1 = 0.975S$ et $K_2 = 1.025S$	66
D.12	Les tests pour les copules de survie pour un Strangle avec $K_1 = 0.975S$ et $K_2 = 1.025S$	66
D.13	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = S$ et données transformées.	67
D.14	Les tests pour les copules de survie pour un Call avec $K = S$ et données transformées.	67
D.15	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = 1.05S$ et données transformées.	68
D.16	Les tests pour les copules de survie pour un Call avec $K = 1.05S$ et données transformées.	68
D.17	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = 0.95S$ et données transformées.	69
D.18	Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = 0.95S$ et données transformées.	69
D.19	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = S$ et données transformées.	70
D.20	Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = S$ et données transformées.	70

D.21	Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = 1.05S$ et données transformées.	71
D.22	Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = 1.05S$ et données transformées.	71
E.1	Tests d'indépendance basé sur la fonction de Kendall.	72
E.2	Tests d'indépendance basé sur la copule empirique	72
E.3	Tests d'indépendance basé sur la fonction de Kendall.	73
E.4	Tests d'indépendance basés sur la copule empirique.	73
F.1	Tests de dépendance sérielle.	74

Sommaire

Les modèles linéaires de caractérisation des rendements fonctionnent assez bien pour les fonds classiques ; par exemple le modèle à trois facteurs de *Fama-French* ou encore le *CAPM* (*Capital Asset Pricing Model*) existent depuis quelques dizaines d'années. Ce n'est pas le cas pour les fonds de couverture, qui possèdent des positions qui changent extrêmement vite et des stratégies très dynamiques. C'est ce qui fait que les modèles linéaires à facteurs qui se basent sur les rendements d'actifs classiques (taux sans risque, actions, etc) n'arrivent pas à capturer les rendements de ces fonds (Fung and Hsieh, 1997). Les études de Mitchell and Pulvino (2001) ont ainsi suggéré qu'il serait préférable d'utiliser des expositions non-linéaires afin de décrire les rendements des fonds de couverture, ils suggèrent que les rendements d'une stratégie de *Merger Arbitrage* seraient analogues à ceux d'une stratégie d'écriture d'options de vente (*Short Puts*) hors de la monnaie, sur l'indice du marché. D'autres études comme celles de Fung and Hsieh (2001), ont exploré la même piste mais cette fois pour d'autres stratégies, en l'occurrence les *Commodity Trader Advisors* (CTAs), ils suggèrent que les rendements des stratégies de suivi de tendance (*Trend-Following*) ressemblent à ceux des *look-back straddles*.

Notre projet de recherche porte principalement sur la caractérisation de la dépendance entre les rendements de fonds de couverture de divers styles, et le rendement d'indices du marché. Dans un premier temps, la dépendance entre des options sur indices et ces mêmes indices sera caractérisée. Dans un deuxième temps, la dépendance entre plusieurs fonds de couverture de divers styles et les indices du marché sera analysée afin de vérifier l'hypothèse de comportement non-linéaire.

Remerciements

Toute ma gratitude à Mr **BRUNO RÉMILLARD** et Mr **NICOLAS PAGEORGIU**, pour m'avoir encadré dans ce mémoire. Qu'ils trouvent dans ces petits mots l'expression de mes sentiments les plus respectueux, et j'espère avoir été à la hauteur de leur confiance.

Il m'est très agréable aussi, d'adresser mes vifs remerciements aux membres du Jury qui ont bien voulu accepter de valoriser ce mémoire. Mes remerciements à ma famille et à tous mes amis qui m'ont encouragé tout au long de ce projet et à mes enseignants, à qui je dois ma formation et ma réussite. Que tous soient remerciés très sincèrement.

Introduction

Les fonds de couverture sont des partenariats d'investissement privés dans lesquels l'entité gérante détient un large mandat en matière de choix d'investissements. Ces fonds sont restreints aux investisseurs institutionnels et aux investisseurs privés sophistiqués. Les *CTAs* sont des entités commerciales, enregistrées aux États-Unis auprès du *CFTC (the Commodity Futures Trading Commission)*, et détenant l'autorisation d'exécuter des opérations boursières au nom de leurs clients sur des *Futures*, options et portefeuilles de titres établis uniquement pour leur client (mandat de gestion de compte). Jusqu'à l'avènement de la diversification des fonds en 1980, leurs mandats étaient limités (matières premières, Futures sur matières premières et options sur Futures). La globalisation et l'expansion des marchés et la réduction des contraintes réglementaires leur a permis la possibilité de transiger sur un grand nombre d'instruments, comme les taux d'intérêt, les devises, les actions et le marché physique des matières premières. Même si, historiquement, ils ont été vus comme distincts par rapport aux fonds de couverture, la différence est devenue de plus en plus floue car les *CTAs* désormais opèrent sur des investissements privés de partenariat avec de larges mandats dans presque tous les marchés financiers (Fung and Hsieh, 1997).

Dans le cas des opérations de *Merger Arbitrage*, après l'annonce d'une fusion ou acquisition, les actions de la compagnie ciblée transigent typiquement en rabais par rapport au prix offert par l'acheteur. La différence entre le dernier prix et le prix du marché est ce qu'on appelle l'écart d'arbitrage (*arbitrage spread*). Cet écart constitue le gain escompté par ces fonds d'arbitrage. En cas d'échec de l'offre de fusion-acquisition, l'arbitrageur supporte une perte en général plus importante que le gain réalisé en cas de succès du rachat (Mitchell and Pulvino, 2001).

Il existe deux types d'acquisitions : les *Cash mergers*, c'est-à-dire une fusion moyennant une contrepartie au comptant, où la compagnie acquéreuse

offre d'échanger une valeur monétaire contre les actions de la compagnie cible. Dans ce cas, l'arbitrageur achète les actions de la compagnie cible et attend jusqu'à ce que la fusion se réalise, vend les actions à l'acheteur et réalise un profit. Le deuxième type d'acquisitions est le *Stock merger*, c'est-à-dire une fusion moyennant une contrepartie en actions de la compagnie acquéreuse. Dans ce cas, l'arbitrageur vend à découvert les actions de la compagnie acquéreuse et achète les actions de la compagnie cible. L'arbitrageur attend ici également le dénouement de l'offre, réalise un profit grâce à la différence de prix entre les actions de la compagnie acquéreuse et celles de la compagnie cible de l'offre (néanmoins, il reçoit des dividendes sur sa position longue et paie des dividendes sur sa position courte). La première source de risque supportée par l'arbitrageur est le non dénouement de l'offre de fusion-acquisition (Mitchell and Pulvino, 2001).

Ces travaux (Mitchell and Pulvino, 2001), indiquent que sur un large éventail d'environnements de marchés, les rendements des *Merger Arbitrage* sont linéairement indépendants du rendement global du marché. Ils démontrent que la relation entre les deux rendements est non linéaire. Néanmoins, durant les périodes baissières du marché, il existe une certaine corrélation entre les rendements du marché et ceux obtenus par les *Merger Arbitrage*. Ils suggèrent alors que ces rendements sont similaires à ceux obtenus à partir de l'écriture d'options de vente hors de la monnaie sur indice; dans tous les cas un premium est réalisé et parfois un gros profit est obtenu. Ce profil de rendement laisse entendre alors que ces opérations peuvent mieux être décrites par une analyse basée sur des droits contingents plutôt que de tenter de les décrire par des modèles linéaires à facteurs comme le *CAPM*.

Dans un premier temps, nous allons étudier la dépendance entre les rendements de plusieurs stratégies d'options et les rendements de l'indice du marché (S&P 500), la dépendance étudiée sera de type non linéaire afin de faire ressortir les relations existantes entre ces types de stratégies et le marché. Dans un deuxième temps, nous allons essayer d'étudier la dépendance entre les rendements historiques d'indices de *Merger Arbitrage* et les rendements du marché, et comparer ces derniers résultats par rapport aux premiers.

Fung and Hsieh (2001) de leur part, avaient élaboré une méthodologie générale pour la compréhension du risque dans les stratégies des fonds de couverture, ceci en modélisant une stratégie de négociation dite de *Trend Following*. Cette stratégie est présente dans la majorité des fonds de type Commodity Trading

Advisors (CTAs).

Merton (1981) définit la stratégie de base d'un *Trend Follower* comme similaire au rendement d'un straddle. Soit $Z(t)$ le rendement par dollar investi dans le marché d'actions et $R(t)$ le rendement par dollar investi en bons du trésor en période t . Au début de la période, si le *Trend Follower* anticipe que les actions vont surperformer par rapport aux bons du trésor il pourra alors prendre position uniquement sur les actions (sinon le contraire). Il montre que les rendements de cette stratégie correspondent à $R(t) + \text{Max}\{0, Z(t) - R(t)\}$, ce qui correspond d'ailleurs au rendement d'un portefeuille de Bons de Trésors et d'option d'achat sur les actions. En cas d'absence de contrainte sur la vente à découvert, le rendement de la stratégie devient $R(t) + \text{Max}\{0, Z(t) - R(t)\} + \text{Max}\{0, R(t) - Z(t)\}$, ce qui correspond d'ailleurs au rendement d'un portefeuille de Bons de Trésor et un straddle sur les actions.

Mitchell and Pulvino (2001) explorent la ressemblance entre les rendements d'un *Lookback Straddle* et ceux des fonds de type *Trend Following*, ce qui permet de faire un lien entre le rendement de ces fonds et les actifs standards du marché. Ils concluent aussi que les Trend Followers ont des rendements non linéaires avec le marché. En effet, ces derniers tendent à se manifester dans les conditions extrêmes du marché (volatilité élevée et événements de risque de marché).

Comme pour les stratégies de *Merger Arbitrage*, après l'étude des dépendances entre différentes stratégies d'options et les rendements de l'indice du marché (*S&P 500*), nous allons nous pencher sur l'étude de la dépendance entre les rendements des fonds de couverture de type *CTAs* et les rendements du marché.

Chapitre 1

Revue de littérature

1.1 Les études précédentes dans ce domaine

1.1.1 Mitchell and Pulvino (2001)

Cet article a analysé 4750 opérations de fusions de 1963 à 1998 afin de caractériser le risque et le rendement dans les opérations d'arbitrage sur les fusions. Les résultats indiquent que les rendements du *Risk arbitrage* sont positivement corrélés avec les rendements du marché dans le cas des situations baissières du marché, mais non corrélées avec les rendements du marché dans le cas de situations stables ou haussières du marché. Ce qui suggère que les rendements des opérations sur les fusions sont similaires à ceux obtenus de la vente d'une option de vente hors de la monnaie sur l'indice.

Description des cas de fusions-acquisitions

Il existe principalement trois types de fusions, les fusions à contre partie monétaire et les fusions par échange d'actions. Dans une opération de fusion par contre partie monétaire, la compagnie acquéreuse offre d'échanger les actifs d'une autre compagnie en contre partie d'un paiement monétaire. Dans une fusion par échange d'actions, l'acquéreur offre ses actions en contre partie des actions de la compagnie cible au lieu d'un paiement au comptant. L'investissement de l'arbitrageur dépend du type de la fusion. Dans une fusion par paiement au comptant, l'arbitrageur acquiert les actions de la compagnie cible. Ces dernières, étant transigées en deçà du paiement promis par l'acquéreur, le profit est réalisé en détenant les actions de la compagnie

cible jusqu'à ce que la fusion est consommée. A ce moment, l'arbitrageur vend les actions de la compagnie cible à la firme acquéreuse en contre partie du prix promis. Il existe deux sources de profit pour l'arbitrageur dans ce cas. Premièrement, la différence entre le prix d'achat de la compagnie cible et le prix de l'offre de fusion. Deuxièmement, les dividendes payées par la compagnie cible.

Dans une fusion-acquisition par échange d'actions, l'arbitrageur vend à découvert les actions de la compagnie acquéreuse et acquiert en plus les actions de la compagnie cible. Dans ce cas, il existe trois source de profit pour l'arbitrageur. La première source de profit, est la différence entre le prix obtenu à partir de la vente à découvert des actions de la compagnie acquéreuse et le prix payé pour la compagnie cible. La deuxième source de profit sont les dividendes reçus sur l'investissement dans les actions de la compagnie cible. Néanmoins, ceci est diminué par les dividendes payées sur les actions de la compagnie acquéreuse. La troisième source de profit provient des intérêts par le courtier de l'arbitrageur sur le produit de la vente à découvert des actions de la compagnie acquéreuse.

D'autres structures impliquant des actions privilégiées, des warrants et d'autres titres n'est pas rares. A partir du point de vue de l'arbitrageur, la caractéristique la plus importante est que le rendement dépend de la concrétisation de l'offre de fusion. Ainsi, le principal risque encouru par l'arbitrageur est l'échec de l'offre.

Après l'annonce d'une opération de fusion-acquisition, la compagnie cible transige en dessous du prix offert par l'acquéreur. La différence entre le prix de l'action de la compagnie cible et le prix offert est appelé l'écart d'arbitrage. L'arbitrage sur les fusions-acquisitions fait référence à une stratégie d'investissement qui essaie de profiter de cet écart de prix. Si la fusion aboutit, l'arbitrageur encaisse l'écart d'arbitrage. Sinon, si la fusion échoue, l'arbitrageur supporte une perte, souvent plus importante que les profits qu'il aurait pu obtenir si l'opération avait abouti. D'autres études auparavant avaient démontré que les modèles linéaires d'évaluation d'actifs étaient non efficaces dans le cas des opérations d'arbitrage sur fusions-acquisitions. L'article de Mitchell and Pulvino (2001), essaie d'investiguer si la raison derrière l'échec des modèles linéaires, dans la capture des rendements de ces opérations, serait due à la présence d'une corrélation non-linéaire avec les rendements du marché.

Les auteurs dans leur étude prouvent que, dans un marché stable ou haussier, l'arbitrage sur les fusions-acquisitions génère 50 points de base par mois (6.2

pourcent annuel) de plus que le rendement sans risque, avec essentiellement un bêta du marché de zéro. Néanmoins, dans les situations où le marché connaît des baisses de 4 pourcent ou plus, le bêta du marché du portefeuille d'arbitrage augmente à 0.50. Ils concluent donc que ce portefeuille génère des rendements modérés dans la plupart des environnements, mais dans de rares cas, génère un large rendement négatif. Ils concluent donc que l'arbitrage sur les fusions-acquisitions est analogue à l'écriture d'options (non couvertes) de vente sur l'indice. Étant donné ce profil de rendement similaire aux options, les modèles empiriques standards d'évaluation d'actifs ne peuvent être utilisés pour mesurer la performance et en terme de risque/rendement associés avec cette opération d'arbitrage. Les excès de rendements ne peuvent pas non plus être vus comme tels. Par contre, ce profil de risque/rendement pourrait être évalué via l'utilisation de droits contingents. Cette approche devrait être utilisée, au lieu des modèles linéaires, lors de la génération de *benchmarks* pour l'évaluation de gestionnaires de fonds de d'arbitrage sur fusions-acquisitions.

Les conclusions de l'étude montrent globalement que sur un large éventail d'environnements de marchés, les rendements de l'arbitrage en fusions-acquisitions sont indépendants des rendements du marché. Ces résultats sont confirmés aussi bien par le modèle CAPM que par le modèle de Fama & French. Elles montrent que les coefficients estimés pour ces modèles suggère que la relation entre le rendement de l'arbitrage sur les fusions-acquisitions et les rendements du marché ne sont pas linéaires.

1.1.2 Fung and Hsieh (1997)

Cet article étudie divers profils de risque/rendement de fonds mutuels classiques, et des fonds de couverture de type *CTAs* (*Commodity Trading Advisors*), et montre qu'ils suivent des stratégies très différentes de celles des fonds mutuels classiques, et supporte la thèse selon laquelle ces stratégies sont extrêmement dynamiques. Ces fonds ont des mandats pour réaliser des rendements absolus, indépendamment de l'état du marché. Pour cela, ils ont la possibilité de choisir parmi un large éventail de classes d'actifs, et d'employer des stratégies dynamiques qui impliquent souvent des ventes à découvert, leviers pour le financement, et des produits dérivés. Les auteurs essayent dans cet article d'étendre le modèle de Sharpe (Sharpe, 1992) pour le cas de ces investissements alternatifs.

Les auteurs trouvent (comme pour Sharpe (1992)), qu'il existe une forte

corrélation entre les rendements des fonds mutuels et ceux des classes d'actifs classiques. A l'opposé, les *CTAs* présentent une faible corrélation par rapport aux fonds mutuels et aux classes d'actifs standards. De plus, ils prouvent qu'il existe une certaine non homogénéité dans le rendements des *CTAs* dépendamment de leurs styles.

Parmi les catégories examinées, les *CTAs* de type *systématique/Suivi de tendance* se réfèrent aux traders qui utilisent des outils d'analyse technique et font généralement du suivi de tendances (*Trend Following*). Ces *CTAs* exhibent des profils de rendement similaire à ceux d'un *straddle*.

1.1.3 Fung and Hsieh (2001)

De manière similaire à l'article de Mitchell & Pulvino, cet article pose la problématique de ressemblance entre les rendements des fonds de couverture et les rendements des portefeuilles d'options. Les modèles linéaires utilisant ont de la difficulté à expliquer ces rendements. Il utilise les *lookback straddles* afin de montrer qu'ils peuvent expliquer les rendements d'un certain style de stratégies de fonds de couverture.

L'article étudie une stratégie populaire auprès des fonds de couverture, et qui est communément appelée le *Trend following*. Il s'agit de la stratégie dominante chez les fonds de type *Commodity Trading Advisors (CTAs)*. La stratégie de *Trend following* la plus simple qu'on appelle "primitive", génère le même paiement qu'une option structurée qu'on appelle un *lookback straddle*. Le détenteur d'une option d'achat de type *lookback* possède le droit d'acheter l'actif sous-jacent au moindre prix durant la durée de vie de l'option. De manière analogue, une option de vente de type "lookback" permet à son détenteur de vendre au prix le plus élevé. La combinaison de ces deux options est un "lookback straddle".

L'article démontre que les rendements du *lookback straddle* ressemblent aux rendements des fonds de type *Trend following*. Ceci afin de démontrer le lien entre les rendements de ce type de fonds de couverture et les rendements classiques du marché. Les *straddles* standards peuvent donner les mêmes résultats empiriques, néanmoins l'utilisation des *lookback straddles* est théoriquement beaucoup plus proche de la stratégie de *Trend following*.

Stratégie de type *Trend following* primitif

La première à avoir établi le lien entre une stratégie de *Market timer* (une stratégie similaire au *Trend following*) et les rendements d'un straddle était Merton (1981). Suivant sa notation, soit $Z(t)$ le rendement par dollar investi dans des actions du marché, et $R(t)$ le rendement par dollar investi dans les bons de trésor sur une période t . Au début de la période, si le *Market timer* prévoit que les actions vont surperformer par rapport aux bons de trésor, il va détenir uniquement des actions. Sinon, seuls les bons vont être détenus. Ceci assume implicitement la présence de contraintes sur la vente à découvert, il démontre que le rendement du portefeuille est donné par $R(t) + \text{Max}\{0, Z(t) - R(t)\}$, ce qui correspond d'ailleurs aux rendements d'un portefeuille de bons de trésor et une option d'achat sur les actions.

En l'absence de contraintes sur la vente à découvert, le rendement du *Market timer* est modifié pour exprimer l'alternative de la vente à découvert. Il montre que le rendement du portefeuille est désormais $R(t) + \text{Max}\{0, Z(t) - R(t)\} + \text{Max}\{0, R(t) - Z(t)\}$, qui est d'ailleurs le rendement d'un portefeuille de bons et un "straddle" sur les actions.

L'article utilise globalement la même approche pour modéliser un *Trend follower*. Dans Merton(1981), le *Market timer* (Merton, 1981) essaie de pronostiquer la direction de mouvement de prix d'un actif, prenant une position longue pour profiter d'une hausse du prix, ou une position courte dans le cas d'une baisse. Un "trend follower" essaie de capturer la tendance du marché. Les tendances sont reliées aux corrélations dans les changements de prix.

Les auteurs concluent que le modèle de *Trend following* primitif répliqué à travers l'utilisation des *lookback straddles* présente un profil de rendement similaire à celui des rendements des CTAs. Tous les deux présentent une forte asymétrie positive, et tendent à avoir des rendements élevés en situations extrêmes du marché. Ils concluent également que ces stratégies présentent un risque systématique qui ne peut être capturé par les modèles linéaires classiques d'évaluation d'actifs.

Chapitre 2

Étude de la dépendance

2.1 Comment étudier une relation de dépendance ?

2.1.1 La corrélation linéaire

La compréhension des relations entre plusieurs aspects multivariés est l'une des problématiques majeures dans le domaine des statistiques. La régression linéaire s'est imposée comme étant la méthodologie statistique la plus utilisée, il s'agit d'un outil important de l'analyse multivariée car elle permet aux chercheurs de se concentrer sur l'effet des variables explicatives. Dans cette étude, nous nous focalisons sur le problème de base de la compréhension de la distribution de plusieurs variables, en l'occurrence *une distribution multivariée*. Pour résoudre ce problème, *les copules* s'avèrent comme une solution prometteuse. Cette technique est relativement nouvelle dans l'histoire de la statistique ; en effet, la plupart des applications statistiques sont apparues durant les trente dernières années. Néanmoins, les copules ont été étudiées dans le domaine des probabilités durant toute la deuxième moitié du 20^{ème} siècle et donc plusieurs propriétés des copules sont maintenant largement connues.

La corrélation linéaire est l'un des concepts les plus omniprésents dans les applications des mathématiques, mais c'est également un concept des plus mal compris. Nous allons essayer ici de montrer que la corrélation est juste une parmi plusieurs mesures de dépendance, et que la corrélation linéaire ne peut capturer une relation de dépendance non-linéaire. Il est donc important de savoir quand est ce qu'il est sans danger d'utiliser la corrélation linéaire, et aussi quand est ce qu'il faut être prudent dans cet usage.

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{\sigma^2[X]\sigma^2[Y]}}$$

où $Cov[X, Y]$ est la covariance entre X et Y définie par

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y],$$

et $\sigma^2[X]$, $\sigma^2[Y]$ sont les variances respectives de X et Y . Les propriétés de la corrélation linéaire peuvent être résumées comme suit :

(1) $-1 < \rho(X, Y) < 1$,

(1) X, Y indépendants $\implies \rho(X, Y) = 0$,

(1) $\rho(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \text{sgn}(\alpha\gamma)\rho(X, Y) \quad \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.

(où $\mathbb{R}_{\neq 0}$ est l'ensemble des réels privé de zéro)

La popularité de la régression linéaire peut être expliquée par plusieurs points :

(1) La corrélation est très souvent simple à calculer. Pour plusieurs distributions bivariées, il est facile de calculer les seconds moments (variances et covariances) et donc en dériver le coefficient de corrélation. D'autres mesures de dépendances, que l'on va voir après dans le cadre de cette étude, peuvent s'avérer difficiles à calculer.

(2) La corrélation et la covariance s'apprêtent facilement aux manipulations linéaires.

Néanmoins, il existe plusieurs déficiences dans l'utilisation de la corrélation linéaire. Considérons deux variables aléatoires X et Y .

(1) Les variances de X et Y doivent être finies, sinon la corrélation linéaire est non définie. Ceci cause problème pour le cas des distributions ayant une forte asymétrie.

(2) L'indépendance de deux variables aléatoires impliquent leur non-corrélation ($\rho(X, Y) = 0$), mais une corrélation nulle n'implique pas forcément l'indépendance.

(3) La corrélation linéaire souffre du problème majeur de non invariance face aux transformations non-linéaires $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. En effet, pour deux variables aléatoires, en général on a

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y),$$

De plus, il existe d'autres déficiences statistiques dues à la corrélation, par exemple une simple observation pourrait avoir une grande influence arbitraire sur une corrélation linéaire. Il en suit que la corrélation linéaire n'est pas une mesure statistique rigoureuse (de Matteis, 2001).

2.2 Qu'est ce qu'une copule ?

Supposons que nous avons un modèle de variables aléatoires X_1, X_2 sous la forme d'une distribution jointe F . On connaît le comportement marginal de ces variables, et on peut évaluer les probabilités conditionnelles qu'une composante puisse prendre, étant donné les valeurs prises par les autres composantes. On peut dire que la structure de dépendance de ces variables aléatoires est contenue à l'intérieur de F . Les copules sont des distributions uniformes multivariées. Elles représentent une façon d'extraire la structure de dépendance à partir de la fonction de distribution jointe, et séparer la dépendance et le comportement marginal. Plus tard, on verra que toute distribution bivariable peut être écrite sous la forme : $F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$, pour une fonction C définie comme étant une copule de F , où F_1 et F_2 sont des marginales (de Matteis, 2001).

2.2.1 Première définition d'une copule

Dans les sections qui suivent, nous utilisons des définitions tirées de McNeil and Embrechts (2005).

Une copule de dimension d que l'on dénomme $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ est une fonction de distribution cumulative avec des marginales uniformes

Dans ce qui suit, la notation $C(u) = C(u_1, u_2)$ sera toujours utilisée pour désigner une copule. La condition qui stipule que C est une fonction de distribution mène immédiatement aux propriétés suivantes :

1. Comme une fonction de distribution cumulative est toujours croissante, $C(u_1, u_2)$ est non décroissante en chaque composant u_i .
2. Un composant marginal i est obtenu en mettant $u_j = 1$ pour tout $j \neq i$, et comme les distributions sont uniformes, on obtient :

$$C(u_i, 1) = u_i.$$

3. Pour $a_i \leq b_i$, la probabilité $P(U_1 \in [a_1, b_1], U_2 \in [a_2, b_2])$ doit être non négative, ce qui mène à ce qu'on appelle *l'inégalité du rectangle*

$$C(u_{1,1}, u_{2,1}) - C(u_{1,1}, u_{2,2}) - C(u_{1,2}, u_{2,1}) + C(u_{1,2}, u_{2,2}) \geq 0,$$

avec $u_{j,1} = a_j$ et $u_{j,2} = b_j$.

2.2.2 Le théorème de Sklar

Soit F une fonction de distribution ayant des marginales F_1 et F_2 . Alors, il existe une copule $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (où \mathbb{R} est l'ensemble des réels),

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \quad (2.1)$$

Si les marginales sont continues, alors C est unique ; sinon C est uniquement déterminée sur $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \text{Ran}F_2$ où $\text{Ran}F_i = F_i(\mathbb{R})$ dénote une fermeture de l'ensemble des valeurs prises par F_i . Inversement, si C est une copule et F_1 et F_2 sont des fonctions de distribution univariées, alors la fonction F définie dans (2.1) est une distribution jointe avec des marginales F_1 et F_2 .

Puisque F_1 et F_2 sont continues, ceci implique que la fonction de distribution de $(F_1(x_1), F_2(x_2))$ est une copule, que l'on va dénoter C .

Si l'on évalue l'équation (2.1) pour les arguments $x_i = F_i^{\leftarrow}(u_i), 0 \leq u_i \leq 1, i = 1, 2$ (où f^{\leftarrow} représente l'inverse d'une fonction donnée f), on obtient

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2)). \quad (2.2)$$

Ceci donne une représentation explicite de C en terme de F et ses marginales, donc montre l'unicité. Pour le cas réciproque, supposons que C est une copule et que F_1 et F_2 sont des fonctions de distributions univariées. Si on prend U comme vecteur aléatoire avec fonction de distribution C et le vecteur $X = (F_1^{\leftarrow}(U_1), F_2^{\leftarrow}(U_2))$, on obtient

$$\begin{aligned}
& P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\
&= P(F_1^{\leftarrow}(U_1) \leq x_1, F_2^{\leftarrow}(U_2) \leq x_2) \\
&= P(U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq F_2(x_2)) \\
&= C(F_1(x_1), F_2(x_2)).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

(Voir la preuve complète dans : McNeil and Embrechts (2005)).

La fonction de densité d'une copule

Selon sa définition, une copule est une fonction de distribution cumulative. Ce ne sont pas toutes les copules qui possèdent une fonction de densité. Néanmoins, si la copule est suffisamment différentiable, la densité de la copule peut être calculée comme suit (McNeil and Embrechts, 2005) :

$$c(u) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}.$$

Si la copule est donnée sous la forme (2.2), on obtient la densité de la copule en terme de densité jointe avec les fonctions de distribution cumulatives marginales ainsi que les fonctions de densité marginales. Comme il est nécessaire que la fonction de distribution cumulative soit différentiable, on obtient $F_i^{\leftarrow} = F_i^{-1}$. Si on indique la densité jointe par f et les densités marginales par $f_i, i = 1, 2$, on obtient par la règle de la chaîne :

$$c(u) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))}{f_1(F_1^{-1}(u_1))f_2(F_2^{-1}(u_2))}.$$

La distribution conditionnelle

Il est souvent intéressant de voir le comportement des distributions conditionnelles des copules. On se concentre ici sur les copules à deux dimensions et on suppose que (U_1, U_2) possède une fonction de distribution C . Puisque la copule est une fonction croissante et continue pour chaque argument (McNeil and Embrechts, 2005),

$$C_{U_2|U_1}(u_2 | u_1) = P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(u_1 + \delta, u_2) - C(u_1, u_2)}{\delta} = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2),$$

où la dérivée partielle existe presque partout. La distribution conditionnelle

est une distribution sur l'intervalle $[0,1]$, et devient une distribution uniforme dans le cas où C est la copule d'indépendance.

La fonction de distribution cumulative conditionnelle peut donc être obtenue à partir de la copule elle-même, et la fonction de densité conditionnelle est obtenue en dérivant encore une fois par rapport à u_2 .

Les bornes des copules

Hoeffding et Fréchet avaient chacun indépendamment établi qu'une copule réside toujours entre certaines bornes. La raison derrière cela est l'existence des cas extrêmes de dépendance. Pour voir de près, considérons le cas de deux variables aléatoires uniformes U_1 et U_2 . Si $U_1 = U_2$, ces deux variables seront extrêmement dépendantes chacune de l'autre. Dans ce cas, la copule est donnée par (McNeil and Embrechts, 2005) :

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_1 \leq u_2) = \min(u_1, u_2).$$

Le cas de l'indépendance est à l'opposé, et pour deux variables aléatoires indépendantes la copule donne $C(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$. Néanmoins, le cas de l'indépendance sert juste comme étape intermédiaire vers le cas extrême de comonotonie. Ce cas est obtenu pour des variables aléatoires uniformes telles que $U_2 = 1 - U_1$.

La copule, est alors égale à

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, 1 - U_1 \leq u_2) = P(U_1 \leq u_1, 1 - u_2 \leq U_1).$$

2.3 Les copules les plus importantes

On peut diviser les copules en trois grands groupes : les copules fondamentales, représentant un certain nombre de structures de dépendances ; les copules implicites qui sont extraites à partir de distributions multivariées connues en utilisant le théorème de Sklar, mais qui ne possèdent pas nécessairement une expressions fermée ; et les copules explicites qui ont des formes fermées simples (McNeil and Embrechts, 2005).

2.3.1 Les copules fondamentales

La copule d'indépendance

La copule d'indépendance est définie par :

$$\prod(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2. \quad (2.4)$$

A partir du théorème de Sklar, et de l'équation (2.1) en particulier, on déduit que les v.a ayant des distributions continues sont indépendantes si et seulement si leur structure de dépendance est donnée par (2.4).

La copule de comonotonie

La comonotonie réfère au cas de la dépendance positive parfaite. C'est la copule de la borne supérieure de Fréchet,

$$M(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\}. \quad (2.5)$$

La copule de contremonotonie

C'est la copule bi-dimensionnelle de la borne inférieure de Fréchet donnée par

$$W(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}. \quad (2.6)$$

2.3.2 Les copules implicites

La copule gaussienne

Si $X \sim N_2(\mu, \Sigma)$ est un vecteur aléatoire gaussien, alors sa copule est appelée la copule gaussienne. Cette copule est exactement la même chose que $X \sim N_2(0, \rho)$, où ρ est la corrélation entre deux composantes de X . Cette copule est donnée par

$$C_\rho^{Ga}(u) = P(\Phi(X_1) \leq u_1, \Phi(X_2) \leq u_2) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)), \quad (2.7)$$

où Φ est la fonction de distribution standard normale univariée, et Φ_P est la fonction de distribution jointe de X .

La copule gaussienne ne possède aucune formule fermée, mais elle peut être exprimée comme une intégrale sur la densité de X ; lorsque $|\rho| < 1$, en utilisant (2.8) on a

$$C_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} ds_1 ds_2, \quad (2.8)$$

Il faut noter que la copule d'indépendance et la copule de comonotonie sont des cas spéciaux de la copule gaussienne. Si $\rho = 0$, on obtient alors la copule d'indépendance (2.4). Si $\rho = 1$, alors on obtient la comonotonie (2.5). Pour $\rho = -1$ la copule gaussienne est égale à la copule de contremonotonie (2.6). Donc, en deux dimensions, la copule gaussienne pourrait être vue comme une structure de dépendance qui interpole entre les dépendances positives et négatives parfaites, avec le paramètre ρ qui représente la puissance de la dépendance (McNeil and Embrechts, 2005).

La copule de Student

De la même manière qu'on peut extraire une copule à partir d'une distribution normale multivariée, on peut également extraire une copule implicite à partir de n'importe quelle autre distribution ayant des fonctions de distribution marginales continues. Par exemple, la copule de Student de dimension 2 prend la forme

$$C_{\nu, \rho}^t(u) = t_{\nu, P}(t_{\nu}^{-1}(u_1), t_{\nu}^{-1}(u_2)), \quad (2.9)$$

Où t_{ν} est la fonction de distribution d'une Student univariée, $t_{\nu, P}$ est la fonction de distribution jointe du vecteur $X \sim t_2(\nu, 0, \rho)$. Comme dans le cas de la copule gaussienne, si $\rho = 1$ on obtient le cas de la comonotonie (2.5). Par contre, et contrairement à la copule gaussienne, si $\rho = 0$ on n'obtient pas la copule d'indépendance (en assumant que le paramètre $\nu < \infty$) (McNeil and Embrechts, 2005).

2.3.3 Les copules explicites

Alors que les copules gaussiennes et Student sont des copules déduites à partir de fonctions de distribution multivariée connues et ne possèdent pas de formes fermées, on peut citer des exemples de copules possédant des formes fermées connues (McNeil and Embrechts, 2005). Comme exemple, on peut citer les copules archimédiennes; on verra ici la copule bivariée de Clayton,

de Gumbel et celle de Frank. Cette famille de copule présente un intérêt particulier pour les applications en gestion de risque. Pour le cas multivarié, voir Rémillard (2013) qui traite en détail plusieurs cas de copules explicites.

La copule de Gumbel

La copule bivariée de Gumbel est donnée par

$$C_\theta(u_1, u_2) = \exp[-((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta)^{\frac{1}{\theta}}], \quad (2.10)$$

Si $\theta = 1$, on obtient la copule d'indépendance comme un cas spécial, et si $\theta \rightarrow \infty$ on obtient la copule de comonotonie bi-dimensionnelle. Donc, la copule de Gumbel alterne entre l'indépendance et la dépendance parfaite avec le paramètre θ qui représente la force de la dépendance.

La copule de Clayton

La copule bivariée de Clayton est donnée par

$$C_\theta(u_1, u_2) = (\max\{u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1, 0\})^{-\frac{1}{\theta}}, \quad 0 < \theta < \infty, \quad (2.11)$$

Quand $\theta \rightarrow 0$ on obtient la copule d'indépendance, et quand $\theta \rightarrow \infty$ on obtient le cas bivarié de la comonotonie. Pour $\theta = -1$ on obtient la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding.

La copule de Frank

Le dernier cas des copules archimédiennes est celui de la copule de Frank, elle définie par

$$C_\theta(u_1, u_2) = \frac{-1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(\exp(-\theta u_1) - 1)(\exp(-\theta u_2) - 1)}{\exp(-\theta) - 1}\right), \quad \theta \in \mathbb{R}^+ \quad (2.12)$$

Pour cette copule, quand $\theta = 1$, on obtient la copule d'indépendance, alors que le cas de $\theta = 0$ correspond à la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding. Et dans le cas limite de $\theta \rightarrow \infty$, on obtient la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding.

La copule de survie

Soit C la copule définie par,

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_1 \leq u_2),$$

Alors, la fonction \bar{C} définie par,

$$\bar{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 = P(U_1 > u_1, U_1 > u_2),$$

est appelée la copule de survie de la copule C .

2.3.4 Le générateur d'une copule archimédienne

On peut vérifier, que pour un paramètre θ donné respectant l'intervalle qui lui est défini pour chaque cas de copule, les copules archimédienne peuvent être écrite sous la forme (McNeil and Embrechts, 2005),

$$C_\theta(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)), \quad (2.13)$$

où ϕ est une fonction décroissante de $[0, 1]$ à $[0, \infty]$, satisfaisant $\phi(0) = \infty, \phi(1) = 0$, appelée le générateur de la copule et ϕ^{-1} est son inverse. Le tableau suivant présente les générateurs des copules archimédiennes bivariées :

Copule	Générateur	Paramètre
Gumbel	$(-\ln t)^\theta$	$\theta \geq 1$
Clayton	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$\theta \geq -1$
Frank	$-\ln\left(\frac{\exp^{-\theta t} - 1}{\exp^{-\theta} - 1}\right)$	$\theta \in \mathbb{R}$

TABLE 2.1: Générateurs de copules archimédiennes

Theorem 1. (Copule archimédienne bivariée)

Soit $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ une fonction continue et strictement décroissante avec $\phi(1) = 0$ alors

$$C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)), \quad (2.14)$$

est une copule si et seulement si ϕ est convexe (McNeil and Embrechts, 2005).
Toute les copules construites selon (2.14) sont appelées des copules archimédiennes bivariées. Si $\phi(0) = \infty$ le générateur est dit strict.

2.4 Les mesures de dépendances

On présente ici les mesures de dépendance utilisées dans l'étude, en l'occurrence le Tau de Kendall, le Rho de Spearman et le Rho de Van der Waerden. Tous les détails et les preuves de cette section se trouvent dans Rémillard (2013).

2.4.1 La fonction de Kendall

Rappelons que $(X_1, X_2) \sim H$, avec des marginales continues F_1 et F_2 , et une copule C , et $U_1 = F_1(X_1)$ et $U_2 = F_2(X_2)$. On pose

$$V = H(X_1, X_2) = C\{F_1(X_1), F_2(X_2)\} = C(U_1, U_2) \in [0, 1],$$

Alors, la loi de V ne dépend pas des marginales et sa fonction de distribution K , est définie par

$$K(t) = P(V \leq t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

et est appelée la fonction de Kendall. Son espérance est appelée le tau de Kendall.

2.4.2 Estimation de la fonction de Kendall

Pour estimer la fonction de Kendall, Genest and Rivest (1993) ont proposé de calculer d'abord les pseudo observations (Rémillard, 2013) :

$$\begin{aligned} \hat{V}_i &= \text{Card}\{j; X_{j1} < X_{i1} \text{ et } X_{j2} < X_{i2}\} / (n-1) \\ &= \text{Card}\{j; R_{j1} < R_{i1} \text{ et } R_{j2} < R_{i2}\} / (n-1) \\ &= \text{Card}\{j; \hat{U}_{j1} < \hat{U}_{i1} \text{ et } \hat{U}_{j2} < \hat{U}_{i2}\} / (n-1) \\ &= \frac{n}{n-1} \{C_n(\hat{U}_{i1}, \hat{U}_{i2})\} - \frac{1}{n-1} \\ &\approx V_i = C(U_{i1}, U_{i2}), \quad i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.4.3 Le Tau de Kendall

Le tau de Kendall est une mesure de concordance. Deux paires de points (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2) sont concordants si et seulement si $x_1 \leq x'_1$ et $x_2 \leq x'_2$ ou $x'_1 \leq x_1$ et $x'_2 \leq x_2$. Sinon, elles sont dites discordantes. Géométriquement, la discordance signifie que la ligne passant par (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2) possède une pente négative. La pente est positive si elles sont concordantes (Rémillard, 2013).

Rappelons que $(X_1, X_2) \sim H$, avec des marginales continues F_1, F_2 et une copule C . Posons $U_1 = F_1(X_1)$, $U_2 = F_2(X_2)$, et $V = C(U_1, U_2)$.

Supposons que $(X'_1, X'_2) \sim H$ est indépendante de (X_1, X_2) . Alors le Tau de Kendall est défini par

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_C = P\{((X_1, X_2) \text{ et } (X'_1, X'_2) \text{ sont concordants})\} \\ &\quad - P\{((X_1, X_2) \text{ et } (X'_1, X'_2) \text{ sont discordants})\} \\ &= 2P\{((X_1, X_2) \text{ et } (X'_1, X'_2) \text{ sont concordants})\} - 1 \\ &= 4P(X'_1, X'_2) - 1 \\ &= 4E[C(F_1(X_1), F_2(X_2))] - 1 \\ &= 4E(V) - 1 \\ &= 3 - 4 \int_0^1 K(t) dt, \end{aligned}$$

Où K est la fonction de Kendall.

On peut vérifier que pour $\tau = 1$ donne la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding, $\tau = -1$ pour la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding, et $\tau = 0$ pour la copule d'indépendance.

2.4.4 Estimation du Tau de Kendall

Soient P_n et Q_n respectivement le nombre de paires concordantes et discordantes dans un échantillon de taille n . Alors, $P_n + Q_n = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$. A partir de la définition de τ , une estimation naturelle serait (Rémillard, 2013) :

$$\hat{\tau} = \tau_n = \frac{2(P_n - Q_n)}{n(n-1)} = \frac{4P_n}{n(n-1)} - 1 = 1 - \frac{4Q_n}{n(n-1)},$$

En utilisant les pseudo observations $\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_n$ définies dans (2.15), on a

$$\hat{\tau} = \tau_n = -1 + \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \hat{V}_i.$$

2.4.5 Le rho de Spearman

Le rho de spearman est simplement défini par la corrélation de Pearson entre $U_1 = F_1(X_1)$ et $U_2 = F_2(X_2)$ i.e.,

$$\rho^{(S)} = \rho_C^{(S)} = 12\{E(U_1 U_2) - 1/4\} = 12E(U_1 U_2) - 3.$$

On note ici que pour $\rho^{(S)} = 1$ correspond à la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding, et que $\rho^{(S)} = -1$ correspond à la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding, et que $\rho^{(S)} = 0$ correspond à la copule d'indépendance (Rémillard, 2013).

2.4.6 Estimation du rho de Spearman

Par sa définition, $\rho^{(S)}$ est naturellement défini par la corrélation entre les ranks $(R_{i1}, R_{i2}), \dots, (R_{n1}, R_{n2})$, ce qui correspond à

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^S &= \rho^S = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n \left(R_{i1} - \frac{n+1}{2}\right) \left(R_{i2} - \frac{n+1}{2}\right) \\ &= \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n R_{i1} R_{i2} - 3 \frac{n+1}{n-1} \\ &= 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (R_{i1} - R_{i2})^2. \end{aligned}$$

Comme pour l'estimation du tau de Kendall, $\hat{\rho}^S$ dépend uniquement des rangs. Il est facile de voir que $\hat{\rho}^S = 1$ si et seulement si $R_{i1} = R_{i2}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. De manière analogue, $\hat{\rho}^S = -1$ si et seulement si $R_{i1} = n + 1 - R_{i2}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (Rémillard, 2013).

2.4.7 Le rho de van der Waerden

Le rho de van der Waerden $\hat{\rho}^W$ (Rémillard, 2013) mesure la corrélation entre la variable gaussienne centrée $N^{-1}(F_1(X_1)) = N^{-1}(U_1)$ et $N^{-1}(F_2(X_2)) =$

$N^{-1}(U_2)$, où N est la fonction de distribution gaussienne standard. Ce qui donne,

$$\rho^{(W)} = \text{Cor}\{N^{-1}(U_1), N^{-1}(U_2)\} = E\{N^{-1}(U_1)N^{-1}(U_2)\}.$$

Il faut noter qu'en général la distribution jointe de $N^{-1}(U_1)$ et $N^{-1}(U_2)$ n'est pas gaussienne. $\rho^{(W)} = 1$ correspond à la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding, alors que $\rho^{(W)} = -1$ correspond à la borne inférieure Fréchet-Hoeffding, et $\rho^{(W)} = 0$ correspond à la copule d'indépendance.

2.4.8 Estimation du rho de van der Waerden

Le rho de van der Waerden est estimé par la corrélation entre les paires (Rémillard, 2013) $(\hat{Z}_{i1}, \hat{Z}_{i2})$, où $\hat{Z}_{ij} = N^{-1}(\hat{U}_{ij}) = N^{-1}(\frac{R_{ij}}{n+1})$, $j = 1, 2$, $i \in \{1, \dots, n\}$. L'expression est donnée par

$$\rho^{(W)} = \rho_n^W = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{Z}_{i1} \hat{Z}_{i2}}{\sum_{i=1}^n \hat{Z}_{i1}^2},$$

Puisque $\sum_{i=1}^n \hat{Z}_{ij} = \sum_{i=1}^n N^{-1}(\frac{i}{n+1}) = 0$ et

$$\sum_{i=1}^n \hat{Z}_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \{N^{-1}(\frac{i}{n+1})\}^2.$$

2.5 Tests d'adéquation pour les copules

La présente section est tirée de l'article de Genest et al. (2009). On essaiera ici d'expliquer quelques procédures qui ont été récemment proposées pour les tests d'adéquation pour n'importe quelle classe de copules de dimension 2. Considérons un vecteur aléatoire continu $X = (X_1, X_2)$ ayant une fonction de distribution cumulative H et des marginales F_1, F_2 . La présentation de H sous forme de copule est donnée par $H(x_1, x_2) = C\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$, où C est une fonction de distribution cumulative unique ayant des marginales uniformes sur $(0, 1)$. Un modèle de copule pour X survient lorsque C est inconnue mais supposée appartenir à une classe

$$C_0 = \{C_\theta : \theta \in O\},$$

où O est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^p pour un entier $p \geq 1$.

Il faut également souligner qu'il existe une différence fondamentale entre le problème d'estimation du paramètre de dépendance d'un modèle de copule $C_0 = \{C_\theta : \theta \in O\}$ et la problématique complémentaire de test de la validité de l'hypothèse nulle $H_0 : C \in C_0$ pour une classe de copules C_0 .

Tous les tests qui seront mentionnés ci-après sont basés sur les rangs. Ils peuvent être vus, en effet, comme des fonctions des collections $U_1 = (U_{11}, U_{12}), \dots, U_n = (U_{n1}, U_{n2})$ des pseudo-observations déduites à partir des rangs, où $U_{ij} = R_{ij}/(n+1) = n\hat{F}_j(X_{ij})/(n+1)$, Où \hat{F} est la fonction de distribution marginale empirique.

2.5.1 Le test basé sur la transformation de Kendall

Cette procédure consiste à baser le test de H_0 sur une transformation de probabilité intégrale des données. L'application considérée est (Genest et al., 2009) :

$$\mathbf{X} \mapsto V = H(\mathbf{X}) = C(U_1, U_2),$$

où $U_i = F_i(X_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$ et la distribution jointe de $U = (U_1, U_2)$ est C . C'est ce qui est appelé la transformation de Kendall.

Soit K qui indique la fonction de distribution univariée de V . Genest et Rivest (1993) démontrent que K peut être estimée de manière non paramétrique par la fonction de distribution empirique des pseudo observations $V_1 = C_n(U_n), \dots, V_n = C_n(U_n)$. K peut être estimée par :

$$K_n(\nu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(V_i \leq \nu) \quad \nu \in [0, 1]. \quad (2.16)$$

Il s'agit d'un estimateur consistant de la distribution sous-jacente K . Maintenant, sous H_0 le vecteur $U = \{U_1, U_2\}$ est distribué selon une copule C_θ pour un paramètre $\theta \in O$, et donc la transformation de Kendall $C_\theta(U)$ a une distribution K_θ . Le test est basé sur le processus empirique,

$$\mathbb{K}_n = \sqrt{n}(K_n - K_{\theta_n}).$$

La statistique utilisée pour le test est analogue aux statistiques de Cramér-von Mises et Kolmogorov-Smirnov.

$$S_n^K = \int_0^1 \mathbb{K}_n(\nu)^2 dK_{\theta_n}(\nu), \quad (2.17)$$

et $T_n^K = \sup_{\nu \in [0,1]} |\mathbb{K}_n(\nu)|$.

Ici, on présente la méthode pour le calcul de S_n^K , mais T_n^K peut être calculée de manière analogue (Genest et al., 2009) :

1. Calculer K_n selon la formule (2.16) et estimer θ par θ_n à partir des pseudo-observations.
2. S'il existe une expression analytique pour K_θ , calculer la valeur de $S_n^{(K)}$ comme défini dans (2.17). Sinon, procéder par simulation Monte Carlo. En particulier, choisir $m \geq n$ et procéder aux étapes suivantes :
 - (a) Générer un échantillon aléatoire U_1^*, \dots, U_m^* à partir de la distribution C_{θ_n} .
 - (b) Approximer K_{θ_n} par

$$B_m^*(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}(V_i^* \leq t), \quad t \in [0, 1],$$
 Où $V_i^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{1}(U_j^* \leq U_i^*)$, $i \in \{1, \dots, m\}$.
 - (c) Approximer $S_n^{(K)}$ par $S_n^K = \frac{n}{m} \sum_{i=1}^m \{K_n(V_i^*) - B_m^*(V_i^*)\}^2$.
3. Pour un grand entier N , répéter les étapes suivantes pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$:
 - (a) Générer un échantillon aléatoire simple $\mathbf{Y}_{1,k}^*, \dots, \mathbf{Y}_{n,k}^*$ à partir des distributions C_{θ_n} et calculer les rangs associés $\mathbf{R}_{1,k}^*, \dots, \mathbf{R}_{n,k}^*$.
 - (b) Calculer

$$\mathbf{V}_{i,k}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(\mathbf{Y}_{j,k}^* \leq \mathbf{Y}_{i,k}^*) \text{ pour } i \in \{1, \dots, n\},$$

$$\mathbf{K}_{n,k}^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(\mathbf{V}_{i,k}^* \leq t) \text{ pour } t \in [0, 1],$$
 et estimer θ par $\theta_{n,k}^*$ à travers les rangs précédemment calculés.
 - (c) S'il existe une expression analytique pour K_θ , alors $S_{n,k}^{(K)*} = \int_0^1 \{C_{n,k}^*(t) - K_{\theta_{n,k}^*}^*(t)\}^2 dK_{\theta_{n,k}^*}^*(t)$, Pour laquelle une expression explicite peut être déduite à partir de (2.17), sinon procéder comme suit :
 - (i) Générer un échantillon aléatoire $Y_{1,k}^{**}, \dots, Y_{m,k}^{**}$ à partir de la distribution $C_{\theta_{n,k}^*}$.
 - (ii) Approximer $K_{\theta_{n,k}^*}$ par

$$B_{m,k}^{**}(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}(V_{i,k}^{**} \leq t), \quad t \in [0, 1],$$
 Où

$$V_{i,k}^{**} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{1}(Y_{j,k}^* \leq Y_{i,k}^*), \quad i \in 1, \dots, m.$$

Et finalement poser $S_{n,k}^{(K)*} = \frac{n}{m} \sum_{i=1}^m \{K_{n,k}^*(V_{i,k}^*) - B_{m,k}^{**}(V_{i,k}^*)\}^2$,

Une approximation de la P-value pour ce test est donnée par $\sum_{k=1}^N \mathbf{1}(S_{n,k}^{(K)*} > S_n^{(K)})/N$.

2.5.2 Le test basé sur la transformation de Rosenblatt

La transformation intégrale de Rosenblatt (Genest et al., 2009) d'une copule C est une application $R : (0,1)^2 \rightarrow (0,1)^2$ qui pour tout vecteur $u = (u_1, u_2) \in (0,1)^2$ associe un autre vecteur $R(u) = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = u_1$ et,

$$e_2 = \frac{\partial C(u_1, u_2) / \partial u_1}{\partial C(u_1, 1) / \partial u_1}.$$

La transformée de Rosenblatt présente la propriété critique suivante : c'est que U est distribuée selon C , indiqué $U \sim C$, si et seulement si la distribution de $R(U)$ est une copule d'indépendance.

$$C_{\perp}(e_1, e_2) = e_1 \times e_2, \quad e_1, e_2 \in [0, 1].$$

Donc $H_0 : U \sim C_0$ est équivalent à $H_0^* : R_{\theta}(U) \sim C_{\perp}$ pour un paramètre $\theta \in \mathcal{O}$.

Pour tester cette hypothèse, on peut utiliser le fait que sous H_0 , les pseudo observations $\mathbf{E}_1 = R_{\theta_n}(U_1), \dots, \mathbf{E}_n = R_{\theta_n}(U_n)$ peuvent être interprétées comme un échantillon tiré de la copule d'indépendance C_{\perp} . Ces pseudo observations ne sont pas mutuellement indépendantes et sont approximativement uniformes sur $(0, 1)^2$.

Sous l'hypothèse nulle H_0 , la fonction de distribution empirique

$$D_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(E_i \leq u), \quad u \in [0, 1]^2. \quad (2.18)$$

associée avec les pseudo observations E_1, \dots, E_n devrait être proche de la copule d'indépendance C_{\perp} . Donc, toute distance entre D_n et C_{\perp} est une bonne candidate pour le test d'adéquations. Deux statistiques Cramér-von Mises sont considérées,

$$\begin{aligned}
S_n^{(C)} &= n \int_{[0,1]^2} \{D_n(u) - C_{\perp}(u)\}^2 dD_n(u) \\
&= \sum_{i=1}^n \{D_n(E_i) - C_{\perp}(E_i)\}^2.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

et

$$\begin{aligned}
S_n^{(B)} &= n \int_{[0,1]^2} \{D_n(u) - C_{\perp}(u)\}^2 du \\
&= \frac{n}{3^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \prod k = 1^2(1 - E_{ik}^2) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \prod k = 1^2(1 - E_{ik} \vee E_{jk}).
\end{aligned}$$

où $a \vee b = \max(a, b)$.

Le présent algorithme décrit la méthodologie suivie pour le calcul des P-values, il est valable aussi bien pour la statistique $S_n^{(B)}$ que pour $S_n^{(C)}$. Pour plus de détails, voir Genest et al. (2009).

1. Calculer D_n selon la formule (2.18) et estimer θ par θ_n par la méthode du maximum de vraisemblance.
2. Calculer les valeurs de $S_n^{(C)}$, comme défini dans (2.19).
3. pour un grand entier N , répéter la procédure suivante pour chaque $k \in \{1, \dots, N\}$:
 - (a) Générer un échantillon aléatoire simple $\mathbf{Y}_{1,k}^*, \dots, \mathbf{Y}_{n,k}^*$ à partir des distributions C_{θ_n} et calculer les rangs associés $\mathbf{R}_{1,k}^*, \dots, \mathbf{R}_{n,k}^*$.
 - (b) Calculer $\mathbf{U}_{i,k}^* = \mathbf{R}_{i,k}^*/(n+1)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
 - (c) Estimer θ par $\theta_{n,k}^*$ et calculer $\mathbf{E}_{i,k}^*, \dots, \mathbf{E}_{n,k}^*$ où $E_{i,k}^* = R_{\theta_{n,k}^*}(\mathbf{U}_{i,k}^*)$, $i \in \{i, \dots, n\}$.

$$D_{n,k}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(\mathbf{E}_{i,k}^* \leq u), \quad u \in [0, 1]^2,$$

et

$$S_{n,k}^{(C)*} = \sum_{i=1}^n \{D_{n,k}^*(\mathbf{E}_{i,k}^*) - C_{\perp}(\mathbf{E}_{i,k}^*)\}^2.$$

Une P-value approximative pour le test est alors donnée par $\sum_{k=1}^N \mathbf{1}(S_{n,k}^{(C)*} > S_n^{(C)})/N$.

Chapitre 3

Démarche

Dans ce chapitre, nous allons décrire la démarche globale et les outils utilisés tout au long de cette étude. Nous décrivons également l'application des différentes notions explorées lors des chapitres précédents, et fixons la méthodologie qui sera appliquée pour tous les tests subséquents.

Dans cette étude, nous allons examiner les rendements des stratégies d'options les plus connues (options d'achats, options de vente, écarts baissier, écarts haussiers, straddle, strangles et butterflies) dans leurs dépendances avec les rendements du marché, ceci pour plusieurs niveaux de prix d'exercice. Ensuite, nous allons examiner la dépendance des rendements des *CTAs* et des *Merger Arb* avec le marché afin de vérifier les hypothèses de Fung and Hsieh (2001), et celles de Mitchell and Pulvino (2001).

Les principales données requises sont d'abord les prix historiques de l'indice S&P 500. Pour cette étude, nous utiliserons les prix mensuels de l'indice S&P 500 sur une période étalée entre décembre 1990 et mai 2011. Pour tarifier des droits contingents sur l'indice, nous avons besoin également de la volatilité et du taux sans risque. Nous allons utiliser la volatilité implicite mensuelle observée VIX (*Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index*). Ceci afin d'approximer les prix empiriques des droits contingents à chaque période de l'historique. Le taux d'intérêt utilisé est le taux sans risque trimestriel de la réserve fédérale Américaine, observé chaque mois sur le marché secondaire. Nous utiliserons également l'historique des rendements mensuels du S&P 500 (*Equity dividend yield*), car nous tarifierons les droits contingents en utilisant l'extension du modèle de Black-Merton-Scholes.

Nous citons ici la formule de l'extension du modèle de Black-Merton-Scholes pour la tarification d'une option d'achat, et essayons de démontrer que le

rendement d'une stratégie d'option dépend des rendements du marché et du rapport K/S .

$$C = S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (3.1)$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (3.2)$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \quad (3.3)$$

S_t est le prix du sous-jacent à l'instant t , K est le prix d'exercice, r est le taux sans risque, q est le rendement et σ est l'écart type du sous-jacent. T est la date l'échéance, t est la date courante, et $N(\cdot)$ est la fonction de distribution cumulative de la loi normale.

Le rendement pour une option d'achat peut être exprimé ainsi,

$$r_T = \frac{(S_T - K)^+ - C}{C},$$

Si $S_T \leq K$, alors $r_T = -1$, et donc $r_T = -1$ si $\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \leq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)$, ou $R_T \leq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)$.

Sinon,

$$r_T = \frac{S_T - K - C}{C} = \frac{S_T - K}{C} - 1,$$

Et si l'on remplace C par 3.1,

$$\begin{aligned} r_T &= \frac{S_T - K - C}{C} \\ &= \frac{S_T - K}{S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)} - 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

D'autre part, soit R_T le rendement de l'indice à l'instant T , alors,

$$R_T = \frac{S_T - S_t}{S_t} = \frac{S_T}{S_t} - 1,$$

Et donc,

$$S_T = S_t(1 + R_T),$$

Si l'on remplace dans 3.4, on a si $S_T > K$,

$$\begin{aligned} r_T &= \frac{S_t[1 + R_T - \frac{K}{S_t}]}{S_t[e^{-q(T-t)}N(d_1) - \frac{K}{S_t}e^{-r(T-t)}N(d_2)]} - 1 \\ &= \frac{1 + R_T - \frac{K}{S_t}}{e^{-q(T-t)}N(d_1) - \frac{K}{S_t}e^{-r(T-t)}N(d_2)} - 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sinon, $r_T = -1$ si $R_T \leq \ln(\frac{K}{S_t})$.

L'équation 3.5 montre que le rendement de cette stratégie d'option dépend de K/S , et du rendement de l'indice, sachant que d_1 et d_2 dépendent de K/S (3.2 et 3.3). La démonstration pour une stratégie basée sur une option de vente se ferait de manière analogue, et ceci reste valable pour toutes les stratégies d'options que l'on va utiliser, car elles sont des combinaisons linéaires d'options d'achat et d'options de vente.

On représente ci-après, la méthodologie utilisée pour une option d'achat sur l'indice S&P 500 avec un prix d'exercice égal à 95 pourcent de la valeur courante de l'indice (nous allons utiliser la notation $K = 0.95 S$, $K = S$, $K = 1.05 S$, etc. tout au long de la présentation des résultats). Les options ont une échéance mensuelle, et donc chaque mois les rendements sont calculés. Dans ce graphique on visualise ces rendements en fonction des rendements du marché. La représentation des données montre l'existence de certaines valeurs répétitives : -1 , qui sont similaires aux occurrences d'une loi discrète, ce qui ne nous permet pas d'étudier correctement la dépendance via les copules. On s'intéresse aux copules de Clayton, Frank, Gumbel et leurs copules de survie. La copule Gaussienne et la copule de Student quant à elles sont identiques à leurs copules de survie. L'objectif est d'essayer de voir quelle copule s'ajuste le mieux aux données, les tests d'adéquations seront basés sur la statistique S_n déjà définie dans le chapitre précédent.

Pour cela, nous procéderons à l'élimination de ces valeurs discrètes, mais il faudra d'abord vérifier l'autocorrélation des rendements mensuels du marché (S&P 500).

La figure 3.2 montre la non-existence d'une autocorrélation au sein de l'échantillon. Nous procéderons également au *Change point test* (voir la description du test en annexes), qui pour un nombre de répétitions de 1000, et à

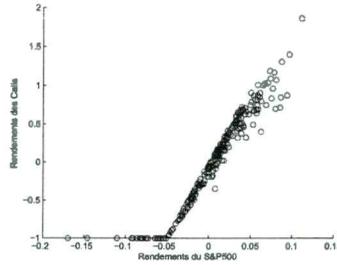


FIGURE 3.1 – Les rendements des options d’achat contre le S&P 500.

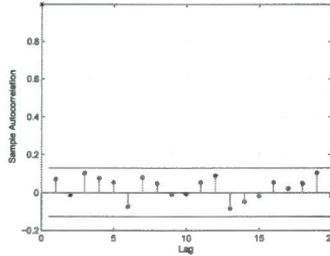


FIGURE 3.2 – Test d’autocorrélation des rendements du marché.

un niveau de signification $\alpha = 5\%$ ne nous permet pas de rejeter l’hypothèse initiale (la distribution de l’échantillon est la même pour toutes les périodes). Comme l’absence d’autocorrélation des rendements du marché est déjà vérifiée, nous pouvons procéder à l’élimination des valeurs répétitives. Le nuage de points obtenus est celui qui est représenté par la figure 3.3.

Le coefficient de dépendance sérielle nous donne à son tour une valeur de 0.02 pour les rendements mensuels du marché (voir résultats en annexes). Ce qui confirme la faible dépendance entre les rendements mensuels à l’intérieur de la série temporelle étudiée. Le *Change point test* ne permet toujours pas de rejeter l’hypothèse initiale (après l’élimination des -1), et le résultat du test d’autocorrélation reste également inchangé après l’élimination de ces valeurs. Ensuite, nous procédons à la transformation des données à l’échelle de la copule (loi uniforme), ceci en utilisant les rangs normalisés (Figure 3.4). Ensuite, nous procédons au test d’indépendance basé sur le processus de la copule empirique (Genest and Rémillard, 2004) (programmes écrits par

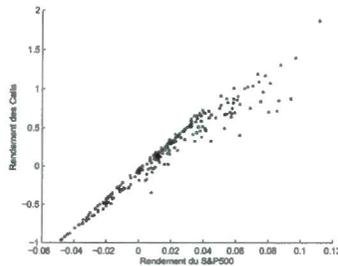


FIGURE 3.3 – Nuage de points des rendements après suppression des valeurs -1 .

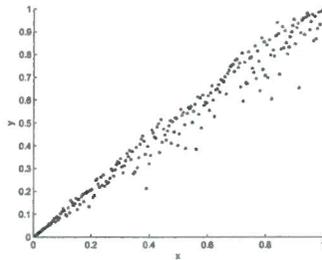


FIGURE 3.4 – Nuage de points des rangs normalisés.

M. Rémillard). Ce test nous permet de rejeter l'hypothèse initiale d'indépendance. Le Tau de Kendall montre une forte association entre les deux variables étudiées (une association des rangs de 0.9024). Les tests d'adéquation (basés sur la transformation de Rosenblatt) pour les copules donnent les résultats présentés dans les tables 3.1 et 3.2. Pour tous les tests d'adéquation, nous utilisons un nombre de répétitions de 1000. Le test d'indépendance basé sur la copule empirique est réalisé avec un nombre de répétitions de 10000. Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.9024 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0153).

En plus des tests basés sur la transformation de Rosenblatt, nous avons réalisé un large éventail de tests basés sur le processus de Kendall (Genest et al., 2006), mais que nous ne présenterons pas ici. Les résultats des tests d'adéquation basés sur les transformations de Rosenblatt sont jugés beaucoup plus fiables.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	15.8789	35.0074	6.6079	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.9786	0.9822
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	2.0729

TABLE 3.1: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = 0.95S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	6.2748	35.0074	9.8395
P-Value(%)	0	0	0

TABLE 3.2: Les tests d'adéquation des copules de survie pour un Call avec $K = 0.95S$.

Le fait d'avoir enlevé les valeurs répétitives -1 pourrait éventuellement soulever quelques interrogations, alors nous avons pensé à une manière pour intégrer ces valeurs dans les calculs. Pour chaque occurrence de -1 , nous remplaçons ce rendement par un -1 auquel nous soustrayons une uniforme entre 0 et 1. L'idée est que nous utilisons une loi continue pour atténuer l'effet des valeurs répétitives sans toutefois toucher aux rangs des autres valeurs de l'échantillon. La représentation des rangs normalisés dans ce cas donne la figure 3.5.

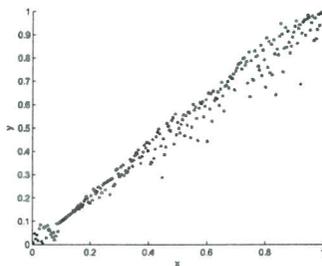


FIGURE 3.5 – Nuage de points des rangs normalisés en utilisant des uniformes.

Les tests d'adéquation (basés sur la transformation de Rosenblatt) pour les

copules donnent les résultats présentés dans les tables 3.3 et 3.4. Le tau de Kendall de l'échantillon reste élevé à 0.91.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	9.60	39.86	6.75	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.9755	0.9813
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	3.349

TABLE 3.3: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = 0.95S$ en utilisant des uniformes.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	6.8473	39.8632	7.6675
P-Value(%)	0	0	0

TABLE 3.4: Les tests d'adéquation des copules de survie pour un Call avec $K = 0.95S$ en utilisant des uniformes.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.9134 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0153).

Tous les tests réalisés en utilisant des uniformes pour les options d'achat et options de vente, pour différents prix d'exercice donnent des P-values de zéro. Les nuages de points des rangs normalisés montrent la concentration des uniformes sous l'apparence d'une allure de carré (copule d'indépendance), et tous les tests d'adéquation rejettent les hypothèses initiales des copules étudiées.

Chapitre 4

Résultats empiriques pour les stratégies d'options

Dans cette partie, nous utiliserons la démarche déjà convenue dans le chapitre 4, pour le cas des stratégies d'options sur l'indice du marché. Nous présentons les résultats des tests d'adéquation pour différentes stratégies d'options sur l'indice du marché, ceci afin d'essayer de savoir quelle copule est liée à quel type de stratégie.

Nous allons utiliser la notation $K = 0.95S$, $K = S$, $K = 1.05S$, etc. tout au long de la présentation des résultats pour signifier qu'une option d'achat ou de vente sur l'indice S&P 500 possède un prix d'exercice égal à 95%, 100% ou 105% de la valeur courante de l'indice du marché. Nous utiliserons également la notation K_1, K_2, \dots pour les stratégies impliquant la combinaison de plusieurs options.

4.1 Les options d'achats

Dans cette partie, nous étudions la dépendance entre les rendements de l'indice et les rendements d'une stratégie d'option d'achat (longue) sur cet indice (voir formules de calcul en annexe). Chaque fois, nous ferons varier le prix d'exercice afin de détecter la dépendance entre les rendements. On s'attend bien sûr à ce qu'une option d'achat longue ait une dépendance positive avec le marché.

4.1.1 Une option d'achat avec $K = S$

Taille de l'échantillon : 155.

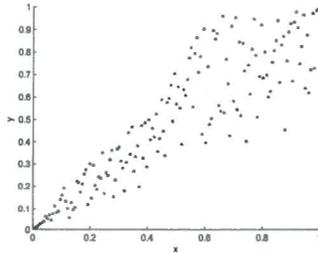


FIGURE 4.1 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Call avec prix d'exercice de 0.95 S.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	5.4	11.9	2.9	-	-
P-Value(%)	2.1	0.2	0	0.3	1
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.8855	0.8941
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	2.4393

TABLE 4.1: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	2.1346	11.983	3.8598
P-Value(%)	0	0	0

TABLE 4.2: Les tests pour les copules de survie pour un Call avec $K = S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.7307 (avec un écart type de l'estimation égal à 0.0528).

4.1.2 Une option d'achat avec $K = 1.05S$

Taille de l'échantillon : 36.

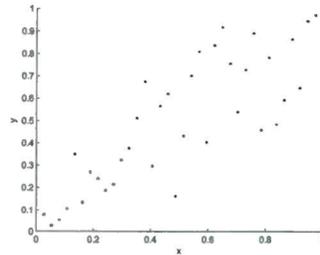


FIGURE 4.2 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Call avec prix d'exercice de 1.05 S.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	3.1	8.54	2.64	-	-
P-Value(%)	90.2	43	26	68	76
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.84	0.86
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	$4.67 \cdot 10^6$

TABLE 4.3: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	2.215	8.538	2.8763
P-Value(%)	21.9	8	23

TABLE 4.4: Les tests pour les copules de survie pour un Call avec $K = 1.05S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.65 (avec une erreur d'estimation égale à 0.1301).

Les résultats montrent une dépendance claire pour les options d'achat hors de la monnaie avec le marché. La copule de Clayton est adaptée aux dépendances positives de faible intensité, et donne une p-value de 90%, suivie par les copules de Student, Gaussienne, puis les copules de Frank et Gumbel. La copule de survie de Clayton permet également de détecter la dépendance, suivie ensuite par la copule de survie de Gumbel et puis dans une moindre mesure par la copule de survie de Frank.

4.2 Les options de vente

Dans cette section, on présente les dépendances entre les rendements de stratégies d'options de vente (longues) et les rendements du marché. Comme pour les options d'achat, on va faire varier le prix d'exercice pour avoir les trois cas de figure : dans la monnaie, à la monnaie et hors de la monnaie.

4.2.1 Une option de vente avec $K = 0.95S$

Taille de l'échantillon : 23.

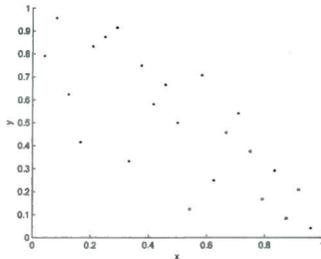


FIGURE 4.3 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice de 0.95 S.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.5 \cdot 10^{-6}$	-7.2	1	-	-
P-Value(%)	0	16	0	31	9
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.78	-0.82
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	$1.5 \cdot 10^7$

TABLE 4.5: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = 0.95S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.5 \cdot 10^{-6}$	-7.25	1
P-Value(%)	0.1	10	0

TABLE 4.6: Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = 0.95S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.58 (avec une erreur d'estimation égale à 0.1661).

4.2.2 Une option de vente avec $K = S$

Taille de l'échantillon : 90.

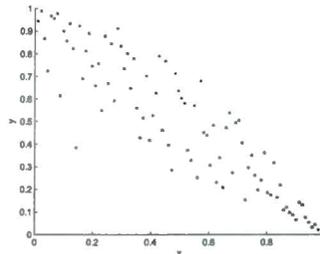


FIGURE 4.4 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice $K = S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-12.43	1	-	-
P-Value(%)	0	4	0	10	3
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.9	-0.9
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	8.62

TABLE 4.7: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-12.43	1
P-Value(%)	0	9	0

TABLE 4.8: Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.74 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0658).

4.2.3 Une option de vente avec $K = 1.05S$

Taille de l'échantillon : 209.

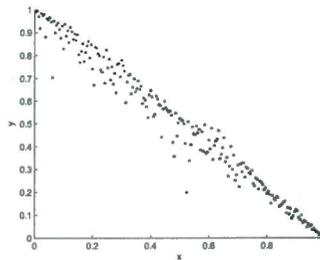


FIGURE 4.5 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice $K = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-40.6	1	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.98	-0.98
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	3.58

TABLE 4.9: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-40.6	1
P-Value(%)	0	0	0

TABLE 4.10: Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = 1.05S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.91 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0188).

Pour les options de vente, nous avons un profil de dépendance, à la fois lorsque l'option est hors de la monnaie, et à la monnaie. La copule Gaussienne, qui est adaptée aux dépendances symétriques, permet de détecter la dépendance. En effet, graphique des rangs normalisés permet de visualiser une certaine dépendance autour de la bissectrice. La copule de survie de Frank permet également de détecter la dépendance lorsque l'option est hors de la monnaie ou est à la monnaie.

4.3 Les écarts haussiers (*Bull Spreads*)

L'écart haussier est composé ici de deux options d'achat (voir formules de calcul en annexes). C'est une stratégie qui a pour objectif de profiter des hausses modérées du marché. Le premier prix d'exercice K_1 représente l'option d'achat détenue, alors que K_2 représente l'option d'achat écrite. Chaque fois, nous ferons varier le prix d'exercice de l'option d'achat écrite.

4.3.1 Un *Bull Spread* avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.05S$

Taille de l'échantillon : 155.

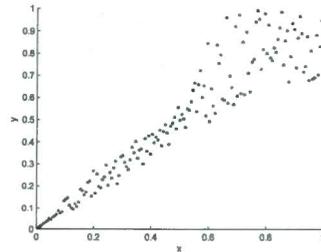


FIGURE 4.6 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	10.34	19.35	3	-	-
P-Value(%)	15.5	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.89	0.95
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	1.48

TABLE 4.11: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	1.82	19.35	5.33
P-Value(%)	0	0	0

TABLE 4.12: Les tests pour les copules de survie pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.05S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.82 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0450).

4.3.2 Un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.10S$

Taille de l'échantillon : 155.

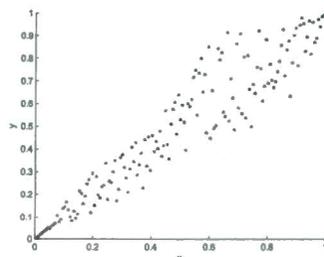


FIGURE 4.7 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.10S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	7.46	16.92	3.98	-	-
P-Value(%)	17.8	2	0	0	2
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.95	0.95
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	8.17

TABLE 4.13: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.10S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	3.47	16.92	5.24
P-Value(%)	0	0	0

TABLE 4.14: Les tests pour les copules de survie pour un Bull Spread avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.10S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.81 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0366).

Le graphique montre des formes semblables à la copule de Clayton. En effet, il s'agit de dépendance positive détectable par cette copule.

4.4 Les écarts baissiers (*Bear Spreads*)

On étudie ici la dépendance des rendements d'une stratégie d'écart baissier avec les rendements du marché. L'écart baissier est composé ici de deux options de vente; la première option est écrite avec un prix d'exercice K_1 , alors que la deuxième est détenue avec un prix d'exercice K_2 (voir formules en annexes).

4.4.1 Un *Bear Spread* avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = S$

Taille de l'échantillon : 90.

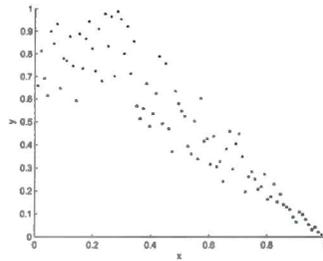


FIGURE 4.8 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-13.64	1	-	-
P-Value(%)	0	2	0	0	3
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.85	-0.90
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	2.1

TABLE 4.15: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-13.65	1
P-Value(%)	0	0	0

TABLE 4.16: Les tests pour les copules de survie pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.75 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0726).

4.4.2 Un *Bear Spread* avec $K_1 = 0.90S$ $K_2 = S$

Taille de l'échantillon : 90.

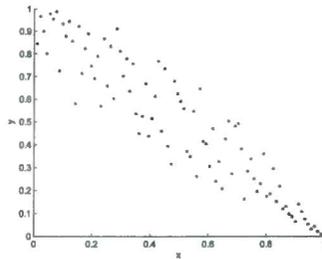


FIGURE 4.9 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.90S$ $K_2 = S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-14.5	1	-	-
P-Value(%)	0	0	0	22	9
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.92	-0.93
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	15.4

TABLE 4.17: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.90S$ $K_2 = S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-14.47	1
P-Value(%)	0	9	0

TABLE 4.18: Les tests pour les copules de survie pour un Bear Spread avec $K_1 = 0.90S$ $K_2 = S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.78 (avec une erreur d'estimation égale à 0.05).

à ce stade, on voit que lorsqu'on augmente l'intervalle permettant de profiter de la volatilité du marché, c'est alors la copule Gaussienne et la copule de Student qui permettent de détecter la dépendance. D'ailleurs, le graphique des rangs normalisés montre une symétrie autour de la bisectrice.

4.5 *Straddle*

Un Straddle est composé d'une option d'achat longue et d'une option de vente longue sur l'indice, ayant toutes les deux le même prix d'exercice. L'objectif ici est de voir le type de dépendance que présente les rendements d'une stratégie de Straddle avec les rendements du marché. Ceci afin d'essayer de confirmer les conclusions de l'article de Fung and Hsieh (2001).

Taille de l'échantillon : 245.

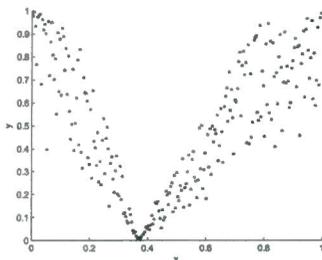


FIGURE 4.10 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Straddle.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	1.25	1.2	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.10	0.20
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	3

TABLE 4.19: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Straddle.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	0.43	1.24	1
P-Value(%)	0	0	0

TABLE 4.20: Les tests pour les copules de survie pour un Straddle.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.16 (avec une erreur d'estimation égale à 0.1118).

à ce stade, on voit qu'aucune copule ne permet de détecter la dépendance des rendements du Straddle avec les rendements du marché. Il est à noter que le coefficient de dépendance sérielle pour les stratégies de *Straddles* présente une légère dépendance négative (-0.16) pour les rendements à l'intérieur de la série.

4.6 Une stratégie *Short Put*

Ici, on étudie les dépendance entre les rendements d'une stratégie Short Put sur l'indice du marché, et les rendements du marché. Le choix du prix d'exercice $K = 0.96S$ est dû aux conclusions de l'article de (Mitchell and Pulvino, 2001).

Taille de l'échantillon : 245.

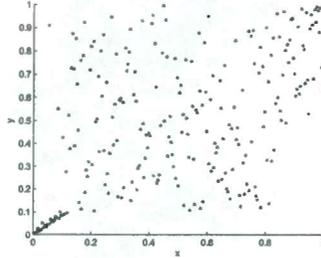


FIGURE 4.11 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Short Put avec $K = 0.96S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	1.28	3.29	1.52	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.55	0.41
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	1.28

TABLE 4.21: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Short Put avec $K = 0.96S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	0.74	3.29	1.67
P-Value(%)	0	0	0

TABLE 4.22: Les tests pour les copules de survie pour un Short Put avec $K = 0.96S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.32 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0941).

A ce stade, même si l'on sait l'existence d'une dépendance entre les rendements des options de vente hors de la monnaie et les rendements du marché, l'outil utilisé ne nous permet pas de capturer cette dépendance. Toutes les P-values sont à zéro et toutes les hypothèses initiales pour les tests d'adéquation

des copules sont rejetées. Les tests pour d'autres niveaux de *moneyness* ne permettent pas non plus d'avoir des résultats.

On obtient des résultats de dépendance clairs entre les options d'achat hors de la monnaie et le marché, et la copule de Clayton permet de capturer le plus cette dépendance, suivie de la copule de Student qui démontre l'existence de dépendances extrêmes. Les nuages de points des rendements des *Bull Spreads* exhibent une allure claire de copule de Clayton, et la P-value le confirme. Pour les écarts baissiers, c'est la copule de Gaussienne qui capture la dépendance, d'ailleurs, le nuage de points présente une certaine symétrie.

Lorsque les variables uniformes aléatoires sont utilisées pour remplacer les rendements -1 (voir en annexes), les tests d'adéquation rejettent les hypothèses initiales pour toutes les copules.

Il est à souligner également que le résultat du test de dépendance sérielle montre l'existence d'une certaine corrélation intra-sérielle positive : 0.3.

Chapitre 5

Résultats empiriques pour les stratégies de *Merger Arbitrage* et *CTAs*

Dans cette partie, nous continuons sur la même méthodologie déjà annoncée au chapitre 4, mais cette fois pour le cas des stratégies de *Merger-Arbitrage* et les *CTAs*. Nous exposons ici les résultats des tests d'adéquation pour les rendements des stratégies de *Merger Arbitrage* afin de voir quelle type de similitude présentent-ils avec les options de vente écrites hors de la monnaie, Mitchell and Pulvino (2001). Alors que pour les rendements des stratégies des *CTAs*, l'objectif était d'étudier quelles similitudes peuvent-elles présenter avec les stratégies de *Straddles* sur l'indice du marché, Fung and Hsieh (2001).

Pour les données sur les fonds d'arbitrage en fusions-acquisitions, nous disposons de la base de données *TASS (Trading Advisor Selection System)* des rendements de divers type de fonds de couverture (dont des fonds déjà disparus). Pour la période étudiée, nous éliminons 44 fonds actifs qui ne déclarent pas leurs performances sur une base régulière, et 90 fonds disparus. à partir de ces données, nous calculerons les rendements mensuels agrégés en nous basant uniquement sur les fonds qui ont une activité de *Merger Arbitrage*. Ceci représente au final 1676 fonds de couverture concernés. Les rendements agrégés résultants vont être comparés aux rendements des droits contingents. Cette série présente une intra-dépendance positive avec un coefficient de 0.38.

5.1 Les résultats pour les stratégies de *Merger Arbitrage*

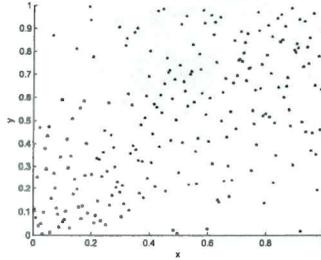


FIGURE 5.1 – Nuage de points des rangs normalisés pour le rendement des stratégies de *Merger-Arbitrage*.

Taille de l'échantillon : 245.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	1.06	4	1.48	-	-
P-Value(%)	62	38	0	2	22
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.52	0.55
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	7.07

TABLE 5.1: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour le rendement des stratégies de *Merger-Arbitrage*.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	0.62	4	1.6
P-Value(%)	0	45	54

TABLE 5.2: Les tests pour les copules de survie pour le rendement des stratégies de *Merger-Arbitrage*.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.38 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0719).

On peut voir à partir ces résultats, que le graphique des rangs normalisés montre une allure de dépendance positive, et la copule de Clayton permet de capturer cette dépendance. Ceci est dû au fait que les rendements élevés du *Risk-Arbitrage* se manifestent lors de période de hausse de marché. Les autres copules (copule de Frank, copule de Student, copule de survie de Gumbel et copule de survie de Frank) capturent également la dépendance mais dans une moindre mesure. La copule de survie de Gumbel montre l'existence d'une certaine dépendance négative dans l'échantillon.

5.2 Les résultats pour les stratégies des *CTAs*

Pour les données sur les fonds de type *Commodity trading advisors*, nous disposons de la base de données *Barclays CTAs*. Pour cette dernière, l'historique commence à partir de 1994. La base de données contient 1100 fonds actifs et 3128 fonds disparus. Nous prenons en compte uniquement les fonds de type quantitatif, dont les stratégies sont automatisées avec des modèles mathématiques et des outils informatiques. Le nombre sélectionné est 712 fonds qui concernent notre étude. Pour chaque mois, nous comptons le nombre de *CTAs* qui ont déclaré leurs performances et nous calculons le rendement pondéré pour chaque période.

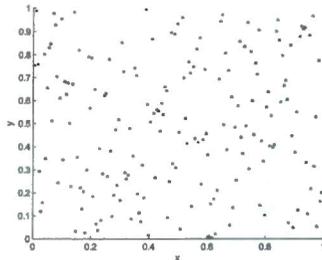


FIGURE 5.2 – Nuage de points des rangs normalisés pour le rendement des stratégies des *CTAs*.

Taille de l'échantillon : 209.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	0.36	1.03	-	-
P-Value(%)	10.3	6.3	13.5	0.4	9.8
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.008	0.0487
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	6.04

TABLE 5.3: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour le rendement des stratégies des *CTAs*.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	0.027	0.36	1
P-Value(%)	12.5	11.4	9.4

TABLE 5.4: Les tests pour les copules de survie pour le rendement des stratégies des *CTAs*.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.04 (avec une erreur d'estimation égale à 0.098).

Les résultats des tests ne nous permettent pas de rejeter l'hypothèse initiale pour presque toutes les copules testées et c'est la copule de Gumbel qui permet de détecter la dépendance, néanmoins, le test d'indépendance basé sur la copule empirique (voir les résultats en annexes) ne nous permet pas de rejeter l'hypothèse initiale d'indépendance. Ceci ne nous permet de rien conclure concernant cette stratégie.

Chapitre 6

Conclusion

La méthodologie suivie dans cette étude nous a permis de visualiser certaines dépendances prévisibles comme pour les stratégies basées sur les options d'achat (Copule de Clayton), ou pour les options de vente longues (copule Gaussienne). Même chose pour les stratégies de type *Bull Spread*, dont nous arrivons à visualiser la dépendance avec le marché à travers la copule de Clayton, et pour les stratégies de type *Bear Spread* dont nous arrivons à visualiser la dépendance à travers la copule Gaussienne. Alors que, pour d'autres stratégies (*Butterflies*, *Condors*, etc), on n'arrive pas à détecter une dépendance claire avec les rendements du marché.

Aucun test d'adéquation ne permet d'identifier un type de dépendance non-linéaire avec le marché pour le *Straddle*, *Strangle*, *Butterfly* et le *Condor* (voir annexes). La même chose pour les options de vente écrites (*Short Puts*) dont les tests d'adéquation nous permettent de rejeter l'hypothèse initiale des copules examinées, et ceci pour tous les niveaux du prix d'exercice. Les rendements des stratégies d'arbitrage sur fusions/acquisitions exhibent une certaine dépendance non-linéaire avec les rendements du marché. La copule qui permet de détecter le plus cette dépendance est la copule de Clayton. On ne peut pas donc confirmer les conclusions de l'article de Mitchell and Pulvino (2001) concernant les similitudes que devraient présenter les deux stratégies. En effet, les rendements des stratégies de *Short Puts* sur l'indice du marché n'exhibent aucune dépendance avec les rendements du marché, alors qu'en théorie, on s'attendait à avoir la même forme de dépendance que pour les stratégies de *Merger Arbitrage*.

D'après l'article de Fung and Hsieh (2001) précédemment abordé dans la revue de littérature, on s'attendait à trouver le même type de dépendance avec

le marché à la fois pour les rendements des *CTAs* et pour les rendements des *Straddles*. Nous ne réussissons pas à identifier les similitudes des rendements pour les deux stratégies, en effet, les tests effectués n'arrivent pas à détecter la forme de dépendance entre les stratégies de type *Straddles* avec le marché, alors que pour les rendements des stratégies de type *CTAs*, on n'arrive même pas à rejeter l'hypothèse initiale d'indépendance.

Annexe A

Simulation d'une copule

On essaie ici de présenter les étapes nécessaires pour implémenter une simulation Monte Carlo d'une copule C .

A.1 Simulation d'une copule de Student

On rappelle que la distribution multivariée de Student est un cas particulier des distributions elliptiques, puisque un vecteur aléatoire X suivant une loi de Student peut être exprimée comme,

$$X = Z/\sqrt{V/\nu}, \tag{A.1}$$

Pour simuler $U \sim C_{\nu,\rho}$, d'abord on simule X selon la formule (A.1) avec $Z \sim N_2(0, \rho)$ et $V \sim \chi^2(\nu)$, et on utilise

$$U = (U_1, U_2) \text{ avec } U_j = T_\nu(X_j), \quad j \in \{1, 2\}$$

Où T_ν est la fonction de distribution d'une Student univariée avec ν degrés de liberté (Rémillard, 2013).

A.2 Simulation d'une copule gaussienne

Pour générer $U \sim C_\rho$ (Rémillard, 2013), au début on simule $Z \sim N(0, \rho)$ et on met

$$U = (U_1, U_2) \text{ avec } U_j = N(Z_j), \quad j \in \{1, 2\}$$

A.3 Simulation d'une copule de archimédienne

Les copules de Clayton, Gumbel et Frank tombent dans la classe des copules archimédiennes de transformation de Laplace. Pour cette classe, l'inverse du générateur ϕ possède une représentation comme une transformation Laplace d'une fonction G . L'algorithme de simulation (McNeil and Embrechts, 2005) est simple à implémenter. Considérons une fonction de distribution cumulative G et on représente la transformation de Laplace par

$$\hat{G} = \int_0^{\infty} e^{-tx} dG(x), \quad t \geq 0$$

On met $G(\infty) = 0$ et on réalise que \hat{G} est une fonction continue et strictement décroissante, et donc peut servir comme candidate pour ϕ^{-1} . En effet, on génère une variable pseudo aléatoire V ayant comme fdc G et des variables pseudo aléatoires uniformes iid X_1, X_2 (indépendantes de V). On met

$$U_i = \hat{G}\left(-\frac{\ln X_i}{V}\right)$$

Alors, le vecteur U possède la structure de dépendance archimédienne désirée avec comme générateur $\phi = \hat{G}^{-1}$ (McNeil and Embrechts, 2005).

On a alors l'algorithme suivant

1. Générer une variable pseudo aléatoire V ayant comme fdc G ,
 - a) Pour une copule de Clayton, V suit une distribution gamma, $Ga(\frac{1}{\theta}, 1)$, et $\hat{G}(t) = (1 + t)^{-\frac{1}{\theta}}$,
 - b) Pour une copule de Gumbel, V suit une distribution stable, $St(\frac{1}{\theta}, 1, \gamma, 0)$ avec $\gamma = (\cos(\pi/2/\theta))^\theta$ et $\hat{G}(t) = \exp(-t^{1/\theta})$,
 - c) Pour une copule de Frank, V est discrète avec $P(V = k) = (1 - e^{-\theta})^k / (k\theta)$ pour $k = 1, 2, \dots$
2. Générer des variables pseudo aléatoires iid uniformes X_1, X_2
3. On obtient $U_i = \hat{G}\left(-\frac{\ln X_i}{V}\right)$, $i = 1, 2$

Pour plus de détails concernant la simulation des copules, voir Rémillard (2013), et McNeil and Embrechts (2005).

Annexe B

Le test de *Change point*

Considérons les pseudo-observations $y_{n,1}, \dots, y_{n,n}$, qui sont associées aux vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués Y_1, \dots, Y_n ayant la fonction de distribution K . Dans la plupart du temps, ces vecteurs aléatoires ne sont pas observables, et dans ce cas on pose $\mathbf{y}_{n,i} = \mathbf{Y}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. L'hypothèse à tester pour le test du *change point* est (Rémillard, 2012) :

$$H_0 : \mathbf{Y}_i \sim K, i = 1, \dots, n, \text{ vs } H_1 : \mathbf{Y}_i \sim K, i < \tau, \mathbf{Y}_i \sim K', i = \tau, \dots, n,$$

où $K \neq K'$ sont des fonctions continues. Pour les pseudo-observations $y_{n,i}$ estimant \mathbf{Y}_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit $Q_n(s, n) \doteq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor ns \rfloor} \mathbf{1}(\mathbf{y}_{n,i} \leq \mathbf{x})$, et posons $K_n(\mathbf{x}) \doteq Q_n(1, \mathbf{x})$. Les statistiques de test sont généralement basées sur le processus

$$\mathbb{A}_n(s, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor ns \rfloor} \mathbf{1}(\mathbf{y}_{n,i} \leq \mathbf{x}) - K_n(\mathbf{x}), \quad (s, \mathbf{x}) \in [0, 1] \times T.$$

La statistique de Kolmogorov-Smirnov est définie sous la forme :

$$\mathcal{T}_n = \max_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbb{A}_n(j/n, \mathbf{y}_{n,i})|.$$

Pour un entier N large, on répète les étapes suivantes pour chaque $k \in \{1, \dots, N\}$:

- (a) Générer un échantillon aléatoire $\xi_i^{(k)} \sim N(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$.
- (b) On pose $\tilde{\alpha}_n^{(k)}(s, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_i^{(k)} \{\mathbf{1}(\mathbf{Y}_i \leq \mathbf{x}) - K_n(\mathbf{x})\}$, et $\tilde{\mathbb{A}}_n^{(k)}(s, \mathbf{x}) = \alpha_n^{(k)}(s, \mathbf{x}) - \frac{\lfloor ns \rfloor}{n} \alpha_n^{(k)}(1, \mathbf{x})$.

(c) On évalue $\mathcal{T}_n^{(k)} = \max_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{\mathbb{A}}_n^{(k)}(j/n, \mathbf{y}_{n,i})|$.
Une approximation de la P -value pour le test basé sur τ_n est donnée par
 $\sum_{k=1}^N \mathbf{1}(\mathcal{T}_n^{(k)} > \tau_n)/N$.

Annexe C

Principales formules

On décrit ici les formules pour les paiements et les rendements pour les différentes stratégies utilisées.

C.1 Stratégie avec option d'achat

- (i) Le paiement est $\pi_T = \max(S_T - K, 0)$,
- (ii) Le rendement est $r_T = \frac{\pi_T - C_t}{C_t}$, où S_T est le prix de l'indice à l'échéance, K est le prix d'exercice et C_t est la prime de l'option payée (à la date t au départ).

Les rendements de la stratégie d'option de vente sont calculées de manière analogue (avec le paiement égal à $\max(K - S_T, 0)$).

C.2 Stratégie avec option de vente écrite

- (i) Le paiement est $\pi_T = -\max(K - S_T, 0)$,
- (ii) Le rendement est $r_T = \frac{P_t + \pi_T}{S_t}$, où P_t est la prime reçue de l'option de vente et S_t est le prix de l'indice à la date de départ.

C.3 Stratégie de type *Bull Spread*

Elle est composée de deux options d'achat, la première option ayant un prix d'exercice inférieur à celui de la deuxième (respectivement en positions longue et courte, avec des paiements respectifs $\pi_{1,T}$ et $\pi_{2,T}$), où

- (i) le paiement de l'option d'achat longue est $\pi_{1,T} = \max(S_T - K, 0)$,
 - (ii) le paiement de l'option d'achat courte est $\pi_{2,T} = -\max(S_T - K, 0)$.
- Le rendement de fin de période est calculé de la manière suivante,

$$r_T = \frac{(\pi_{1,T} + \pi_{2,T}) - (C_{1,t} - C_{2,t})}{(C_{1,t} - C_{2,t})},$$

où $C_{1,t}$ est la prime payée pour la position longue, alors que $C_{2,t}$ représente la prime reçue sur l'option d'achat écrite, toutes les deux en début de période t .

C.4 Stratégie de type *Bear Spread*

Elle est composée de deux options de vente, la première option ayant un prix d'exercice inférieur à celui de la deuxième (respectivement en positions courte et longue, avec des paiements respectifs $\pi_{1,T}$ et $\pi_{2,T}$), où

- (i) le paiement de l'option de vente courte est $\pi_{1,T} = -\max(K - S_T, 0)$,
- (ii) le paiement de l'option de vente longue est $\pi_{2,T} = \max(K - S_T, 0)$.

Le rendement de fin de période est calculé de la manière suivante :

$$r_T = \frac{(\pi_{2,T} + \pi_{1,T}) - (P_{2,t} - P_{1,t})}{(P_{2,t} - P_{1,t})},$$

où $P_{1,t}$ représente la prime reçue sur l'option de vente écrite, alors que $P_{2,t}$ représente la prime payée sur l'option de vente achetée.

C.5 Stratégie de type *Straddle*

Elle est composée d'une option d'achat et d'une option de vente avec le même prix d'exercice (toutes les deux en position longue), avec des paiements respectifs $\pi_{1,T}$ et $\pi_{2,T}$ en date de fin T), où

- (i) le paiement de l'option d'achat longue est $\pi_{1,T} = \max(S_T - K, 0)$,
- (ii) le paiement de l'option de vente longue est $\pi_{2,T} = \max(K - S_T, 0)$,

Le rendement de fin de période T , est calculé de la manière suivante :

$$r_T = \frac{(\pi_{1,T} + \pi_{2,T}) - (P_{1,t} + C_{1,t})}{(P_{1,t} + C_{1,t})},$$

où $P_{1,t}$ et $C_{1,t}$ représentent respectivement les primes payées pour l'option de vente et l'option d'achat en début de période.

C.6 Stratégie de type *Butterfly*

Elle est composée de deux options d'achat écrites à la monnaie (ayant un paiement de fin de période $\pi_{0,T}$, et un prix d'exercice K_0), d'une option d'achat achetée dans la monnaie, et d'une autre option d'achat achetée hors la monnaie (ayant des paiements respectifs de $\pi_{1,T}$ et $\pi_{2,T}$), et des prix exercices respectifs K_1 et K_2 .

Le paiement est calculé de la manière suivante,

$$\pi_T = \pi_{1,T} + \pi_{2,T} + 2 \times \pi_{0,T},$$

où,

- (i) le paiement de la première option d'achat longue est $\pi_{1,T} = \max(S_T - K_1, 0)$,
- (ii) le paiement de la deuxième option d'achat longue est $\pi_{2,T} = \max(S_T - K_2, 0)$,
- (iii) le paiement de chaque option d'achat écrite est $\pi_{0,T} = -\max(S_T - K_0, 0)$.

Le rendement de fin de période T est calculé de la manière suivante :

$$r_T = \frac{\pi_T - (C_{1,t} + C_{2,t} - 2 \times C_{0,t})}{(C_{1,t} + C_{2,t} - 2 \times C_{0,t})},$$

où $C_{0,t}$ est la prime reçue sur chacune des options écrites à la monnaie, $C_{1,t}$ est la prime payée sur l'option d'achat dans la monnaie, et $C_{2,t}$ est la prime payée sur l'option d'achat hors de la monnaie.

Les rendements de stratégies **Condor** est calculé de manière analogue à ceux du **Butterfly**, sauf que les deux options écrites à la monnaie dans le cas précédent, auront des prix d'exercice respectifs dans la monnaie et hors de la monnaie.

C.7 Calcul des rendements

Les rendements du marchés quant à eux sont calculés de la manière suivante :

$$R_T = \frac{S_T - S_t}{S_t}.$$

Où T correspond à l'échéance mensuelle, t est la date courante et S est le prix de l'indice.

C.8 Les résultats du test d'indépendance basé sur la copule empirique

	Fisher P-value	CVM P-value
<i>Call</i> $K = 0.95S$	0	0
<i>Call</i> $K = 0.95S$ avec données transformées	0	0
<i>Call</i> $K = S$	0	0
<i>Call</i> $K = S$ avec données transformées	0	0
<i>Call</i> $K = 1.05S$	0	0
<i>Call</i> $K = 1.05S$ avec données transformées	0	0
<i>Put</i> $K = 0.95S$	0	0
<i>Put</i> $K = 0.95S$ avec données transformées	0	0
<i>Put</i> $K = S$	0	0
<i>Put</i> $K = S$ avec données transformées	0	0
<i>Put</i> $K = 1.05S$	0	0
<i>Put</i> $K = 1.05S$ avec données transformées	0	0
<i>Bull Spread</i> avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.05S$	0	0
<i>Bull Spread</i> avec $K_1 = S$ $K_2 = 1.10S$	0	0
<i>Bear Spread</i> avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = S$	0	0
<i>Bear Spread</i> avec $K_1 = 0.90S$ $K_2 = S$	0	0
<i>straddle</i>	0	0
<i>Strangle</i> avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$	0	0
<i>Strangle</i> avec $K_1 = 0.975S$ $K_2 = 1.025S$	0	0
<i>Butterfly</i> avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$	0	0
<i>Butterfly</i> avec $K_1 = 0.975S$ $K_2 = 1.025S$	0	0
<i>Condor</i> avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$	0	0
<i>Condor</i> avec $K_1 = 0.925S$ $K_2 = 0.95S$ $K_3 = 1.05S$ $K_4 = 1.075S$	0	0
<i>Short Put</i> avec $K = 0.95S$	0	0
<i>Short Put</i> avec $K = 0.95S$	0	0
<i>Merger-Arbitrage</i>	0	0
<i>CTAs</i>	12.83	12.83

TABLE C.1: Les résultats du test d'indépendance basé sur la copule empirique.

Annexe D

Tests d'adéquation supplémentaires

D.1 Les options de type *Butterflies* et *Condors*

D.1.1 *Butterfly* avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$

Taille de l'échantillon : 187.

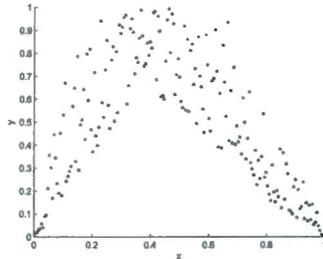


FIGURE D.1 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Butterfly avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	0.08	-2.18	1	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.24	-0.38
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	1.75

TABLE D.1: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Butterfly avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-2.18	1.03
P-Value(%)	0	0	0

TABLE D.2: Les tests pour les copules de survie pour un Butterfly avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 1.05S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.24 (avec une erreur d'estimation égale à 0.1334).

D.1.2 *Butterfly* avec $K_1 = 0.975S$ $K_2 = 1.025S$

Taille de l'échantillon : 176.

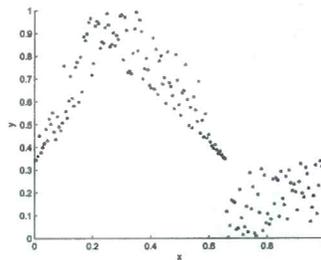


FIGURE D.2 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Butterfly avec $K_1 = 0.975S$ $K_2 = 1.025S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-5.41	1	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.56	-0.57
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	$4.67 \cdot 10^6$

TABLE D.3: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Butterfly avec $K_1 = 0.975S$ $K_2 = 1.025S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-5.41	1
P-Value(%)	0	0	0

TABLE D.4: Les tests pour les copules de survie pour un Butterfly avec $K_1 = 0.975S$ $K_2 = 1.025S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.4757 (avec une erreur d'estimation égale à 0.081).

D.1.3 *Condor* avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$

Taille de l'échantillon : 187.

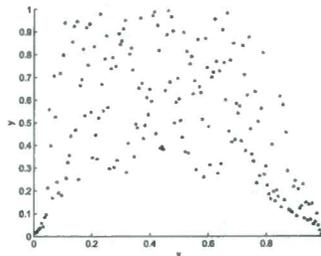


FIGURE D.3 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Condor avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	0.07	-2.14	1	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.25	-0.35
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	1.42

TABLE D.5: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Condor avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-2.14	1.03
P-Value(%)	0	0	0

TABLE D.6: Les tests pour les copules de survie pour un Condor avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.22 (avec une erreur d'estimation égale à 0.126).

D.1.4 *Condor* avec $K_1 = 0.925S$ $K_2 = 0.95S$ $K_3 = 1.05S$ $K_4 = 1.075S$

Taille de l'échantillon : 222.

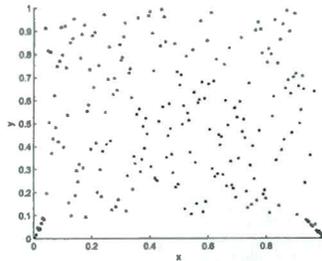


FIGURE D.4 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Condor avec $K_1 = 0.95S$ $K_2 = 0.975S$ $K_3 = 1.025S$ $K_4 = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	0.12	-0.58	1	-	-
P-Value(%)	0	1.1	4.4	1	3
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.08	-0.11
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	1.5

TABLE D.7: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Condor avec $K_1 = 0.925S$ $K_2 = 0.95S$ $K_3 = 1.05S$ $K_4 = 1.075S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-0.58	1.06
P-Value(%)	3.1	0.6	0

TABLE D.8: Les tests pour les copules de survie pour un Condor avec $K_1 = 0.925S$ $K_2 = 0.95S$ $K_3 = 1.05S$ $K_4 = 1.075S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.06 (avec une erreur d'estimation égale à 0.1076).

D.2 Les options de type *Strangle*

D.2.1 *Strangle* avec $K_1 = 0.95S$ et $K_2 = 1.05S$

Taille de l'échantillon : 59.

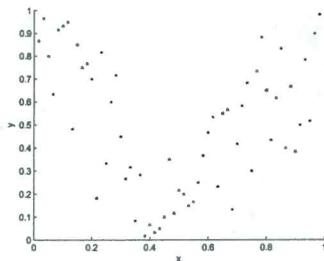


FIGURE D.5 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Strangle avec $K_1 = 0.95S$ et $K_2 = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-0.5	1.07	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.06	-0.08
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	2.87

TABLE D.9: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Strangle avec $K_1 = 0.95S$ et $K_2 = 1.05S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	0.16	-0.50	1
P-Value(%)	0	0	0

TABLE D.10: Les tests pour les copules de survie pour un Strangle avec $K_1 = 0.95S$ et $K_2 = 1.05S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.013 (avec une erreur d'estimation égale à 0.2316).

D.2.2 *Strangle* avec $K_1 = 0.975S$ et $K_2 = 1.025S$

Taille de l'échantillon : 129.

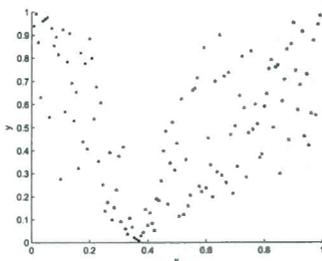


FIGURE D.6 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Strangle avec $K_1 = 0.975S$ et $K_2 = 1.025S$.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	0.38	1.10	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.00085	0.063
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	3.1

TABLE D.11: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Strangle avec $K_1 = 0.975S$ et $K_2 = 1.025S$.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	0.21	0.38	1
P-Value(%)	0	0	0

TABLE D.12: Les tests pour les copules de survie pour un Strangle avec $K_1 = 0.975S$ et $K_2 = 1.025S$.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.0715 (avec une erreur d'estimation égale à 0.1461).

D.3 Options d'achat avec données transformées

D.3.1 Une option d'achat avec $K = S$ et données transformées

Taille de l'échantillon : 245.

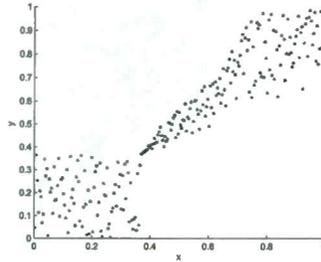


FIGURE D.7 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Call avec prix d'exercice de 0.95 S et données transformées.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	1.5	14	3	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.84	0.85
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	10.65

TABLE D.13: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = S$ et données transformées.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	2.13	14	2.46
P-Value(%)	0	0	0

TABLE D.14: Les tests pour les copules de survie pour un Call avec $K = S$ et données transformées.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.75 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0403).

D.3.2 Une option d'achat avec $K = 1.05S$ et données transformées.

Taille de l'échantillon : 245.

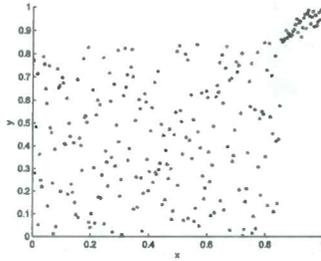


FIGURE D.8 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Call avec prix d'exercice de 1.05 S et données transformées.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	0.28	2.9	1.6	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	0.45	0.45
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	2.6

TABLE D.15: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Call avec $K = 1.05S$ et données transformées.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	1.38	2.9	1.3
P-Value(%)	0	0	0

TABLE D.16: Les tests pour les copules de survie pour un Call avec $K = 1.05S$ et données transformées.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : 0.29 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0993).

D.4 Options de vente avec données transformées

D.4.1 Une option de vente avec $K = 0.95S$ et données transformées.

Taille de l'échantillon : 245.

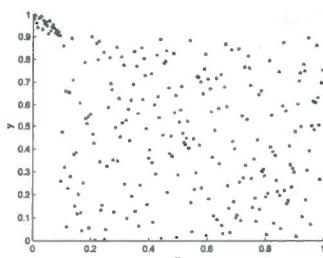


FIGURE D.9 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice de $0.95S$ et données transformées.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-2	1	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.34	-0.34
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	2.57

TABLE D.17: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = 0.95S$ et données transformées.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-2	1
P-Value(%)	0	0	0

TABLE D.18: Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = 0.95S$ et données transformées.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.20 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0958).

D.4.2 Une option de vente avec $K = S$ et données transformées

Taille de l'échantillon : 245.

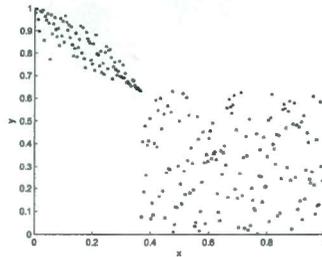


FIGURE D.10 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice $K = S$ et données transformées.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-6.8	1	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.71	-0.74
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	5

TABLE D.19: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = S$ et données transformées.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-6.8	1
P-Value(%)	0	0	0

TABLE D.20: Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = S$ et données transformées.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.56 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0786).

D.4.3 Une option de vente avec $K = 1.05S$ et données transformées

Taille de l'échantillon : 245.

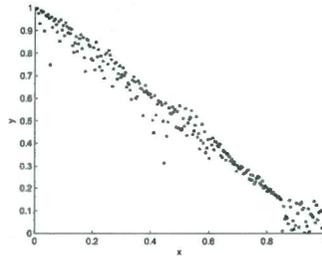


FIGURE D.11 – Nuage de points des rangs normalisés pour un Put avec prix d'exercice $K = 1.05 S$ en utilisant des données transformées.

	Clayton	Frank	Gumbel	Gaussienne	Student
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-42	1	-	-
P-Value(%)	0	0	0	0	0
$\hat{\rho}$	-	-	-	-0.96	-0.98
$\hat{\nu}$	-	-	-	-	2.17

TABLE D.21: Les tests pour les copules archimédiennes et elliptiques pour un Put avec $K = 1.05S$ et données transformées.

	Clayton	Frank	Gumbel
Theta	$1.45 \cdot 10^{-6}$	-42	1
P-Value(%)	0	0	0

TABLE D.22: Les tests pour les copules de survie pour un Put avec $K = 1.05S$ et données transformées.

Le Tau de Kendall de l'échantillon : -0.92 (avec une erreur d'estimation égale à 0.0157).

Annexe E

Tests d'indépendance pour les fonds de couverture

E.1 Tests d'indépendance pour les rendements des stratégies de Merger Arbitrage

	Test de Cramer-von-Mises	Test de Kolmogorov-Smirnov
Statistique	3.80	3.11
P-Value(%)	0	0

TABLE E.1: Tests d'indépendance basé sur la fonction de Kendall.

	Test de Cramer-von-Mises	Test de Fisher
Statistique	34.27	∞
P-Value(%)	0	0

TABLE E.2: Tests d'indépendance basé sur la copule empirique

E.2 Tests d'indépendance pour les rendements des stratégies CTAs

	Test de Cramer-von-Mises	Test de Kolmogorov-Smirnov
Statistique	0.15	0.71
P-Value(%)	29	47

TABLE E.3: Tests d'indépendance basé sur la fonction de Kendall.

	Test de Cramer-von-Mises	Test de Fisher
Statistique	1.58	4.11
P-Value(%)	12.83	12.83

TABLE E.4: Tests d'indépendance basés sur la copule empirique.

Annexe F

Tests de dépendance sérielle

Stratégie	Valeur de la statistique ρ
Rendements mensuels de l'indice S&P 500	0.02
Short Put $K = 0.96S$	0.3
Stratégies de <i>Merger Arbitrage</i>	0.38
Stratégies <i>CTAs</i>	-0.05
Stratégies Straddles	-0.162

TABLE F.1: Tests de dépendance sérielle.

Bibliographie

- de Matteis, R. (2001). Fitting copulas to data. Master's thesis, Institute of Mathematics Of the University Of Zurich.
- Fung, W. and Hsieh, D. A. (1997). Empirical characteristics of dynamic trading strategies : The case of hedge funds. *The Review of Financial Studies*, 10 :275–302.
- Fung, W. and Hsieh, D. A. (2001). The risk in hedge fund strategies : Theory and evidence from trend followers. *The Review of Financial Studies*, 14 :313–341.
- Genest, C., Quessy, J.-F., and Rémillard, B. (2006). Goodness-of-fit procedures for copula models based on the integral probability transformation. *The Scandinavian Journal of Statistics*, 33 :337–366.
- Genest, C. and Rémillard, B. (2004). Tests of independence or randomness based on the empirical copula process. *Test*, 13 :335–369.
- Genest, C., Rémillard, B., and Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44 :199–213.
- Genest, C. and Rivest, L.-P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate archimedian copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88 :1034–1043.
- McNeil, R. F. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management : concepts, techniques, and tools*. Princeton Series in Finance, N.J.
- Merton, R. C. (1981). On market timing and investment performance part i : An equilibrium theory of value for market forecasts. *Journal Of Business*, 54 :363–406.

- Mitchell, M. and Pulvino, T. (2001). Characteristics of risk and return in risk arbitrage. *Journal of Finance*, LVI :2135–2175.
- Rémillard, B. (2012). Non-parametric change point problems using multipliers. Technical report, SSRN Working Paper Series No. 2043632.
- Rémillard, B. (2013). *Statistical Methods for Financial Engineering*. Chapman and Hall/CRC.
- Sharpe, W. F. (1992). Asset allocation : Management style and performance measurement. *Journal of Portfolio Management*, 18 :7–19.