

HEC MONTRÉAL

**MODÉLISATION DE LA STRUCTURE DE LA VARIANCE ET DU COEFFICIENT
D'ASYMÉTRIE D'OPTIONS SUR INDICE À L'AIDE D'UN MODÈLE GARCH**

**par
Marc-André Lecours**

**Sciences de la gestion
(Option finance)**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences en gestion
(M. Sc.)*

Décembre 2020
© Marc-André Lecours, 2020

Résumé

La littérature est très riche à l'égard des techniques d'évaluation d'options. Dans ce mémoire, nous proposons une méthodologie afin d'estimer les paramètres d'un modèle d'évaluation d'options principalement fondé sur les moments conditionnels de la distribution risque-neutre à l'égard du risque. Les moments risque-neutre sont obtenus en synthétisant la distribution extraite d'un échantillon de prix d'options sur indice boursier. À l'aide de la structure de la variance et du coefficient d'asymétrie de l'indice du S&P 500 entre janvier 1996 et août 2015, l'estimation jointe avec les rendements de l'indice nous permet d'ajuster adéquatement le modèle d'évaluation d'options GARCH de Bégin, Dorion et Gauthier (2018). L'ajustement du modèle par les moments risque-neutre est en mesure de capturer l'information contenue par les prix des options sur l'indice boursier étudié. Notre stratégie d'estimation se veut simple à mettre en œuvre, efficace et permet de réduire la charge de calcul à effectuer liée à un large échantillon d'options. Nous présentons également la précision du modèle estimé hors échantillon, soit de septembre 2015 à décembre 2019, où les erreurs d'évaluation obtenues demeurent satisfaisantes pour la majorité de cette seconde période.

Mots clés: Évaluation d'options; Moments risque-neutre; Modèles GARCH

Abstract

The literature is very rich with regard to option valuation techniques. In this thesis, we propose a methodology to estimate the parameters of an option pricing model mainly based on the conditional risk-neutral moments. The risk-neutral moments are obtained by synthesizing the distribution extracted from a sample of stock index option prices. Using the variance and skewness structure of the S&P 500 index, the joint estimation with the index returns allows us to properly adjust the GARCH option pricing model of Bégin, Dorion and Gauthier (2018). Adjusting the model by risk-neutral moments therefore makes it possible to capture the information contained in the prices of stock index options. Our estimation strategy aims to be simple to implement, effective and reduce the computational load to be carried out linked to a large sample of options. We also present the accuracy of the model estimated out of sample, from September 2015 to December 2019, where the evaluation errors obtained remain satisfactory for most of this second period.

Keywords: Option pricing; Risk-neutral moments; GARCH models

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Table des matières	iv
Liste des tableaux et des figures	vi
Liste des abréviations.....	vii
Avant-propos	viii
Remerciements.....	ix
Introduction.....	1
Chapitre 1. Revue de la littérature.....	4
1.1 Évaluation d'options à l'aide de modèles GARCH	4
1.1.1 Introduction aux modèles autorégressifs	4
1.1.2 Introduction aux modèles GARCH classiques	5
1.1.3 Le modèle GARCH de Heston et Nandi (2000).....	7
1.1.4 Risque neutralisation.....	9
1.2 Évaluation d'options	10
1.2.1 Évaluation d'options par simulation Monte-Carlo	10
1.2.2 Évaluation d'options avec solution analytique.....	10
1.3 Le modèle GARCH d'Ornthanalai (2014).....	12
1.3.1 Dynamique du rendement du marché	12
1.3.2 Kernel d'évaluation	14
1.3.3 Prime de risque	15
1.3.4 Évaluation d'options	15
1.3.5 Évaluation des moments risque-neutre.....	15
1.4 Estimation des paramètres d'un modèle d'évaluation d'options	16
1.4.1 Estimation avec rendements.....	16
1.4.2 Estimation avec options.....	17
1.4.3 Estimation avec rendements et options	18
1.4.4 Estimation jointe à l'aide des rendements et des moments risque-neutre	19
1.5 Techniques de filtration	21
1.5.1 Filtres particuliers.....	22
1.6 Estimation de modèles d'options basée sur les moments de la distribution risque-neutre	23
Chapitre 2. Base de données	25
Chapitre 3. Construction des moments risque-neutre.....	29
3.1 Introduction au portefeuille de réplication	29
3.2 Swap de divergence	30

3.3 Discussion des limites potentielles de la méthodologie	33
3.3.1 Problème de mise en œuvre	33
3.3.2 Erreur de troncation	33
3.3.3 Disponibilité limitée des prix d'exercice	34
Chapitre 4. Analyse des résultats	35
4.1 Résultats de l'estimation jointe	35
4.2 Analyse de la performance du modèle	38
4.3 Analyse de la performance du modèle hors échantillon	44
4.3.1 Prédiction des rendements hors échantillon	44
4.3.2 Évaluation des swaps hors échantillon	45
4.3.3 Évaluation d'options hors échantillon	49
4.4 Analyse du temps d'estimation du modèle	51
Chapitre 5. Conclusion	52
Bibliographie	54
Index analytique	i
Annexe 1 : Composante de correction de la convexité	i
Annexe 2 : Moments conditionnels du rendement du marché	v
Annexe 3 : Variance conditionnelle et intensité du saut risque-neutre	vii
Annexe 4 : Fonction génératrice des moments pour les rendements excédentaires risque-neutre	ix
Annexe 5 : Prix d'une option d'achat de style européen	xiii
Annexe 6 : Filtre particulière	xvi
Annexe 7 : Fonctions Matlab créées pour le modèle de BDG (2018)	xix
Annexe 8 : Réplication d'un flux monétaire	xxi

Liste des tableaux et des figures

Liste des tableaux

Tableau 1 : Description des options SPX provenant de l'échantillon (1996-2015)	28
Tableau 2 : Statistiques descriptives du VIX ² et Hellinger Skew swap (1996-2015).....	31
Tableau 3 : Paramètres du modèle estimé à l'aide des rendements et des RNM et comparaison avec les résultats du modèle de BDG (2018)	37
Tableau 4 : Erreurs d'évaluation sur les swaps de variance utilisés pour l'estimation du modèle de marché et comparaison avec le modèle de BDG (2018).....	39
Tableau 5 : Erreurs d'évaluation sur les swaps de variance utilisés pour l'estimation du modèle de marché hors échantillon.....	49
Tableau 6 : Erreurs d'évaluation des volatilités implicites des options hors échantillon	50

Liste des figures

Figure 1 : S&P 500, volatilités implicites et asymétrie implicite à-la-monnaie.....	27
Figure 2 : Présentation des séries temporelles du VIX ² et Hellinger Skew.....	32
Figure 3 : Comparaison entre le VIX ² implicite du modèle et le VIX ² du marché.....	42
Figure 4 : Comparaison entre l'asymétrie implicite du modèle et l'asymétrie du marché	43
Figure 5 : Comparaison des fonctions de répartition cumulative des PIT inversés provenant des rendements prédits du modèle d'évaluation et des rendements observés hors échantillon	45
Figure 6 : Graphique quantile-quantile (« QQ-Plot ») à l'aide des rendements prédits du modèle d'évaluation et des rendements observés sur les marchés hors échantillon	45
Figure 7 : Comparaison entre le VIX ² et Skewness implicite du modèle et le VIX ² et Skewness du marché hors échantillon.....	47

Liste des abréviations

GARCH: Generalized **A**uto**R**egressive **C**onditional **H**eteroskedasticity

OTM: Out-of-The-Money

ITM: In-The-Money

ATM: At-The-Money

CBOE: Chicago **B**oard **O**ptions **E**xchange

ARCH : **A**uto**R**egressive **C**onditional **H**eteroscedasticity

UKF : Unscented **K**alman **F**ilter

EKF : Extended **K**alman **F**ilter

NIG : Normal-Inverse **G**aussian

MÉDAF : **M**odèle d'Évaluation **D**es **A**ctifs **F**inanciers

PIT : Probability Integral Transform

Avant-propos

Ce mémoire est présenté en vue de l'obtention du grade de maîtrise ès sciences en gestion (M. Sc.) de HEC Montréal. Il étudie une technique alternative pour l'estimation du modèle d'évaluation d'options étudiée par Bégin, Dorion et Gauthier (2018). L'idée de ce mémoire de recherche cadre avec la proposition de modèles d'évaluation d'actifs toujours plus complexe afin d'obtenir un juste prix. Cette quête de précision comprend toutefois une complexité numérique et une charge de calcul sans précédent. La technique d'estimation proposée dans ce mémoire se veut une solution efficace à l'estimation des paramètres des modèles d'évaluation d'options, sans toutefois laissé-pour-compte la précision d'estimation. Cette contribution à la littérature financière portant sur l'évaluation d'actifs cadre entièrement avec les plus récentes recherches sur l'optimisation et la performance des modèles d'options. À cet égard, la technique d'estimation proposée afin d'optimiser le modèle ne s'est pas structurée sans difficulté. Les embûches rencontrées concernent particulièrement la réforme d'un modèle financier techniquement complexe où chacune des fonctions clés doit être repensée pour assurer l'intégrité des résultats. Néanmoins, les conclusions obtenues s'arriment agilement avec la littérature financière.

Remerciements

L'écriture d'un mémoire peut se comparer à un marathon. C'est un processus qui nécessite des mois de préparation et qui requiert beaucoup d'effort et d'énergie. Venir à bout de ce long parcours parsemé d'embûches n'est pas une chose facile. Certains abandonnent tout simplement. D'autres trébuchent en cours de route, mais se relèvent et repartent de bons pieds. Une chose est certaine, il n'est guère possible de franchir la ligne d'arrivée sans le support et l'encouragement de la foule. Dans mon cas, ce sont mes collègues de travail, mes amis et mes proches, mais surtout ma famille qui m'a soutenu durant ce cheminement. L'énergie transposée m'a permis de me surpasser et de terminer cette course d'endurance. Et pour cela, je ne pourrai les remercier suffisamment. Un merci tout spécial à Piotr Orłowski pour son support et ses conseils.

Introduction

Le prix des options représente une donnée importante pour les investisseurs, car il fournit une information prospective sur les conditions de marché, comme le mentionnent Feunou et Okou (2018). En période de volatilité élevée, tel qu'observée durant la crise financière de 2007-2009 et l'agitation boursière de 2020, toute prévision financière peut s'avérer utile pour protéger son capital. De plus, le développement de modèles financiers complexes peut servir à évaluer des actifs non transigés sur les marchés boursiers à l'aide de techniques d'évaluation sans-arbitrage. De même, certains investisseurs veulent simplement prendre une position spéculative ou adopter une stratégie de couverture. Dans cette perspective, la littérature regorge de modèles d'évaluation d'actifs visant à estimer avec précision les prix des options observées.

Parmi les modèles les plus connus, notons le modèle d'évaluation d'options introduit par Black et Scholes (1973) (ci-après le modèle « Black-Scholes ») qui se veut une référence en la matière. Nul besoin de mentionner comment l'industrie des produits dérivés a évolué à la suite des travaux de recherche de Black, Scholes et Merton. Le modèle Black-Scholes demeure un incontournable de la finance moderne, mais comporte de nombreuses hypothèses irréalistes. Plusieurs auteurs dont Macbeth et Merville (1979), Rubinstein (1985 et 1994) et Bates (1996) montrent que le modèle évalue incorrectement les options profondément hors-de-la-monnaie (« out-of-the-money » ou « OTM ») et dans-la-monnaie (« in-the-money » ou « ITM »).

Le modèle de Black-Scholes est structuré tel que le prix d'une option dépend d'une série de paramètres. Chacun d'entre eux est observable à l'exception d'un seul, soit la volatilité de l'actif sous-jacent. La volatilité devient alors la variable clé du modèle. Black et Scholes (1973) posent comme hypothèse que le processus du prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique ou de manière équivalente, l'hypothèse d'un taux de rendement avec une distribution log-normal avec une volatilité constante. Néanmoins, la réalité sur les marchés est tout autre. Une fois la formule de prix inversée, celle-ci présente des volatilités implicites différentes à travers les prix d'exercice et les maturités. Des motifs appelés « smile » et « smirk » émergent lorsque nous représentons graphiquement la volatilité implicite par « moneyness », soit le ratio du prix actuel par rapport au prix d'exercice de l'option. Ces courbes de volatilité ont été observées et documentées par plusieurs auteurs, dont Christoffersen, Heston et Jacobs (2009) qui modélisent la courbe de volatilité à l'aide de modèles multifactoriels stochastiques. Les schémas observés peuvent être attribués aux hypothèses irréalistes de Black-Scholes.

Par ailleurs, si la distribution du log-rendement est négativement asymétrique, les prix des options de vente profondément hors-de-la-monnaie seront plus élevés que les prix des options d'achat profondément dans-la-monnaie et la fonction de volatilité implicite sera biaisée à la baisse expliquent Macbeth et Merville (1979) dans leurs travaux de recherche. Dans l'optique d'éviter ces biais, plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature financière. Ces modèles se veulent d'une complexité sans précédent afin d'identifier toutes irrégularités dans la distribution empirique du sous-jacent.

Notons par ailleurs, l'émergence de modèles prenant en compte une dynamique de la volatilité stochastique avec composante de sauts à intensités temporelles variables. Cette quête du réalisme complique l'implémentation de ces modèles et l'estimation de leurs paramètres. Tel que mentionné par Feunou et Okou (2018), l'estimation des paramètres de modèles avec composantes de diffusion et sauts nécessite un panel de prix d'options sur une longue période ce qui implique une complexité computationnelle et économétrique. Bref, un des points saillants à l'estimation des modèles à volatilité stochastique est que les variables d'état latent doivent être inférées avec les paramètres du modèle provenant des prix de l'actif sous-jacent. Bates (2006) mentionne que la relation entre les prix des options et les variables d'états latents sont fortement non linéaire. Les défis que posent l'estimation de ces modèles expliquent la popularité des modèles GARCH (« Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity ») et l'étude de nouvelles approches afin de faciliter les calculs.

L'évaluation d'options à l'aide de modèles GARCH est désormais monnaie courante tant auprès des praticiens qu'auprès de la communauté scientifique. La littérature entourant les processus GARCH est principalement survenue suite aux observations d'Engle (1982) voulant que les séries temporelles du monde économique et financier soient conditionnellement hétéroscédastique et connaissent une persistance et un effet de retour à la moyenne. L'hypothèse d'une variance constante à travers le temps est donc inappropriée. À cet effet, plusieurs évidences empiriques montrent que la modélisation d'une variance pouvant fluctuer à travers le temps est critique afin d'estimer les rendements des actions et des indices boursiers. À titre d'exemple, Andersen, Bollerslev, Christoffersen, and Diebold (2006) ainsi que Bollerslev (1986) et Duan (1995) montrent l'importance de l'utilisation d'un modèle hétéroscédastique pour l'évaluation des rendements.

Quant à la valeur des options, celle-ci dépend largement de la variance de l'actif sous-jacent, d'où l'importance de premier ordre d'intégrer l'hétéroscédasticité conditionnelle dans le calcul.

L'emploi d'une dynamique GARCH pour caractériser la variance conditionnelle de l'actif sous-jacent demeure une technique efficace pour simplifier la mise en œuvre de modèles d'évaluation plus complexes, mais une difficulté d'estimation persiste. En effet, l'estimation des paramètres à l'aide d'une fonction de maximum de vraisemblance nécessite un large panel d'options comprenant plusieurs échéances et moneyness afin de capturer l'information contenue dans les données. Feunou et Okou (2018) mentionnent que cela entraîne une complexité numérique et une charge computationnelle significative lors de l'estimation des paramètres du modèle.

Dans l'intention de résoudre cette problématique, l'information contenue dans le prix des options doit être agrégée dans un sous-ensemble de statistiques. À cet égard, nous proposons d'utiliser les moments conditionnels de la distribution risque-neutre à l'égard du risque pour simplifier le problème d'optimisation des paramètres. Cette technique s'inspire du rapport de recherche de Feunou et Okou (2018) réalisé sur un modèle d'évaluation d'options à volatilité stochastique. Schneider et Trojani (2015) montrent que les moments risque-neutre sont obtenus en synthétisant la distribution extraite d'un échantillon de prix d'options hors-de-la-monnaie sur indice boursier. Les auteurs appliquent la propriété de réplication de tout flux monétaire (« payoff ») introduit par Carr et Madan (2001), mais proposent plutôt l'utilisation de contrats transigeable pour la construction des moments supérieurs. Il est ainsi possible d'agréger l'information comprise dans un large éventail d'options en un portefeuille de contrats d'options réparti selon leurs maturités et les prix d'exercice disponibles. Cette méthodologie s'apparente à celle de l'index du VIX construit par le Chicago Board Options Exchange (ci-après « CBOE »). Le sous-échantillon créé comprend des contrats sur le deuxième et troisième moment conditionnel de la distribution risque-neutre, soit la variance et le coefficient d'asymétrie.

Afin de mettre en pratique cette approche, nous procédons à l'extraction des moments de la distribution risque-neutre du S&P 500 et estimons le modèle d'évaluation d'options GARCH de Bégin, Dorion et Gauthier (2018) (ci-après « BDG ») relié au risque systématique uniquement. L'estimation jointe avec les rendements de l'indice nous permet d'ajuster adéquatement les paramètres du modèle et ainsi capturer l'information contenue par les prix des options sur l'indice boursier. Notre stratégie d'estimation se veut simple à mettre en œuvre, efficace et permet d'éviter la complexité numérique liée à l'utilisation d'un large panel d'options. Nous présentons également la précision du modèle estimé hors échantillon où les erreurs d'évaluation obtenues demeurent satisfaisantes pour la majorité de cette seconde période.

Chapitre 1. Revue de la littérature

Afin de mieux comprendre les principes fondamentaux d'un modèle d'évaluation d'options, nous visitons les articles des auteurs clés sur le sujet, et ce, pour chacune des étapes du processus. La mise en chantier de cette base théorique nous permet d'introduire des modèles d'évaluation plus complexes et les instruments nécessaires à des fins d'amélioration des méthodes couramment utilisées dans la littérature. Les notions soulevées dans ce chapitre fournissent les acquis nécessaires afin de présenter le modèle d'évaluation employé et notre technique d'estimation alternative.

Ce chapitre est construit à l'aide d'articles de recherche provenant de revues scientifiques de renom tels que *Journal of Econometrics*, *Journal of Finance*, *Management Science* et *Journal of Financial Economics* pour ne nommer que ceux-ci. Pour la plupart, les articles sélectionnés sont des incontournables dans la littérature financière basée sur les options et le nombre de citations de ces articles demeure très élevé. Certes, la littérature entourant notre sujet de recherche est riche en nombres et en qualités, nous avons dû faire des choix et sélectionner les plus pertinents. Notre sélection s'arrête à plus de vingt articles et celle-ci est également élargie tout au long du mémoire afin d'appuyer certaines observations et résultats.

La revue de littérature est structurée ainsi : d'une part, les étapes nécessaires afin d'évaluer des options à l'aide d'un modèle GARCH sont détaillées, passant par l'introduction aux processus autorégressifs jusqu'à l'estimation des paramètres. Plusieurs recherches empiriques viennent appuyer les fondements théoriques et la performance des modèles discutés. D'autre part, nous présentons en détail le modèle de BDG (2018) que nous utilisons pour tester notre technique d'estimation. Enfin, une revue des moments conditionnels de la distribution risque-neutre est étayée par les plus récentes recherches sur le sujet. Cette sous-section présente les fondements théoriques et l'utilité de cette distribution à des fins d'évaluation d'options.

1.1 Évaluation d'options à l'aide de modèles GARCH

1.1.1 Introduction aux modèles autorégressifs

Engle (1982) s'est intéressé à perfectionner les séries temporelles économétriques traditionnelles qui prennent en compte une variance prévisionnelle constante sur la période d'estimation. Afin de pallier cette hypothèse irréaliste, il introduit une nouvelle classe de processus stochastique appelé « AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity (ci-après « ARCH »). La théorie sous-

jacente porte sur une variable aléatoire y_t tirée d'une fonction de densité conditionnelle $f(y_t | y_{t-1})$. La prévision au temps t basée sur l'information disponible au temps $t-1$ est simplement $E(y_t | y_{t-1})$ qui dépend de la valeur de la variable y_{t-1} . La variance prévisionnelle pour la même période est donnée par $V(y_t | y_{t-1})$. Cette formule montre que la variance prévisionnelle dépend de l'information passée ψ_t et donc, constitue une variable aléatoire. Engle (1982) généralise le processus ARCH à l'aide du modèle suivant :

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2.$$

où y_t suit une distribution normale de moyenne nulle et variance h_t . La variance est conditionnelle à la valeur de y retardée d'une période. Le processus ARCH peut être exprimé plus généralement :

$$h_t = h(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}, \alpha)$$

où p correspond l'ordre du processus ARCH, soit le nombre de retards de la variable y et α est un vecteur de paramètres. Le processus ARCH est stationnaire, soit que la distribution jointe de probabilité est constante à travers le temps, lorsque la valeur absolue de la somme des α_i est inférieur à 1.

1.1.2 Introduction aux modèles GARCH classiques

Bollerslev (1986) propose une généralisation naturelle du processus ARCH introduit par Engle (1982). Principalement, l'amélioration du processus porte sur une structure de retards permettant plus de flexibilité et une plus longue mémoire. Prenons un processus stochastique à temps discret ε_t , et ψ_t , l'ensemble de l'information passée jusqu'au temps t . Le processus GARCH (p,q) proposé est le suivant :

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

$$= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t,$$

où

$$p \geq 0, \quad q > 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

et où L fait référence à l'opérateur de retard. Pour $p = 0$, le processus est réduit à un processus ARCH (p) et pour $p = q = 0$, ε_t est réduit à un simple bruit blanc. La généralisation de Bollerslev (1986) permet à la variance conditionnelle d'être une fonction linéaire des variances passées du processus, mais également d'être fonction des retards de la variance conditionnelle elle-même. Tel que mentionné par Bollerslev (1986), le processus GARCH (p, q) possède en quelque sorte un mécanisme d'apprentissage adaptatif.

Le processus GARCH (p, q) est dit stationnaire avec $E(\varepsilon_t) = 0, \text{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0(1 - A(1) - B(1))^{-1}$ et $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pour $t \neq s$ si et seulement si $A(1) + B(1) < 1$. Voir Bollerslev (1986).

Ce processus hétéroscédastique proposé par Bollerslev (1986) est rapidement devenu une référence dans la littérature financière afin de modéliser la volatilité. À cet effet, plusieurs évidences empiriques montrent l'importance de l'hétéroscédasticité lors de la modélisation des rendements sur actions et indices boursiers.

À titre d'exemple, Duan (1995) s'est intéressé à évaluer la pertinence des modèles à volatilité dynamique à des fins d'évaluation d'options. Les analyses numériques réalisées montrent que les modèles GARCH sont en mesure d'expliquer plusieurs biais systématiques rencontrés avec le modèle de Black-Scholes. Parmi ces biais, citons la sous-tarification des options hors-de-la-monnaie et des options sur actif avec faible volatilité (voir Black 1975, Gultekin et al. 1982), la sous-tarification d'options à courte maturité (voir Whaley 1982) et la courbe de volatilité implicite observée en forme de « U » (voir Rubinstein 1985 ; Sheikh 1991). Des options d'achat sur l'indice S&P 100 sont utilisées afin de comparer la performance des modèles GARCH comparativement à celui de Black-Scholes. Sans surprise, le modèle GARCH utilisé offre une plus grande flexibilité pour évaluer les options en période de marché instable. Lorsque la volatilité conditionnelle de l'actif sous-jacent est élevée (faible), les options écrites sur cet actif gagnent plus (moins) de valeur lorsqu'évaluées avec un modèle GARCH. En comparant les prix d'options à l'aide des deux modèles, Duan (1995) trouve que le modèle de Black-Scholes sous-évalue les options profondément hors-de-la-monnaie comparativement au modèle GARCH. Cette sous-évaluation est encore plus prononcée pour les options à courte maturités. En outre, l'auteur dérive la volatilité implicite du modèle GARCH à l'aide de la formule de Black-Scholes et observe les motifs de volatilité en forme de « U » communément aperçu dans la littérature. La variance conditionnelle

GARCH du processus tend vers une certaine asymétrie négative. Cette asymétrie bénéficie au modèle GARCH pour l'évaluation d'options hors-de-la-monnaie. Sur ce point, il est évident que l'hypothèse d'homoscédasticité de Black-Scholes affecte la performance du modèle et demeure irréaliste. Bref, l'analyse comparative de Duan (1995) montre comment les biais du modèle de Black-Scholes peuvent être atténués par l'introduction d'un simple modèle à variance conditionnelle dynamique.

Bakshi, Cao et Chen (1997) ont également contribué de manière significative à l'enrichissement de cette littérature. Les auteurs dérivent plusieurs modèles d'options permettant à la volatilité, au taux d'intérêt et aux sauts d'évoluer avec une démarche stochastique. À l'aide d'options sur l'indice du S&P 500, les différents modèles alternatifs sont alors testés afin d'évaluer l'importance relative d'une volatilité dynamique. La performance de chacun des modèles est comparée à celle du modèle de Black-Scholes. Les erreurs d'évaluation hors échantillon sont considérablement minimisées à l'aide des modèles à volatilité stochastique et volatilité stochastique incluant des sauts aléatoires. De plus, les auteurs concluent qu'une volatilité stochastique est favorable à l'obtention d'une consistance vis-à-vis la volatilité implicite du modèle, et plus particulièrement lors de stratégie de couverture (« hedging »). En effet, le modèle à volatilité stochastique se place en tête des autres modèles avec des erreurs de couvertures (« hedging errors ») les plus petites.

1.1.3 Le modèle GARCH de Heston et Nandi (2000)

Il existe plusieurs modèles afin de définir la variance conditionnelle de l'actif sous-jacent. Parmi les plus populaires, notons le modèle de Heston et Nandi (2000) qui se veut une classe différente de modèle GARCH. En effet, la dynamique de la variance construite admet une solution analytique pour le prix d'une option européenne. L'étude du modèle de Heston et Nandi (2000) est brièvement présentée, car celui-ci sera repris dans la dynamique de la variance du processus gaussien et des sauts du principal modèle de ce mémoire.

Le modèle est basé sur deux hypothèses. La première dicte que le logarithme du prix de l'actif sous-jacent, ci-après S , suit un processus GARCH particulier sur une période de temps Δ tel que le logarithme du rendement de l'actif est défini ainsi :

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(t-\Delta)}\right) = r + \lambda h(t) + \sqrt{h(t)}z(t)$$

$$h(t) = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i h(t - i\Delta) + \sum_{i=1}^q \alpha_i (z(t - i\Delta) - \gamma_i \sqrt{h(t - i\Delta)})^2,$$

où r est le taux sans risque à capitalisation continue, $z(t)$ est un terme d'erreur aléatoire normal standard et λ fait office de prime de risque. $h(t)$ correspond à la variance conditionnelle du log-rendement pour l'intervalle de temps $t - \Delta$ et t sachant l'information jusqu'au temps $t - \Delta$. La variance conditionnelle du modèle apparaît comme une prime de rendement dans l'équation de la moyenne ce qui permet au rendement de l'actif de dépendre du niveau de risque. Pour sa part, α_i détermine le coefficient d'aplatissement (« kurtosis ») de la distribution tandis que le paramètre γ_i s'occupe de l'effet asymétrique (« skewness ») de la distribution du log-rendement. La dynamique de la variance est structurée afin de faciliter l'évaluation analytique des options.

Heston et Nandi (2000) trouvent que le modèle d'évaluation proposé surperforme les modèles ad hoc de Black-Scholes utilisé par Dumas, Fleming et Whaley (1998). À l'évidence, les erreurs d'évaluation hors échantillon sont inférieures grâce à une dynamique GARCH vis-à-vis une volatilité implicite unique par option. La performance du modèle de Heston et Nandi (2000) demeure supérieure au modèle comparé malgré l'utilisation de paramètres constants et une volatilité filtrée de l'historique des prix de l'actif sous-jacent. Comme mentionné par les auteurs, les bénéfices proviennent largement de la capacité des modèles GARCH à capturer de manière systématique la corrélation de la volatilité avec les rendements spot et la dépendance de chemin (« path dependence ») de la volatilité. À cet égard, le modèle de Heston et Nandi (2000) permet de capturer la corrélation négative entre les rendements et la volatilité de l'indice boursier. Cette corrélation négative permet une adaptation rapide de la volatilité du modèle relié avec les changements du marché. De plus, la corrélation calculée génère une asymétrie négative dans la distribution risque-neutre des rendements du S&P 500 provenant des biais associés à la maturité et aux prix d'exercice dans le marché des options. L'importance de cette asymétrie est étudiée par plusieurs auteurs, dont Bates (1999) et Nandi (1998). Leurs recherches montrent l'importance de l'effet d'asymétrie pour les modèles à volatilité stochastique continue afin d'expliquer les prix d'options sur indices boursiers.

Le succès du modèle GARCH proposé par Heston et Nandi (2000) pour évaluer correctement les prix d'options hors échantillon provient principalement de la mise en place de la corrélation entre la volatilité et les rendements du sous-jacent. En outre, le paramètre de corrélation façonne les valeurs d'options de manière à reproduire les motifs de courbe de volatilité implicite à travers les prix d'exercice et les maturités, soit les « smile » ou « smirk » des volatilités implicites.

L'évaluation d'options requiert toutefois une connaissance de la distribution risque-neutre des rendements de l'actif sous-jacent. La sous-section suivante discute de la risque-neutralisation et documente la procédure pour le modèle de Heston et Nandi (2000).

1.1.4 Risque neutralisation

Il est effectivement impératif de caractériser la dynamique risque-neutre du rendement du sous-jacent afin de pouvoir estimer le prix des options par l'évaluation risque-neutre. Tel qu'expliqué par Christoffersen, Jacobs et Ornathanalai (2013), il faut d'abord spécifier une classe de dérivé Radon-Nikodym (« RN ») et dériver les restrictions qui assure l'existence d'une mesure martingale équivalente (« EMM »). Cela permet au processus du prix actualisé du sous-jacent d'être une martingale. Cette technique nous permet d'obtenir la distribution du rendement du sous-jacent sous l'EMM.

D'abord, Heston et Nandi (2000) posent comme deuxième hypothèse que la valeur d'une option d'achat obéit à la formule de Black-Scholes-Rubinstein. En effet, Rubinstein (1976) et Brennan (1979) prouvent que sous certaines préférences et distributions, l'évaluation risque-neutre est soutenable. Les auteurs du modèle GARCH expliquent qu'il est possible de trouver une variable aléatoire $z^*(t)$ qui possède une distribution normale standard sous la probabilité risque neutre. Le dérivé Radon-Nikodym correspondant est le suivant :

$$\frac{dQ}{dP}|_{F_t} = \exp\left(-\sum_{i=1}^t \left(\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\gamma_i + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 h_i\right)\right)$$

Le processus GARCH risque-neutre prend alors la même forme que le processus du log-prix, mais en remplaçant λ par $-1/2$ et γ_1 par $\gamma_1^* = \gamma_1 + \lambda + \frac{1}{2}$. Ce qui procure le processus GARCH risque-neutre

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(t-\Delta)}\right) = r - \frac{1}{2}h(t) + \sqrt{h(t)}z^*(t)$$

$$h(t) = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i h(t-i\Delta) + \sum_{i=2}^q \alpha_i (z^*(t-i\Delta) - \gamma_i \sqrt{h(t-i\Delta)})^2 + \alpha_1 (z^*(t-i\Delta) - \gamma_1^* \sqrt{h(t-i\Delta)})^2,$$

où,

$$z^*(t) = z(t) + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\sqrt{h(t)},$$

$$\gamma_1^* = \gamma_1 + \lambda + \frac{1}{2}$$

Il est évident que les paramètres $z^*(t)$, γ_1^* et λ sont défini tel que le rendement obtenu en investissant dans l'actif sous-jacent est équivalent au taux sans risque. Une fois le modèle risque-neutralisé, l'application de différentes techniques d'évaluation d'options est possible.

1.2 Évaluation d'options

1.2.1 Évaluation d'options par simulation Monte-Carlo

Discutons d'abord l'évaluation d'options européenne avec une simulation Monte-Carlo lorsque le prix du sous-jacent suit un processus GARCH. Christoffersen, Jacobs et Ornathanalai (2013) testent la simulation Monte-Carlo avec différents modèles GARCH à des fins d'évaluation d'options. Les auteurs mentionnent que le prix d'une option européenne peut être obtenu en simulant plusieurs trajectoires du processus du rendement risque-neutre R_t^* et en calculant l'espérance risque-neutre du processus du rendement actualisé. Pour une option d'achat européenne C , coté à la fin de la journée t avec maturité T et avec un prix d'exercice K , la formule d'évaluation par simulation Monte-Carlo est la suivante :

$$C_{t,T} = \exp(-r(T-t)) E_t^*[Max(S_T - K, 0)]$$

$$\approx \exp(-r(T-t)) \frac{1}{MC} \sum_{i=1}^{MC} \left[Max \left(S_t \exp \left(\sum_{\tau}^{T-t} R_{i,t+\tau}^* \right) - K, 0 \right) \right]$$

où $R_{i,t+\tau}^*$ correspond au log-rendement journalier simulé sous la mesure risque-neutre. L'indice i fait référence au numéro de la trajectoire parmi l'ensemble des trajectoires simulées. Nous pouvons remarquer que la formule réfère simplement à l'actualisation du flux monétaire futur généré par l'option. Plusieurs techniques peuvent être employées afin d'augmenter l'efficacité numérique des simulations passant par les nombres stratifiés aléatoires, les variables antithétiques et les variables de contrôle en utilisant le prix de Black-Scholes comme variable de contrôle. À titre de référence, Christoffersen, Dorion, Jacobs et Wang (2010) montrent que la simulation Monte-Carlo procure une bonne précision pour évaluer des options avec le modèle de Heston et Nandi (2000).

1.2.2 Évaluation d'options avec solution analytique

La dynamique dite affine du modèle d'Heston et Nandi (2000) est construite tel qu'est admet une solution analytique. Heston et Nandi (2000) montrent qu'une option d'achat européenne avec prix d'exercice K et expiration au temps T peut être valorisée comme l'espérance du flux monétaire futur de l'option, soit :

$$E_t[Max(S(T) - K, 0)] = f(1)(1/2 + 1/\pi \int_0^\infty Re[K^{-i\phi} f(i\phi + 1)/i\phi f(1)] d\phi) \\ - K(1/2 + 1/\pi \int_0^\infty Re[K^{-i\phi} f(i\phi)/i\phi] d\phi),$$

où Re signifie la partie réelle d'un nombre complexe. À l'aide de la fonction caractéristique risque-neutre $f^*(i\phi)$, la valeur d'une option représente simplement la valeur actualisée du flux monétaire futur, soit $Max(S(T) - K, 0)$. Ainsi, la valeur d'une option d'achat européenne est obtenue par l'équation suivante :

$$C = e^{-r(T-t)} E_t^*[Max(S(T) - K, 0)] \\ = \frac{1}{2} S(T) + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi} \int_0^\infty Re \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(t, T; i\phi + 1)}{i\phi} \right] d\phi \\ - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Re \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(t, T; i\phi)}{i\phi} \right] d\phi \right),$$

où $f^*(t, T; i\phi)$ est la fonction caractéristique conditionnelle du logarithme du prix du sous-jacent sous la mesure risque-neutre et $E_t^*[\]$ représente l'espérance au temps t sous la mesure risque-neutre. Bref, il est possible d'éviter les simulations Monte-Carlo lorsque le modèle d'évaluation admet une forme analytique. La résolution analytique requiert l'inversion de la fonction caractéristique du log-prix du sous-jacent, mais gagne en efficacité vis-à-vis le temps de calcul lié aux multiples simulations Monte-Carlo.

Contrairement au modèle de Black-Scholes, la formule d'évaluation de Heston et Nandi (2000) est fonction du prix courant de l'actif $S(t)$ et de la variance conditionnelle $h(t + \Delta)$. Puisque la variance conditionnelle est fonction des prix observés de l'actif sous-jacent, la formule d'évaluation proposée est fonction des prix courants et passés de l'actif. Comme le mentionnent les auteurs du modèle, contrairement au modèle en temps continu, la volatilité est une fonction facilement observable à l'aide de l'historique des prix de l'actif et ne requiert pas une estimation des paramètres avec une autre procédure.

Nous introduisons maintenant le modèle d'évaluation d'options d'Ornathanal (2014) que nous utilisons afin de tester une technique alternative pour l'estimation des paramètres.

1.3 Le modèle GARCH d'Ornthalai (2014)

Nous reprenons le modèle d'évaluation d'options de type affine d'Ornthalai (2014) dont celui-ci a été utilisé par BDG (2018) pour le rendement du marché. Nous présentons dans un premier temps la dynamique du rendement et les variances de la composante gaussienne et du saut. Puis, nous discutons de la dynamique risque-neutre et de l'évaluation d'options. La nouvelle technique d'estimation des paramètres du modèle fera l'objet de la section suivante.

1.3.1 Dynamique du rendement du marché

Le modèle proposé par Ornthalai (2014) s'inscrit dans une structure où le rendement de l'actif sous-jacent n'est pas seulement entraîné par une seule composante gaussienne comparativement au MÉDAF (Modèle d'évaluation des actifs financiers) traditionnel à un facteur. À l'évidence, le marché peut connaître des fluctuations abruptes, ou plus généralement des sauts. Comme mentionné par BDG (2018), le modèle s'apparente à la structure de Kraus et Litzenberger (1976), mais prolonge la complexité de plusieurs manières.

Les rendements sur l'indice du marché, $R_{M,t+1} = \frac{M_{t+1}}{M_t}$ sont modélisés par l'équation suivante :

$$r_{M,t+1} \equiv \log(R_{M,t+1}) = \mu_{M,t+1} - \xi_{M,t+1}^{\mathbb{P}} + z_{M,t+1} + y_{M,t+1} \quad (1)$$

où le rendement du marché est entraîné par la tendance du marché $\mu_{M,t+1}$ (communément appelé « drift »), une composante reliée au risque systématique gaussien, $z_{M,t+1}$, et une composante pour le risque inhérent au saut, $y_{M,t+1}$. Une correction pour la convexité est également modélisée pour les innovations gaussiennes et les sauts. L'Annexe 1 décrit en détail cette composante de correction. Par conséquent, $E_t^{\mathbb{P}}[M_{t+1}] = M_t \exp(\mu_{M,t+1})$, ce qui permet de définir la prime de risque de l'indice du marché comme étant $\mu_{M,t+1} - r_{f,t+1}$.

Nous discutons maintenant de la distribution des processus de choc. Pour sa part, l'innovation gaussienne est donnée par :

$$z_{M,t+1} = \sqrt{h_{M,z,t+1}} \varepsilon_{M,t+1}$$

où les $\varepsilon_{M,t+1}$ sont des variables aléatoires normales standard indépendantes et la variance conditionnelle $z_{M,t+1}$ suit une dynamique GARCH. La variance conditionnelle du marché prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
h_{M,z,t+1} &= w_{M,z} + b_{M,z,t} h_{M,z,t} + \frac{a_{M,z}}{h_{M,z,t}} (z_{M,t} - c_{M,z} h_{M,z,t})^2 \\
&= \sigma_{M,z}^2 + b'_{M,z} (h_{M,z,t} - \sigma_{M,z}^2) + \frac{a_{M,z}}{h_{M,z,t}} (z_{M,t}^2 - h_{M,z,t} - 2c_{M,z} h_{M,z,t} z_{M,z,t}) \quad (2)
\end{aligned}$$

où $\sigma_{M,z}^2 \equiv E[h_{z,t+1}] = \frac{w_{M,z} + a_{M,z}}{1 - b'_{M,z}}$ correspond à la variance non conditionnelle du marché et où $b'_{M,z} = b_{M,z} + a_{M,z} c_{M,z}^2$ correspond à la persistance de la variance. Le paramètre $c_{M,z}$ permet au modèle de tenir compte de l'effet de levier, soit la réponse asymétrique de la volatilité aux fluctuations des rendements du marché. Par exemple, une valeur négative de $c_{M,z}$ implique une corrélation positive entre les rendements et la variance. Tout comme Heston et Nandi (2000), α_i détermine le coefficient d'aplatissement de la distribution.

L'équation (2) est toutefois écrite différemment de la variance conditionnelle du modèle de Heston et Nandi (2000). Ornathanalai (2014) explique que cette approche est adoptée afin de séparer les dynamiques des variances conditionnelles de la composante gaussienne et des sauts. L'approche permet en ce sens une meilleure flexibilité de la dynamique variable dans le temps de la composante de sauts. Il n'y a aucune conséquence empirique à définir le modèle de cette manière plutôt que celle adoptée par Heston et Nandi (2000).

De son côté, les sauts, $y_{M,t+1}$, ont une distribution normale inverse gaussienne (ci-après « NIG ») de Barndorff-Nielsen (1998) avec paramètre de location fixé à 0, un paramètre d'épaisseur des queues de la distribution α_M et un paramètre d'asymétrie δ_M . La distribution est dérivée en évaluant un processus brownien à un intervalle de temps stochastique selon un processus inverse gaussien (« IG »). De manière équivalente, une innovation NIG peut être représentée comme densité normale $N(\beta x, x)$ conditionnelle à une variable aléatoire distribuée selon un processus IG $x \sim IG(\vartheta, \sqrt{\alpha^2 - \delta^2})$. La fonction génératrice de l'innovation NIG prend la forme suivante :

$$\Psi_{NIG}(\phi; t; t+1) = -\vartheta \left(\sqrt{\alpha^2 - (\delta + \phi)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \delta^2} \right),$$

où nous fixons $\vartheta = h_{y,t+1}$, soit le paramètre homogène dans le temps (« time-homogeneous » ou ci-après le « processus d'intensité du saut »). La fonction génératrice montre que nous devons avoir $\alpha > 0$ et $\delta < |\alpha|$ pour que la distribution NIG possède des moments finis.

Ornathanalai (2014) trouve que la composante de sauts caractérisée par une distribution NIG surperforme les distributions de sauts Poisson de Merton, une variance gamma de sauts ou la

composante de sauts proposée par Carr, Geman, Madan et Yor (2002). De leur côté, BDG (2018) ont comparé la distribution de Poisson à la NIG et déterminent que les paramètres de la composante de sauts sont davantage stables sous la distribution NIG. Comme mentionné par les auteurs, la distribution NIG offre l'avantage économétrique de prendre en compte d'importants sauts positifs et négatifs tels qu'observés lors de la crise financière de 2008.

L'intensité du saut pour le marché possède une dynamique GARCH telle qu'illustrée avec la variance conditionnelle, mais avec des paramètres distincts. En ce sens, une approche présentant une dynamique séparée pour les composantes du modèle offre un meilleur ajustement aux données selon Christoffersen, Jacobs et Ornathanalai (2013), comparativement à un modèle possédant une dynamique unique. Celle de notre modèle à l'étude est la suivante :

$$h_{M,y,t+1} = w_{M,y} + b_{M,y,t} h_{M,y,t} + \frac{a_{M,y}}{h_{M,z,t}} (z_{M,t} - c_{M,y} h_{M,z,t})^2 \quad (3)$$

L'Annexe 2 présente les moments conditionnels du rendement du marché. À cet égard, la variance totale du marché est donnée par :

$$Var_t^{\mathbb{P}}[r_{M,t+1}] = h_{M,z,t+1} + \frac{\alpha_M^2}{(\alpha_M^2 - \delta_M^2)^{3/2}} h_{M,y,t+1} \quad (4)$$

1.3.2 Kernel d'évaluation

Tel qu'employé par BDG (2018) et soutenu par Rubinstein (1975), Aït-Sahalia et Lo (1998) et Bakshi, Madan et Panayotov (2010), le facteur d'actualisation stochastique ou kernel d'évaluation, m_{t+1} , est défini à l'aide des facteurs de risques observés. En effet, si p_t est le prix d'un actif au temps t avec un flux monétaire x_{t+1} qui dépend de la réalisation de la variance et du saut $\{z_{M,t+1}, y_{M,t+1}\}$, le prix de cet actif est donné par :

$$p_t = E_t^{\mathbb{P}}[m_{t+1} x_{t+1}] = E_t^{\mathbb{P}} \left[E_t^{\mathbb{P}}[m_{t+1} x_{t+1} | z_{M,t+1}, y_{M,t+1}] \right] = E_t^{\mathbb{P}}[\tilde{m}_{t+1} x_{t+1}]$$

où $\tilde{m}_{t+1} = E_t^{\mathbb{P}}[m_{t+1} | z_{M,t+1}, y_{M,t+1}]$. Toujours relié à la méthodologie de BDG (2018) et Ornathanalai (2014), le kernel d'évaluation assume un dérivé Radon-Nikodym (« RND ») affine exponentiel modélisé de la manière suivante :

$$e^{r_{f,t+1}} \tilde{m}_{t+1} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial \mathbb{P}} | \mathcal{F}_{t+1}^S}{\frac{\partial Q}{\partial \mathbb{P}} | \mathcal{F}_t^S} = \frac{\exp(-\Lambda_{M,t+1} z_{M,t+1} - \Gamma_{M,t+1} y_{M,t+1})}{E_t^{\mathbb{P}}[\exp(-\Lambda_{M,t+1} z_{M,t+1} - \Gamma_{M,t+1} y_{M,t+1})]} \quad (5)$$

À noter que les composantes de prix du risque $(\Lambda_{M,t+1}, \Gamma_{M,t+1})$ doivent être un processus prévisible. Par ailleurs, si les prix du risque du marché sont constants ($\Lambda_{M,t+1} = \Lambda_M, \Gamma_{M,t+1} = \Gamma_M, \forall t$), notre RND correspond à celui utilisé par Christoffersen, Jacobs et Ornathanalai (2012). L'Annexe 1 montre comment les innovations du modèle sont risque-neutralisées à l'aide de ce RND. Suivant le modèle de BDG (2018) nous assumons que le prix du risque du marché sera effectivement constant.

1.3.3 Prime de risque

Suivant Christoffersen, Jacobs et Ornathanalai (2012), Ornathanalai (2014) et BDG (2018), le kernel d'évaluation dans l'équation (5) procure une prime de risque des actions équivalente à $\mu_{M,t} - r_{f,t}$. Celle-ci peut être décomposée pour la prime de risque normale et celle du saut, tel que spécifié par l'équation suivante :

$$\mu_{M,t} - r_{f,t} = \lambda_M h_{M,z,t} + \gamma_M h_{M,y,t} \quad (6)$$

où nous montrons à l'Annexe 1 la liaison entre λ_M et γ_M ainsi que leur contrepartie de l'évaluation kernel Λ_M et Γ_M . Mentionnons que si le prix du risque du marché dans le RND est nul (e.g., $\Gamma_M = 0$), alors la prime de risque associée est également nulle (e.g., $\gamma_M = 0$).

1.3.4 Évaluation d'options

Suivant les travaux de Heston et Nandi (2000), nous pouvons évaluer des options européennes grâce à une solution analytique. Le modèle demeure sous une forme affine une fois risque-neutralisé. L'Annexe 3 discute en détail du processus. Le prix d'une option d'achat européenne est ainsi donné par :

$$C_t(M_t, K, T) = M_t P_{1,t,T} - K e^{-r_{f,t,T}(T-t)} P_{2,t,T} \quad (7)$$

où M_t représente le niveau de l'index boursier, $r_{f,t,T} = \frac{1}{T-t} \sum_{j=1}^{T-1} r_{f,t+j}$, $r_{f,t+j}$ correspond au taux sans risque déterministe au temps $t+j$. L'Annexe 4 et l'Annexe 5 donnent les probabilités conditionnelles pour $P_{1,t,T}$ et $P_{2,t,T}$.

1.3.5 Évaluation des moments risque-neutre

En plus d'être en mesure d'établir un prix pour une option d'achat ou de vente, le modèle de BDG (2018) est adapté afin d'évaluer les moments conditionnels de la distribution risque-neutre du rendement du marché.

Les moments risque-neutre implicites, soit ceux calculés à même les paramètres du modèle, sont obtenus par les équations proposées par Schneider et Trojani (2015). À cet effet, nous employons une simulation Monte-Carlo pour simuler sous la mesure risque-neutre, une série de rendements sur l'indice du marché. Pour chacune des maturités, nous obtenons une série de log-rendements journaliers où nous appliquons ensuite les formules suivantes :

Pour la variance implicite, nous avons :

$$VIX^2^{implicite} = -\frac{2}{T} E_t^{\mathbb{Q}} [\log(R_{t,\tau})] \quad (8)$$

et le coefficient d'asymétrie implicite s'obtient par :

$$Hellinger\ Skew^{implicite} = -\frac{8}{T} E_t^{\mathbb{Q}} [(R_{t,\tau})^{1/2} \log(R_{t,\tau})] \quad (9)$$

et où $R_{t,\tau}$ correspond au rendement journalier à la date t , pour une maturité τ . Les séries de log-rendements sont simulées sous la mesure risque-neutre à l'aide de la variance conditionnelle $h_{M,z,t}$ et l'intensité du saut $h_{M,y,t}$.

La prochaine sous-section présente les techniques d'estimation des paramètres les plus communément employées. Puis, nous expliquons la technique d'estimation à l'aide des moments risque-neutre qui fait l'objet de ce mémoire.

1.4 Estimation des paramètres d'un modèle d'évaluation d'options

1.4.1 Estimation avec rendements

Il est simple d'estimer un processus GARCH avec les rendements du sous-jacent par maximum de vraisemblance (« maximum likelihood »). En utilisant la dynamique du rendement avec une innovation normale, la densité conditionnelle des rendements journaliers est normale tel que

$$f(R(t)|h(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h(t)}} \exp\left(-\frac{(R(t) - r - \lambda_t)^2}{2h(t)}\right)$$

Le rendement log-vraisemblance se définit ainsi

$$\ln L^R \propto -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \ln(2\pi h(t)) + \frac{(R(t) - r - \lambda_t)^2}{h(t)} \right\}$$

et l'obtention des paramètres du processus GARCH s'effectue en maximisant le log-vraisemblance. Pour ce faire, une procédure itérative est nécessaire. Ce calcul est grandement facilité grâce aux fonctions spécifiques de minimisation disponible dans les logiciels informatiques. Il suffit alors de minimiser sous contrainte la négative du log-vraisemblance. Cette procédure est effectuée par Bollerslev (1986) pour un modèle GARCH et reprise par plusieurs autres auteurs. Les paramètres du modèle sont d'abord estimés par maximum de vraisemblance, puis ils sont risque-neutralisés pour permettre l'évaluation d'options. Voir par exemple Heston et Nandi (2000), Christoffersen, Dorion, Jacobs et Wang (2010) pour un exemple concret de cette technique.

1.4.2 Estimation avec options

Il est également possible d'estimer un modèle GARCH à l'aide d'options sur l'actif sous-jacent. Nous pouvons anticiper une réduction des erreurs d'évaluation lorsque l'estimation inclut les prix d'options comparativement à une estimation avec rendements uniquement. À vrai dire, Feunou et Okou (2018) mentionnent que les options renferment une information prospective sur l'actif sous-jacent ce que les rendements historiques ne peuvent offrir.

Dans un premier temps, quelques distinctions doivent être faites. D'une part, il faut choisir si nous estimons un ensemble de paramètres différents pour chaque journée séparément ou si un seul ensemble de paramètres est utilisé pour évaluer les données transversales de l'échantillon entier. Bakshi, Cao et Chen (1997) utilisent la première méthode pour l'estimation d'un modèle à volatilité stochastique, tandis que Heston et Nandi (2000) utilisent la seconde méthode pour leur modèle GARCH. D'autre part, une autre distinction est importante lorsque l'estimation conjugue un échantillon de rendements et d'options. Il faut savoir distinguer la volatilité comprise dans les rendements observés de celle comprise dans les options. Pour ce faire, une filtration de la volatilité doit avoir lieu. Ce type de processus est défini comme une moyenne conditionnelle à l'information observée. BDG (2018) fait également remarquer qu'à l'instar des modèles GARCH traditionnel où le bruit est complètement déterminé une fois que nous conditionnons les rendements observés et la variance initiale, la présence d'une composante de sauts demande aussi une attention particulière. À cet effet, la prochaine section discute comment se servir des processus de filtration.

L'estimation à l'aide d'options requiert en outre une fonction de perte pour lier les paramètres du modèle aux observations. Il n'existe toutefois pas de fonctions de perte unique puisque la théorie des options ne suggère aucune fonction particulière. Une approche populaire consiste à utiliser

la volatilité implicite comme fonction de perte. La formule suivante de la racine de la moyenne des erreurs au carré (« IVRMSE ») est communément employée

$$IVMSE = \sqrt{1/N_T \sum_{t,i} \left[\sigma_{i,t} - \sigma_{i,t} \left(C_{i,t}(h_t(\xi^*)) \right) \right]^2},$$

où $\sigma_{i,t}$ représente la volatilité implicite de Black-Scholes provenant des prix du marché et $\sigma_{i,t} \left(C_{i,t}(h_t(\xi^*)) \right)$ correspond à la volatilité implicite du modèle. Comme mentionné par Christoffersen, Jacobs et Ornathanalai (2013), cette fonction de perte est pratique d'un point de vue économétrique, car contrairement aux prix des options d'achat, les volatilités implicites ne varient pas significativement à travers les maturités et les moneyness. Cela évite une surpondération d'options par rapport à d'autres.

Un des principaux problèmes avec la fonction de perte présentée est qu'il nécessite d'inverser la formule de Black-Scholes à chaque itération. Le calcul numérique s'y rattachant est très intense surtout lorsque la série transversale d'options est très large. La technique d'estimation proposée dans ce mémoire fait office de solution à cette problématique.

1.4.3 Estimation avec rendements et options

Il est enfin possible de réunir les deux techniques d'estimation précédente pour ajuster les paramètres du modèle d'évaluation. La combinaison des rendements du sous-jacent et des options sur ce même actif permet alors de réduire l'erreur d'évaluation lors de l'estimation des paramètres du modèle. En effet, l'estimation à l'aide d'une série d'options uniquement ne prend pas en compte le poids explicite des rendements dans la fonction de perte utilisée. Un possible effet de surajustement sur les données d'options et un mauvais ajustement sur la série des rendements est alors envisageable. Bates (1996) est l'un des premiers à remarquer cette problématique lors de l'estimation d'un modèle à volatilité stochastique estimé avec des données sur options uniquement. Les paramètres du modèle obtenu avec l'échantillon d'options sont significativement inconsistants avec les paramètres mesurés avec les rendements sur l'actif sous-jacent.

Christoffersen, Jacobs et Ornathanalai (2013) mentionnent que la littérature sur les fonctions de pertes prenant en compte le jumelage des rendements et les options sur l'actif sous-jacent est principalement due à la complexité analytique liée à l'estimation des modèles d'évaluation d'options. Les modèles GARCH ont un avantage substantiel en raison de leur structure simplifiée

de la filtration du processus. Dans la plus récente littérature, nous retrouvons plusieurs études qui procèdent à une estimation conjointe d'une longue série chronologique de rendements et de données transversales d'options. Citons comme exemple Christoffersen, Jacobs and Ornathanalai (2013) et Ornathanalai (2009) qui utilisent les rendements et les options sur l'indice du S&P 500 pour l'estimation de leur modèle à volatilité dynamique et sauts. Selon les auteurs, l'estimation jointe est relativement facile et performe mieux que les autres modèles estimés avec les mêmes données sur le marché américain.

La structure d'une estimation jointe est relativement simple. Le log-vraisemblance associé avec les données sur les options (« $L_{Options}$ ») peut être construit et combiné avec le log-vraisemblance associé avec les rendements (« $L_{Rendements}$ »). Un problème persiste. Les données sur les options comportent une dimension temporelle et transversale. De ce fait, l'échantillon d'options demeure sensiblement plus élevé. Afin d'assurer une représentation équivalente, il est possible d'assigner un poids aux deux fonctions de vraisemblances dans le calcul du total log-vraisemblance. Christoffersen, Jacobs et Ornathanalai (2013) adoptent l'équation suivante :

$$L_{Joint} = \frac{T + N_T}{2} \frac{L_{Rendements}}{T} + \frac{T + N_T}{2} \frac{L_{Options}}{T}$$

où T est le nombre de jours dans l'échantillon de rendements et N_T est le nombre de contrats d'options.

1.4.4 Estimation jointe à l'aide des rendements et des moments risque-neutre

Plutôt que d'opter pour une estimation des paramètres du modèle à l'étude avec des volatilités implicites sur les options du marché, nous pouvons employer les moments conditionnels de la distribution risque-neutre pour capturer l'information comprise dans le marché des options.

La mise en place d'une estimation jointe à l'aide des rendements et des RNM procure ainsi plusieurs bénéfices. D'une part, BDG (2018) mentionnent que les paramètres de primes de risque du modèle sont généralement difficiles à identifier sous la mesure physique. Ces paramètres demeurent essentiels dans le kernel d'évaluation et s'avèrent très utiles à réconcilier les moments risques-neutre et les rendements sous-jacents au marché. D'autre part, l'apport des RNM améliore l'estimation de la probabilité des sauts, car ils sont construits à l'aide d'options hors-de-la-monnaie. Merton (1976) soulève qu'en l'absence de sauts, les options profondément hors-de-la-monnaie n'auraient aucune valeur. Nous pouvons ainsi espérer capturer la valeur associée aux événements rares et optimiser les paramètres de sauts.

Comme employé par Christoffersen, Jacobs et Ornathanalai (2012) et Ornathanalai (2014), les paramètres du modèle sont estimés par la fonction jointe de maximum de vraisemblance pondérée suivante :

$$L_M(\Theta_M) = \frac{T_M + N_M}{2} \left(\frac{L_{M,Rendements}(\Theta_M)}{T_M} + \frac{L_{M,RNM}(\Theta_M)}{N_M} \right) \quad (10)$$

où T_M correspond au nombre de rendements du marché observé, N_M est le nombre de moments risque-neutre observé et Θ_M fait référence à l'ensemble des paramètres du modèle à estimer.

Pour le modèle de marché de BDG (2018), la composante gaussienne $z_{M,t}$ et la composante de sauts $y_{M,t}$ d'innovation au temps t ne peuvent pas être séparées sans avoir recours à l'information des options. Durham, Geweke et Ghosh (2015) mentionnent que la variance conditionnelle $h_{M,z,t}$ et l'intensité du saut $h_{M,y,t}$ demeurent incertain même avec les rendements observés jusqu'au temps t . Les deux composantes, $h_{M,z,t+1}$ et $h_{M,y,t+1}$ peuvent toutefois être retrouvées des conditions initiales $h_{M,z,1}$ et $h_{M,y,1}$. À cet égard, nous reprenons le filtre particulière de BDG (2018) qui infère les valeurs filtrées $z_{M,t}$, $y_{M,t}$, $h_{M,z,t}$ et $h_{M,y,t}$ tout en prenant pour compte l'incertitude par rapport à la variance conditionnelle et à l'intensité du saut. Pour une description du filtre particulière et le calcul du log-vraisemblance $L_{M,Rendements}(\Theta_M)$, voir l'Annexe 6. Le processus de filtration est basé sur un chemin de particule de sauts et le ré-échantillonnage séquentiel par importance (« SIR ») de Gordon, Salmon et Smith (1993) est ensuite mise en place. Nous reprenons également le code de BDG (2018) pour le ré-échantillonnage séquentiel lors de l'estimation du modèle.

Concernant la fonction log-vraisemblance des moments risque-neutre, notre approche repose sur celle employée par Feunou et Okou (2018) et Orlowski (à être publié). Celle-ci consiste à construire une fonction quasi-log-vraisemblance gaussienne à l'aide des moments risque-neutre implicites du modèle et ceux basés sur les RNM observées. Nous définissons les erreurs relatives des RNM, $e_{M,k}$, comme étant égale à la différence entre les swaps observés et les moments risque-neutre implicites du modèle. En prenant pour hypothèse que les erreurs relatives sont normalement distribuées $e_{M,k} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e)$ et qu'ils ne sont pas corrélés avec les chocs des rendements, nous obtenons la forme de la fonction $L_{M,RNM}(\Theta_M)$ suivante :

$$-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [\log((2\pi)^{2J} \det(\Sigma)) + (RNM_t^{Observé} - RNM_t^{Implicite})' \Sigma^{-1} (RNM_t^{Observé} - RNM_t^{Implicite})] \quad (11)$$

où les $RNM_t^{Observé}$ sont calculé à l'aide d'un portefeuille d'options hors-de-la-monnaie, voir le Chapitre 3 pour plus de détails. Quant à eux, les $RNM_t^{Implicite}$ sont calculé à même le modèle d'évaluation par simulation Monte-Carlo. Une série de rendements est alors simulée sous la mesure risque-neutre, puis les formules (8) et (9) sont utilisées pour le calcul des RNM à chaque date de l'échantillon d'estimation. Enfin, le paramètre J correspond au nombre de maturités différentes utilisées pour bâtir notre échantillon de moments risque-neutre, Σ est la matrice de variance covariance des erreurs ($RNM_t^{Observé} - RNM_t^{Implicite}$). À noter que, tout comme BDG (2018), la volatilité des erreurs relatives est constante pour chacune des maturités.

La fonction de log-vraisemblance des RNM est alors maximisée par rapport à l'ensemble des paramètres du modèle d'options. Un calcul itératif permet de maximiser la fonction d'estimation jointe avec l'échantillon de rendements et les moments risque-neutre pour l'ensemble des maturités sélectionnées. Le Chapitre 4 présente les résultats de l'optimisation réalisée avec le logiciel de programmation Matlab. Les fonctions créées afin de compléter le modèle de BDG (2018) et ainsi remplacer l'estimation à base d'options par les moments risque-neutre sont présentées à l'Annexe 7.

1.5 Techniques de filtration

Lors de la modélisation financière, des relations non linéaires entre les variables du modèle sont généralement postulées. Certaines de ces variables ne peuvent être directement observées. Elles sont plutôt inférées par un modèle probabiliste à partir d'autres variables observées ou directement mesurées. Christoffersen, Dorion, Jacobs et Karoui (2014) expliquent que le recours à un processus de filtration est nécessaire afin d'obtenir les meilleures estimations possibles pour les variables non observées. De même, les méthodes de filtrage sont efficaces lors de l'estimation de la volatilité non observée dans les modèles d'évaluation d'options. À cet égard, les techniques de filtration sont communément employées afin de filtrer la volatilité non observée des prix d'options ou des rendements pour l'estimation des paramètres inconnus du modèle.

Plusieurs auteurs ont proposé différentes variations des méthodes de filtration, mais nous discutons plus particulièrement des filtres particuliers (« particle filter ») puisque cette technique est mise de l'avant par BDG (2018) pour l'estimation jointe de leur modèle d'évaluation d'options.

1.5.1 Filtres particulaires

Les filtres particulaires permettent d'approximer toute distribution statistique. À vrai dire, il s'agit d'une approximation numérique du véritable filtrage optimal. La flexibilité de cette technique à traiter les relations non linéaires explique sa popularité auprès des praticiens. Tulsyan, Gopaluni et Khare (2016) expliquent les rudiments de cette approche. D'abord, les fondements des filtres particulaires se basent sur la méthode de simulation Monte-Carlo. L'idée générale est d'exprimer la distribution à l'étude par l'extraction de particules aléatoire de la probabilité postérieure. La méthode employée est un échantillonnage séquentiel par importance (« sequential importance sampling »). La technique de filtration réfère au processus d'obtenir la variance minimale de la distribution en trouvant un ensemble de particules aléatoires propagé dans l'état-espace afin d'approximer la fonction de densité de probabilité.

Puisque générer un échantillon aléatoire pour toute fonction de densité arbitraire cible n'est pas trivial, le recours à un échantillonnage par importance est nécessaire. Tulsyan, Gopaluni et Khare (2016) mentionnent qu'à l'aide de cette technique, nous pouvons déterminer s'il est plausible pour la particule générée de faire partie d'un échantillon de notre fonction de densité cible. Un poids normalisé est ainsi assigné aux particules simulées. Ce poids sert de correction afin d'assurer que les particules de l'échantillon de densité proviennent de la densité cible. Un poids plus élevé indique qu'il serait plus probable d'accepter cette particule au sein de notre distribution désirée.

La technique d'échantillonnage par importance approxime la fonction de densité cumulative de notre variable aléatoire cible. Par contre, nous n'obtenons point un échantillon provenant de la densité cible. Afin de générer les particules désirées, un ré-échantillonnage est nécessaire. Pour ce faire, plusieurs techniques peuvent être utilisées dont l'échantillonnage continu de Malik et Pitt (2011).

En bref, le filtre de particule est généralement utilisé dans la littérature lors d'estimations de modèle d'évaluation complexe et non linéaire. BDG (2018) tirent profit de cette technique pour calculer le log-vraisemblance des rendements du marché. Ils peuvent ainsi filtrer la composante gaussienne et celle des sauts de leur variance conditionnelle respective. L'Annexe 6 décrit les étapes du processus de ré-échantillonnage séquentiel par importance (SIR) utilisé par les auteurs.

1.6 Estimation de modèles d'options basée sur les moments de la distribution risque-neutre

La technique d'estimation proposé dans ce mémoire s'inspire de plusieurs travaux de recherche qui tentent de réduire la complexité computationnelle lorsque l'échantillon d'options s'échelonne sur plusieurs années. Dans le but de faciliter le processus d'estimation, Feunou et Okou (2018) s'intéressent à l'estimation des modèles d'évaluation d'options à l'aide des moments risque-neutre. Ils utilisent la distribution extraite d'un panel d'options écrites sur le S&P 500 entre 1996 et 2011 puis exploitent la relation linéaire entre les cumulants neutre face au risque et les facteurs latents dans un cadre conceptuel de volatilité stochastique en temps continu. Pour leur étude, ils utilisent le deuxième, troisième et quatrième moment avec une série de 8 différentes maturités, allant de 1 à 24 mois ce qui leur permet d'avoir 24 observations de moments risque-neutre pour chaque journée d'observation. Puisque la relation entre les cumulants et les facteurs de leur modèle est linéaire, les auteurs utilisent une version modifiée du Kalman filter lors de l'estimation des paramètres. Ils trouvent que l'adaptation du modèle de Andersen, Fusari et Todorov (2015b) à l'aide des moments de la distribution risque-neutre permet de surpasser les non-linéarités et explique en grande partie l'information comprise dans le prix des options. Leurs observations empiriques suggèrent que l'approche par moment risque-neutre est rapide, facile à mettre en œuvre et offre une bonne précision pour la valeur des paramètres estimés.

D'autres auteurs capitalisent sur cette méthode d'estimation. De leur côté, Li and Zinna (2015) utilisent la structure à terme des primes de Credit Default Swaps afin d'estimer un modèle de risque de crédit multivarié. Quant à Duan et Yeh (2010) et Kaek et Alexander (2012), ils utilisent plutôt l'indice du VIX dans le but de mettre en lumière les variances non observées puis les utilisent pour estimer les modèles d'évaluation d'options. Le VIX est alors utilisé lors du processus d'estimation d'un modèle à volatilité stochastique avec sauts. À l'aide de l'indice et des données sur l'indice du S&P 500 sur un échantillon temporel de 17 années, Duan et Yeh (2010) trouvent une prime de volatilité stable et des paramètres similaires au modèle stochastique estimé avec options. Pour leur part, Kaek et Alexander (2012) comparent la performance de plusieurs modèles à volatilité stochastique avec et sans sauts. Leur modèle à deux facteurs permet de s'ajuster adéquatement à la structure à terme de l'indice du VIX.

Bref, plusieurs recherches empiriques sur le sujet démontrent que l'ajustement des paramètres d'un modèle d'évaluation d'options à l'aide des premiers moments de la distribution risque-neutre procure des résultats satisfaisants. Notre revue de la littérature sur l'évaluation d'options nous permet ainsi de comprendre chacune des étapes nécessaires à la construction et l'ajustement

d'un modèle sophistiqué. Les chapitres suivants mènent à la mise en œuvre de notre technique d'estimation alternative sur le modèle d'évaluation d'Ornthanalai (2014) et repris par BDG (2018) pour l'indice du marché.

La suite du mémoire est organisée comme suit. Le Chapitre 2 dresse le portrait des données utilisées afin d'élaborer la nouvelle technique d'estimation. Le Chapitre 3 est dédié à l'extraction des moments conditionnels de la distribution risque-neutre du S&P 500. Le Chapitre 4 analyse les résultats obtenus suite à l'estimation du modèle et le Chapitre 5 fait office de conclusion du mémoire.

Chapitre 2. Base de données

Les données employées pour tester l'estimation du modèle d'évaluation d'options d'Ornathanalai (2014) et BDG (2018) vont de concert avec les paramètres utilisés pour leurs études. Notre modèle repose également sur une estimation jointe qui comprend les rendements sur l'actif sous-jacent et les moments de la distribution risque-neutre inhérents à cet actif. Comme mentionné par BDG (2018), la prime de risque des paramètres à l'étude est pauvrement identifiée sous la mesure physique, soit par l'entremise des rendements uniquement. Le rôle des facteurs de risque demeure tout de même crucial afin de réconcilier les prix d'options et les rendements sous-jacents. De leur côté, les moments risque-neutre améliorent l'estimation de la probabilité des sauts. En effet, leur construction à base d'options hors-de-la-monnaie devrait être bénéfique à capturer les conditions de marché associé aux événements rares.

Afin de pouvoir comparer notre approche avec celle de BDG (2018) pour l'estimation du modèle, nous reprenons les mêmes périodes utilisées par les auteurs pour notre échantillon. Les rendements journaliers sur l'indice boursier du S&P 500 entre janvier 1996 et août 2015 sont obtenus du Center for Research in Security Prices (CRSP). Selon Rubinstein (1994), l'indice du S&P 500 est l'un des meilleurs indices boursiers afin de tester l'évaluation d'options européenne.

Pour le calcul des moments de la distribution risque-neutre, des options standardisées d'achat et de vente sur le SPX entre janvier 1996 et août 2015 sont obtenues à partir d'OptionMetrics. L'utilisation d'options standardisées permet de simplifier les calculs. En effet, nous nous retrouvons avec un nombre d'options identique à chaque journée de l'échantillon et les dates d'expiration des options sont également mieux structurées en échéance fixe.

La disponibilité des données sur la période d'estimation permet ainsi d'extraire sept échéances de contrat d'options, soit de 30, 60, 91, 122, 152, 182 et 273 jours. L'échantillon d'options extrait comprend une amplitude de moneyness. Lors du calcul des moments risque-neutre, les options hors-de-la-monnaie sont sélectionnées afin d'en obtenir les swaps de variance et les swaps d'asymétrie. Pour leur calcul, les taux d'intérêt sur les bons du trésor américain sont obtenus de CRSP où une spline cubique est orchestrée pour chacune des maturités. Suivant la littérature, nous filtrons notre échantillon de swaps pour en conserver les mercredis de chaque semaine. Cette journée de la semaine est en effet moins sujette à des jours fériés et moins affectée par les effets des fins de semaine. Si les marchés sont fermés un mercredi, nous utilisons la journée

ouvrable précédente. Pour plus de détail sur les avantages d'utiliser les données les mercredis, voire Dumas, Fleming et Whaley (1998). Notre échantillon comprend 7 swaps de variances et 7 swaps d'asymétrie pour chaque semaine de l'échantillon. Cela nous laisse avec une base de données de 4949 rendements et 14 210 moments risque-neutre sur le SPX pour l'estimation du modèle d'options. En plus de notre échantillon standard comparable à BDG (2018), nous utilisons également un second échantillon de données afin de tester la performance de notre modèle. Pour ce faire, nous prenons les rendements journaliers du S&P 500 entre septembre 2015 et décembre 2019 en provenance de CRSP. Aussi, les options du SPX pour la même période sont utilisées aux fins de construction des swaps hors échantillon. Cela crée une base de données hors échantillon de 1090 rendements et 3122 moments risque-neutre sur le SPX

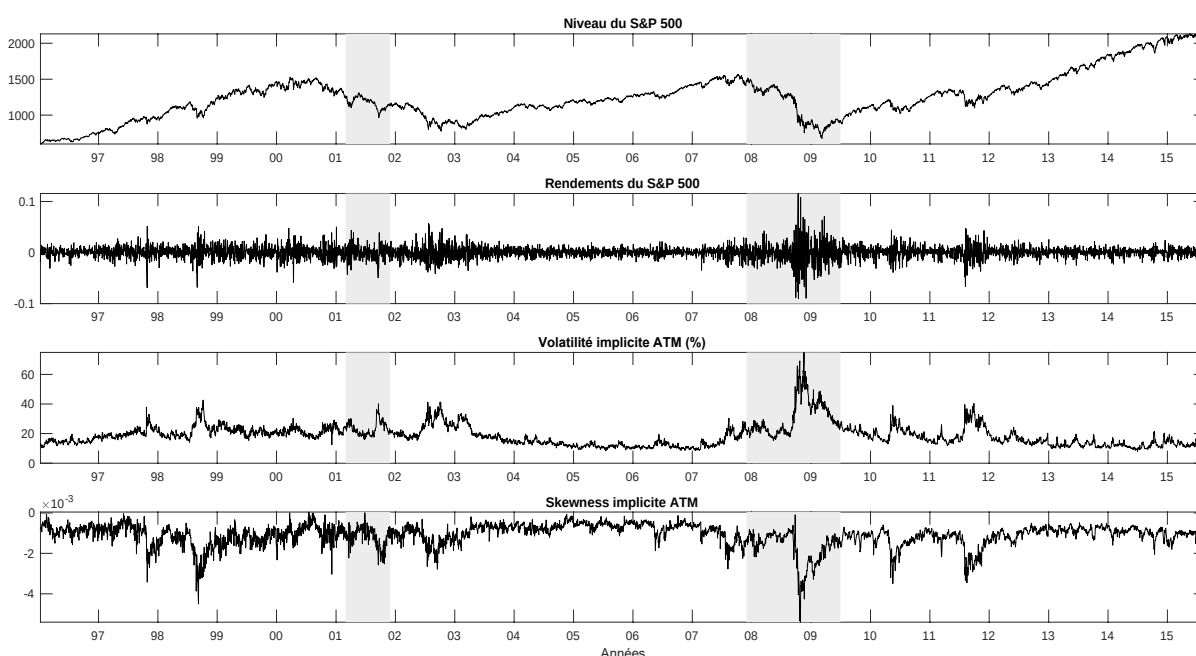
La Figure 1 présente le niveau du S&P 500 sur la période d'échantillon ainsi que les rendements de l'indice. Les bandes grises montrent les deux principales périodes de récession, soit l'éclatement de la bulle technologique entre 2001 et 2002, puis la crise financière orchestrée par le marché des « subprimes » entre 2008 et 2009. Le troisième panneau de la Figure 1 indique la volatilité implicite des options SPX au cours de la même période. L'agitation sur les marchés n'a pas été véhiculée de manière similaire durant les deux crises. La volatilité du marché était bien supérieure pendant la crise financière et la sévérité des rendements négatifs était plus intense et en vitesse accélérée. La reprise économique s'est effectuée de manière lente et graduelle sur une période de cinq ans suivant le creux des deux récessions.

La volatilité implicite présenté à la Figure 1 revêt une importance particulière pour notre modèle d'évaluation. À cet effet, nous calculons au chapitre 3 des swaps de variance et d'asymétrie pour l'estimation du modèle d'options. En terme comparatif, le coefficient de corrélation entre les swaps de variances calculés au chapitre 3 pour une maturité de 30 jours et la volatilité implicite des options à-la-monnaie est de 94.47 %. En outre, la Figure 1 montre une mesure d'asymétrie provenant du marché des options. S'inspirant des travaux de Mixon (2011), cette mesure d'asymétrie implicite du S&P 500 est construite à l'aide de la différence des volatilités implicites d'options d'achat et de vente avec un Delta de 25 et -25 respectivement. La mesure obtenue est donc une approximation de la pente de la courbe de volatilités implicites à-la-monnaie. Le résultat nous indique que l'asymétrie est négative sur tout l'échantillon et celle-ci s'avère plus prononcée lors de la crise des subprimes en 2007-2008. Au chapitre 3, nous calculons des swaps d'asymétrie sur ce même échantillon encore une fois dans le but d'estimer les paramètres de notre modèle d'options. Le coefficient de corrélation entre les swaps d'asymétrie calculés au

chapitre 3 pour une maturité de 30 jours et la mesure d'asymétrie implicite présentée à la Figure 1 est relativement bien comparable à un niveau de 79.52 %.

Figure 1 : S&P 500, volatilités implicites et asymétrie implicite à-la-monnaie

Le graphique supérieur de cette figure présente le niveau de l'indice S&P 500 entre janvier 1996 et août 2015. Les régions grisées mettent en évidence les récessions. Le deuxième graphique présente les rendements de l'indice S&P 500 sur la même période. Le troisième graphique indique la volatilité implicite journalière à-la-monnaie (« ATM ») des options SPX standardisées à échéance de 30 jours extraites d'OptionMetrics. Le graphique inférieur présente une mesure de la pente de la volatilité implicite des options SPX standardisées à échéance de 30 jours à-la-monnaie. Cette mesure d'asymétrie implicite du S&P 500 est construite à l'aide des volatilités implicites d'options d'achat et de vente avec un Delta de 25 et -25 respectivement.



Le Tableau 1 présente l'échantillon d'options hors-de-la-monnaie utilisé pour construire les moments risque-neutre du S&P 500. Le nombre de contrats d'options standardisées est affiché pour l'ensemble des maturités et trié par moneyness. Le nombre de contrats s'avère plus élevé que BDG (2018), mais demeure nécessaire afin d'en extraire les premiers moments de la distribution risque-neutre. En sommes, le nombre de swaps de variance et d'asymétrie calculée est significativement inférieur au nombre de volatilité implicite utilisée par BDG (2018) pour l'estimation du modèle. Nous discutons de notre échantillon de swaps au chapitre 3. Les prix moyens ainsi que les volatilités implicites moyennes figurent au panel B et C. Ceux-ci concordent avec les statistiques descriptives de l'échantillon d'options de BDG (2018).

Tableau 1 : Description des options SPX provenant de l'échantillon (1996-2015)

Le panel A présente le nombre de contrats d'options par étendue de moneyness et par échéance d'options. Le panel B montre les prix moyens des options tandis que le panel C montre les volatilités implicites moyennes. Les données proviennent d'OptionMetrics. La moneyness est définie comme K/F , où F est le prix à terme de l'indice et K est le prix d'exercice de l'option. DTM signifie jours jusqu'à maturité. Notre dernier ensemble de données d'options hors-de-la-monnaie contient 113 680 observations.

Panel A : Nombre de contrats d'options

	30 DTM	60 DTM	91 DTM	122 DTM	152 DTM	182 DTM	273 DTM	Total
$K/F < 0.80$	10	46	121	268	422	611	1,144	2,622
$0.8 \leq K/F < 0.9$	421	1,207	1,832	2,193	2,421	2,497	2,512	13,083
$0.9 \leq K/F < 1.0$	7,689	6,866	6,160	5,645	5,247	4,975	4,329	40,911
$1.0 \leq K/F < 1.1$	7,983	7,620	6,992	6,416	5,875	5,350	4,246	44,482
$1.1 \leq K/F < 1.2$	132	477	1,075	1,614	2,102	2,531	3,172	11,103
$K/F \geq 1.2$	5	24	60	104	173	276	837	1,479
Total	16,240	16,240	16,240	16,240	16,240	16,240	16,240	113,680

Panel B : Prix moyen des options

	30 DTM	60 DTM	91 DTM	122 DTM	152 DTM	182 DTM	273 DTM	Total
$K/F < 0.80$	11.30	12.90	13.85	14.82	16.00	17.10	21.38	18.31
$0.8 \leq K/F < 0.9$	7.93	10.50	13.41	16.56	19.75	23.06	32.12	20.10
$0.9 \leq K/F < 1.0$	13.84	21.60	28.78	35.45	41.49	46.99	61.76	33.02
$1.0 \leq K/F < 1.1$	10.48	15.20	19.71	23.97	28.18	32.51	45.60	23.02
$1.1 \leq K/F < 1.2$	6.31	7.50	8.70	10.37	12.23	13.88	20.46	14.07
$K/F \geq 1.2$	6.52	7.96	9.23	10.32	10.50	10.62	12.30	11.42
Total	11.97	17.31	21.63	25.37	28.65	31.64	39.49	25.15

Panel C : Volatilités implicites moyennes des options

	30 DTM	60 DTM	91 DTM	122 DTM	152 DTM	182 DTM	273 DTM	Total
$K/F < 0.80$	78.44%	59.14%	48.50%	41.57%	37.80%	35.16%	31.38%	35.79%
$0.8 \leq K/F < 0.9$	41.05%	32.15%	28.92%	27.20%	26.33%	25.74%	24.45%	27.38%
$0.9 \leq K/F < 1.0$	21.28%	20.90%	20.70%	20.68%	20.64%	20.62%	20.59%	20.81%
$1.0 \leq K/F < 1.1$	16.72%	16.46%	16.33%	16.31%	16.40%	16.58%	17.12%	16.53%
$1.1 \leq K/F < 1.2$	35.09%	25.63%	21.56%	19.89%	18.95%	18.15%	17.25%	19.15%
$K/F \geq 1.2$	52.23%	40.54%	35.02%	31.43%	28.07%	25.41%	21.26%	24.52%
Total	19.71%	19.93%	20.06%	20.17%	20.26%	20.32%	20.42%	20.13%

Chapitre 3. Construction des moments risque-neutre

3.1 Introduction au portefeuille de réplication

Suivant les travaux de Schneider et Trojani (2015), nous reprenons leur méthodologie concernant la famille de swaps Hellinger pour le calcul du deuxième et troisième moment conditionnel de la distribution risque-neutre. Les auteurs trouvent que le prix des moments réalisés est mesuré de manière à soutenir l'intuition derrière la symétrie put-call dans les marchés sans arbitrage étudié par Renault et Touzi (1996), Carr et al. (1998) et Carr et Lee (2009a). Les swaps Hellinger peuvent par ailleurs être répliqués à l'aide de portefeuilles d'options statiques à couverture delta, évitant le recours à une réplication dynamique très coûteuse. Schneider et Trojani (2015) empruntent à cet égard la propriété de réplication de tout flux monétaire (« payoff ») introduit par Carr et Madan (2001).

Pour toute fonction ϕ dont la deuxième dérivée existe, Carr et Madan (2001) démontrent qu'il est possible de répliquer le profil convexe d'un flux monétaire à l'aide d'un portefeuille d'options hors de la monnaie tel que

$$\phi(F_T) - \phi(F_0) - \phi'(F_0)(F_T - F_0) = \int_0^\infty \phi''(K) O_0(F_T; K) dK \quad (12)$$

où ϕ'' correspond à la dérivée seconde de la fonction génératrice ϕ , $\phi(F_T) - \phi(F_0)$ représente un flux monétaire non linéaire et $\phi'(F_0)(F_T - F_0)$ fait référence à la couverture Delta afin d'assurer que la pente de la fonction autour de 0 soit le plus près de 0. La fonction O_0 se veut simplement l'outil d'évaluation du prix de l'option au temps 0. La preuve de l'équation (12) figure à l'Annexe 8. En prenant l'espérance risque-neutre au temps 0, on se retrouve avec l'équation suivante :

$$E_0^Q[\phi(F_T) - \phi(F_0) - \phi'(F_0)(F_T - F_0)] = \int_0^\infty \phi''(K) P_0(K) dK$$

qui peut être simplifié ainsi :

$$E_0^Q[\phi(F_T) - \phi(F_0)] = \int_0^{F_0} \phi''(K) P_{Put,0}(K) dK + \int_{F_0}^\infty \phi''(K) P_{Call,0}(K) dK \quad (13)$$

où $P_{Put,0}(K)$ et $P_{Call,0}(K)$ correspond au prix de l'option de vente et l'option d'achat au temps 0 pour un prix d'exercice K . L'espérance risque-neutre d'un flux monétaire peut donc être répliquée à l'aide d'un portefeuille d'options d'achat et de vente hors-de-la-monnaie. La fonction génératrice ϕ est définie par la théorie des divergences à fonction puissance.

3.2 Swap de divergence

Schneider et Trojani (2015) introduisent une classe paramétrique de swap de divergence afin de couvrir les divergences du marché. Ces swaps permettent de transiger, à l'aide d'une approche sans modèle spécifique, les différents moments de la distribution risque-neutre. La classe de swaps proposée admet un cas spécial pour la variance de la distribution et induit une famille de swaps pour les moments plus élevés de la distribution.

Les swaps de divergence sont générés pour un paramètre $p \in \mathbb{R}\{0,1\}$ par la fonction puissance convexe $\phi_p(x) = (x^p - 1)/(p(p - 1))$. Le paramètre de divergence pour fonction puissance p sert à contrôler les incertitudes des ordres plus élevés associés à la divergence réalisée. Pour le cas spécial où $p = 0$, nous obtenons la divergence réalisée Itakura et Saito (1968) suivante :

$$D_n^0(F) = -\ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right) + \sum_i^n \left(\frac{F_i}{F_{i-1}} - 1\right) \quad (14)$$

qui correspond à la partie flottante du contrat log de Neuberger (1994). Cette définition est également reprise pour la méthodologie de l'indice VIX par le CBOE (2009). Lorsque $p = 0$, la fonction génératrice ϕ prend donc la forme $-2\log\left(\frac{F_T}{F_0}\right)$ et peut ainsi être substituée dans l'équation (13) en prenant la seconde dérivée. Le swap de divergence structuré possède la forme suivante :

$$S(D_n^0(F)) = -\frac{2}{T}E_0^Q \left[\ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right) \right] = VIX_T^2 = \frac{2}{T} \left(\sum_{k_i < k_o} \frac{\Delta k}{k_i^2} Put(k_i) + \sum_{k_i > k_o} \frac{\Delta k}{k_i^2} Call(k_i) \right) \quad (15)$$

Le carré du VIX, soit la variance du S&P 500, peut ainsi être répliqué sans avoir recours à un modèle spécifique. Cette même procédure est reprise pour le troisième moment de la distribution en choisissant une valeur de $p = 1/2$. Schneider et Trojani (2015) classifient ce type de swap dans la famille des divergences de type Hellinger. Le swap d'asymétrie « Hellinger skew swap » découle de la fonction génératrice $\phi_{1/2}(F_T/F_0)$ et dont la deuxième dérivée est substituée dans l'équation (13). La fonction génératrice est définie de la manière suivante :

$$\phi_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{F_{0,T}}\right) = \frac{d\phi_p\left(\frac{x}{F_{0,T}}\right)}{dp} \Big|_{p=\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{x}{F_{0,T}}\right)^p \ln\left(\frac{x}{F_{0,T}}\right)}{p(p-1)} - \frac{(2p-1)\left(\left(\frac{x}{F_{0,T}}\right)^p - 1\right)}{p^2(p-1)^2} = -4\left(\frac{x}{F_{0,T}}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{F_{0,T}}\right) \quad (16)$$

À l'aide de cette fonction génératrice, le swap d'asymétrie Hellinger prend la forme suivante :

$$Hellinger\ Skew\ Swap = \frac{1}{T} \left(\sum_{K_i < K_o}^n \frac{\sqrt{\frac{K_i}{F}} \ln\left(\frac{K_i}{F}\right)}{K^2} \Delta K_i Put(K_i) + \sum_{K_i > K_o}^n \frac{\sqrt{\frac{K_i}{F}} \ln\left(\frac{K_i}{F}\right)}{K^2} \Delta K_i Call(K_i) \right) \quad (17)$$

Cette méthodologie est répandue à travers la littérature financière principalement en raison de ses avantages. Son implantation est facile et rapide. De plus, elle ne requiert pas de modèle d'évaluation en particulier et elle utilise une sélection d'options d'achat et de vente hors-de-la-monnaie qui offrent une meilleure liquidité que les options à d'autres niveaux de moneyness.

Le Tableau 2 montre les statistiques descriptives pour les contrats du VIX² et du Hellinger Skew swap obtenu à l'aide des options SPX entre 1996 et 2015. La moyenne de la variance implicite du SPX est relativement constante à 3.15 % pour l'ensemble des maturités. L'écart-type du VIX² est supérieur pour des échéances plus courtes faisant référence aux fluctuations du marché à court terme ayant une plus grande influence sur le cours des options hors-de-la-monnaie. Quant aux périodes de volatilité extrême, le VIX² atteint plus de 33 % au début de la plus récente crise financière en novembre 2008. La peur sur les marchés boursiers a commencé dès 2007 et a connu des sommets sans précédent durant la crise des « subprimes ». La Figure 2 montre bien que l'agitation boursière lors de la plus récente crise financière fut bien supérieure à celle observée lors de l'éclatement de la bulle technologique.

Tableau 2 : Statistiques descriptives du VIX² et Hellinger Skew swap (1996-2015)

Le panel A présente les statistiques descriptives des VIX² pour chacune des échéances de notre échantillon de 1996 à 2015. Le panel B montre les statistiques descriptives des Hellinger Skew swap pour la même période. Les moments de la distribution risque-neutre sont obtenus à l'aide d'options standardisées hors-de-la-monnaie provenant d'OptionMetrics. DTM signifie jours jusqu'à maturité. Notre échantillon final de contrat contient 14 210 moments risque-neutre couvrant les maturités de 30 à 273 jours. Les statistiques descriptives du VIX² et du Hellinger Skew sont présentées en points de base.

Panel A : Statistiques descriptives du VIX²								
	30 DTM	60 DTM	91 DTM	122 DTM	152 DTM	182 DTM	273 DTM	Total
Minimum	61.32	67.88	77.66	80.47	81.07	83.54	93.29	61.32
Q1 (25e percentile)	145.70	149.81	156.45	161.10	168.71	175.48	188.94	164.21
Moyenne	316.95	314.79	315.05	315.38	315.55	315.19	314.73	315.38
Median	239.97	249.32	254.33	265.32	269.36	274.59	282.04	262.76
Q3	365.10	374.39	377.59	381.55	382.96	381.69	377.61	377.72
Maximum (75e percentile)	3392.43	2969.21	2500.76	2340.40	2114.34	1873.58	1635.92	3392.43
Écart-type	307.35	271.28	247.46	230.18	215.20	203.45	185.76	240.28

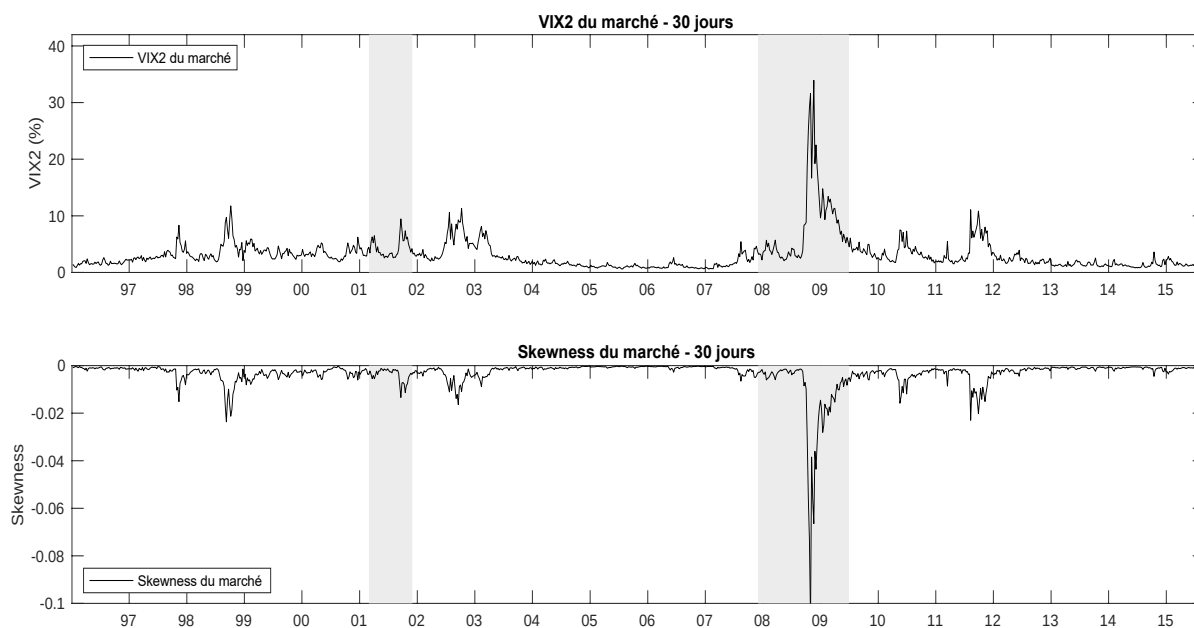
Panel B : Statistiques descriptives du Hellinger Skew

	30 DTM	60 DTM	91 DTM	122 DTM	152 DTM	182 DTM	273 DTM	Total
Minimum	-1048.58	-954.59	-964.45	-998.02	-956.10	-867.72	-827.08	-1048.58
Q1 (25e percentile)	-34.50	-52.03	-63.73	-74.53	-83.96	-90.53	-104.14	-74.14
Moyenne	-34.19	-47.82	-57.56	-65.46	-71.44	-76.15	-87.89	-62.93
Median	-17.04	-26.73	-34.98	-42.28	-48.68	-53.08	-62.85	-39.13
Q3	-9.46	-14.66	-19.09	-23.54	-27.36	-30.97	-39.01	-20.59
Maximum (75e percentile)	-1.80	-3.81	-4.66	-5.31	-5.92	-6.55	-8.41	-1.80
Écart-type	65.37	75.98	79.95	82.55	82.70	81.19	83.39	80.68

Du côté de l'asymétrie du SPX, nous pouvons remarquer que contrairement à la variance implicite, le troisième moment de la distribution est strictement négatif pour tout l'échantillon et pour l'ensemble des maturités sélectionnées. Cette observation a été soulevée par plusieurs auteurs, dont Schneider et Trojani (2015), qui expliquent que cette tendance reflète les déviations négatives de la symétrie des options d'achat et de ventes (« put-call symmetry »). Tout comme le VIX^2 , cette asymétrie négative a connu son plus haut niveau (son minimum) lors de la crise financière en novembre 2008, atteignant une valeur négative de 0.1 ou 1000 points de base.

Figure 2 : Présentation des séries temporelles du VIX^2 et Hellinger Skew

La Figure 2 présente les séries temporelles du VIX^2 et du Hellinger Skew calculés à l'aide des options hors-la-monnaie standardisées à échéance de 30 jours extraites d'OptionMetrics. La figure présente les oscillations de la variance et l'asymétrie du marché pour chacun des mercredis entre janvier 1996 et août 2015. Les régions grisées mettent en évidence les récessions. Les valeurs du VIX^2 apparaissent en pourcentage.



3.3 Discussion des limites potentielles de la méthodologie

La méthodologie proposée par Carr et Madan (2001) n'est pas sans failles lorsque nous prenons en compte les contraintes structurelles du marché. Un problème important inhérent au portefeuille de réplication est l'impossibilité d'observer sur les marchés une étendue infinie de prix d'exercice. Une troncature de l'intervalle de prix d'exercice peut entraîner un biais dans l'estimation des moments risque-neutre. Ce biais s'accroît lors du calcul des moments risque-neutre de longue maturité, car ils nécessitent l'usage d'options à longue échéance peu liquide.

3.3.1 Problème de mise en œuvre

Comme formulé par Jian et Tian (2005), supposons qu'une série de prix d'options d'achat d'un continuum de prix d'exercice K pour une maturité donnée T soit transigé sur l'actif sous-jacent. Conservant la notation de Dumas, Fleming et Whaley (1998) et Britten-Jones et Neuberger (2000), considérons le prix de l'actif Forward et le prix de l'option sur le Forward comme étant F_T et $P_o(K)$ respectivement, sous la mesure risque-neutre. Carr et Madan (2001) proposent que l'espérance d'un flux monétaire entre la date 0 et la future date T soit spécifié par l'ensemble de prix d'options d'achat expirant à la date T tel que nous l'avons spécifié à l'équation (13) :

$$E_0^Q[\phi(F_T) - \phi(F_0) - \phi'(F_0)(F_T - F_0)] = \int_0^\infty \phi''(K)P_o(K)dK$$

Un premier problème survient lors du calcul de la partie droite de l'équation (13) qui requiert une étendue infinie de prix d'exercice. Si les prix d'options sont disponibles pour l'ensemble des prix d'exercice, l'intégrale peut aisément être calculée à l'aide de techniques d'intégration numériques. Toutefois, il n'existe seulement qu'un nombre fini de prix d'exercice actuellement transigés sur les marchés ce qui peut mener à une imprécision dans le calcul de la volatilité implicite.

3.3.2 Erreur de troncature

Jiang et Tian (2005) explique également l'erreur de troncature. Supposons que l'intervalle $[K_{min}, K_{max}]$ fait référence à l'ensemble des prix d'exercice actuellement transigé sur les marchés. Ajoutons comme condition que $0 < K_{min} < F_0 < K_{max} < +\infty$. Les erreurs de troncature peuvent survenir lorsque nous ignorons les queues de la distribution et que nous approximations l'équation (13) par l'intégral suivante :

$$E_0^Q[\phi(F_T) - \phi(F_0) - \phi'(F_0)(F_T - F_0)] = \int_{K_{min}}^{K_{max}} \phi''(K)P_o(K)dK \quad \mathbf{(18)}$$

Jiang et Tian (2005) démontre que l'erreur de troncation au-delà des bornes de prix d'exercice disponible $[K_{min}, K_{max}]$ ont les bornes supérieures suivantes:

$$\int_{K_{max}}^{+\infty} \phi''(K) P_0(K) dK \leq E_o^Q \left[\left(\frac{F_T - K_{max}}{K_{max}} \right) \middle| F_T > K_{max} \right], \quad (19)$$

$$\int_0^{K_{min}} \phi''(K) P_0(K) dK \leq E_o^Q \left[\left(\frac{F_T - K_{max}}{F_T} \right) \middle| F_T < K_{min} \right] \quad (20)$$

Chacune des bornes supérieures reflète les variations locales dans les queues de la distribution des rendements. Les bornes des équations (19) et (20) se veulent relativement rapprochées, mais elles ne sont pas sans spécification d'un modèle (« model free »). Afin de contrôler l'erreur de troncation, nous utilisons la plus grande étendue de prix d'exercice disponible des options standardisé du SPX.

3.3.3 Disponibilité limitée des prix d'exercice

Nous avons assumé que tous les prix d'options étaient disponibles pour tous prix d'exercice compris entre les bornes $[K_{min}, K_{max}]$. En réalité, seulement des prix d'exercice pour un intervalle fixe sont transigés sur les marchés. Nous devons faire face non seulement à une fourchette limitée, mais aussi à un ensemble clairsemé de prix d'exercice. Cet effet peut être amplifié lorsque les prix d'exercice sont inexistantes pour certains intervalles donnés profondément dans ou hors-de-la-monnaie.

Bien qu'il existe des limites à la méthodologie de réplication pour les moments risque-neutre, nous estimons que celles-ci sont atténuées en prenant un indice de marché très liquide qu'est celui du S&P 500. À cet effet, la prochaine section discute des résultats du modèle d'évaluation d'options estimé conjointement avec les rendements sur l'indice boursier et les moments risque-neutre.

Chapitre 4. Analyse des résultats

4.1 Résultats de l'estimation jointe

La valeur des paramètres de l'estimation jointe avec les rendements du S&P 500 et les moments de la distribution risque-neutre sont comparés aux résultats du modèle de BDG (2018) au Tableau 3. De manière générale, nos résultats sont très similaires à ceux obtenus par BDG (2018) et plus particulièrement ceux d'Ornathanalai (2014) pour le modèle de marché avec une composante de saut avec distribution NIG.

La valeur des primes de risque obtenu avec notre méthode d'estimation est très comparable avec BDG (2018). Du côté de la composante gaussienne, notre valeur de λ_M est de 0.82 comparativement à 0.824 pour BDG et pour la composante de sauts, y_M est pratiquement identique à 0.71. La constante $w_{M,z}$ présente la même valeur sous notre estimation, mais $w_{M,y}$ est davantage négatif que BDG (2018) et Ornathanalai (2014). À l'égard des coefficients a_M , b_M et c_M , ceux-ci partagent des valeurs estimées équivalentes à la littérature financière, et ce, pour la composante normale et la composante de sauts. À titre informatif, l'effet de levier exprimé par la variable $c_{M,z}$ obtient une valeur positive dans notre modèle optimal, indiquant du même coup qu'il existe une relation négative entre les rendements du S&P 500 et l'innovation de la variance. Concernant les paramètres qui gouvernent la composante de sauts, citons le paramètre qui conditionne l'épaisseur des queues de la distribution NIG, α_M , qui est estimé à 11.3, vis-à-vis une valeur similaire de 11.9 pour BDG (2018) et 11.6 pour Ornathanalai (2014). Pour le facteur d'asymétrie de la distribution NIG, δ_M , sa valeur dérivée à l'aide de notre estimation jointe oscille autour de -6.86 ce qui est conforme avec la littérature.

Les calculs des moments de la distribution du modèle démontrent que les statistiques en provenance de l'estimation avec les RNM sont comparables à ceux de BDG (2018) pour la composante gaussienne, mais sont légèrement inférieurs pour l'intensité du saut. En effet, notre coefficient d'asymétrie de l'innovation normale est de -0.27 comparativement à -0.12 pour BDG (2018). Notre asymétrie pour l'intensité du saut est quant à elle estimée à -1.54 contre -7.37 pour BDG (2018). Cette différence est toutefois négligeable lorsque nous comparons l'asymétrie totale des deux composantes du modèle, soit $z_{M,t} + y_{M,t}$, où nous obtenons une valeur négative et très similaire à BDG (2018) de -0.22. Tel que reporté par Ornathanalai (2014), la force de la distribution NIG est de générer des niveaux significativement plus élevés d'asymétrie et d'aplatissement comparativement à d'autres distributions pour la composante de sauts. Cette caractéristique

permet en outre d'ajuster le modèle aux rendements et valeurs d'options avec une meilleure précision grâce à sa capacité de produire des niveaux de non-normalité conditionnelle. Tout comme BDG (2018), nos estimés des innovations normales standard conditionnelles, $\varepsilon_{M,t}$, ont une asymétrie et un coefficient d'aplatissement en excès près de 0 tel qu'escompté.

Quant aux coefficients d'aplatissement en excès, nous pouvons remarquer que notre valeur pour la composante normale est positive, mais tout de même faible à 0.54 relativement à -0.07 pour BDG (2018). Pour la composante de saut, notre valeur estimée demeure significativement élevée et relativement comparable à BDG (2018) et Ornathanalai (2014) à plus de 300. En outre, notre coefficient d'aplatissement total est calculé à 2.79 plus élevés que BDG (2018). Une explication possible de ces différences réside dans la structure de notre base de données de RNM. Certes, nous avons construit, à l'aide d'options hors-de-la-monnaie, des swaps de variances et d'asymétries, soit les deuxièmes et troisièmes moments de la distribution risque-neutre du S&P 500. Les différences relatives aux valeurs des coefficients d'aplatissement peuvent donc survenir en raison d'une couverture inexistante des swaps de « kurtosis » dans notre échantillon.

Concernant la répartition de la variance annuelle, notre estimation procure des résultats encore une fois légèrement inférieurs pour la composante de sauts, mais notre répartition demeure comparable à celle de BDG (2018). Pour la volatilité moyenne et totale, nos estimations concordent avec une volatilité totale de 18.6 % avec notre approche vis-à-vis une volatilité totale de 18.0 % selon BDG (2018). De même, la prime de risque normale, $\lambda_M h_{M,z,t}$, et celle du saut, $y_M h_{M,y,t}$, leur moyenne et médiane se rapproche de BDG (2018) avec notre prime de risque moyenne d'équité totale de 5.66 % contre 6.18 % pour l'estimation jointe avec rendements et options.

Tel qu'observé par BDG (2018), le Tableau 3 montre que la composante de sauts de la variance, $h_{M,y}$, explique que 12.7 % de la variance totale en moyenne, $h_{M,z} + \frac{\alpha_M^2}{(\alpha_M^2 - \delta_M^2)^{3/2}}$, mais nous pouvons remarquer que son poids surpasse celui de la composante normale à l'égard de la prime de risque moyenne.

En résumé, nos résultats vis-à-vis les moments de la distribution de notre modèle concordent avec les résultats de BDG (2018) et Ornathanalai (2014) même si ce dernier ne couvre pas l'ensemble de notre échantillon.

Tableau 3 : Paramètres du modèle estimé à l'aide des rendements et des RNM et comparaison avec les résultats du modèle de BDG (2018)

Le panel A présente les différents paramètres du modèle d'évaluation d'options pour la composante gaussienne et la composante de sauts. Les paramètres sont estimés à l'aide des rendements de l'indice du S&P 500 entre janvier 1996 et août 2015 et les RNM hebdomadaires pour la même période temporelle. Les RNM sont construits pour sept maturités différentes, soit 30, 60, 91, 122, 152, 182 et 273 jours. L'estimation des paramètres est réalisée à l'aide d'une méthode d'optimisation de recherche du minimum d'une fonction non linéaire sous contraintes (fmincon dans Matlab). Les paramètres de départ sont similaires à la littérature financière et s'inspirent des résultats du modèle d'Ornathanalai (2014). Les erreurs standard robustes sont calculées à partir du produit extérieur du gradient aux valeurs optimales des paramètres. Les paramètres estimés sont comparés à ceux obtenus par BDG (2018) par leur estimation jointe des rendements de l'indice et les volatilités implicites des options sous-jacentes. Le panel B montre la distribution des paramètres optimaux. Les primes de risque moyenne et médiane et la volatilité moyenne sont présentées en terme annualisé.

	Estimation jointe - Rendement et RNM		Estimation jointe - Rendement et options	
Panel A : Valeur des paramètres	Normal	Saut	Normal	Saut
$\lambda_M/y_M \times 10^{-1}$	0.820	0.701	0.824	0.701
$\times 10^{-8}$	(1.50)	(3.04)	(0.024)	(0.035)
$w_{M,z}/w_{M,y} \times 10^{-5}$	-0.163	-1.48	-0.163	-0.041
$\times 10^{-8}$	(1.25)	(2.25)	(2.50)	(1.88)
$a_{M,z}/a_{M,y} \times 10^{-6}$	2.41	6.34	2.42	4.44
$\times 10^{-2}$	(0.164)	(1.33)	(0.336)	(0.783)
$b_{M,z}/b_{M,y} \times 10^{-1}$	9.40	9.40	9.40	9.34
$\times 10^{-8}$	(1.21)	(0.571)	(0.0694)	(0.458)
$c_{M,z}/c_{M,y} \times 10^2$	1.43	1.43	1.44	1.41
$\times 10^{-9}$	(1.61)	(2.38)	(0.028)	(0.013)
$\alpha_M \times 10^1$		1.13		1.19
$\times 10^{-8}$		(3.22)		(1.31)
$\delta_M \times 10^0$		-6.86		-7.02
$\times 10^{-9}$		(1.53)		(0.301)
Panel B : Distribution du modèle				
Coefficient d'asymétrie de l'innovation, $\varepsilon_{M,t}/y_{M,t}$	-0.27	-1.54	-0.12	-7.37
Asymétrie totale $z_{M,t} + y_{M,t}$		-0.22		-0.31
Coefficient d'aplatissement en excès, $\varepsilon_{M,t}/y_{M,t}$	0.54	300.64	-0.07	346.33
Coefficient d'aplatissement total, $z_{M,t} + y_{M,t}$		10.54		7.75
% de la variance annuelle	87.30	12.70	74.00	26.00
Volatilité moyenne	17.10	6.96	15.60	9.00
Total		18.63		18.00
Prime de risque moyenne	2.66	3.00	2.33	3.85
Total		5.66		6.18
Prime de risque médiane	1.78	1.04	1.72	3.04
Total		2.81		4.75

4.2 Analyse de la performance du modèle

Afin de tester la performance de notre modèle d'options, nous évaluons les swaps de variance à l'intérieur de l'échantillon, soit de 1996 à 2015 et comparons l'erreur d'évaluation avec les valeurs des swaps utilisés pour réaliser notre estimation jointe des paramètres. Les swaps utilisés pour notre estimation du modèle sont construits à l'aide des options hors-de-la-monnaie observées sur les marchés (voir Chapitre 3). Nous reprenons deux formules d'erreurs d'évaluations généralement reconnues dans la littérature, soit la racine des erreurs moyenne au carré (« RMSE ») et sa version relative (« RRMSE ») dont les formules sont les suivantes :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (Swap_k^{Modèle} - Swap_k^{Marché})^2} \quad (21a)$$

$$RRMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{Swap_k^{Modèle} - Swap_k^{Marché}}{Swap_k^{Marché}} \right)^2} \quad (21b)$$

où N correspond au nombre de swaps dans notre échantillon, $Swap_k^{Modèle}$ est la valeur du swap de variance implicite obtenu à l'aide des paramètres du modèle et $Swap_k^{Marché}$ équivaut à la valeur du swap de variance dérivé à l'aide des options sur le marché. Comme stipulé par BDG (2018), le RMSE procure une mesure absolue de l'erreur d'évaluation tandis que le RRMSE est une mesure relative qui est plus probable d'apporter une meilleure information lorsque nous comparons des erreurs d'évaluation à travers le temps.

Le Tableau 4 montre les résultats pour les deux mesures pour chacune des maturités de swaps et filtre également les valeurs à travers les années de notre échantillon. Pour notre échantillon complet, dont celui-ci comprend 7 105 swaps de variance hebdomadaire, l'estimation jointe avec les RNM procure une erreur d'évaluation très similaire à BDG (2018). Le calcul est évidemment réalisé sur un échantillon de swaps estimés sur la même période. Nous obtenons ainsi une erreur absolue de 3.14 % contre 2.56 % pour BDG (2018). La différence est moindre en comparant l'erreur relative sur tout notre échantillon qui se situe à 17.30 % avec notre approche vis-à-vis une erreur relative de 16.22 % selon l'estimation avec options. Ceci concorde avec les résultats de l'estimation des paramètres qui produit des estimations très similaires selon les deux techniques utilisées.

Nous pouvons également comparer la performance entre les deux approches selon les maturités de swaps de notre échantillon. Puisque notre échantillon de swap est construit à partir de la base

de données d'options standardisées d'OptionMetrics, le nombre de swaps est constant pour chacune des sept maturités. Du côté des RMSE, elles demeurent similaires à travers l'ensemble des maturités testées. Bien que les erreurs d'évaluation avec notre approche soient légèrement plus élevées, les écarts avec les erreurs selon le modèle de BDG (2018) sont comparables entre les maturités. D'un autre côté, les erreurs relatives calculées sont en moyenne semblable à la littérature. De plus, les RRMSE calculés avec notre modèle présentent une meilleure performance pour des maturités de swaps de plus longue échéance, soit les 122 et 273 jours.

En outre, nous comparons les erreurs d'évaluation triées pour chacune des vingt années de notre échantillon. Puisque notre échantillon de swaps de variance se veut significativement inférieur à l'échantillon d'options de BDG (2018), le nombre de valeurs pour nos calculs par année est plus petit à près de 350. Un tel ensemble de swaps moins volumineux peut augmenter la fluctuation des résultats. Néanmoins, l'agrégation d'options pour créer les swaps crée moins de bruits dans les observations tel que mentionné par Orlowski (à être publié).

Tableau 4 : Erreurs d'évaluation sur les swaps de variance utilisés pour l'estimation du modèle de marché et comparaison avec le modèle de BDG (2018)

Nous utilisons l'estimation des paramètres réalisés à l'aide de notre optimisation par maximum de vraisemblance des rendements et des RNM dont les résultats apparaissent au Tableau 3. Les calculs de la racine des erreurs moyenne au carré (« RMSE ») et sa version relative (« RRMSE ») sont effectués avec les formules (21a et 21b) sur les swaps de variance (VIX^2) employés lors de l'estimation du modèle de marché. Puisque les swaps de variance sont construits sur sept maturités différentes, les résultats sont présentés pour chacune d'entre elles où (« DTM ») signifie « nombre de jours jusqu'à l'échéance ». Les mesures de performance sont comparées aux résultats obtenus en prenant les paramètres optimaux de BDG (2018) pour ainsi calculer les VIX^2 durant la période d'estimation. Les valeurs des RMSE et RRMSE sont données en pourcentage.

	Estimation jointe - Rendement et RNM		Estimation jointe - Rendement et options	
	RMSE	RRMSE	RMSE	RRMSE
Échantillon complet	3.138	17.301	2.562	16.224
Trié par maturité				
30 DTM	3.035	17.274	2.651	14.584
60 DTM	3.072	17.396	2.449	14.061
91 DTM	3.228	17.414	2.454	14.604
122 DTM	2.946	17.092	2.615	18.481
152 DTM	3.174	17.084	2.527	16.724
182 DTM	3.188	17.202	2.537	16.626
273 DTM	3.307	17.636	2.688	17.926

Trié par année				
1996	2.270	21.095	2.574	22.115
1997	3.933	20.701	2.614	13.825
1998	5.174	23.927	3.930	17.561
1999	5.596	26.686	3.395	15.680
2000	1.631	8.937	1.607	8.898
2001	2.304	11.174	2.569	13.780
2002	1.916	9.653	1.960	10.934
2003	2.680	14.323	1.276	6.994
2004	1.106	8.948	1.535	12.079
2005	2.100	20.167	3.233	29.058
2006	2.776	27.377	3.237	29.893
2007	1.882	16.330	2.334	20.615
2008	4.349	11.658	3.607	10.803
2009	5.144	23.125	2.949	13.205
2010	3.917	20.218	2.667	14.073
2011	2.531	12.992	2.357	11.147
2012	2.869	16.372	1.692	9.989
2013	0.909	7.372	1.489	11.642
2014	1.235	10.820	1.830	15.030
2015	0.821	5.927	1.745	13.639

À noter que les erreurs d'évaluation de BDG (2018) pour la même période temporelle connaissent également des variations importantes. Pour nos erreurs absolues entre 1996 et 2015, elles sont très identiques entre les deux approches d'estimation, voir même meilleures selon notre approche sur plusieurs années. En effet, nous remarquons qu'entre 2001 et 2007, soit la période entourant la bulle technologique jusqu'au début de la crise financière, notre modèle produit des erreurs d'évaluation inférieures. Par contre, la crise financière comprenant des fluctuations boursières majeures introduit une marge d'erreur faiblement supérieure selon notre modèle d'évaluation. De manière analogue, ces remarques sont valables pour la mesure des erreurs relatives.

Nous présentons également la performance d'ajustement du modèle d'évaluation aux différents moments de la distribution observés sur le marché. À cet effet, nous montrons aux Figure 3 et 4 comment notre modèle réplique les variations du marché en termes de variance et d'asymétrie. Du côté de la variance, la Figure 3 présente pour trois maturités différentes, la comparaison entre le VIX^2 implicite du modèle et celui observé sur le marché construit à base d'options hors-de-la-monnaie. Nous reprenons ici les valeurs obtenues à même l'estimation du modèle et les valeurs

obtenues sur les marchés dont celles-ci sont dérivées au Chapitre 3. Nous pouvons remarquer que la variance implicite du modèle de maturité 30 jours, soit un contrat comparable à celui du VIX établi par le CBOE, suit adéquatement les oscillations de la variance du marché. Les soubresauts survenus lors de la bulle technologique sont parfaitement répliqués de même que la forte augmentation de la volatilité durant la plus récente crise financière. Bien que notre modèle ne réplique pas parfaitement la pointe de variance connu en 2009, le VIX^2 implicite connaît une forte augmentation comparativement aux autres années de l'échantillon. La variance implicite pour une maturité de 90 jours présente des variations similaires. Outre une certaine disparité observée entre 1998 et 2000, la variance du modèle s'adapte très bien aux fluctuations et s'aligne parfaitement en 2008 aux premiers signes d'augmentation de la volatilité. Quant à la maturité de 182 jours, celle-ci s'ajuste moins bien à certaines périodes de notre échantillon. Nous observons un alignement moins précis entre 1998 et 2000 puis entre 2009 et 2011 où la variance implicite est inférieure à celle du marché. Certes, il demeure difficile de prédire précisément comment le marché se comportera avec une telle échéance, mais nous jugeons que le modèle capture bien les oscillations en globalité.

La Figure 4 montre quant à elle, la comparaison entre le Hellinger Skew swap implicite, soit celui obtenu avec le modèle d'évaluation et celui observé sur les marchés, soit celui bâti à partir des options hors-de-la-monnaie. Nous présentons cette mesure d'asymétrie sous trois maturités de contrats telle qu'afficher à la Figure 3. Pour toutes échéances, nous pouvons remarquer que l'asymétrie est négative sur l'ensemble de notre échantillon. Cette caractéristique est également rencontrée par plusieurs auteurs dont Feunou et Okou (2018) qui obtiennent pour des échéances similaires, une asymétrie négative sur la période de 1996 à 2012. En ce qui a trait à l'ajustement de notre modèle, les contrats à maturité 30 jours répliquent avec brio l'asymétrie rencontrée sur les marchés. Les oscillations négatives observées durant la bulle technologique sont bien représentées par notre modèle. Du côté de la crise financière de 2008-2009, nous remarquons que l'asymétrie dans les rendements du marché atteigne des valeurs sans précédent. Cette chute significative s'apparente à un « cygne noir » sur les marchés, signifiant qu'un tel événement n'ayant jamais été anticipé est survenu sans préavis. Notre modèle s'ajuste que partiellement à cette asymétrie fortement négative survenue que durant quelques jours de notre échantillon. Pour le contrat d'asymétrie de 90 jours, la performance est relativement similaire. Comme observé avec les contrats du VIX^2 de 90 jours, l'ajustement durant la période de 1998 à 2000 connaît une légère disparité. Pour la suite de l'échantillon, la réplification des conditions de marché s'apparente à celle obtenue avec les contrats de 30 jours. En outre, l'asymétrie implicite à échéance de

182 jours demeure plus conservatrice durant la plus récente crise financière jusqu'à l'année 2013. Comme indiqué avec la variance implicite de notre modèle, les performances obtenues s'ajustent convenablement aux conditions de marchés durant l'échantillon à l'étude.

Figure 3 : Comparaison entre le VIX² implicite du modèle et le VIX² du marché

La Figure 3 présente le VIX² implicite calculé à l'aide du modèle d'évaluation estimé avec les rendements et les RNM sur le S&P 500. Le calcul du VIX² implicite est basé sur les séries d'états filtrés dans le modèle. Les paramètres estimés du modèle d'évaluation sont présentés au Tableau 3. Le VIX² implicite est obtenu à l'aide de l'équation (8). Les valeurs du VIX² du marché sont établies à partir d'options sur le S&P 500 hors-de-la-monnaie (voir Chapitre 3). Le premier panel présente les VIX² avec maturité de 30 jours, suivi des VIX² 90 et 182 jours pour le deuxième et troisième panel. Les bandes grises représentent les dernières crises financières. Les valeurs du VIX² apparaissent en pourcentage.

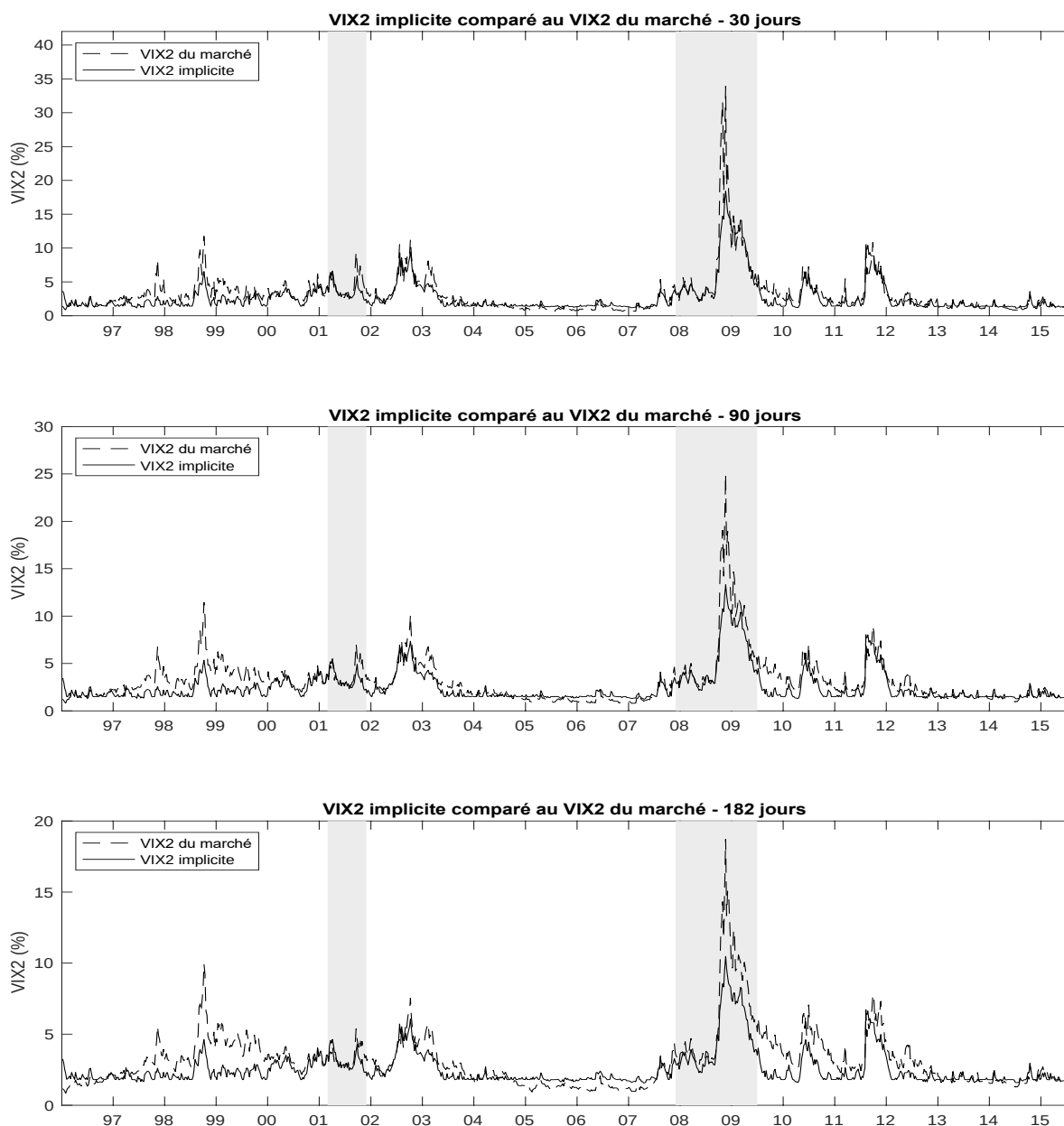
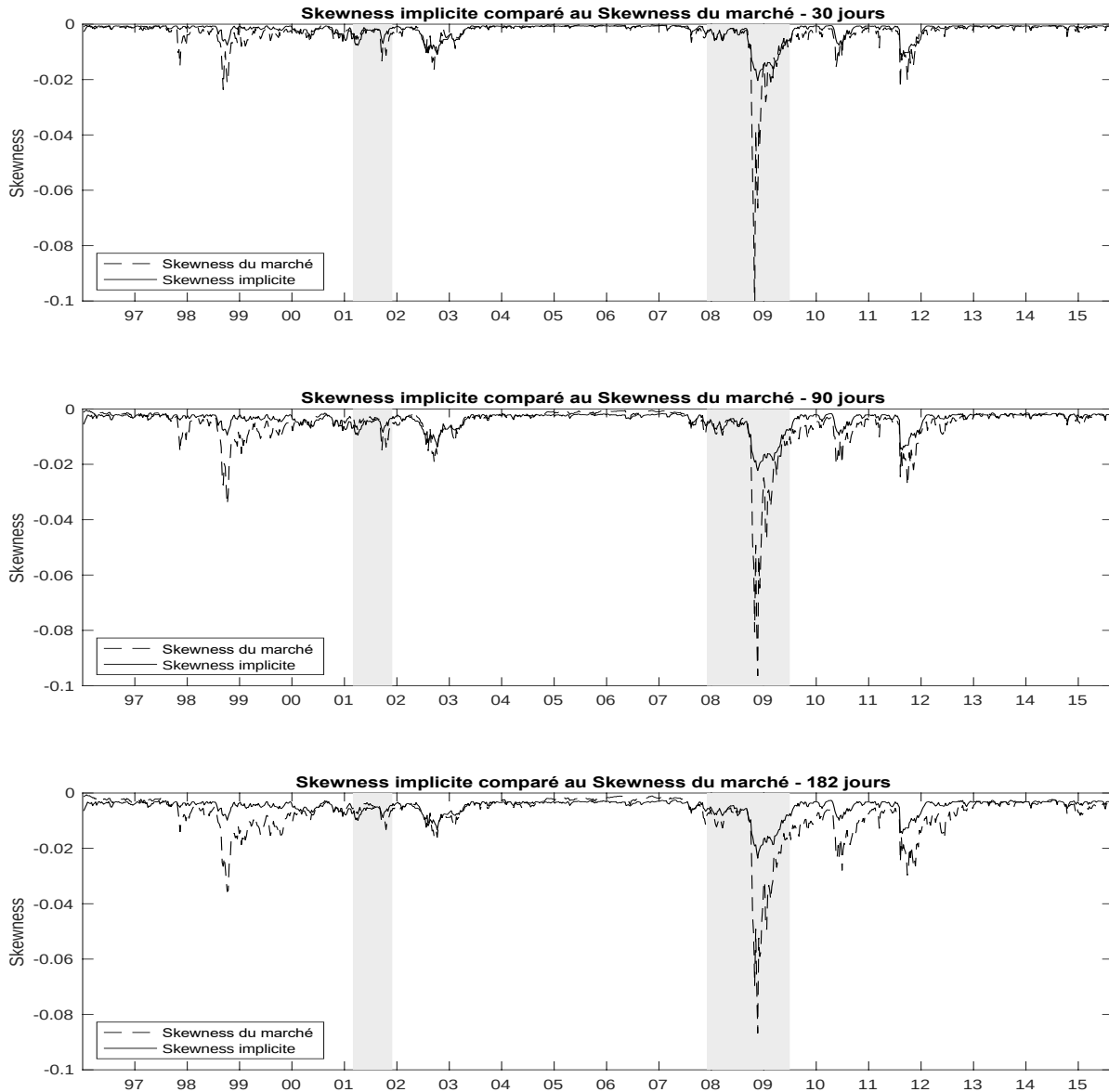


Figure 4 : Comparaison entre l'asymétrie implicite du modèle et l'asymétrie du marché

La Figure 4 présente le Hellinger Skew implicite calculé à l'aide du modèle d'évaluation estimé avec les rendements et les RNM sur le S&P 500. Le calcul du Hellinger Skew implicite est basé sur les séries d'états filtrés dans le modèle. Les paramètres estimés du modèle d'évaluation sont présentés au Tableau 3. Le Hellinger Skew implicite est obtenu à l'aide de l'équation (9). Les valeurs du Hellinger Skew du marché sont établies à partir d'options sur le S&P 500 hors-de-la-monnaie (voir Chapitre 3). Le premier panel présente les Hellinger Skew swap avec maturité de 30 jours, suivi des Hellinger Skew swap 90 et 182 jours pour le deuxième et troisième panel. Les bandes grises représentent les dernières crises financières.



4.3 Analyse de la performance du modèle hors échantillon

4.3.1 Prédiction des rendements hors échantillon

Nous pouvons conduire notre analyse de performance sur les rendements prédits par le modèle sur notre échantillon secondaire, soit de septembre 2015 à décembre 2019. Pour ce faire, nous reprenons l'équation des log-rendements du modèle, soit l'équation (1), afin de calculer les rendements estimés par le modèle d'évaluation. Le modèle d'évaluation n'est pas réestimé, c'est-à-dire que nous conservons les paramètres optimaux estimés sur notre échantillon de base, puis nous effectuons une prédiction à partir de ces paramètres. Une fois les rendements prédits obtenus, nous effectuons une comparaison à l'aide d'un test statistique appuyé par une présentation graphique de la relation entre les deux séries de rendements hors échantillon.

Diebold, Gunther et Tay (1998) mentionnent qu'il est possible de transformer une distribution uniforme, $U(0,1)$, en une autre distribution en utilisant la fonction de répartition inverse (« inverse CDF »). Cela signifie qu'au lieu de tester $x \sim U(0,1)$, nous pouvons tester $y \equiv \phi^{-1}(x) \sim D(\mu, \sigma)$, où D correspond à la distribution des rendements observés sur les marchés. À cet effet, nous utilisons l'inverse des PIT (« Probability Integral Transform ») afin de tester l'hypothèse nulle selon laquelle les prévisions de densité de notre modèle sont bien spécifiées conformément aux rendements observés hors échantillon. La Figure 5 présente la comparaison des fonctions de répartition cumulative des PIT inversés provenant des deux distributions de rendement où nous pouvons observer que la distribution de notre prédiction des rendements s'avère différente à la distribution des rendements observés. Le test de Kolmogorov-Smirnov est ensuite employé où l'hypothèse nulle dicte que les deux séries de rendements appartiennent à la même distribution. Avec un niveau de confiance de 99 %, la statistique du test est de 0.124 et la p-value s'approchant de 0. Nous devons alors rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les prévisions de densité de notre modèle sont bien spécifiées hors échantillon.

Une confirmation de ce test peut également être réalisée à l'aide d'un graphique de quantile communément appelé « QQ-Plot ». Un tel graphique permet d'évaluer la précision d'ajustement de la distribution des rendements du modèle d'évaluation à celle observée sur les marchés. La Figure 6 reproduit ce graphique à l'aide des deux distributions de rendements à l'étude. Nous observons que les quantiles des deux distributions ne s'alignent pas précisément sur la droite linéaire, confirmant ainsi que la distribution des rendements estimés par le modèle d'évaluation divergent de la distribution des rendements observés. À titre informatif, un excellent ajustement de la distribution aurait parfaitement aligné les points sur la droite linéaire. La Figure 6 montre

plutôt un alignement des points sur la droite au centre et une certaine courbure pour les quantiles des x plus éloignés du centre. Cela nous indique que notre prédiction des rendements connaît des valeurs plus extrêmes que la distribution de rendements observés sur les marchés. Afin d'enrichir notre analyse de la performance hors échantillon, nous évaluons et comparons la valeur de swaps de variance et d'asymétrie ainsi que les volatilités implicites d'un ensemble d'options.

Figure 5 : Comparaison des fonctions de répartition cumulative des PIT inversés provenant des rendements prédits du modèle d'évaluation et des rendements observés hors échantillon

La Figure 5 présente une comparaison des fonctions de répartition cumulative des PIT inversés des séries de rendements journaliers prédits par le modèle d'évaluation vis-à-vis les rendements journaliers observés sur l'échantillon de septembre 2015 à décembre 2019.

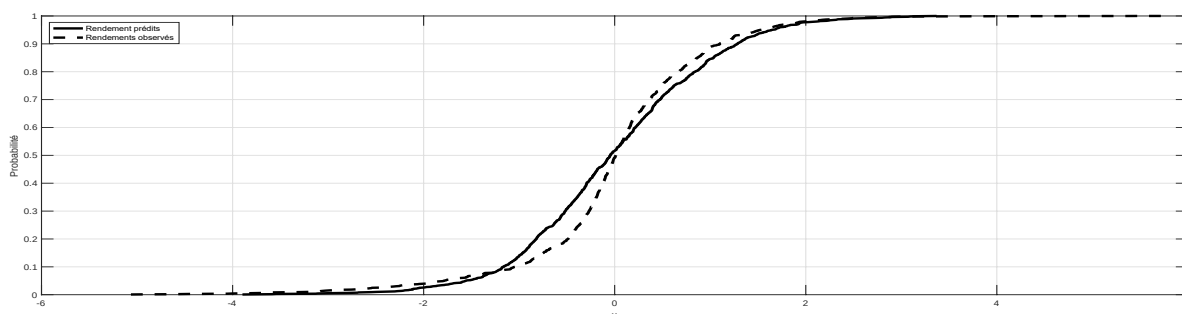
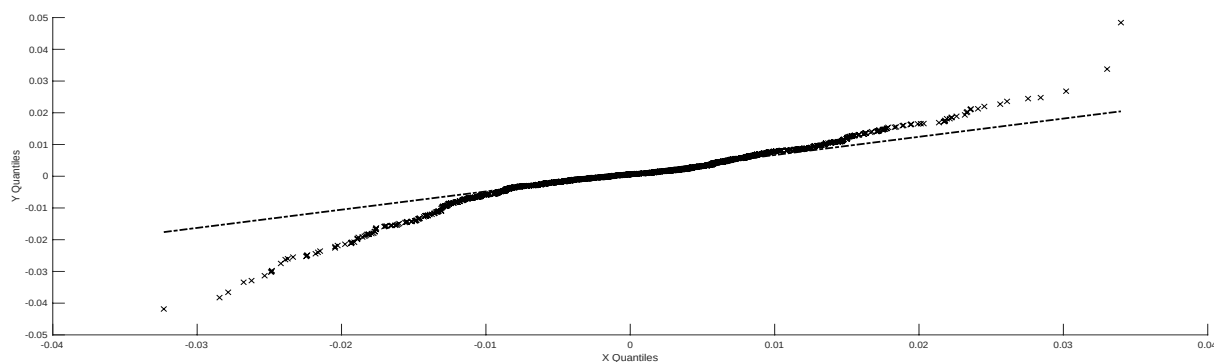


Figure 6 : Graphique quantile-quantile (« QQ-Plot ») à l'aide des rendements prédits du modèle d'évaluation et des rendements observés sur les marchés hors échantillon

La Figure 6 présente un graphique quantile-quantile des quantiles, sur l'axe des x , des données des rendements prédits par le modèle d'évaluation par rapport aux quantiles, sur l'axe des y , des rendements observés sur les marchés sur l'échantillon de septembre 2015 à décembre 2019. Si les données proviennent de la même distribution, alors les points s'alignent sur la droite linéaire.



4.3.2 Évaluation des swaps hors échantillon

Afin de poursuivre notre analyse de la performance globale de notre modèle d'évaluation, nous pouvons utiliser les paramètres du modèle optimal dans le but d'évaluer hors échantillon nos swaps de variance et d'asymétrie. Tel qu'expliqué précédemment, les swaps de variance et

d'asymétrie construit à partir d'options hors-de-la-monnaie réplique la variance et l'asymétrie implicite de l'actif sous-jacent. Dans cette optique, nous construisons les swaps à l'aide des données disponibles hors échantillon, soit entre septembre 2015 et décembre 2019. Nous prenons les données d'OptionsMetrics sur les options d'achat et de vente et reprenons notre code Matlab afin de calculer les swaps de variance et d'asymétrie sur cette nouvelle série chronologique et avec les mêmes maturités d'options standardisées utilisées pour l'estimation de notre modèle. De même, nous calculons les swaps sur une base hebdomadaire. Pour le calcul des swaps implicite, soit ceux calculés par notre modèle, nous conservons nos paramètres optimaux pour simuler les rendements sur la nouvelle plage de données. Le modèle n'est donc pas réestimé pour calculer les swaps implicites. Nous utilisons simplement les paramètres estimés jusqu'à août 2015 pour ensuite extraire les variances conditionnelles filtrées à l'aide de l'information disponible au temps t afin de calculer les VIX^2 et Hellinger Skew swap sur l'échantillon secondaire.

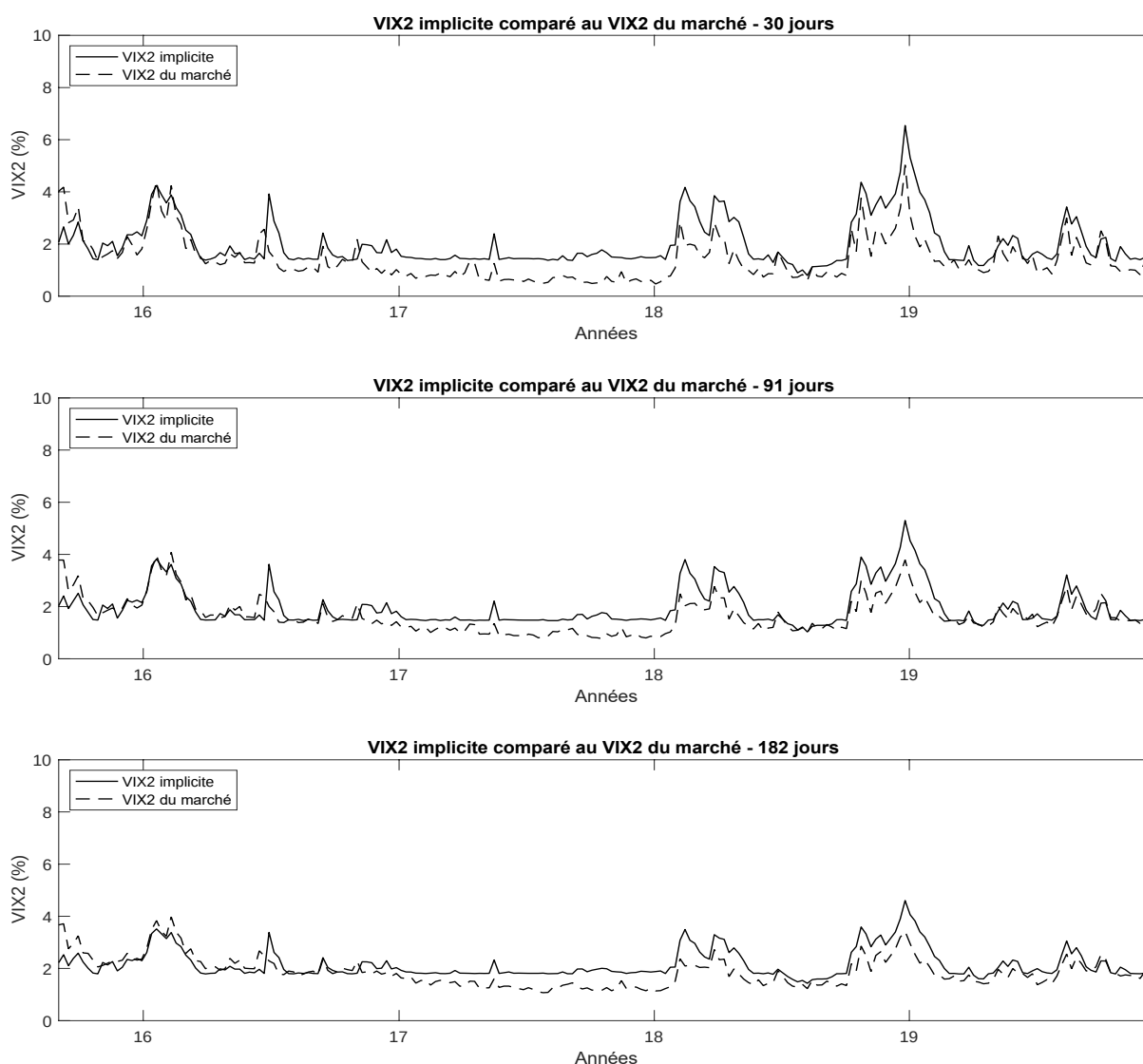
La Figure 7 montre la comparaison entre les swaps de variance et d'asymétrie estimés et les valeurs observées. Quelques points importants peuvent être soulignés à partir des graphiques présentés. D'une part, le modèle est, dans une certaine mesure, capable d'estimer adéquatement une majorité des effets observés sur les marchés pour la période hors échantillon. D'autre part, nous pouvons remarquer que des différences temporelles s'observent à travers les années. La précision d'estimation est moins bonne pour l'année 2017 et la première moitié de 2018. Le modèle surestime la variance du marché pour cette sous-période. Nous pourrions croire que l'estimation des paramètres prenant en compte la grande période de fluctuation boursière de 2007-2008 influence l'estimation vers des valeurs légèrement plus élevées. Néanmoins, cette capacité à générer des valeurs de volatilité plus élevée permet d'outiller le modèle pour les périodes plus tumultueuses. En effet, les pointes des variances observées en 2016 et 2019 principalement, sont bien capturées par les valeurs implicites. D'autant plus, le niveau d'erreur d'évaluation apparaît similaire entre les trois maturités de swaps présentés, voire même meilleur pour les maturités de 91 et 182 jours. De manière analogue, la précision hors échantillon de l'asymétrie du marché est comparable à celle de la variance.

Afin de définir la précision hors échantillon en terme quantitatif, nous produisons également les erreurs de calcul employé précédemment, soit l'RMSE et le RRMSE pour les swaps de variance estimés hors échantillon. Les résultats sont présentés au Tableau 5. Les valeurs confirment nos observations dérivées à la Figure 7. En terme général, l'RMSE se veut comparable et même relativement bien précis pour l'échantillon complet et la majorité des maturités. Tel qu'observé

précédemment, l'année 2017 qui a connu une période de volatilité plus légère s'avère la moins bien estimée par notre modèle. Toutefois, les autres années connaissent des erreurs d'évaluation bien plus faible sur cette nouvelle échantillon grâce notamment à la capacité du modèle à capturer les périodes à plus forte volatilité. Bref, malgré certaines lacunes, la performance du modèle optimal est satisfaisante dans son ensemble pour l'évaluation hors échantillon.

Figure 7 : Comparaison entre le VIX^2 et Skewness implicite du modèle et le VIX^2 et Skewness du marché hors échantillon

La Figure 7 présente le VIX^2 implicite ainsi que le Hellinger Skew simulés à l'aide du modèle estimé avec les rendements et les RNM sur le S&P 500. Les paramètres estimés du modèle d'évaluation sont présentés au Tableau 3. Le VIX^2 implicite est obtenu à l'aide de l'équation (8) et le Hellinger Skew est obtenu à l'aide de l'équation (9). Les valeurs du VIX^2 et du skewness du marché sont établies à partir d'options sur le S&P 500 hors-de-la-monnaie (voir Chapitre 3). La figure présente les VIX^2 et Hellinger Skew swap avec maturité de 30 jours, suivi des maturités de 90 et 182 jours pour le deuxième et troisième panel. Les valeurs sont calculées entre septembre 2015 et décembre 2019. Les valeurs du VIX^2 apparaissent en pourcentage.



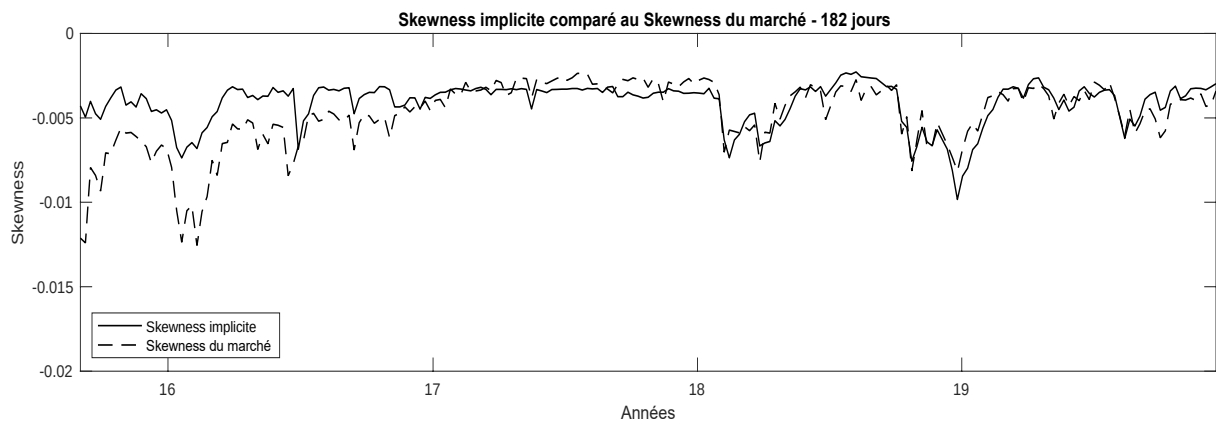
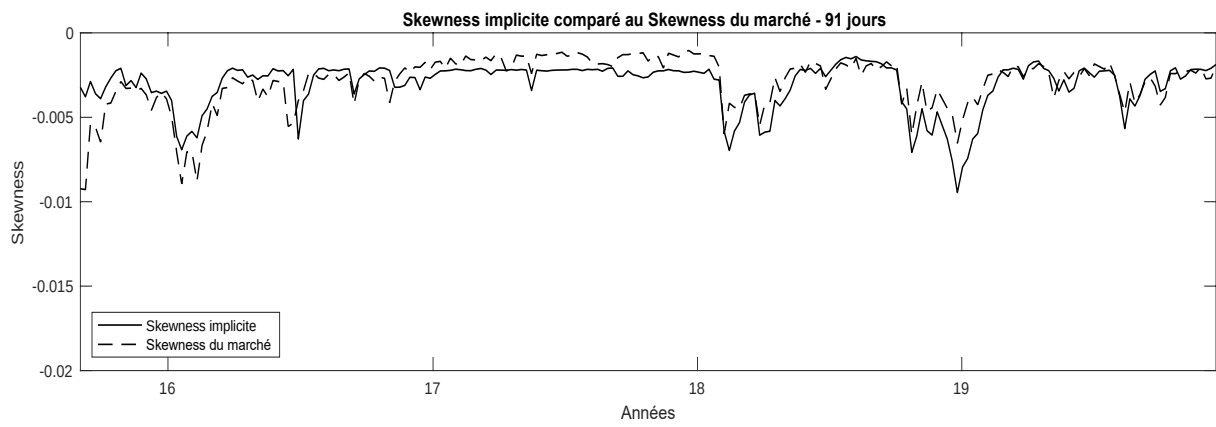
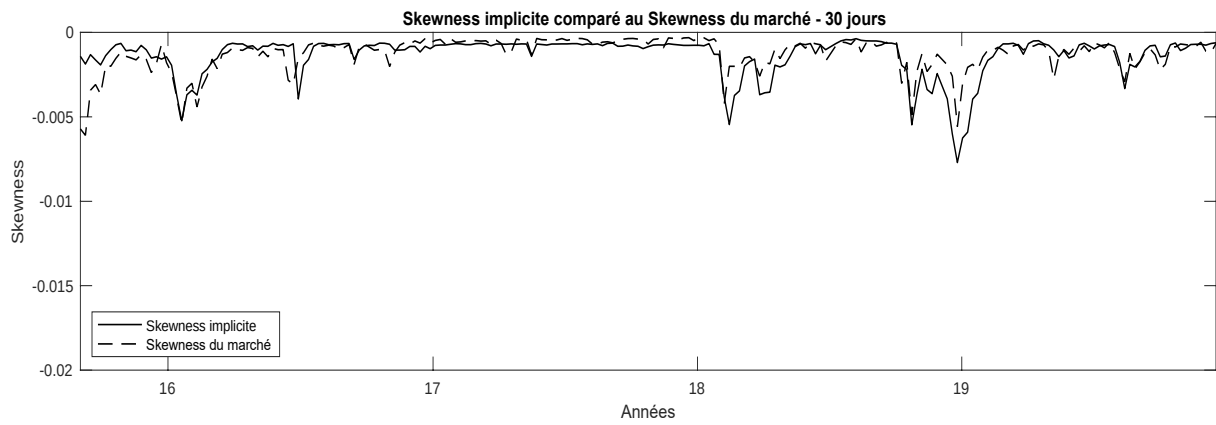


Tableau 5 : Erreurs d'évaluation sur les swaps de variance utilisés pour l'estimation du modèle de marché hors échantillon

Le Tableau 5 présente le calcul de la racine des erreurs moyenne au carré des swaps implicites (« RMSE ») et sa version relative (« RRMSE ») effectuées avec les formules (21a et 21b) sur les swaps de variance (VIX^2) hors échantillon entre septembre 2015 et décembre 2019. Puisque les swaps de variance sont construits sur sept maturités différentes, les résultats sont présentés pour chacune d'entre elles où (« DTM ») signifie « nombre de jours jusqu'à l'échéance ». Les valeurs des RMSE et RRMSE sont données en pourcentage. Les erreurs d'évaluation sont également calculées séparément pour les cinq années de l'échantillon secondaire.

	RMSE	RRMSE
Échantillon complet	2.239	20.396
Trié par maturité		
30 DTM	3.138	32.902
60 DTM	2.582	24.115
91 DTM	2.019	17.484
122 DTM	2.376	20.108
152 DTM	1.851	14.768
182 DTM	1.765	13.864
273 DTM	1.522	11.300
Trié par année		
2015	1.835	10.525
2016	1.596	12.909
2017	2.848	31.119
2018	2.601	21.169
2019	1.798	13.539

4.3.3 Évaluation d'options hors échantillon

En plus du calcul des moments risque-neutre hors échantillon, nous présentons finalement les erreurs d'évaluation des prix d'options standardisées utilisées lors de la construction des swaps entre septembre 2015 et décembre 2019. Nous utilisons la formule d'évaluation (7) pour calculer, à l'aide des paramètres de notre modèle optimal, les primes des options sur l'échantillon secondaire. Puis, nous utilisons la formule de Black-Scholes afin d'obtenir les volatilités implicites des options selon la prime calculée. Le Tableau 6 expose les erreurs d'évaluation par maturité, années et degré de moneyness, ici représenté par le delta des options.

De manière générale, nous pouvons observer des similitudes entre les résultats obtenus avec les moments risque-neutre sur cette même période. Les années 2015, 2016 et 2019 connaissent une meilleure précision d'évaluation où les marchés ont connu des périodes plus turbulentes

comparativement aux années 2017 et 2018 qui produisent des écarts de primes plus élevées. En sommes, puisque la volatilité implicite du modèle se veut plus élevée hors échantillon, tel qu'observé à la Figure 7, les primes des options calculées sont également plus grandes. Le modèle surestime donc les primes d'options principalement durant les années où les conditions de marché sont plus stables.

Tableau 6 : Erreurs d'évaluation des volatilités implicites des options hors échantillon

Le Tableau 6 présente le calcul de la racine des erreurs moyenne au carré (« RMSE ») et sa version relative (« RRMSE ») effectuées avec les formules (21a et 21b) sur les volatilités implicites des options standardisées utilisés pour le calcul des swaps hors échantillon entre septembre 2015 et décembre 2019. Les résultats sont présentés pour chacune des maturités disponibles où (« DTM ») signifie « nombre de jours jusqu'à l'échéance ». Les erreurs d'évaluation sont également calculées séparément pour les cinq années de l'échantillon secondaire et sont triées par la valeur absolue du Delta des options. Les valeurs des RMSE et RRMSE sont données en pourcentage.

	RMSE	RRMSE
Échantillon complet	3.539	23.459
Trié par maturité		
30 DTM	4.711	32.269
60 DTM	3.868	26.020
91 DTM	3.500	23.676
122 DTM	3.307	21.844
152 DTM	3.170	21.012
182 DTM	2.838	18.558
273 DTM	2.967	16.976
Trié par année		
2015	3.176	23.274
2016	4.308	24.583
2017	4.876	43.336
2018	4.311	31.041
2019	4.053	33.827
Trié par Delta		
10	5.084	40.361
15	4.978	38.339
20	4.736	35.146
25	4.454	31.826
30	4.167	28.707
35	3.882	25.806
40	3.595	23.052
45	3.317	20.507
50	3.045	18.144
55	2.797	16.018
60	2.564	14.086
65	2.360	12.394
70	2.194	10.950
75	2.097	9.847
80	2.132	9.332
85	2.521	10.267
90	3.749	14.135

4.4 Analyse du temps d'estimation du modèle

En terminant, l'utilisation d'une base de données moins volumineuse pour l'estimation des paramètres du modèle renferme un avantage non négligeable. En effet, l'agrégation d'options en moments risque-neutre diminue sensiblement le nombre de données, ce qui facilite l'algorithme d'optimisation lors de la période d'estimation. Le logiciel effectue moins de calcul à chacune des itérations ce qui réduit le temps d'estimation total. Bien que nous ayons profité de cet avantage, le gain de temps dépend de plusieurs facteurs.

D'une part, la puissance de l'appareil est sans équivoque un facteur déterminant afin de profiter pleinement de ce bénéfice d'estimation. Certes, la différence de temps sera plus petite pour un ordinateur n'ayant pas les performances pour estimer un tel modèle. D'autre part, le niveau de précision désiré joue un rôle important. Par exemple, le calcul des RNM s'effectue par une simulation Monte-Carlo où des milliers de chemins de rendements sont simulés. Plus le nombre de chemins est élevé, plus la précision du modèle sera grande. Le coût de cette précision est une augmentation du temps d'estimation. Enfin, l'algorithme d'optimisation utilisé aura également un effet sur le temps d'exécution.

Pour notre modèle implémenté dans le logiciel Matlab, deux algorithmes différents ont été testés. D'un côté, l'algorithme `fmincon` minimise sous contrainte notre modèle non linéaire. Cette technique se veut plus rapide, mais peut parfois connaître certaines difficultés en raison du comportement du gradient numérique de la fonction de log-vraisemblance. Si nous comparons le temps d'exécution de notre technique d'estimation avec celle de BDG (2018) et leur échantillon à base d'options, l'estimation avec cet algorithme peut être réduite de 6 à 12 heures avec notre méthode. De l'autre côté, l'algorithme `fminsearch` a également été utilisé pour estimer les paramètres du modèle. Celui-ci utilise la méthode de recherche du simplexe de Lagarias et al. (1998) Cette technique est moins sujette à connaître des difficultés lors de l'estimation, mais demande plus de temps d'estimation. Selon nos calculs avec cet algorithme, notre modèle maximise la fonction de log-vraisemblance après plus de 24 heures. Avec l'échantillon complet à base d'options de BDG (2018), le temps d'estimations peut facilement dépasser une journée entière. Ces valeurs demeurent des estimations et sont sujettes aux conditions énumérées précédemment.

Chapitre 5. Conclusion

Ce mémoire propose une méthode alternative pour l'estimation des modèles d'évaluation d'options à composante gaussienne et sauts. À l'évidence, la quête de modèles plus sophistiqués afin de capturer les moindres variations du marché rend l'estimation des paramètres plus complexe d'un point de vue algébrique et numérique. Notre méthodologie s'articule autour de l'approche de Schneider et Trojani (2015) et Carr et Madan (2001) où nous regroupons les prix d'options hors-de-la-monnaie afin de créer les moments conditionnels de la distribution risque-neutre de l'actif financier sous-jacent. Nous utilisons la structure de la variance et du coefficient d'asymétrie modélisées à partir des options afin d'estimer les paramètres du modèle. Notre technique se veut un substitue à l'usage d'un échantillon d'options exhaustif. L'approche adoptée peut être vue comme une stratégie d'estimation dite de « portefeuille » où la construction des moments risque-neutre est équivalente à bâtir un portefeuille d'options européennes pondéré par liquidité.

Notre modélisation de la variance et l'asymétrie s'effectue aisément à l'aide d'un large éventail d'options sur le S&P 500 entre 1996 et 2015. En regroupant un échantillon volumineux d'options en un sous-ensemble de contrats, nous réduisons drastiquement le nombre d'intrants lors du processus d'optimisation des paramètres. Cette consolidation permet de réduire la complexité du calcul numérique lors de la phase d'estimation et peut ultimement réduire le temps d'exécution de l'estimation. Afin de tester notre méthodologie, nous avons utilisé le modèle à composante gaussienne et sauts introduit par Ornathanalai (2014) et repris par BDG (2018). Notre technique d'estimation à base de moments risque-neutre génère une estimation des paramètres très similaires à celle obtenue dans la littérature. La variance et l'asymétrie conditionnelle implicite du modèle se calquent avec précision sur les valeurs observées sur les marchés. De plus, les erreurs d'évaluation de notre modèle sont comparables à celles obtenues par le modèle estimé à base d'options de BDG (2018). De même, les rendements estimés du modèle s'ajustent précisément avec la série de rendements observés sur les marchés boursiers lors de notre période d'estimation. Notre calcul des swaps de variance hors échantillon permet également d'aligner convenablement les valeurs estimées avec celles observées. À cet effet, les erreurs d'évaluation sont généralement faibles pour les cinq années testées hors échantillon. Bref, la technique d'estimation proposée se veut une alternative satisfaisante, qui demeure simple à mettre en place et qui génère des résultats équivalents à ceux dérivés par un large échantillon d'options.

Bien que notre méthodologie procure des résultats comparables à la littérature financière, celle-ci n'est pas sans reproche. Tel que mentionné, le coefficient d'aplatissement de la distribution de notre modèle s'avère plus faible que celui dérivé par BDG (2018). Afin de capturer cette composante et d'améliorer la précision générale du modèle, la modélisation du coefficient d'aplatissement se voit une solution envisageable. La création de contrats de kurtosis pourrait ainsi joindre le deuxième et troisième moment risque-neutre lors de l'estimation des paramètres du modèle. Cet ajout ainsi que l'essai de cette méthodologie sur différents modèles d'évaluation d'options plus sophistiqué et sur des actions d'entreprises individuelles offrent plusieurs possibilités de recherche future.

Bibliographie

Aït-Sahalia, Y., & A. Lo. (1998). Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices. *Journal of Finance* 53:499–547.

Andersen, T., Fusari, N. & Todorov, V. (2015a). Parametric inference and dynamic state recovery from option panels. *Econometrica*, 83(3), 1081{1145. (2015b). The risk premia embedded in index options. *Journal of Financial Economics*, 117(3), 558{584.

Andersen, T., T. Bollerslev, P. Christoffersen, & F. Diebold (2006). Volatility Forecasting, in: G. Elliott, C. Granger and A. Timmermann (eds), *Handbook of Economic Forecasting*, Vol. I, Elsevier, Amsterdam.

Bakshi, G. & Madan, D. (2000). Spanning and derivative security valuation. *Journal of Financial Economics*, 55(2), 205238.

Bakshi, G., Cao, C., & Chen, Z. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models. *The Journal of Finance*, 52(5), 2003-2049. doi:10.1111/j.1540-6261.1997.tb02749.x.

Bakshi, G., Kapadia, N. & Madan, D. (2003). Stock return characteristics, skew laws and the differential pricing of individual equity options. *Review of Financial Studies*, 16(1), 101143.

Bakshi, G., Madan D., & Panayotov, G. (2010). Returns of Claims on the Upside and the Viability of U-Shaped Pricing Kernels. *Journal of Financial Economics* 97:130–154.

Barndorff-Nielsen, O.E. (1998). Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance and Stochastic* 2, 41-68.

BATES, D. S. (1991). The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets. *The Journal of Finance*, 46: 1009-1044. doi:10.1111/j.1540-6261.1991.tb03775.x

Bates, D. S. (1996). Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *The Review of Financial Studies*, 9(1), 69-107. doi:10.1093/rfs/9.1.69.

Bates, D. S. (2000). Post-'87 crash fears in the S&P 500 futures option market. *Journal of Econometrics*, Elsevier, vol. 94(1-2), pages 181-238.

Bates, D. S. (2006). Maximum likelihood estimation of latent affine processes. *The Review of Financial Studies*, 19(3), 909-965. doi:10.1093/rfs/hhj022.

Bates, D. S. (2012). U.S. stock market crash risk, 1926-2006. *Journal of Financial Economics* 105, 229-259.

Bégin, J-F., Dorion, C. & Gauthier, G. (2018). Idiosyncratic Jump Risk Matters: Evidence from Equity Returns and Options. *The Review of Financial Studies* 2020, 33 (1), 155–211 DOI: 10.1093/rfs/hhz043.

Black, B. (1976). Studies of Stock Price Volatility Changes. *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics*, 177–181.

Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654. doi:10.1086/260062.

Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*. 31:307-327.

Bollerslev, T. & Todorov, V. (2011). Tails, Fears, and Risk Premia. *Journal of Finance* 66:2165–2211.

Brennan, M.J. (1979). The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models. *The Journal of Finance*, 34: 53-68. doi:10.1111/j.1540-6261.1979.tb02070.x.

Britten-Jones, M., & A. Neuberger. (2000). Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility. *Journal of Finance*, 55, 839-866.

Carr P. & D. Madan (2001) Optimal positioning in derivative securities. *Quantitative Finance Volume 1* (2001) 19–37 1:1, 19-37, DOI: 10.1080/713665549.

Carr, P. & Lee, R. (2009a). Put-call symmetry: Extensions and applications. *Mathematical Finance*, 19(4):523{560.

Carr, P. & Madan, D. (2001). Towards a theory of volatility trading. In Jouini, E., Cvitanic, J., and Musiela, M., editors, Option Pricing, Interest Rates and Risk Management, *Handbooks in Mathematical Finance*, pages 458{476. Cambridge University Press.

Carr, P. & Wu, L. (2003). What Type of Process Underlies Options? A Simple Robust Test. *The Journal of Finance*, 58: 2581-2610. doi:10.1046/j.1540-6261.2003.00616.x.

Carr, P., Ellis, K., & Gupta, V. (1998). Static hedging of exotic options. *Journal of Finance*, 53:1165{1190.

Carr, P., Geman, H., Madan, D. & Yor, M. (2002). The term structure of asset returns: an empirical investigation. *Journal of Business* 75, 305-332.

CBOE (2009). The CBOE volatility index - VIX. CBOE.

Christoffersen, P., C. Dorion, K. Jacobs, & L. Karoui. (2014). Nonlinear Kalman Filtering in Affine Term Structure Models. *Management Science*, 60, 2248-2268.

Christoffersen, P., Dorion, C., Jacobs, K., & Wang, Y. (2010). Volatility components, affine restrictions, and nonnormal innovations. *Journal of Business & Economic Statistics*, 28(4), 483-502. doi:10.1198/jbes.2009.06122.

Christoffersen, P., Elkamhi R., Feunou B. & Jacobs K. (2010). Option Valuation with Conditional Heteroskedasticity and Nonnormality. *Review of Financial Studies* 23:2139–2183.

Christoffersen, P., Heston, S., & Jacobs, K. (2009). The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well. *Management Science*, 55(12), 1914-1932. doi:10.1287/mnsc.1090.1065.

Christoffersen, P., Jacobs K. & Ornathanalai C. (2012). Dynamic Jump Intensities and Risk Premiums: Evidence from S&P 500 Returns and Options. *Journal of Financial Economics* 106:447–472.

Christoffersen, P., Jacobs, K. & Ornathanalai, C. (2013) GARCH Option Valuation: Theory and Evidence. *The Journal of Derivatives* doi.org/10.3905/jod.2013.21.2.008.

Christoffersen, P., Jacobs, K., & Ornathanalai, C. (2013). GARCH option valuation: Theory and evidence. *Journal of Derivatives*, 21(2), 8-41. doi:10.3905/jod.2013.21.2.008.

Diebold, F.X., Gunther, T. & Tay, A. (1998). Evaluating Density Forecasts, with Applications to Financial Risk Management. *International Economic Review*, 39, 863-883.

Duan, J.-C. and Yeh, C.-Y. (2010). Jump and volatility risk premiums implied by VIX, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34, issue 11, p. 2232-2244.

Duan, J.-C. (1995). THE GARCH OPTION PRICING MODEL. *Mathematical Finance*, 5: 13-32. doi:10.1111/j.1467-9965.1995.tb00099.x.

Dumas, B., J. Fleming, & R. E. Whaley. (1998). Implied Volatility Functions: Empirical Tests. *Journal of Finance* 53:2059–2106.

Durham, G., Geweke J. & Ghosh P. (2015). A comment on Christoffersen, Jacobs, and Ornathanalai (2012). Dynamic jump intensities and risk premiums: Evidence from S&P 500 returns and options. *Journal of Financial Economics* 115:210–214.

Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1007. doi:10.2307/1912773.

Feller, W. (1971). An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 2, J. Willey and Sons, New York, 766.

Feunou, B., & Okou, C. (2018). Risk-neutral moment-based estimation of affine option pricing models. *Journal of Applied Econometrics*, 33(7), 1007-1025. doi:10.1002/jae.2630.

Gordon, N. J., Salmond D. J. & A. F. Smith. (1993). Novel Approach to Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian State Estimation. IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing) 140:107–113.

Gultekin, B., Rogalski, R., & Tinic, S. (1982), Option Pricing Model Estimates: Some Empirical Results. *Financial Management*, 11, pp. 58-69.

Heston, S. & Nandi, S. (2000). A Closed-Form Garch Option Valuation Model. *Review of Financial Studies* 13 (3): 585–85.

Huang, J.-Z. & Wu, L. (2004). Specification analysis of option pricing models based on time-changed Lévy processes. *Journal of Finance* 59, 14051439.

Itakura, F. & Saito, S. (1968). Analysis synthesis telephony based on the maximum likelihood method. In Proceedings of the 6th International Congress on Acoustics, volume 17, pages C17{C20.

Jiang G. J. & Tian Y. S. (2005). The Model-Free Implied Volatility and Its Information Content, The Review of Financial Studies, Volume 18, Issue 4, Pages 1305–1342. *Journal of Finance* 53, 2059-2106.

Julier, S. J. (2000). The Spherical Simplex Unscented Transformation. Proceedings of the IEEE American Control Conference.

Kaeck, A. & Alexander, C. (2012). Volatility dynamics for the S&P 500: Further evidence from non-affine, multi-factor jump diffusions. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, vol. 36(11), pages 3110-3121.

Kendall, M.G. & Stuart, A. (1977). The Advanced Theory of Statistics. Macmillan, New York, Vol. 1, 168.

Kraus, A., & R. H. Litzenberger. (1976). Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets. *Journal of Finance* 31:1085–1100.

Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H. & Wright, P. E. (1998). Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*. Vol. 9, Number 1, 1998, pp. 112–147.

Li, H., Wells, M. & Yu, C. (2008). A Bayesian analysis of return dynamics with Lévy jumps. *The Review of Financial Studies* Vol. 21, No. 5.

Macbeth, J. D., & Merville, L. J. (1979). An empirical examination of the black-scholes call option pricing model. *The Journal of Finance*, 34(5), 1173-1186. doi:10.1111/j.1540-6261.1979.tb00063.x.

Malik, S. & Pitt, M.K. (2011). Particle filters for continuous likelihood evaluation and maximisation. *Journal of Econometrics*, 165, (2), 190-209.

Martin, I. (2017). What is the Expected Return on the Market? *Quarterly Journal of Economics* 132:367–433.

Merton, R. (1976). Option Prices When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*. 3. 125-144. 10.1016/0304-405X(76)90022-2.

Mixon, Scott. (2011). What Does Implied Volatility Skew Measure? *Journal of Derivatives*; 18, 4.

Nandi, S. (1998). How Important Is the Correlation between Returns and Volatility in a Stochastic Volatility Model? Empirical Evidence from Pricing and Hedging in the S&p 500 Index Options Market. *Journal of Banking & Finance* 22 (5): 589–610.

Neuberger, A. (1994). The log contract. *Journal of Portfolio Management*, 20(2):74{80.

Orlowski, P. (à être publié). Informative option portfolios in filter design for option pricing models. *Quantitative Finance*.

Ornthanalai, C. (2013). Lévy Jump Risk: Evidence from Options and Returns. EFA 2009 Bergen Meetings, *Journal of Financial Economics*, Forthcoming.

Ornthanalai, C. (2014). Lévy Jump Risk: Evidence from Options and Returns. *Journal of Financial Economics* 112:69–90.

Renault, E. & Touzi, N. (1996). Option Hedging And Implied Volatilities In A Stochastic Volatility Model, *Mathematical Finance*, 6, issue 3, p. 279-302. *Review of Financial Studies* 21, 2345-2378.

Rubinstein, M. (1975). The Strong Case for the Generalized Logarithmic Utility Model of Financial Markets. *Journal of Finance* 31:551–571.

Rubinstein, M. (1976). The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options. *Journal of Economics*, 7, (2), 407-425.

Rubinstein, M. (1985). Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from august 23, 1976 through august 31, 1978. *The Journal of Finance*, 40(2), 455-480. doi:10.1111/j.1540-6261.1985.tb04967.x

Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *The Journal of Finance*, 49(3), 771-818. doi:10.1111/j.1540-6261.1994.tb00079.x.

Schneider, P. G. & Trojani, F. (2015) Fear Trading. *Swiss Finance Institute Research Paper*, No. 15-03.

Schneider, P. G. and Trojani, F. (2015). Divergence and the Price of Uncertainty. *Swiss Finance Institute Research Paper*, No. 15-60.

Sheikh, Aamir M. (1991). Transaction Data Tests of S&P 100 Call Option Pricing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26, issue 4, p. 459-475.

Tulsyan, A., Gopaluni, B. & Khare, S. (2016). Particle filtering without tears: A primer for beginners. *Computers & Chemical Engineering*. 95. 10.1016/j.compchemeng.2016.08.015.

Whaley, Robert E. (1982). Valuation of American call options on dividend-paying stocks : Empirical tests. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, vol. 10(1), pages 29-58, March.

Index analytique

Les Annexes 1 à 6 proviennent des Annexes de BDG (2018) où nous avons apporté des modifications pour tenir uniquement compte de l'indice du marché.

Annexe 1 : Composante de correction de la convexité

La correction de convexité introduite à l'équation 1, $\xi_{M,t}^{\mathbb{P}} = \xi_{z_{M,t}}^{\mathbb{P}}(1) + \xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{P}}(1)$, est basé sur la fonction génératrice de z_M et y_M .

Du côté de la composante gaussienne, pour tout $z_{M,t} \in \{z_{M,t} : S \in \mathbb{S}\}$, la fonction génératrice conditionnelle de $z_{M,t}$ satisfait :

$$\xi_{z_{M,t}}^{\mathbb{P}}(\phi) = \log E_{t-1}^{\mathbb{P}}[\exp(\phi z_{M,t})] = \frac{\phi^2}{2} h_{M,z,t}$$

De son côté, la fonction génératrice conditionnelle de la composante de sauts $y_{M,t} \in \{y_{M,t} : S \in \mathbb{S}\}$ est la suivante :

$$\xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{P}}(\phi) = \log E_{t-1}^{\mathbb{P}}[\exp(\phi y_{M,t})] = \Pi_M(\phi) h_{M,y,t}$$

et où

$$\Pi_M(\phi) = \sqrt{\alpha_M^2 - \delta_M^2} - \sqrt{\alpha_M^2 - (\delta_M + \phi)^2}$$

Il est également possible de trouver les fonctions génératrices des innovations risque-neutre.

Lemme 1. Pour tout $\varepsilon_{M,t} \in \{\varepsilon_{M,t} : S \in \mathbb{S}\}$, la fonction génératrice conditionnelle de $\varepsilon_{M,t}$ sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ est :

$$\xi_{\varepsilon_{M,t}}^{\mathbb{Q}}(\phi) = \log E_{t-1}^{\mathbb{Q}}[\exp(\phi \varepsilon_{M,t})] = \frac{\phi^2}{2} - \Lambda_M \sqrt{h_{M,z,t}} \phi$$

Ceci correspond à la fonction génératrice d'une variable aléatoire gaussienne d'espérance $-\Lambda_M \sqrt{h_{M,z,t}}$ et de variance 1. Afin d'obtenir une séquence risque-neutre d'innovations normal standard, il faut poser :

$$\varepsilon_{M,t}^* = \varepsilon_{M,t} + \Lambda_M \sqrt{h_{M,z,t}} \quad (\text{A.1})$$

Lemme 2. Pour tout $y_{M,t} \in \{y_{M,t} : S \in \mathbb{S}\}$, la fonction génératrice conditionnelle de $y_{M,t}$ sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ est :

$$\xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{Q}}(\phi) = \log E_{t-1}^{\mathbb{Q}}[\exp(\phi y_{M,t})] = \Pi_M^*(\phi) h_{M,y,t}^* \quad (\text{A.2})$$

où

$$\Pi_M^*(\phi) = \sqrt{\alpha_M^2 - (\delta_M - \Gamma_M)^2} - \sqrt{\alpha_M^2 - (\delta_M - \Gamma_M + \phi)^2}$$

La composante de sauts risque-neutre demeure une variable aléatoire normale-inverse gaussienne (NIG) sans paramètre de location. Le paramètre relié à l'épaisseur des queues de la distribution $\alpha_M^* = \alpha_M$ n'est pas affecté par le changement de mesure. Le paramètre d'asymétrie devient $\delta_M^* = \delta_M - \Gamma_M$ et le paramètre de mise à l'échelle $h_{M,y,t}^* = h_{M,y,t}$.

Lemme 3. La liaison (communément appelé « mapping ») entre λ_M et γ_M et leur contrepartie pour l'évaluation kernel, soit Λ_M et Γ_M sont les suivants :

$$\lambda_M = \Lambda_M \text{ et } \gamma_M = \Pi_M(1) - \Pi_M^*(1).$$

Preuve du lemme 1

La fonction génératrice conditionnelle de $\varepsilon_{M,t}$ sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ est :

$$\begin{aligned} \xi_{\varepsilon_{M,t}}^{\mathbb{Q}}(\phi) &= \log E_{t-1}^{\mathbb{Q}}[\exp(\phi \varepsilon_{M,t})] \\ &= \log E_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\exp(-\Lambda_M z_{M,t} - \Gamma_M y_{M,t})}{E_{t-1}^{\mathbb{P}}[\exp(-\Lambda_M z_{M,t} - \Gamma_M y_{M,t})]} \exp(\phi \varepsilon_{M,t}) \right] \\ &= \log E_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\exp(-\Lambda_M z_{M,t})}{E_{t-1}^{\mathbb{P}}[\exp(-\Lambda_M z_{M,t})]} \exp(\phi \varepsilon_{M,t}) \right] \\ &= \xi_{\varepsilon_{M,t}}^{\mathbb{P}}(\phi - \Lambda_M \sqrt{h_{M,z,t}}) - \xi_{\varepsilon_{M,t}}^{\mathbb{P}}(-\Lambda_M \sqrt{h_{M,z,t}}) \\ &= \left(\frac{1}{2} (\phi - \Lambda_M \sqrt{h_{M,z,t}})^2 - \frac{1}{2} (-\Lambda_M \sqrt{h_{M,z,t}})^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \phi^2 - \Lambda_M \sqrt{h_{M,z,t}} \phi \right) \end{aligned}$$

Notons que puisque $h_{M,z,t}$ est mesurable à $\mathcal{F}_{t-1}^{\mathbb{S}}$, la fonction génératrice conditionnelle de $z_{M,t}$ sous la mesure $\mathbb{Q}$ peut, en répliquant la procédure ci-dessus, être une variable normale d'espérance $-\Lambda_M h_{M,z,t}$ et variance $h_{M,z,t}$. Cette observation est liée aux résultats de Christoffersen, Elkamhi, Feunou et Jacobs (2010), soit que la variance conditionnelle risque-neutre $\mathcal{F}_{t-1}^{\mathbb{S}}$ de $z_{M,t}$, $h_{M,z,t}^*$ est égale à sa contrepartie physique $h_{M,z,t}$. ■

Preuve du lemme 2

Pour tout $y_{M,t} \in \{y_{M,t} : S \in \mathbb{S}\}$, la fonction génératrice conditionnelle de $y_{M,t}$ sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ est :

$$\begin{aligned} \xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{Q}}(\phi) &= \log E_{t-1}^{\mathbb{Q}}[\exp(\phi y_{M,t})] \\ &= \log E_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\exp(-\Lambda_M z_{M,t} - \Gamma_M y_{M,t})}{E_{t-1}^{\mathbb{P}}[\exp(-\Lambda_M z_{M,t} - \Gamma_M y_{M,t})]} \exp(\phi y_{M,t}) \right] \\ &= \log E_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\exp(-\Gamma_M y_{M,t})}{E_{t-1}^{\mathbb{P}}[\exp(-\Gamma_M y_{M,t})]} \exp(\phi y_{M,t}) \right] \\ &= \xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{P}}(\phi - \Gamma_M) - \xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{P}}(-\Gamma_M) \\ &= \Pi_M(\phi - \Gamma_M) h_{M,y,t} - \Pi_M(-\Gamma_M) h_{M,y,t} \\ &= \left(\sqrt{\alpha_M^2 - (\delta_M - \Gamma_M)^2} - \sqrt{\alpha_M^2 - (\delta_M - \Gamma_M + \phi)^2} \right) h_{M,y,t} \end{aligned}$$

Qui correspond à la fonction génératrice d'une Normale Inverse Gaussienne (NIG) de paramètre $\mu_M^* = \mu_M = 0, \alpha_M^* = \alpha_M, \delta_M^* = \delta_M - \Gamma_M$ et $h_{M,y,t}^* = h_{M,y,t}$. ■

Preuve du lemme 3 : La tendance du marché sous la mesure physique $\mathbb{P}$

Reprenons l'équation du log-rendement du marché

$$\log \frac{M_t}{M_{t-1}} = r_{M,t} = \mu_{M,t}^{\mathbb{P}} - \xi_{M,t}^{\mathbb{P}} + z_{M,t} + y_{M,t}$$

Puisque le prix actualisé de l'actif sous-jacent doit se comporter comme une martingale sous la mesure $\mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned}
1 &= E_{t-1}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\exp(-r_{f,t}) M_t}{M_{t-1}} \right] \\
&= E_{t-1}^{\mathbb{Q}} [\exp(r_{M,t} - r_{f,t})] \\
&= E_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\exp(-\Lambda_M z_{M,t} - \Gamma_M y_{M,t})}{E_{t-1}^{\mathbb{P}} [\exp(-\Lambda_M z_{M,t} - \Gamma_M y_{M,t})]} \exp(r_{M,t} - r_{f,t}) \right] \\
&= E_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\exp(-\Lambda_M z_{M,t} - \Gamma_M y_{M,t})}{E_{t-1}^{\mathbb{P}} [\exp(-\Lambda_M z_{M,t} - \Gamma_M y_{M,t})]} \exp(\mu_{M,t}^{\mathbb{P}} - \xi_{M,t}^{\mathbb{P}} + z_{M,t} + y_{M,t} - r_{f,t}) \right] \\
&= E_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\exp(\mu_{M,t}^{\mathbb{P}} - r_{f,t} - \xi_{M,t}^{\mathbb{P}} + (1 - \Lambda_M) z_{M,t} + (1 - \Gamma_M) y_{M,t})}{E_{t-1}^{\mathbb{P}} [\exp(-\Lambda_M z_{M,t} - \Gamma_M y_{M,t})]} \right] \\
&= \exp \left(\begin{aligned} &\mu_{M,t}^{\mathbb{P}} - r_{f,t} - \xi_{z_{M,t}}^{\mathbb{P}}(1) - \xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{P}}(1) + \\ &\xi_{z_{M,t}}^{\mathbb{P}}(1 - \Lambda_M) + \xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{P}}(1 - \Gamma_M) - \xi_{z_{M,t}}^{\mathbb{P}}(-\Lambda_M) - \xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{P}}(-\Gamma_M) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

Considérant l'équation suivante :

$$-\xi_{z_{M,t}}^{\mathbb{P}}(1) + \xi_{z_{M,t}}^{\mathbb{P}}(1 - \Lambda_M) - \xi_{z_{M,t}}^{\mathbb{P}}(-\Lambda_M) = -\frac{1}{2} h_{M,z,t} + \frac{1}{2} h_{M,z,t} (1 - \Lambda_M)^2 - \frac{1}{2} h_{M,z,t} \Lambda_M^2 = -\Lambda_M h_{M,z,t}$$

Et l'équation suivante :

$$-\xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{P}}(1) + \xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{P}}(1 - \Gamma_M) - \xi_{y_{M,t}}^{\mathbb{P}}(-\Gamma_M) = -h_{M,y,t} \gamma_M$$

où

$$\begin{aligned}
\gamma_M &= \sqrt{\alpha_M^2 - \delta_M^2} - \sqrt{\alpha_M^2 - (\delta_M + 1)^2} + \sqrt{\alpha_M^2 - (\delta_M + 1 - \Gamma_M)^2} - \sqrt{\alpha_M^2 - (\delta_M - \Gamma_M)^2} \\
&= \Pi_M(1) - \Pi_M^*(1)
\end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que

$$1 = \exp(\mu_{M,t}^{\mathbb{P}} - r_{f,t} - \Lambda_M h_{M,z,t} - h_{M,y,t} \gamma_M)$$

Par conséquent, nous pouvons isoler la tendance du marché sous la mesure physique $\mathbb{P}$

$$\mu_{M,t}^{\mathbb{P}} = r_{f,t} + \Lambda_M h_{M,z,t} + h_{M,y,t} \gamma_M \quad \blacksquare$$

Annexe 2 : Moments conditionnels du rendement du marché

La fonction génératrice des moments conditionnels de $az_{M,t+1} + by_{M,t+1}$ est la suivante :

$$\begin{aligned} & E_t^{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\phi (az_{M,t+1} + by_{M,t+1}) \right) \right] \\ &= E_t^{\mathbb{P}} [\exp(\phi az_{M,t+1})] E_t^{\mathbb{P}} [\exp(\phi by_{M,t+1})] \\ &= \exp \left(\frac{a^2 \phi^2}{2} h_{M,z,t} + \Pi_M(b\phi) h_{M,y,t} \right) \end{aligned}$$

où

$$\Pi_M(\phi) = \sqrt{\alpha_M^2 - \delta_M^2} - \sqrt{\alpha_M^2 - (\delta_M + \phi)^2}.$$

Notons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_M}{\partial \phi}(\phi) &= \frac{\delta_M + \phi}{\sqrt{\alpha_M^2 - (\delta_M + \phi)^2}}, & \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial \phi^2}(\phi) &= \frac{\alpha_M^2}{(\alpha_M^2 - (\delta_M + \phi)^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial^3 \Pi_M}{\partial \phi^3}(\phi) &= 3 \frac{\alpha_M^2 (\delta_M + \phi)}{(\alpha_M^2 - (\delta_M + \phi)^2)^{5/2}}, & \frac{\partial^4 \Pi_M}{\partial \phi^4}(\phi) &= 3 \alpha_M^2 \frac{\alpha_M^2 + 4(\delta_M + \phi)^2}{(\alpha_M^2 - (\delta_M + \phi)^2)^{7/2}}. \end{aligned}$$

La fonction génératrice de cumulants (« cumulant generating function ») est alors donnée par :

$$\xi(\phi; a, b) = \frac{a^2 \phi^2}{2} h_{M,z,t} + \Pi_M(b\phi) h_{M,y,t}$$

À des fins de clarification, notons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \phi}(\phi; a, b) &= a^2 \phi h_{M,z,t} + b \frac{\partial \Pi_M}{\partial \phi}(b\phi) h_{M,y,t} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2}(\phi; a, b) &= a^2 h_{M,z,t} + b^2 \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial \phi^2}(b\phi) h_{M,y,t} \\ \frac{\partial^3 \xi}{\partial \phi^3}(\phi; a, b) &= b^3 \frac{\partial^3 \Pi_M}{\partial \phi^3}(b\phi) h_{M,y,t} \\ \frac{\partial^4 \xi}{\partial \phi^4}(\phi; a, b) &= b^4 \frac{\partial^4 \Pi_M}{\partial \phi^4}(b\phi) h_{M,y,t} \end{aligned}$$

À l'aide des équations précédentes, nous pouvons dériver les différents moments du rendement du marché. Le premier moment est donné par :

$$E_t^{\mathbb{P}}[r_{M,t+1}] = \mu_{M,t+1}^{\mathbb{P}} - \xi_{M,t+1}^{\mathbb{P}} + \frac{\partial \xi}{\partial \phi}(0; 1, 1)$$

Le deuxième moment, la variance, est donnée par :

$$Var_t^{\mathbb{P}}[r_{M,t+1}] = Var_t^{\mathbb{P}}[z_{M,t+1} + y_{M,t+1}] = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2}(0; 1, 1)$$

Le troisième moment relié au coefficient d'asymétrie est donné par :

$$Skew_t^{\mathbb{P}}[r_{M,t+1}] = \frac{\frac{\partial^3 \xi}{\partial \phi^3}(0; 1, 1)}{\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2}(0; 1, 1)\right)^{3/2}}$$

Enfin, le quatrième moment, le coefficient d'aplatissement en excès est donné par :

$$E_t^{\mathbb{P}} \left[\left(\frac{r_{M,t+1} - E_t^{\mathbb{P}}[r_{M,t+1}]}{\sqrt{Var_t^{\mathbb{P}}[r_{M,t+1}]}} \right)^4 \right] - 3 = \frac{\frac{\partial^4 \xi}{\partial \phi^4}(0; 1, 1)}{\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2}(0; 1, 1)\right)^2}$$

Annexe 3 : Variance conditionnelle et intensité du saut risque-neutre

Lemme 4. Soit le vecteur de paramètres risque-neutre suivant :

$$\eta_t^* = \left[1 \quad h_{M,z,t}^* \quad h_{M,y,t}^* \quad (\varepsilon_{M,t}^*)^2 \quad \sqrt{h_{M,z,t}^*} \varepsilon_{M,t}^* \right]'$$

Alors, pour tout $v \in \{z, y\}$,

$$h_{M,v,t+1}^* = \pi_{M,v} \eta_t^* \quad (\text{A.3})$$

Où $\pi_{M,v}$ est un vecteur 1×5 comprenant les éléments suivants :

$$\begin{aligned} \pi_{M,z,1} &= w_{M,z} \\ \pi_{M,z,2} &= b_{M,z} + a_{M,z}(c_{M,z} + \Lambda_M)^2 \\ \pi_{M,z,3} &= 0 \\ \pi_{M,z,4} &= a_{M,z} \\ \pi_{M,z,5} &= -2a_{M,z}(c_{M,z} + \Lambda_M) \\ \pi_{M,y,1} &= w_{M,y} \\ \pi_{M,y,2} &= a_{M,y}(c_{M,y} + \Lambda_M)^2 \\ \pi_{M,y,3} &= b_{M,y} \\ \pi_{M,y,4} &= a_{M,y} \\ \pi_{M,y,5} &= -2a_{M,y}(c_{M,y} + \Lambda_M) \end{aligned}$$

Preuve du lemme 4 :

Les équations risque-neutre pour la variance conditionnelle $h_{M,z,t+1}^*$ et pour l'intensité du saut $h_{M,y,t+1}^*$ pour le marché sont obtenus en remplaçant (A.3) dans les équations (2) et (3).

Pour la variance conditionnelle du marché, le remplacement de (A.3) dans (2) donne :

$$\begin{aligned} h_{M,z,t+1} &= w_{M,z} + b_{M,z}h_{M,z,t} + a_{M,z}(\varepsilon_{M,t} - c_{M,z}\sqrt{h_{M,z,t}})^2 \\ &= w_{M,z} + b_{M,z}h_{M,z,t} + a_{M,z}((\varepsilon_{M,t}^* - \Lambda_M\sqrt{h_{M,z,t}}) - c_{M,z}\sqrt{h_{M,z,t}})^2 \\ &= w_{M,z} + b_{M,z}h_{M,z,t} + a_{M,z}(\varepsilon_{M,t}^* - (c_{M,z} + \Lambda_M)\sqrt{h_{M,z,t}})^2 \\ &= w_{M,z} + b_{M,z}h_{M,z,t} + a_{M,z}\left((\varepsilon_{M,t}^*)^2 - 2(c_{M,z} + \Lambda_M)\sqrt{h_{M,z,t}}\varepsilon_{M,t}^* + (c_{M,z} + \Lambda_M)^2 h_{M,z,t}\right) \\ &= w_{M,z} + \left(b_{M,z} + a_{M,z}(c_{M,z} + \Lambda_M)^2\right)h_{M,z,t} + a_{M,z}(\varepsilon_{M,t}^*)^2 - 2a_{M,z}(c_{M,z} + \Lambda_M)\sqrt{h_{M,z,t}}\varepsilon_{M,t}^*. \end{aligned}$$

Pour l'intensité du saut, le remplacement de (A.3) dans (3) donne :

$$\begin{aligned}
h_{M,y,t} &= w_{M,y} + b_{M,y}h_{M,y,t} + a_{M,y}(\varepsilon_{M,t} - c_{M,y}\sqrt{h_{M,z,t}})^2 \\
&= w_{M,y} + a_{M,y}c_{M,y}^2h_{M,z,t} + b_{M,y}h_{M,y,t} + a_{M,y}(\varepsilon_{M,t}^2 - 2c_{M,y}\sqrt{h_{M,z,t}}\varepsilon_{M,t}) \\
&= \left(w_{M,y} + a_{M,y}c_{M,y}^2h_{M,z,t} + b_{M,y}h_{M,y,t} \right. \\
&\quad \left. + a_{M,y} \left((\varepsilon_{M,t}^* - \Lambda_M\sqrt{h_{M,z,t}})^2 - 2c_{M,y}\sqrt{h_{M,z,t}}(\varepsilon_{M,t}^* - \Lambda_M\sqrt{h_{M,z,t}}) \right) \right) \\
&= w_{M,y} + a_{M,y}(c_{M,y} + \Lambda_M)^2h_{M,z,t}^* + b_{M,y}h_{M,y,t} + a_{M,y} \left((\varepsilon_{M,t}^*)^2 - 2(c_{M,y} + \Lambda_M)\sqrt{h_{M,z,t}}\varepsilon_{M,t}^* \right) \\
&= w_{M,y} + a_{M,y}(c_{M,y} + \Lambda_M)^2h_{M,z,t}^* + b_{M,y}h_{M,y,t}^* + a_{M,y} \left((\varepsilon_{M,t}^*)^2 - 2(c_{M,y} + \Lambda_M)\sqrt{h_{M,z,t}^*}\varepsilon_{M,t}^* \right)
\end{aligned}$$

Annexe 4 : Fonction génératrice des moments pour les rendements excédentaires risque-neutre

Lemme 5. Soit ε une variable aléatoire standard normale. Alors,

$$E[\exp(a\varepsilon^2 + b\varepsilon)] = \exp\left(-\frac{1}{2}\log(1-2a) + \frac{1}{2}\frac{b^2}{(1-2a)}\right)$$

Pour $a < \frac{1}{2}$.

Preuve du lemme 5 :

$$\begin{aligned} E[\exp(a\varepsilon^2 + b\varepsilon)] &= \int \exp(a\varepsilon^2 + b\varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right) d\varepsilon \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(1-2a)}{2}\left(\varepsilon^2 - \frac{2b}{1-2a}\varepsilon\right)\right) d\varepsilon \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\frac{b^2}{(1-2a)}\right) \sqrt{\frac{1}{1-2a}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-2a}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(\varepsilon - \frac{b}{1-2a}\right)^2}{\frac{1}{1-2a}}\right) d\varepsilon \end{aligned}$$

Si $1-2a > 0$, l'intégrale égale 1 puisqu'elle correspond à l'aire sous la fonction de densité de la $\mathcal{N}\left(\frac{b}{1-2a}, \frac{1}{1-2a}\right)$. Alors,

$$E[\exp(a\varepsilon^2 + b\varepsilon)] = \exp\left(\log\sqrt{\frac{1}{1-2a}} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{(1-2a)}\right).$$

Lemme 6. La fonction génératrice des moments des rendements excédentaires satisfait l'équation suivante :

$$\varphi_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi) = \exp(\mathcal{A}_{M,T-t}(\phi) + \mathcal{B}_{M,T-t}(\phi)h_{M,Z,t+1}^* + \mathcal{C}_{M,T-t}(\phi)h_{M,Y,t+1}^*)$$

où les coefficients sont déduits par récursion inverse à travers le temps. En effet, $\varphi_{M,0}^{\mathbb{Q}}(\phi) = 1$ implique

$$\mathcal{A}_{M,0}(\phi) = \mathcal{B}_{M,0}(\phi) = \mathcal{C}_{M,0}(\phi) = 0$$

Pour $i \in \{0,1,2, \dots, 5\}$, définissons

$$\zeta_{M,T-t,i}(\phi) = \mathcal{B}_{M,T-t}(\phi)\pi_{M,z,i} + \mathcal{C}_{M,T-t}(\phi)\pi_{M,y,i}$$

où les π sont spécifiés à l'Annexe 3. Nous obtenons les équations suivantes pour les coefficients

$\mathcal{A}_{M,T-t}, \mathcal{B}_{M,T-t}, \mathcal{C}_{M,T-t}$:

$$\mathcal{A}_{M,T-t}(\phi) = \mathcal{A}_{M,T-t-1}(\phi) + \zeta_{M,T-t-1,1}(\phi) - \frac{1}{2} \log \left(1 - 2\zeta_{M,T-t-1,4}(\phi) \right)$$

$$\mathcal{B}_{M,T-t}(\phi) = \zeta_{M,T-t-1,2}(\phi) - \frac{1}{2} \beta_{M,z}^2 \phi + \frac{1}{2} \frac{(\zeta_{M,T-t-1,5}(\phi) + \beta_{M,z} \phi)^2}{1 - 2\zeta_{M,T-t-1,4}(\phi)}$$

$$\mathcal{C}_{M,T-t}(\phi) = \zeta_{M,T-t-1,3}(\phi) - \Pi_M^*(\beta_{M,y})\phi + \Pi_M^*(\beta_{M,y}\phi)$$

où pour notre cas du marché boursier, $\beta_{M,z} = \beta_{M,y} = 1$, soit que le bêta du marché équivaut à 1.

Preuve du lemme 6 : Définissons $\tilde{r}_{M,t+j}$ représentant le rendement excédentaire. Sa dynamique risque-neutre est la suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{M,t+j} &= r_{M,t+j} - r_{f,t+j} \\ &= -\frac{1}{2} B_{M,z}^2 h_{M,z,t+j}^* - \Pi_M^*(\beta_{M,y}) h_{M,y,t+j}^* + \beta_{M,z} z_{M,t+j}^* + \beta_{M,y} y_{M,t+j}^* \end{aligned}$$

où pour notre cas du marché boursier, $\beta_{M,z} = \beta_{M,y} = 1$. La preuve est basée sur une récursion inverse à travers le temps. En effet, la fonction génératrice des moments de $\sum_{j=1}^{T-t} \tilde{r}_{M,t+j}$ étant donné $\mathcal{F}_t^S$ est :

$$\begin{aligned} &\varphi_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi) \\ &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\phi \sum_{j=1}^{T-t} \tilde{r}_{M,t+j} \right) \right] \\ &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp(\phi \tilde{r}_{M,t+1}) E_{t+1}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\phi \sum_{j=1}^{T-t-1} \tilde{r}_{M,t+1+j} \right) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\phi \left(-\frac{1}{2} B_{M,z}^2 h_{M,z,t+1}^* - \Pi_M^*(\beta_{M,y}) h_{M,y,t+j}^* + \beta_{M,z} z_{M,t+j}^* + \beta_{M,y} y_{M,t+j}^* \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \times \exp(\mathcal{A}_{M,T-t-1}(\phi) + \mathcal{B}_{M,T-t-1}(\phi) h_{M,z,t+2}^* + \mathcal{C}_{M,T-t-1}(\phi) h_{M,y,t+2}^*) \right]
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\varphi_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi)$$

$$\begin{aligned}
&= E_t^{\mathbb{Q}} \left[\begin{aligned} &\exp \left(\phi \left(-\frac{1}{2} B_{M,z}^2 h_{M,z,t+1}^* - \Pi_M^*(\beta_{M,y}) h_{M,y,t+j}^* + \beta_{M,z} z_{M,t+j}^* + \beta_{M,y} y_{M,t+j}^* \right) \right) \\ &\exp \left(\mathcal{A}_{M,T-t-1}(\phi) + \zeta_{M,T-t-1,1}(\phi) + \zeta_{M,T-t-1,2}(\phi) h_{M,z,t+1}^* + \zeta_{M,T-t-1,3}(\phi) h_{M,y,t+1}^* \right. \\ &\quad \left. + \zeta_{M,T-t-1,4}(\phi) (\varepsilon_{M,t+1}^*)^2 + \zeta_{M,T-t-1,5}(\phi) \sqrt{h_{M,z,t+1}} \varepsilon_{M,t+1}^* + \beta_{M,y} \phi y_{M,t+1}^* \right) \end{aligned} \right] \\
&= \exp \left(\mathcal{A}_{M,T-t-1}(\phi) + \zeta_{M,T-t-1,1}(\phi) + \left(\zeta_{M,T-t-1,2}(\phi) - \frac{1}{2} B_{M,z}^2 \phi \right) h_{M,z,t+1}^* \right. \\
&\quad \left. + (\zeta_{M,T-t-1,3}(\phi) - \Pi_M^*(\beta_{M,y}) \phi) h_{M,y,t+1}^* \right) \\
&E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\zeta_{M,T-t-1,4}(\phi) (\varepsilon_{M,t+1}^*)^2 + (\zeta_{M,T-t-1,5}(\phi) + \beta_{M,z} \phi) \sqrt{h_{M,z,t+1}} \varepsilon_{M,t+1}^* + \beta_{M,y} \phi y_{M,t+1}^* \right) \right]
\end{aligned}$$

Puisque la fonction génératrice des moments pour la composante du saut sous la mesure risque-neutre (A.2) donne

$$E_{\mathcal{F}_t^S}^{\mathbb{Q}} [\exp(\beta \phi y_{M,t+1}^*)] = \exp(\Pi_M^*(\beta \phi) h_{M,y+1}^*).$$

Par conséquent,

$$E_{\mathcal{F}_t^S}^{\mathbb{Q}} [\exp(\beta_{M,y} \phi y_{M,t+1}^*)] = \exp(\Pi_M^*(\beta_{M,y} \phi) h_{M,y+1}^*)$$

De plus, le Lemme 5 implique

$$\begin{aligned}
&E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\zeta_{M,T-t-1,4}(\phi) (\varepsilon_{M,t+1}^*)^2 + (\zeta_{M,T-t-1,5}(\phi) + \beta_{M,z} \phi) \sqrt{h_{M,z,t+1}} \varepsilon_{M,t+1}^* \right) \right] \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} \log \left(1 - 2\zeta_{M,T-t-1,4}(\phi) \right) + \frac{1}{2} \frac{(\zeta_{M,T-t-1,5}(\phi) + \beta_{M,z} \phi)^2}{1 - 2\zeta_{M,T-t-1,4}(\phi)} h_{M,z,t+1}^* \right)
\end{aligned}$$

Si $\zeta_{M,T-t-1,4}(\phi) < \frac{1}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi) = & \exp\left(\mathcal{A}_{M,T-t-1,T}(\phi) + \zeta_{M,T-t-1,1}(\phi) + \left(\zeta_{M,T-t-1,2}(\phi) - \frac{1}{2}B_{M,z}^2\phi\right)h_{M,z,t+1}^* \right. \\ & \left. + (\zeta_{M,T-t-1,3}(\phi) - \Pi_M^*(\beta_{M,y})\phi)h_{M,y,t+1}^*\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\log\left(1 - 2\zeta_{M,T-t-1,4}(\phi)\right)\right) \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{(\zeta_{M,T-t-1,5}(\phi) + \beta_{M,z}\phi)^2}{1 - 2\zeta_{M,T-t-1,4}(\phi)} h_{M,z,t+1}^*\right) \exp(\Pi_M^*(\beta_{M,y}\phi)h_{M,y,t+1}^*) \end{aligned}$$

Une comparaison avec

$$\varphi_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi) = \exp(\mathcal{A}_{M,T-t}(\phi) + \mathcal{B}_{M,T-t}(\phi)h_{M,z,t+1}^* + \mathcal{C}_{M,T-t}(\phi)h_{M,y,t+1}^*)$$

Mène à la formulation récursive des coefficients. ■

Annexe 5 : Prix d'une option d'achat de style européen

Suivant la dérivation de la fonction génératrice des moments $\varphi_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi)$ du rendement excédentaire risque-neutre, nous reprenons l'approche de BDG (2018) et Heston et Nandi (2000) afin d'obtenir une solution analytique pour le prix d'options européennes sur l'indice du marché. Dans cette optique, le prix d'une option d'achat européenne est donné par :

$$\begin{aligned} C_t(M_t, K, T) &= e^{-r_{f,t,T}(T-t)} E_t^{\mathbb{Q}}[\max(M_T - K, 0)] \\ &= e^{-r_{f,t,T}(T-t)} (E_t^{\mathbb{Q}}[M_T I\{M_T > K\}] - K E_t^{\mathbb{Q}}[I\{M_T > K\}]) \end{aligned}$$

où $r_{f,t,T} = \frac{1}{T-t} \sum_{j=1}^{T-1} r_{f,t+j}$ duquel $r_{f,t+j}$ est le taux sans risque déterministe au temps $t+j$ et $I\{A\}$ est la fonction indicatrice qui équivaut 1 si l'événement A se réalise ou 0 sinon. Puisque

$$M_T = M_t \exp\left(\sum_{j=1}^{T-1} r_{M,t+j}\right) = M_t \exp(r_{f,t,T}(T-t)) \exp\left(\sum_{j=1}^{T-1} \tilde{r}_{M,t+j}\right),$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_{2,t,T} &= E_t^{\mathbb{Q}}[I\{M_T > K\}] \\ &= \mathbb{Q}\left[M_t e^{r_{f,t,T}(T-t)} \exp\left(\sum_{j=1}^{T-1} \tilde{r}_{M,t+j}\right) > K\right] \\ &= \mathbb{Q}\left[\sum_{j=1}^{T-1} \tilde{r}_{M,t+j} > \log \tilde{K}_{t,T}\right] \\ &= 1 - F_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(\log(\tilde{K}_{t,T})) \end{aligned}$$

où $\tilde{K}_{t,T} = \frac{K e^{-r_{f,t,T}(T-t)}}{M_t}$, et $F_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}$ est la fonction de distribution cumulative associée avec la fonction génératrice des moments $\varphi_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi)$. BDG (2018) font référence aux résultats de Feller (1971) et Kendall et Stuart (1977) pour obtenir la probabilité suivante :

$$P_{2,t,T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\phi i} e^{-i\phi \log \tilde{K}_{t,T}} \varphi_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi i) \right] d\phi$$

De plus,

$$E_t^{\mathbb{Q}}[M_T I\{M_T > K\}] = M_t e^{r_{f,t,T}(T-t)} E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\sum_{j=1}^{T-1} \tilde{r}_{M,t+j} \right) I\{M_T > K\} \right] = M_t e^{r_{f,t,T}(T-t)} P_{1,t,T}$$

où

$$P_{1,t,T} = E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\sum_{j=1}^{T-1} \tilde{r}_{M,t+j} \right) I\{M_T > K\} \right] = \int_{\log(\tilde{K}_{t,T})}^{\infty} \exp(x) f_{\tilde{r}_{t,T}}^{\mathbb{Q}}(x) dx = \int_{\log(\tilde{K}_{t,T})}^{\infty} \tilde{p}(x) dx$$

où $f_{\tilde{r}_{t,T}}^{\mathbb{Q}}(x)$ représente la fonction de densité du rendement excédentaire et la dernière égalité tiens, car $\tilde{p}(x) = \exp(x) f_{\tilde{r}_{t,T}}^{\mathbb{Q}}(x)$. Il faut comprendre que $\tilde{p}$ est une distribution bien définie puisque $\exp(x)$ est toujours positif et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x) p(x) dx = \varphi_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(1) = 1$$

Étant donné que $f_{\tilde{r}_{t,T}}^{\mathbb{Q}}(1)$ est le rendement excédentaire espéré brut sous la mesure risque-neutre, tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(x) dx = E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\sum_{j=1}^{T-1} \tilde{r}_{M,t+j} \right) \right] = E_t^{\mathbb{Q}} [\exp(-r_{f,t,T}(T-t)M_T | M_t)] = 1$$

Suivant les travaux de Heston et Nandi (2000), nous pouvons exprimer la fonction génératrice des moments correspond à $\tilde{p}$ à l'aide de

$$\tilde{\varphi}_{t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\phi x) \tilde{p}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\phi x) \exp(x) \varphi_{\tilde{r},t,T}^{\mathbb{Q}}(x) dx = \varphi_{t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi + 1)$$

Ce qui nous permet d'obtenir la seconde probabilité

$$\begin{aligned} P_{1,t,T} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\phi i} e^{-i\phi \log \tilde{K}_t} \varphi_{t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi i) \right] d\phi \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\phi i} e^{-i\phi \log \tilde{K}_t} \varphi_{t,T}^{\mathbb{Q}}(\phi i + 1) \right] d\phi \end{aligned}$$

$P_{1,t,T}$ et $P_{2,t,T}$ peuvent alors être employé pour l'évaluation des options européennes à l'aide de l'équation suivante :

$$C_t(M_t, K, T) = M_t P_{1,t,T} - K e^{-r_{f,t,T}(T-t)} P_{2,t,T}$$

Annexe 6 : Filtre particulaire

Le filtre particulaire est identique à celui utilisé par BDG (2018) pour leur modèle du marché. Nous conservons l'hypothèse que les investisseurs utilisent la valeur courante du prix idiosyncratique du risque, mais ignorent les variations potentielles futures durant la vie de l'option. Nous assumons ainsi que le risque relié avec les variations futures du prix du risque est fortement dominé par la variance et la variance de la variance du risque. L'approche est similaire à celle de Bakshi, Cao et Chen (1997) pour prendre en compte les variations temporelles des taux d'intérêt pour l'évaluation d'actif écrit sur un sous-jacent peu sensible au taux d'intérêt. Soit qu'au temps t , le taux d'intérêt $r(t, T)$ est utilisé, mais ses variations futures sont négligées. Le processus de filtration est basé sur un chemin de particule de sauts $y_{1:T}^{(i)} = \{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_T^{(i)}\}$, $i \in \{1, \dots, N\}$ et le ré-échantillonnage séquentiel par importance (SIR) de Gordon, Salmon et Smith (1993) est ensuite mise en place. Tout comme BDG (2018), nous utilisons 25 000 particules pour l'ensemble des calculs. Nous décrivons une seule étape du processus SIR.

Nous assumons que N chemins de saut $y_{1:t-1}^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ sont disponible jusqu'au temps $t - 1$.

1. Par conséquent, nous pouvons retrouver la variance conditionnelle $h_{z,t}^{(i)}$ et la composante de sauts $h_{y,t}^{(i)}$

1. Pour $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, le saut au temps t , $y_t^{(i)}$, est simulé à partir de la distribution suivante :

$$f(\cdot | y_{1:t-1}^{(i)}, r_{1:t-1}) = f_{NIG}(\cdot; \alpha, \delta, h_{y,t}^{(i)})$$

où

$$f_{NIG}(x; \alpha, \delta, h) = \frac{\alpha h K_1(\alpha \sqrt{h^2 + x^2})}{\pi \sqrt{h^2 + x^2}} \exp(h \sqrt{\alpha^2 + \delta^2} + \delta x)$$

et où K_1 correspond à :

$$K_1(x) = \int_0^\infty \exp(-x \cosh(t)) \cosh(t) dt$$

2. Pour $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, une mise à jour des poids par importance est effectuée pour exprimer la probabilité de la position de la particule par rapport à l'information r_t au temps t

$$\bar{\omega}_t^{(i)} = f\left(r_t \middle| r_{1:t-1}, y_{1:t}^{(i)}\right)$$

Plus précisément, à l'aide des équations (1) et (6), le rendement du marché satisfait :

$$r_M = r_{f,t} + \left(\lambda_M - \frac{1}{2}\right) h_{M,z,t} + (y_M - \Pi_M(1)) h_{M,y,t}^{(i)} + y_{M,t}^{(i)}$$

Par conséquent, conditionnellement à un chemin simulé $y_{M,1:t}^{(i)}$ et les rendements antérieurs $r_{M,1:t-1}$, le rendement du marché au temps t suit une distribution normale dont l'espérance est :

$$m_{M,t}^{(i)} = r_{f,t} + \left(\lambda_M - \frac{1}{2}\right) h_{M,z,t}^{(i)} + (y_M - \Pi_M(1)) h_{M,y,t}^{(i)} + y_{M,t}^{(i)}$$

Et variance $h_{M,z,t}^{(i)}$ équivalente à :

$$f\left(r_{M,t} \middle| r_{M,1:t-1}, y_{M,1:t}^{(i)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_{M,z,t}^{(i)}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\left(r_{M,t} - m_{M,t}^{(i)}\right)^2}{h_{M,z,t}^{(i)}}\right\}$$

3. Pour $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, nous calculons les poids normalisés des particules :

$$\omega_t^{(i)} = \frac{\bar{\omega}_t^{(i)}}{\sum_{k=1}^N \bar{\omega}_t^{(k)}}$$

4. Pour $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, nous procédons à la mise à jour de la variance conditionnelle et de la composante de sauts basé sur les équations (2) et (3).

$$h_{M,z,t+1}^{(i)} = w_{M,z} + b_{M,z} h_{M,z,t}^{(i)} + \frac{a_{M,z}}{h_{M,z,t}^{(i)}} \left(z_{M,t}^{(i)} - c_{M,z} h_{M,z,t}^{(i)}\right)^2$$

$$h_{M,y,t+1}^{(i)} = w_{M,y} + b_{M,y} h_{M,y,t}^{(i)} + \frac{a_{M,y}}{h_{M,z,t}^{(i)}} \left(z_{M,t}^{(i)} - c_{M,y} h_{M,z,t}^{(i)}\right)^2$$

où $z_{M,t}^{(i)} = r_{M,t} - m_{M,t}^{(i)}$.

5. Ensuite, à l'aide des poids par importance normalisés, nous calculons les variables filtrées :

$$\begin{aligned}\tilde{z}_{M,t} &= \sum_{i=1}^N z_{M,t}^{(i)} \omega_t^{(i)}, & \tilde{h}_{M,z,t+1} &= \sum_{i=1}^N h_{M,z,t+1}^{(i)} \omega_t^{(i)}, \\ \tilde{y}_{M,t} &= \sum_{i=1}^N y_{M,t}^{(i)} \omega_t^{(i)}, & \tilde{h}_{M,y,t+1} &= \sum_{i=1}^N h_{M,y,t+1}^{(i)} \omega_t^{(i)}.\end{aligned}$$

6. Nous ré-échantillons les particules à l'aide de la technique d'échantillon en continu de Malik et Pitt (2011).

- a. Nous sélectionnons N particules de l'ensemble de particules courantes provenant d'une fonction de densité cumulative empirique lissée tel que proposé par Malik et Pitt (2011). Nous obtenons $\{h_{M,z,t+1}^{(ji)}\}_{i=1}^N$, la variance conditionnelle et $\{h_{M,y,t+1}^{(ji)}\}_{i=1}^N$, la composante d'intensité du saut une fois le ré-échantillonnage accompli.
- b. Nous remplaçons ensuite la valeur courante de la variance conditionnelle et de la composante du saut avec leur valeur ré-échantillonnée :

$$h_{M,z,t+1}^{(i)} \leftarrow h_{M,z,t+1}^{(ji)} \text{ et } h_{M,y,t+1}^{(i)} \leftarrow h_{M,y,t+1}^{(ji)}.$$

7. Le log-vraisemblance est ainsi obtenu par un sous-produit de filtre particulaire. En effet,

$$L_{M,returns}(\Theta_M) = \sum_{t=1}^T \log \left(\sum_{i=1}^N \bar{\omega}_t^{(i)} \right)$$

Annexe 7 : Fonctions Matlab créées pour le modèle de BDG (2018)

```
function [SimulatedRNM1,R] = SimulatedRNM(self,RNM,hf,varargin)
%% Function created by MA to simulate Variance swaps (VIX2) and

%% skewness swaps (Hellinger skew swaps). These are called Risk-
neutral moments (RNM)

%% A Monte Carlo simulation is used to price the swaps. First, log-
returns are simulated under the

%% risk-neutral measure Q. Then, the return path is used to calculate
the RNM

n_paths = 10000; % number of iterations
unique_days = unique(RNM.Date); % number of days in the sample
[hMzQ, hMyQ, hSzQ, hSyQ] = self.cfRiskNeutralVariances(unique_days,
hf); % risk-neutral variance and jump intensity

Maturity = unique(RNM.Maturity); % swap maturities
n_Maturity = length(Maturity);

% Preallocation
R = cell(1,length(unique_days));
SimulatedVS = zeros(length(Maturity),length(unique_days));
SimulatedSkew = zeros(length(Maturity),length(unique_days));

for dt = 1:length(unique_days)
    R{dt} = self.simulatePathsQ(Maturity(end), n_paths, [hMzQ(dt),
hMyQ(dt), hSzQ(dt), hSyQ(dt)]); % simulated log-return path
    Log_Returns = cell2mat(R(dt));

    for t = 1:n_Maturity
        SimulatedVS(t,dt) = (-2./(Maturity(t)./252)).*
mean(sum(Log_Returns(1:Maturity(t),:))); % VIX2
        SimulatedSkew(t,dt) = (-8./(Maturity(t)./252)).*
mean((exp(sum(Log_Returns(1:Maturity(t),:))).^0.5.*sum(Log_R
eturns(1:Maturity(t),:)))); % Hellinger skew swap
    end
end

SimulatedRNM1 = [SimulatedVS;SimulatedSkew]; % Consolidate the swaps
together

end % end Simulated RNM
```

```

function[loglike,SimulatedRNM1,qlen]=logLikelihoodPricing(self,RNM, h)
%% Function created by MA to maximize the log-likelihood of the RNM

unique_days = unique(RNM.Date); % number of days in the sample
Maturity = unique(RNM.Maturity); % swap maturities

% Simulate the RNM with function : SimulatedRNM
SimulatedRNM1 = self.SimulatedRNM(RNM, h);

% Calculate error covariance
RNM_Data_Cov = reshape(RNM.RNM, [(length(Maturity)*2), ...
length(SimulatedRNM1)]); % Rearrange RNM matrix to calculate cov.

Cov_Error = diag(diag(cov(RNM_Data_Cov' - SimulatedRNM1')));

% Preallocation
LL = zeros(1,length(unique_days));

for dt = 1:length(unique_days)
    RNM_Data = RNM.RNM(1+length(unique(Maturity))*2*(dt-
1):length(unique(Maturity))*2*dt);

    % Construct Gaussian quasi log-likelihood for the risk-neutral
    moments
    LL(dt) = -1/2.*(log(((2.*pi).^length(Maturity)*2)).*
det(Cov_Error))+(RNM_Data - SimulatedRNM1(:,dt))'*inv(Cov_Error)*
(RNM_Data - SimulatedRNM1(:,dt)));
end

loglike = sum(LL); % Minimizing the negative of the loglikelihood
qlen = length(RNM.RNM); % number of RNM

end % end logLikelihoodPricing

```

Annexe 8 : Réplication d'un flux monétaire

Le théorème fondamental du calcul intégral implique que pour tout actif fixe F :

$$\begin{aligned} f(F) &= f(F_0) + 1_{F > F_0} \int_{F_0}^F f'(u) du - 1_{F < F_0} \int_F^{F_0} f'(u) du \\ &= f(F_0) + 1_{F > F_0} \int_{F_0}^F [f'(F_0) + \int_{F_0}^u f''(v) dv] du - 1_{F < F_0} \int_F^{F_0} [f'(F_0) + \int_u^{F_0} f''(v) dv] du. \end{aligned}$$

Notons que $f'(F_0)$ ne dépend pas de u et appliquant le théorème de Fubini :

$$f(F) = f(F_0) + f'(F_0)(F - F_0) + 1_{F > F_0} \int_{F_0}^F \int_v^F f''(v) du dv + 1_{F < F_0} \int_F^{F_0} \int_F^v f''(v) du dv.$$

Appliquant l'intégral sur u produit l'équation suivante :

$$\begin{aligned} f(F) &= f(F_0) + f'(F_0)(F - F_0) + 1_{F > F_0} \int_{F_0}^F f''(v)(F - v) dv + 1_{F < F_0} \int_F^{F_0} f''(v)(v - F) dv \\ &= f(F_0) + f'(F_0)(F - F_0) + \int_{F_0}^\infty f''(v)(F - v)^+ dv + \int_0^{F_0} f''(v)(v - F)^+ dv \quad \blacksquare \end{aligned}$$