





HEC MONTRÉAL

**Comparaison de la prime de risque de variance  
selon deux méthodes pour l'indice S&P 500 et les  
composantes de l'indice DJ 30**

Par

**ZAKARIA ILIAS**

**Science de la gestion**

**(Ingénierie financière)**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du

grade de maîtrise ès science(M.Sc.)

Sous la direction de

**Christian Dorion**

4 juin 2020



HEC MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

**Comparaison de la prime de risque de variance  
selon deux méthodes pour l'indice S&P 500 et les  
composantes de l'indice DJ 30**

présenté par :

Zakaria Ilias

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Christian Dorion, directeur de recherche

\_\_\_\_\_, membre du jury

\_\_\_\_\_, membre du jury

\_\_\_\_\_, membre du jury

Mémoire accepté le : \_\_\_\_\_

## Résumé

La volatilité joue un rôle important dans plusieurs sphères de la finance telles que la tarification des produits dérivés et la gestion des risques. Bakshi et Kapadia (2003, a) ont démontré qu'il existe bien une prime de risque de variance pour l'indice S&P 500 et que celle-ci est négative. Ainsi, les investisseurs paient une prime afin de se prémunir contre un mouvement de volatilité dans les marchés. Carr et Wu (2009) introduisent la définition de la prime de risque de variance comme étant l'écart entre l'espérance conditionnelle physique et risque-neutre de la variance réalisée. Il est possible de quantifier cette prime selon deux méthodes.

La première est une méthode non-paramétrique qui calcule la variance réalisée à partir des données à haute fréquence. L'espérance conditionnelle physique de la variance réalisée est obtenue à l'aide d'un processus gamma autorégressif (HARG) utilisé par Corsi, Fusari et La Vecchia (2013) alors que l'espérance conditionnelle risque-neutre est obtenue en appliquant la méthodologie de Bakshi, Kapadia, et Madan (2003) sur les données d'options.

Une autre méthode consiste à modéliser la variance à l'aide d'un modèle financier. Dans notre cas, la prime de risque de variance est calculée à partir du modèle GARCH(1,1) de Christoffersen, Heston et Jacobs (2013). Ce modèle correspond au modèle introduit par Heston et Nandi (2000) combiné à un facteur d'actualisation stochastique qui tient compte d'une prime de risque de variance. De plus, l'estimation des paramètres du modèle est obtenue selon une méthode novatrice basée sur le maximum de vraisemblance conjoint des rendements et de l'indice de volatilité VIX.

L'objectif de ce mémoire est de comparer la prime de risque de variance obtenue selon les deux méthodes de calcul pour l'indice S&P 500 et pour 28 actions faisant partie de l'indice DJ 30.

Notre étude est motivée par le fait qu'il existe peu d'articles qui s'intéressent à la prime de risque de variance des actions. La plupart des études portent sur la prime de risque de variance du marché dans sa globalité obtenue à partir de l'indice S&P 500. De plus, il est rare de trouver une étude qui calcule la prime de risque de variance selon les deux méthodologies. Finalement, les données utilisées par les études portant sur les actions individuelles ne sont pas récentes et couvrent généralement la période de 1996 à 2003. Notre contribution consiste à étudier la prime de risque de variance de l'indice S&P 500 et de 28 actions selon deux méthodologies en plus d'utiliser des données plus récentes qui incluent la crise financière de 2008.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Revue de la littérature</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Méthodologie</b>	<b>13</b>
3.1	Prime de risque de variance sans modèle . . . . .	13
3.1.1	Variance réalisée . . . . .	13
3.1.2	Espérance conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure physique . . . . .	15
3.1.3	Espérance conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure risque-neutre . . . . .	16
3.1.4	Méthodologie de l'indice VIX . . . . .	17
3.2	Prime de risque de variance avec le modèle GARCH-CHJ	18
3.2.1	Spécification du modèle . . . . .	18
3.2.2	Définition de la prime de risque de variance . . . . .	21
3.2.3	Calcul du VIX avec le modèle GARCH-CHJ . . . . .	22
3.3	Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance	23
<b>4</b>	<b>Résultats empiriques</b>	<b>25</b>
4.1	Données . . . . .	25
4.2	Présentation des résultats sans modèle . . . . .	25
4.3	Présentation des résultats obtenus avec le modèle GARCH- CHJ . . . . .	26
4.4	Comparaison des deux approches . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Annexe</b>	<b>32</b>
<b>7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>46</b>

## Table des figures

1	Composantes de la prime de risque de variance de l'indice S&P 500 . . . . .	33
2	Comparaison de la volatilité risque-neutre du modèle avec la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE pour l'indice S&P 500 . . . . .	34
3	Comparaison de la volatilité risque-neutre du modèle avec la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE pour l'action de Microsoft. . . . .	35
4	Comparaison de la volatilité risque-neutre du modèle avec la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE pour l'action de Apple . . . . .	36
5	Composantes de la prime de risque de variance de l'action Microsoft . . . . .	37
6	Composantes de la prime de risque de variance de l'action Apple . . . . .	38
7	Comparaison de la prime de risque de variance selon les deux méthodes pour l'indice S&P 500. . . . .	39
8	Comparaison de la prime de risque de variance selon les deux méthodes pour l'action de Apple. . . . .	40
9	Comparaison de la prime de risque de variance selon les deux méthodes pour l'action de Microsoft. . . . .	41



## Liste des tableaux

2	Comparaison de l'erreur du VIX de l'indice S&P 500 entre l'étude de Hansen, Huang et Wang (2015) et ce mémoire	27
4	Comparaison de nos résultats sur la VRP avec quelques études pour l'indice S&P 500 . . . . .	29
1	Comparaison entre le VIX calculé en appliquant la méthodologie de la CBOE et le VIX calculé avec le modèle GARCH-CHJ. . . . .	42
3	Statistiques descriptives de la prime de risque de variance.	43
5	Estimation du maximum de vraisemblance du modèle HARG pour l'indice S&P 500 et 28 composantes du DJ 30. . . .	44
6	Estimation du maximum de vraisemblance conjoint du modèle GARCH-CHJ pour l'indice S&P 500 et 28 composantes du DJ 30. . . . .	45

## Liste des sigles

CBOE	Chicago Board Options Exchange
CGARCH	Component GARCH model
CRSP	Center for Research in Security Price
DJ 30	Indice Dow Jones Industrial 30
GARCH-CHJ	Modèle GARCH(1,1) de Christoffersen, Heston et Jacobs (2013)
GARCH	Generalized Auto Regressive Constant Heteroskedasticity
HAR	Heterogeneous Auto-Regressive model
HARG	Gamma Heterogeneous Auto-Regressive model
LRNVR	Locally Risk-Neutral Valuation Relation
MAE	Erreur absolue moyenne
RMSE	Erreur quadratique moyenne
S&P 500	Indice Standard & Poor's 500
VIX	Indice de volatilité
VRP	Prime de risque de variance

## Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier chaleureusement mon directeur de mémoire Christian Dorion pour sa patience, son encadrement et ses précieux conseils.

J'aimerais remercier tous les enseignants que j'ai eus tout au long de mon parcours à HEC Montréal et qui m'ont transmis leur savoir.

Je remercie également les membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Je tiens à remercier ma famille pour leur soutien et leur encouragement tout au long de mon parcours scolaire.

## Notes sur la propriété intellectuelle

L'idée originale de ce mémoire m'a été fournie par mon directeur de mémoire, Christian Dorion, qui a aussi été très présent à travers l'évolution du mémoire. Je lui reconnais le droit d'en raffiner le contenu en un article dans lequel, le cas échéant, je ne désire pas m'impliquer.

## 1 Introduction

La volatilité dans les marchés financiers est un sujet qui prend de l'ampleur depuis une dizaine d'années. Elle joue un rôle important dans plusieurs domaines de la finance tels que la tarification des produits dérivés et la gestion des risques. Cet actif financier nous renseigne également sur les tendances futures de la volatilité. Ceci pousse la communauté scientifique à étudier sa dynamique et à comprendre son évolution. C'est pour cette raison qu'il existe une vaste littérature sur la modélisation de la volatilité. L'approche très connue est celle du modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique généralisé (GARCH) proposé par Bollerslev (1986). Celle-ci suppose que la volatilité est une variable inobservable et propose une méthode d'estimation basée sur l'espérance et la volatilité conditionnelle. Par ailleurs, il existe une seconde approche rendue possible grâce à la disponibilité des données à haute fréquence. Cette dernière consiste à construire un proxy observable de la variable latente en utilisant les données à intervalles de cinq minutes afin d'estimer la variance réalisée. Cette mesure non-paramétrique de la variance s'obtient en sommant le carré des rendements à haute fréquence de l'actif financier. Cette définition établie par Anderson, Bollerslev, Diebold et Labys (2001) correspond à un estimateur asymptotiquement sans biais. Toutefois, cette propriété n'est pas respectée lorsque les données à haute fréquence contiennent des bruits de microstructures. Zhang, Mykland et Aït-Sahalia (2005) proposent une méthode d'ajustement de l'estimateur de la variation quadratique basée sur l'échantillonnage.

Les contributions récentes ont permis de constater que la variance implicite est généralement supérieure à la variance instantanée. Cet écart correspond à la rémunération des investisseurs face à un risque de variance, appelé prime de risque de variance. Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de la prime de risque de variance dans les marchés financiers. Elle correspond à l'écart entre l'espérance de la variance réalisée sous la mesure physique et la mesure risque-neutre. La modélisation de la variance réalisée à l'aide d'un processus gamma autorégressif (HARG) utilisé par Corsi, Fusari et La Vecchia (2013) permet de calculer l'espérance conditionnelle physique de la variance réalisée. L'utilisation des prix d'options rend possible l'extraction de l'espérance conditionnelle risque-neutre de la variance réalisée en ayant recours à une méthode sans modèle (model-free) basée sur les travaux de Bakshi, Kapadia, et Madan (2003). L'écart entre l'espérance conditionnelle physique et risque-neutre nous permet de quantifier la prime de risque de variance sans modèle.

Par ailleurs, il existe d'autres approches afin de calculer la prime de risque de variance à l'aide de modèles. Dans notre cas, la prime de risque de variance est calculée à partir du modèle GARCH(1,1) Christof-

fersen, Heston et Jacobs (2013). Ce modèle correspond à celui introduit par Heston et Nandi (2000) combiné à un facteur d'actualisation stochastique qui tient compte d'une prime de risque de variance. Cette spécification apporte une amélioration à la performance du modèle contrairement à un facteur d'actualisation qui ne tient compte que d'une prime de risque d'équité. En pratique, le modèle permet d'exprimer la variance conditionnelle risque-neutre comme une proportion de la variance conditionnelle physique. Dans notre étude, l'estimation des paramètres du modèle se base sur l'utilisation jointe des rendements et du VIX.

L'objectif de ce mémoire est de comparer la première méthode de calcul de la prime de risque de variance sans modèle à une seconde méthode basée sur le modèle GARCH(1,1) de Christoffersen, Heston et Jacobs (2013). Notre contribution est importante puisqu'à notre connaissance, très peu d'études s'intéressent au calcul de la prime de risque de variance sur les actions. Nous sommes les premiers à calculer la prime de risque de variance pour les composantes du DJ 30 en utilisant le modèle GARCH(1,1) de Christoffersen, Heston et Jacobs (2013) et à les comparer à une méthode non-paramétrique en utilisant des données plus récentes qui incluent la crise financière de 2008.

Ce mémoire est organisé comme suit. La section 2 présente une revue de littérature consacrée à la prime de risque de variance. La section 3 décrit les deux méthodologies de calcul de la prime de risque de variance. La section 4 contient les résultats de la prime de risque de variance calculée pour l'indice S&P 500 et les composantes du DJ 30. En fin, la dernière section correspond à la conclusion.

## 2 Revue de la littérature

Bakshi et Kapadia (2003, a) sont les premiers à déterminer que la prime de risque de variance est négative pour l'indice S&P 500 en utilisant les données sur la période du 1 janvier 1988 au 30 décembre 1995. Pour mener à bien leur étude, ces derniers créent un portefeuille delta-neutre composé de positions longues sur des options d'achat combiné à des positions courtes sur l'indice. Ils s'attendent à ce qu'un portefeuille couvert contre toute variation de la valeur de l'indice génère le rendement sans risque. Ils expliquent que dans le cas où le portefeuille génère un rendement excédentaire, celui-ci sera attribué au risque de variance. Les auteurs constatent que le portefeuille delta-neutre présente un rendement excédentaire négatif ce qui confirme l'existence d'une prime de risque de variance négative. Ces résultats démontrent que le risque de variance est incorporé dans le prix des options sur indice. De plus, ils remarquent que la perte du portefeuille est plus importante durant les périodes de forte volatilité. Ceci signifie que la prime de risque de variance est plus négative en périodes d'incertitude.

Bakshi et Kapadia (2003, b) appliquent la même stratégie delta-neutre sur 25 actions et sur l'indice S&P 500 en utilisant les données du 1 janvier 1991 au 31 décembre 1995. Ils remarquent que la perte sur les actions représente en moyenne 0,03 % de leur prix alors que la perte de l'indice représente 0,07 % du niveau de l'indice. En d'autres termes, la prime de risque de variance des actions en valeur absolue est inférieure à celle de l'indice. Ils expliquent que la sensibilité des actions à un mouvement de volatilité générale du marché est moindre comparativement à la sensibilité de l'indice à un mouvement équivalent. Ils constatent également que la variance implicite est supérieure à la variance réalisée.

Carr et Wu (2009) poussent l'analyse et déterminent une méthodologie de calcul de la prime de risque de variance. Pour ce faire, ils font appel au contrat d'échange de variance permettant d'échanger un taux fixe contre l'espérance conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure de probabilité physique. La prime à l'initiation du contrat d'échange est nulle et le taux fixe du contrat d'échange est obtenu en calculant l'espérance conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure de probabilité risque-neutre à l'aide d'un portefeuille d'options hors de la monnaie. Ces derniers définissent la prime de risque de variance comme étant la différence entre l'espérance conditionnelle physique de la variance réalisée et le taux fixe du contrat d'échange. Ils effectuent une étude empirique sur cinq indices ainsi que 35 actions sur la période allant de janvier 1996 à février 2003 et obtiennent une prime de risque de variance moyenne négative pour les cinq indices. Ils affirment que les investisseurs acceptent un rendement négatif lorsqu'ils contractent un contrat d'échange de va-

rianche sur indice. De plus, ils obtiennent une prime de risque négative pour plusieurs actions, mais il n'y a que sept actions dont la prime est significativement négative dû à un écart-type supérieur à celui de l'indice. Finalement, les actions pour lesquelles un mouvement de la volatilité du marché engendre un mouvement de volatilité supérieur ont une prime de risque de variance plus négative que celle de l'indice S&P 500. Ceci implique qu'il existe des actions pour lesquelles les investisseurs paient une prime plus importante afin de se prémunir contre un mouvement de volatilité dans les marchés.

Driessen, Maenhout et Vilkov (2009) étudient la prime de risque de variance sur l'indice S&P 100 et ses composantes sur la période de janvier 1996 à décembre 2003. Ils calculent la prime de risque de variance comme étant la différence entre l'estimation de la variance intégrée à partir des options et la variance réalisée. Ils trouvent que la prime de risque de variance sur l'indice S&P 100 est significativement négative. Par ailleurs, les composantes de l'indice S&P 100 ne présentent pas une prime de risque de variance négative. Cette divergence des résultats entre l'indice et les actions est expliquée par la présence d'une prime de corrélation qu'on retrouve seulement dans les options sur indice.

Han et Zhou (2011) s'intéressent à l'étude de la prime de risque de variance de 500 actions en appliquant une méthode sans modèle calculée à partir d'options et des données à hautes fréquences pour la période de janvier 1996 à octobre 2009. Ils trouvent que deux tiers des actions ont une prime de risque de variance négative. De plus, ils constatent qu'il y a une variation entre le niveau de la prime de risque de variance des 500 actions expliquée entre autres par la taille de l'entreprise, les rendements et la variance historique.

Il existe une seconde méthode basée sur des modèles qui permet de calculer la prime de risque de variance. Dans notre cas, on s'intéresse aux travaux sur la prime de risque de variance basée sur le modèle GARCH(1,1) de Christoffersen, Heston et Jacobs (2013). Ce modèle est utilisé dans la tarification des produits dérivés puisqu'il présente une formule fermée. De plus, il incorpore une prime de risque de variance dont l'existence a été démontrée par plusieurs études nommées précédemment. Les auteurs parviennent à capturer la prime de risque en estimant les paramètres qui gouvernent la prime de risque de variance à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance conjoint utilisant les données d'options et de rendements.

La contribution de Christoffersen, Heston et Jacobs (2013) a inspiré d'autres études qui se sont penchées sur la modélisation de l'indice du VIX. Cet indice est calculé par la Bourse des options de Chicago (CBOE) à partir des options et correspond à la moyenne de l'espérance



conditionnelle sous la mesure risque-neutre de la variance pour les 30 prochains jours. Parmi ces études, on retrouve les travaux de Hao et Zhang (2013) qui présentent le calcul du VIX à partir du modèle GARCH(1,1) de Heston et Nandi (2000). Ils estiment les paramètres du modèle en effectuant une estimation jointe basée sur les rendements et le VIX. Cette innovation permet d'économiser un temps de calcul important comparativement à l'utilisation des options puisqu'au lieu d'avoir un spectre d'option, on utilise qu'une donnée du VIX au quotidien. Or, leur modèle ne tient compte que d'une prime d'équité ce qui implique que la variance conditionnelle est identique sous les deux mesures de probabilité. Par conséquent, les paramètres de leur modèle ont tendance à être biaisés en tentant de répliquer la dynamique du VIX.

Hansen, Huang et Wang (2015) s'inspirent des travaux de Hao et Zhang (2013) et calculent la prime de risque de variance à l'aide de plusieurs modèles GARCH. Parmi eux, on retrouve le modèle GARCH(1,1) de Heston Nandi (2000) et le modèle GARCH(1,1) de Christoffersen, Heston et Jacobs (2013). Ils débutent en estimant les paramètres du modèle par la méthode du maximum de vraisemblance conjoint. Par la suite, ils utilisent les paramètres optimaux afin de calculer une prime de risque de variance à partir de la moyenne sur 22 jours de la variance modélisée sous la mesure de probabilité physique et du VIX implicite. Ils calculent également une prime de risque de variance sans modèle à partir des données à haute fréquence et du VIX du marché. Ils confirment que l'ajout d'une prime de risque de variance dans le modèle offre une meilleure flexibilité et améliore les résultats.

### 3 Méthodologie

Cette section regroupe la théorie nécessaire pour ce mémoire. On commence en définissant la prime de risque de variance sans modèle qui nécessite la présentation du modèle de régression HARG servant à modéliser la variance réalisée sous la mesure physique. Par la suite, on présente la méthodologie de Bakshi, Kapadia, et Madan (2003) nécessaire au calcul de l'espérance conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure risque-neutre.

Ensuite, on introduit le modèle GARCH(1,1) de Christoffersen, Heston et Jacobs (2013), dont l'acronyme est GARCH-CHJ, afin de calculer la prime de risque à l'aide de l'estimation par le maximum de vraisemblance conjoint basée sur les rendements et le VIX.

#### 3.1 Prime de risque de variance sans modèle

La prime de risque de variance d'un actif financier correspond à la différence entre l'espérance physique et risque-neutre de la variance réalisée calculée sur la période de  $\tau$  jours. Plus précisément

$$VRP(t, \tau) = E_t^P [RV_{t+\tau}] - E_t^Q [RV_{t+\tau}], \quad (1)$$

avec  $E_t^P [.]$  et  $E_t^Q [.]$  respectivement l'espérance conditionnelle sous la mesure de probabilité physique  $P$  et risque-neutre  $Q$ . La variable  $RV_{t+\tau}$  correspond à la variance réalisée, du temps  $t$  au temps  $t + \tau$ . Le calcul de la prime de variance à l'aide de l'équation précédente ne nécessite pas une modélisation du processus de variance de l'actif sous-jacent au moyen de modèle à processus stochastique. L'espérance conditionnelle sous  $P$  de la variance réalisée est obtenue avec une régression alors que l'espérance conditionnelle sous  $Q$  est obtenue par réplication à l'aide d'options sur l'actif sous-jacent. Afin de rester cohérent avec la littérature, on l'appelle la prime de risque de variance sans modèle.

##### 3.1.1 Variance réalisée

Le concept de la variance réalisée a été introduit par Anderson, Bollerslev, Diebold et Labys (2001). Ces derniers supposent que l'actif sous-jacent  $S_t$  suit un processus stochastique continu de la forme

$$dS_t = u_t dt + \sigma_t dW_t,$$

où  $u_t$  est la dérive,  $\sigma_t$  est la volatilité spot et  $dW_t$  est un processus de Wiener standard. L'objectif de leur méthode est d'estimer la variance intégrée notée  $IV_t$  et qui correspond à l'intégrale de la variance instantanée sur un intervalle de temps d'une journée

$$IV_t = \int_{t-1}^t \sigma_s^2 ds.$$

En supposant que la volatilité est observable, Anderson, Bollerslev, Diebold et Labys (2001) proposent une méthode d'estimation de la variance intégrée faisant appel aux données à haute fréquence appelée la variance réalisée. Contrairement aux autres méthodes, celle-ci ne nécessite pas de supposer un processus stochastique pour la dynamique de la volatilité instantanée. De plus, la variance réalisée s'obtient en sommant le carré des log-rendements calculés à partir des données à haute fréquence

$$RV_t = \sum_{i=1}^N (\log(S_{i,t}) - \log(S_{i-1,t}))^2,$$

où  $RV_t$  représente la variance réalisée,  $N$  est le nombre d'intervalles de temps dans une journée et  $S_{i,t}$  le prix de l'actif sous-jacent à l'intervalle  $i$  de la journée  $t$ . Si l'intervalle de temps servant à calculer les rendements tend vers zéro, alors la somme converge en probabilité vers la variation quadratique du processus de diffusion de l'actif sous-jacent. Par ailleurs, les données à haute fréquence contiennent des bruits de microstructures qui peuvent biaiser les résultats. Dans ce cas, le choix de l'intervalle de temps est très important puisque l'estimateur par variation quadratique ne converge pas si l'intervalle de temps est très petit. Cette dualité pousse Anderson, Bollerslev, Diebold et Labys (2001) à choisir un intervalle de temps de cinq minutes. Ils jugent que puisque le marché des devises est très liquide, des données à intervalle de cinq minutes devraient atténuer l'impact des bruits de microstructures.

En supposant que les données à haute fréquence sont disponibles aux secondes, le fait de choisir une donnée toutes les cinq minutes signifie que 299 données sur 300 sont inexploitées. Zhang, Mykland et Aït-Sahalia (2005) proposent un estimateur qui se base sur une moyenne de plusieurs échantillons. La méthode consiste à prendre un échantillon qui débute avec la première donnée et qui accumule les données à toutes les cinq minutes, suivi d'un échantillon qui débute avec la seconde donnée et qui cumule également les données à toutes les cinq minutes. L'idée est de créer une suite d'échantillon en changeant à chaque fois le point de départ. Par la suite, la moyenne de la variance réalisée calculée à partir de chaque échantillon est ajustée afin d'obtenir un estimateur robuste aux bruits de microstructures.

### 3.1.2 Espérance conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure physique

Des études se sont intéressées à la modélisation de la variance réalisée afin de calculer la moyenne conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure physique. Une approche introduite par Corsi (2009) permet de modéliser le comportement de la variance réalisée sous la mesure physique en utilisant un modèle autorégressif (HAR) afin de capter l'hétérogénéité dans la série chronologique. L'idée est de refléter l'impact sur la variance générée par une gamme de participants allant des investisseurs actifs à des investisseurs passifs. Pour ce faire, le modèle fait appel à la variance mensuelle (22 jours ouvrables) regroupée sur un horizon temporel distinct. Le facteur de variance de court-terme correspond à la variance de la veille  $RV_{t-1}$ , le facteur de moyen terme d'une semaine est noté  $RV_t^w = \sum_{i=1}^4 \frac{RV_{t-i}}{4}$  alors que  $RV_t^m = \sum_{i=5}^{21} \frac{RV_{t-i}}{17}$  représente le facteur de long terme mensuel. Cette approche consiste à effectuer une régression de la variance réalisée sur l'information historique du facteur quotidien, hebdomadaire et mensuelle. La simplicité de la méthode ainsi que sa capacité à reproduire les caractéristiques de la dynamique de la variance observée ont favorisé sa popularité.

Une extension du modèle HAR appelée processus gamma autorégressif (HARG) a été introduite par Gouriéroux et Jasiak (2006) et a été utilisée par Corsi, Fusari et La Vecchia (2013) afin de modéliser la variance réalisée. Pour ce faire, nous présentons une description de la théorie nécessaire à l'implémentation de cette méthode. Soit  $\bar{Y}$  une variable aléatoire de loi gamma non-centrée  $\gamma(\delta, \beta, c)$  de paramètre de non-centralité  $\beta$ , de paramètre de forme  $\delta$  et de paramètre d'intensité  $c$  alors la variable  $Y = \frac{\bar{Y}}{c}$  suit une loi  $\gamma(\delta, \beta)$ . De plus, la loi conditionnelle  $Y | Z$  est une mixture de loi gamma et poisson  $\gamma(\delta + Z, c)$  avec  $Z \sim P(\beta)$ . En effet, la fonction de densité de la loi conditionnelle  $Y | Z$  est donnée par

$$\begin{aligned} f_{Y|Z}(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{Y|Z=k}(y) P(Z = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{\delta+k-1} \exp(-y/c) \beta^k \exp(-\beta)}{\Gamma(\delta + k) c^{\delta+k} k!}. \end{aligned}$$

Donc en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle on a

$$E[Y | Z] = (\delta + Z) c.$$

Par conséquent, l'espérance de  $Y$  s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
E[Y] &= E[E[Y | Z]] \\
&= E[(\delta + Z)c] \\
&= \delta c + E[Z]c \\
&= \delta c + \beta c.
\end{aligned}$$

Corsi, Fusari et La Vecchia (2013) supposent que la variance réalisée à  $t + 1$  sachant l'information au temps  $t$  notée  $RV_{t+1} | \mathcal{F}_t$  suit une loi gamma non centrée  $\gamma(\delta, \beta'(\mathbf{RV}_t), c)$  où  $\beta'(\mathbf{RV}_t)$  est le produit scalaire du vecteur  $\beta = (\beta_d, \beta_w, \beta_m)'$  et  $\mathbf{RV}_t = (RV_t, RV_t^w, RV_t^m)$  i.e

$$\beta'(\mathbf{RV}_t) = \beta_d RV_t + \beta_w RV_t^w + \beta_m RV_t^m.$$

En utilisant les propriétés de la gamma non-centrée décrit plus haut, l'espérance conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure physique s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
E_t^P [RV_{t+1}] &= \delta c + \beta'(\mathbf{RV}_t)c \\
&= \delta c + (\beta_d RV_t + \beta_w RV_t^w + \beta_m RV_t^m)c. \quad (2)
\end{aligned}$$

La condition de stationnarité du modèle est

$$(\beta_d + \beta_w + \beta_m)c < 1.$$

En utilisant les paramètres optimaux  $(\beta_d, \beta_w, \beta_m, \delta, c)$ , obtenus à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance (voir section estimation), il est possible de calculer l'espérance conditionnelle de la variance réalisée quotidienne. De plus, en supposant qu'il y a 22 jours ouvrables dans le mois, on calcule l'espérance conditionnelle mensuelle de la variance réalisée sous la mesure physique en sommant l'espérance conditionnelle quotidienne de la variance réalisée sous la mesure physique obtenue avec l'équation 2 sur cette période.

### 3.1.3 Espérance conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure risque-neutre

En se basant sur la méthode de Carr et Madan (2001), on peut répliquer le *payoff*  $f(S_T)$  à partir de prix d'options. La formule de valorisation de l'actif financier au temps  $t$  est la suivante :

$$\begin{aligned}
E_t^Q [\exp(-r\tau)f(S_{t+\tau})] &= f(k) \exp(-r\tau) + f'(k) [C_t(\tau; K) - P_t(\tau; K)] \\
&\quad + \int_0^k f''(K)P_t(\tau; K)dK + \int_k^\infty f''(K)C_t(\tau; K)dK.
\end{aligned}$$

Le premier terme correspond à une position  $f(k)$  dans une obligation zéro coupon. Le second terme correspond à une position  $f'(k)$  dans une

option d'achat  $C_t(\tau; K)$  d'échéance en année  $\tau$  dont le prix d'exercice est  $K$  combiné à une position courte dans une option de vente  $P_t(\tau; K)$  ayant les mêmes caractéristiques. Le troisième terme représente une détention d'une position de  $f''(k)dK$  dans des options de ventes dont le prix d'exercice est inférieur à  $k$ . Finalement, le dernier terme représente une détention d'une position de  $f''(k)dK$  dans des options d'achats dont le prix d'exercice est supérieur à  $k$ .

La formule précédente a été utilisée par Bakshi, Kapadia, et Madan (2003) afin d'obtenir l'espérance conditionnelle de la variance réalisée en tarifant le prix d'un contrat de variance dont le *payoff* correspond à la variation quadratique du prix noté  $f(S_{t+\tau}) = \ln\left(\frac{S_{t+\tau}}{S_t}\right)^2$ . Les auteurs montrent que la valeur présente de ce contrat s'obtient en prenant des positions sur des options d'achats et de ventes hors de la monnaie

$$\begin{aligned} V_{t,\tau} &= E_t^Q \left( \exp(-r\tau) \ln\left(\frac{S_{t+\tau}}{S_t}\right)^2 \right) \\ &= \int_{S_t}^{\infty} \frac{1 - \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}{\frac{K^2}{2}} C_t(\tau; K) dK + \int_0^{S_t} \frac{1 + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\frac{K^2}{2}} P_t(\tau; K) dK. \end{aligned}$$

Donc, l'espérance risque-neutre de la variance réalisée annualisée pour la période de  $t$  à  $t + \tau$  est donnée par

$$E_t^Q (RV(t, \tau)) = \exp(r\tau) \frac{V_{t,\tau}}{\tau}. \quad (3)$$

Dans ce cas, l'espérance conditionnelle de la variance réalisée pour une période de 30 jours est obtenue en effectuant une interpolation spline cubique.

### 3.1.4 Méthodologie de l'indice VIX

La bourse des options de Chicago (CBOE) a introduit l'indice VIX, équivalent à une discrétisation de la méthodologie de Bakshi, Kapadia et Madan (2003), qui permet de mesurer la volatilité dans les marchés financiers sur un horizon des 30 prochains jours. Ce dernier est estimé sur une base intra journalière à partir du prix d'options. Un niveau faible du VIX signifie une période de faible volatilité dans les marchés financiers alors qu'un niveau élevé témoigne d'une période d'incertitude. L'estimation du VIX nécessite la sélection d'un échantillon d'options au jeu dont la maturité est égale à 30 jours. Dans le cas où cet échantillon n'existe pas, il est nécessaire de sélectionner deux échantillons d'options avec une échéance respectivement inférieure et supérieure à 30 jours. Ces

échantillons servent à déterminer la valeur du prix à terme pour chaque échantillon. Par la suite, des filtres sont appliqués afin de conserver les options permettant de calculer la variance  $V_{t,T}$  pour chaque échantillon en appliquant la formule suivante :

$$V_{t,T} = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} \exp(RT) Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[ \frac{F}{K_0} - 1 \right]^2.$$

$T$  correspond à la maturité de l'option,  $K$  représente le prix d'exercice,  $F$  est égale au prix à terme de l'actif financier et  $R$  au taux d'intérêt sans risque annualisé d'échéance équivalente à la maturité de l'option. Finalement, on applique une interpolation en fonction du nombre de jours de chaque échantillon afin d'obtenir le niveau de l'indice de volatilité pour un horizon de 30 jours

$$VIX_t = 100 \sqrt{\left[ T_1 V_{t,T_1} \left( \frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 V_{t,T_2} \left( \frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \right] \left( \frac{N_{365}}{N_{30}} \right)}.$$

## 3.2 Prime de risque de variance avec le modèle GARCH-CHJ

Les modèles continus à volatilité stochastique sont difficiles à tester et à implémenter contrairement aux modèles discrets à volatilité stochastique. Les modèles GARCH supposent que la volatilité est observable à partir de l'historique des prix. Il est donc possible de filtrer la volatilité à partir des observations discrètes du prix de l'actif sous-jacent.

### 3.2.1 Spécification du modèle

Heston et Nandi (2000) introduisent un modèle affine GARCH(1,1) qui présente une formule fermée servant à tarifier les options européennes. Le modèle suppose que la dynamique du log-rendement d'un actif sous-jacent pour une période de temps s'écrit comme suit

$$R_{t+1} \equiv \log \left( \frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = r + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}} z_{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (4)$$

$$h_{t+1} = \omega + \beta h_t + \alpha \left( z_t - \gamma \sqrt{h_t} \right)^2, \quad t = 1, 2, \dots \quad (5)$$

où  $h_{t+1}$  est la variance conditionnelle des log-rendement pour la période  $t+1$  et qui est connu à la fin de la période  $t$ .  $S_{t+1}$  correspond au prix de fermeture de l'actif sous-jacent à la journée  $t+1$ . Le taux sans risque composé continuellement pour une période de temps d'un actif non risqué est

représenté par  $r$ . Les variables aléatoires de loi normale centrée réduite  $\{z_{t+1} : t = 0, 1, \dots\}$  sont indépendantes et identiquement distribuées. Le paramètre  $\lambda$  affecte la valeur de la prime de risque. Contrairement au modèle de Black-Scholes qui suppose une prime de risque constante, le modèle GARCH de Heston et Nandi (2000) présente une prime de risque qui varie dans le temps et qui est proportionnelle à la volatilité conditionnelle.

$$\frac{r + \lambda h_{t+1} - r}{\sqrt{h_{t+1}}} = \lambda \sqrt{h_{t+1}}.$$

Le coefficient d'asymétrie  $\gamma$  reflète la corrélation négative entre les rendements et la volatilité. De plus, lorsque  $\gamma > 0$  et que l'innovation de la variable  $z_{t+1}$  est négative, le paramètre gamma a pour effet d'amplifier le choc négatif alors que pour une innovation positive de la variable  $z_{t+1}$ , le paramètre gamma atténue l'effet du choc. En d'autres termes, le modèle permet de refléter le fait qu'un choc négatif sur les marchés aura tendance à générer une volatilité plus élevée qu'un choc positif. Dans le cas où  $\gamma = 0$ , les chocs sont symétriques et la distribution conditionnelle des rendements sera également symétrique.

Le passage de la mesure physique à la mesure risque-neutre est une étape fondamentale. La valeur à la date  $t$  d'un actif financier correspond à l'espérance conditionnelle de la valeur future de l'actif à  $t + 1$  actualisée avec le facteur d'actualisation stochastique  $M_{t+1}$ .

$$P_t = E_t [P_{t+1} M_{t+1}].$$

Dans l'article de Christoffersen Heston et Jacobs (2013), les auteurs utilisent un facteur d'actualisation stochastique discret qui s'inspire du facteur d'actualisation stochastique continue appliqué par Heston (1993). Cette approche diffère de celle de Duan (1995) appelée LRNVR (locally risk-neutral valuation relation) qui suppose que la variance conditionnelle est identique dans la mesure physique et risque-neutre. Cette contrainte ne permet qu'une prime de risque d'équité alors qu'elle néglige la prime de risque de variance qui est bien présente dans les marchés financiers. Le facteur d'actualisation stochastique utilisé par Christoffersen Heston et Jacobs (2013) permettant de relier le processus stochastique physique au processus stochastique risque-neutre de l'actif sous-jacent et de la volatilité est présenté par la formule suivante :

$$M_t = M_0 \left( \frac{S_t}{S_0} \right)^\phi \exp \left( \delta t + \eta \sum_{s=1}^t h_s + \xi (h_{t+1} - h_1) \right).$$

Les paramètres  $\delta$  et  $\eta$  affectent la préférence temporelle. L'aversion au risque d'équité est affectée par le paramètre  $\phi$  alors que l'aversion pour le risque de variance est influencée par le paramètre  $\xi$ . Le logarithme du facteur d'actualisation stochastique est une fonction quadratique qui dépend du rendement du marché. Ce facteur d'actualisation stochastique



se compose de deux types de primes de risques. La première est une prime de risque d'équité alors que la seconde est une prime de risque de variance. Cette spécification apporte une amélioration à la performance du modèle contrairement à un facteur d'actualisation qui ne tient compte que d'une prime de risque d'équité. Il existe certaines conditions sur les paramètres  $\delta$ ,  $\eta$  et  $\phi$  qui doivent être respectés afin que le facteur d'actualisation stochastique présenté soit cohérent avec le modèle affine GARCH(1,1).

$$\begin{aligned}\delta &= -(\phi - 1)r - \xi\omega + \frac{1}{2} \ln(1 - 2\xi\alpha), \\ \eta &= -\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\phi - \xi\alpha\gamma^2 + (1 - \beta)\xi - \frac{(\phi - 2\xi\alpha\gamma)^2}{2(1 - 2\xi\alpha)}, \\ \phi &= -\left(\mu - \frac{1}{2} + \gamma\right)(1 - 2\alpha\xi) + \gamma - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

La dynamique physique du log-rendement de l'actif et de la variance conditionnelle combinée au facteur d'actualisation stochastique nous permet d'écrire le processus risque-neutre du log-rendement et de la variance obtenue par Christoffersen, Heston et Jacobs(2013).

$$\begin{aligned}R_{t+1} &\equiv \log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r - \frac{1}{2}h_{t+1}^* + \sqrt{h_{t+1}^*}z_{t+1}^*, \quad t = 0, 1, \dots \\ h_{t+1}^* &= \omega^* + \beta h_t^* + \alpha^* \left(z_t^* - \gamma^* \sqrt{h_t^*}\right)^2, \quad t = 0, 1, \dots \\ h_{t+1}^* &= h_{t+1} / (1 - 2\alpha\xi), \\ \omega^* &= \omega / (1 - 2\alpha\xi), \\ \alpha^* &= \alpha / (1 - 2\alpha\xi)^2, \\ \gamma^* &= \gamma - \phi.\end{aligned}$$

Lorsqu'on compare la dynamique physique avec la dynamique risque-neutre des log-rendements, on constate que le terme  $\lambda$  est nul. De plus, la variance conditionnelle risque-neutre s'obtient en divisant la variance conditionnelle physique par le terme  $(1 - 2\alpha\xi)$ . Ce modèle permet d'exprimer la variance conditionnelle risque-neutre comme une proportion de la variance conditionnelle physique. Les paramètres du modèle  $\omega^*$  et  $\alpha^*$  sont également proportionnels à  $\omega$  et  $\alpha$ . Le paramètre  $\beta$  reste inchangé sous les deux mesures de probabilités alors que le paramètre  $\gamma^*$  sous la mesure risque-neutre est obtenue en retranchant  $\phi$  du paramètre  $\gamma$  physique.

### 3.2.2 Définition de la prime de risque de variance

La prime de risque de variance calculée avec le modèle GARCH(1,1) de Christoffersen Heston et Jacobs (2013) est obtenue en calculant la différence de moyenne, annualisée et sur une période de 22 jours ouvrables, de l'espérance conditionnelle de la variance sous la mesure physique et risque-neutre

$$VRP_t = E_t^P \left[ \frac{252}{22} \sum_{k=1}^{22} h_{t+k} \right] - E_t^Q \left[ \frac{252}{22} \sum_{k=1}^{22} h_{t+k}^* \right]. \quad (6)$$

L'espérance conditionnelle de la variance sous la mesure physique est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} E_t^P \left[ \frac{252}{22} \sum_{k=1}^{22} h_{t+k} \right] &= \frac{252}{22} \sum_{k=1}^{22} E_t^Q [h_{t+k}] \\ &= \frac{252}{22} \sum_{k=1}^{22} \left[ (\beta + \alpha\gamma^2)^{k-1} (h_{t+1} - \sigma^2) + \sigma^2 \right] \\ &= \frac{252}{22} (h_{t+1} - \sigma^2) \sum_{k=1}^{22} (\beta + \alpha\gamma^2)^{k-1} + \frac{252}{22} \sum_{k=1}^{22} \sigma^2 \\ &= \frac{252}{22} (h_{t+1} - \sigma^2) \frac{1 - (\beta + \alpha\gamma^2)^{22}}{1 - (\beta + \alpha\gamma^2)} + 252\sigma^2. \quad (7) \end{aligned}$$

Alors que l'espérance conditionnelle de la variance sous la mesure risque-neutre est obtenue en appliquant la formule suivante :

$$\begin{aligned} E_t^Q \left[ \frac{252}{22} \sum_{k=1}^{22} h_{t+k}^* \right] &= \frac{252}{22} \sum_{k=1}^{22} E_t^Q [h_{t+k}^*] \\ &= \frac{252}{22} (h_{t+1}^* - \sigma^{*2}) \frac{1 - (\beta + \alpha^*\gamma^{*2})^{22}}{1 - (\beta + \alpha^*\gamma^{*2})} + 252\sigma^{*2}. \quad (8) \end{aligned}$$

### 3.2.3 Calcul du VIX avec le modèle GARCH-CHJ

Carr et Wu (2006) affirment que le carré du VIX permet d'approximer l'espérance conditionnelle de la variance réalisée sur les 30 prochains jours lorsque la dynamique de l'actif financier ne présente pas de saut. Ces résultats ont ouvert la voie à Hao et Zhang (2013) où les auteurs dérivent le VIX théorique à partir de l'espérance conditionnelle de la variance sous la mesure risque-neutre obtenue à partir d'un modèle GARCH

$$\begin{aligned} \left(\frac{VIX_t}{100}\right)^2 &= E_t^Q \left[ \frac{252}{22} \sum_{k=1}^{22} h_{t+k}^* \right] \\ VIX_t &= 100 \sqrt{E_t^Q \left[ \frac{252}{22} \sum_{k=1}^{22} h_{t+k}^* \right]} \end{aligned}$$

Une autre étude de Hansen, Huang et Wang (2015) définit l'équation du VIX, obtenue à partir du modèle GARCH-CHJ, comme étant la moyenne annualisée et sur une période de 22 jours ouvrables de l'espérance conditionnelle de la variance sous la mesure risque-neutre

$$VIX_t = 100 \sqrt{\frac{252}{22} (h_{t+1}^* - \sigma^{*2}) \frac{1 - (\beta + \alpha^* \gamma^{*2})^{22}}{1 - (\beta + \alpha^* \gamma^{*2})} + 252 \sigma^{*2}}. \quad (9)$$

Le VIX théorique calculé à partir du modèle intervient dans le calcul du maximum de vraisemblance. Pour des raisons de simplification le VIX calculé à partir des options en appliquant la méthodologie de la Bourse des options de Chicago (CBOE) est noté  $VIX^{Market}$  (VIX du marché) alors que le VIX théorique calculé à partir des volatilités risque-neutre du modèle GARCH-CHJ est noté  $VIX^{Model}$  (VIX du modèle).

### 3.3 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

L'objectif de l'estimation par la méthode de vraisemblance est de trouver un ensemble de paramètres  $\hat{\Theta}$ , une estimation de  $\Theta$ , qui composent notre modèle et qui maximise la probabilité d'obtenir notre échantillon. Puisque les observations sont indépendantes, il est possible d'écrire la densité conjointe comme le produit de leurs densités marginales.

$$L(\Theta | x_1, \dots, x_n) = \prod_{t=1}^n L(\Theta | x_t).$$

Pour des raisons de simplicité, on maximise le log-vraisemblance noté  $\ln(L(\Theta | x_1, \dots, x_n))$ . Puisque le logarithme est une fonction monotone croissante, le  $\hat{\Theta}$  maximisera à la fois la fonction de vraisemblance et la fonction de log vraisemblance.

$$\begin{aligned} l(\Theta | x_1, \dots, x_n) \equiv \ln(L(\Theta | x_1, \dots, x_n)) &= \ln \left( \prod_{t=1}^n L(\Theta | x_t) \right) \\ &= \sum_{t=1}^n \ln(L(\Theta | x_t)). \end{aligned}$$

Afin de résoudre cette équation, il suffit d'appliquer la condition de premier ordre.

#### Fonction de vraisemblance du processus HARG

En appliquant la fonction logarithmique à la fonction de vraisemblance du processus HARG, on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} l(\Theta) &= \ln \left( \prod_{t=1}^T \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{RV_t^{\delta+k-1} \exp(-RV_t/c) \beta'(\mathbf{RV}_t)^k \exp(-\beta'(\mathbf{RV}_{t-1}))}{\Gamma(\delta+k) c^{\delta+k} k!} \right) \right) \\ &= - \sum_{t=1}^T \left( \frac{RV_t}{c} + \beta'(\mathbf{RV}_{t-1}) \right) + \sum_{t=1}^T \ln \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{RV_t^{\delta+k-1} \beta'(\mathbf{RV}_{t-1})^k}{\Gamma(\delta+k) c^{\delta+k} k!} \right], \end{aligned}$$

où  $\Theta = \{\beta_d, \beta_w, \beta_m, \delta, c\}$  et  $\Gamma(a)$  est la fonction gamma au point  $a$  définie par  $\Gamma(a) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$  pour tout  $a > 0$ . Pour plus de précisions voir l'article de Majewski, Bormetti, Corsi (2015, p.525).

## Fonction de vraisemblance des rendements

La fonction de log vraisemblance de l'estimateur du maximum de vraisemblance des rendements correspond à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 l(\Theta) &= \ln \left( \prod_{t=1}^T \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \right) \exp \left( \sum_{t=1}^T \frac{-(R_t - r - (\lambda - \frac{1}{2})h_t)^2}{2h_t} \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(2\pi h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(R_t - r - (\lambda - \frac{1}{2})h_t)^2}{h_t} \\
 &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln h_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(R_t - r - (\lambda - \frac{1}{2})h_t)^2}{h_t},
 \end{aligned}$$

où  $\Theta = \{\omega, \alpha, \beta, \gamma, \lambda\}$  représente les paramètres physiques du modèle.

## Fonction de vraisemblance du VIX

La méthode suppose que l'écart entre le VIX du marché et le VIX calculé à partir du modèle suit une loi normale  $N(0, \sigma^2)$ . Donc, la fonction de log vraisemblance correspond à

$$\begin{aligned}
 l(\Theta^*) &= \ln \left( \prod_{t=1}^T \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) \exp \left( \sum_{t=1}^T \frac{-(VIX_t^{Market} - VIX_t^{Model})^2}{2\sigma^2} \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(VIX_t^{Market} - VIX_t^{Model})^2}{\sigma^2} \\
 &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - T \ln \sigma - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(VIX_t^{Market} - VIX_t^{Model})^2}{\sigma^2},
 \end{aligned}$$

où  $\Theta^* = \{\omega^*, \alpha^*, \beta, \gamma^*, \xi\}$  représente les paramètres risque-neutre du modèle.

## Maximum de vraisemblance conjoint

En supposant que les données du VIX et du rendement sont indépendantes, la fonction du log vraisemblance correspond à la somme de la fonction de log vraisemblance des rendements  $L^R$  et la fonction de log vraisemblance du VIX  $L^{VIX}$ .

$$\max_{\Theta, \Theta^*} \left\{ \frac{1}{2} \ln(L^R) + \frac{1}{2} \ln(L^{VIX}) \right\}$$

## 4 Résultats empiriques

### 4.1 Données

Les données des options, du taux sans risque et des prix à haute fréquence pour l'indice S&P 500 et les composantes du DJ 30 proviennent des bases de données OptionMetrics et Center for Research in Security Price (CRSP). Les données des prix à haute fréquence pour l'indice S&P 500 débutent le 1 février 1990 et se terminent le 31 octobre 2016 alors que les données à haute fréquence pour les actions couvrent la période du 4 février 1998 au 29 novembre 2012. Les données d'options servant au calcul du VIX pour l'indice S&P 500 débutent le 4 janvier 1996 et se terminent le 29 décembre 2017. Les données d'options servant au calcul du VIX pour les actions couvrent la période du 2 janvier 2008 au 29 décembre 2017.

### 4.2 Présentation des résultats sans modèle

Le graphique en haut à gauche de la figure 1 présente l'espérance conditionnelle de la variance réalisée sur une période de 22 jours annualisée sous la mesure physique et risque-neutre pour l'indice S&P 500. L'espérance conditionnelle physique est obtenue avec le modèle de régression HARG alors que l'espérance conditionnelle risque-neutre est obtenue à partir des options en appliquant la méthodologie de Bakshi, Kapadia, et Madan (2003). Les séries de données présentent un coefficient de corrélation de 79 % sur la période du 4 janvier 1996 au 19 octobre 2016. Ceci démontre que les fluctuations de la variance réalisée se reflètent dans la dynamique de la variance implicite. De plus, l'écart entre l'espérance conditionnelle physique et risque-neutre de la variance réalisée, appelée prime de risque de variance, est négatif la plupart du temps. Ce résultat est donc en lien avec la littérature sur la prime de risque de variance.

En effet, cette prime de risque atteint un minimum durant les périodes caractérisées par de fortes volatilités dans les marchés financiers. Les niveaux le plus bas sont enregistrés durant les années 2003, 2008 et 2010. Bekart et Hoerova (2014) font le même constat en calculant la prime de risque de variance pour l'indice S&P 500 à partir du modèle de régression HAR de Corsi (2009) et du VIX. Dans leur article (figure 1, p.187), ils attribuent les fluctuations de la prime de risque de variance durant l'année 2003 aux scandales ayant touché les entreprises américaines suite à la fraude de Enron. Le niveau de la prime de risque de volatilité durant l'année 2008 est expliqué par la crise financière dé-

clenchée par la faillite de la banque Lehman Brothers. Finalement, la crise de la dette souveraine qu'ont connu certains pays de la zone euro en 2010 se reflète dans le graphique par un niveau très bas de la prime de risque de variance.

De plus, on constate également que le niveau de la prime de risque de variance atteint un pic positif en 2008 avant de baisser rapidement pour atteindre son niveau minimal. Cette dynamique est observée également dans l'article de Wahl (2016) (figure 1, p.11) où l'espérance risque-neutre de la variance réalisée est calculée à partir des options. Ce dernier cite les travaux de Du et Kapadia (2011) qui démontrent qu'en présence de saut important comme durant la crise 2008, l'approximation de l'espérance conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure risque-neutre a tendance à être sous-estimée.

### 4.3 Présentation des résultats obtenus avec le modèle GARCH-CHJ

On débute d'abord avec l'estimation du maximum de vraisemblance conjoint pour l'indice S&P 500 puisqu'il existe quelques articles sur lesquelles on pourra se comparer. Tout d'abord, le graphique du haut de la figure 2 illustre la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE et la volatilité risque-neutre du modèle GARCH-CHJ obtenue avec la formule 9 pour l'indice S&P 500. On remarque que les deux dynamiques se suivent puisqu'on note une forte corrélation de l'ordre de 92 %. Afin d'analyser l'erreur d'estimation du VIX plus en profondeur, voici des mesures d'écart telles que l'erreur absolue moyenne (MAE) et l'erreur quadratique moyenne (RMSE) données par :

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N | VIX^{Model} - VIX^{Market} |,$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (VIX^{Model} - VIX^{Market})^2}.$$

Les résultats de ces mesures d'écart se trouvent dans la table 1. Une étude similaire effectuée par Hansen, Huang et Wang (2015) présente des mesures d'écarts pour le S&P 500 (tableau 2, p.17) durant la période de juillet 2003 à juin 2013. La table 2 effectue une comparaison entre les résultats de Hansen, Huang et wang (2015) et ceux obtenus dans ce mémoire.

TABLE 2 – Comparaison de l’erreur du VIX de l’indice S&P 500 entre l’étude de Hansen, Huang et Wang (2015) et ce mémoire

	Hansen, Huang, Wang (2015)	Mémoire
Corrélation	93 %	92 %
MAE	2,58	2,87
RMSE	3,85	3,70

On remarque que leurs résultats sont similaires aux nôtres ce qui nous donne un certain confort. De plus, on note que l’erreur du VIX, présentée dans le graphique du bas de la figure 2, s’amplifie durant la crise financière de 2008. En effet, le modèle GARCH-CHJ ne parvient pas à capter un saut important dans la dynamique du VIX. Ce constat a été soulevé par Hansen, Huang et Wang (2015) dans leur étude de comparaison de performance effectuée sur plusieurs modèles notamment le GARCH-CHJ. Ils notent que les paramètres du modèle obtenus à partir de l’estimation du maximum de vraisemblance conjoint ont tendance à être biaisés en tentant de répliquer la dynamique du VIX. Ils remarquent également que la volatilité risque-neutre calculée avec le modèle sous-estime la volatilité calculée avec la méthodologie de CBOE. Par ailleurs, ils confirment que l’ajout d’une prime de risque de variance a une valeur ajoutée comparativement au modèle GARCH de Heston Nandi (2000) qui ne tient compte que d’une prime d’équité.

On remarque également que l’erreur du VIX, qui correspond à l’écart entre la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE et la volatilité risque-neutre du modèle GARCH-CHJ, semble plus importante pour les 28 composantes du DJ 30 comparativement à celle du S&P 500. Les figures 3 et 4 illustrent l’erreur du VIX pour l’action de Microsoft et Apple. Les deux séries présentent une corrélation élevée avec respectivement 79 % et 81 % pour les deux actions. Ceci s’applique également pour toutes les autres actions comme le démontre la table 1.

Finalement, en observant le niveau du VIX représenté par la ligne rouge dans le graphique du haut de la figure 2 et le niveau de la prime de risque de variance du S&P 500 représentée par le graphique en bas à droite dans la figure 1, on remarque qu’une hausse importante du niveau du VIX provoque une baisse (plus négative) de la prime de risque de variance. Cette dynamique est également visible dans les figures 3 et 5 pour l’action de Microsoft et les figures 4 et 6 pour l’action de Apple où la même information est présentée. Ce résultat est cohérent puisqu’un niveau élevé du VIX témoigne d’une période de forte volatilité durant laquelle les investisseurs vont s’ajuster en exigeant une rémunération plus élevée en échange du risque de variance qu’ils acceptent de porter. Cet ajustement se caractérise par une prime de risque de variance plus négative.



#### 4.4 Comparaison des deux approches

Nous sommes en mesure de comparer la prime de risque de variance obtenue avec et sans modèle pour l'indice S&P 500 sur une période allant du 4 janvier 1996 au 19 octobre 2016. Par contre, des contraintes de données nous empêchent de comparer la prime de risque de variance des actions sur une aussi longue période.

Premièrement, nous n'avons pas accès aux données à haute fréquence pour les actions au-delà du 31 décembre 2012, ce qui nous empêche de calculer la variance réalisée à partir de cette date.

Deuxièmement, les filtres de la Bourse des options de Chicago appliqués sur les options des actions afin de calculer le VIX ne sont pas satisfaits pour la période antérieure à 2008. Ces deux contraintes font en sorte que la comparaison de la prime de risque de variance calculée selon les deux méthodes pour les composantes du DJ 30 est effectuée sur une fenêtre d'environ 5 ans allant de 2008 à 2012.

Tout d'abord, la prime de risque de variance calculée selon les deux méthodes est présentée dans la table 3. Le premier constat réside dans le fait que les moyennes des primes de risque de variance calculées selon les deux approches sont négatives. Carr et Wu (2009) calculent les primes de risque de variance sur des indices et des stocks pour la période de 1996 à 2003 et concluent que la prime de risque de variance est significativement négative pour les indices ainsi que pour quelques actions. De plus, ils expliquent que les investisseurs sont prêts à recevoir un rendement excédentaire négatif afin de se couvrir durant les périodes de forte incertitude. En effet, la crise financière de 2008 est contenue dans notre période d'analyse. Notons que cette période a connu un niveau élevé de volatilité ce qui justifie l'obtention de primes de risque de variance négatives.

En s'intéressant aux statistiques descriptives de la table 3 on constate qu'il existe une forte corrélation entre la prime de risque de variance obtenue avec les deux méthodologies. Par exemple, dans le cas de l'indice S&P 500 le coefficient de corrélation est de 84 % pour la période du 4 janvier 1996 au 19 octobre 2016. Bormetti, Corsi et Majewski (2016) effectuent une étude similaire où ils comparent la prime de variance sans modèle, calculée comme étant la différence entre l'espérance conditionnelle de la variance réalisée et le carré du VIX, à la prime de risque de variance obtenue avec le modèle CGARCH. Dans la table 3, p.35 de l'étude, les auteurs obtiennent une corrélation de l'ordre de 74 % pour la période d'analyse de 1996 à 2005. Lorsqu'on prend le même intervalle nous obtenons également un facteur de corrélation de 74 %. Ces résultats sont également similaires à ceux de Carr et Wu (2009).

Le tableau 4 compare les statistiques descriptives de la prime de risque de variance aux deux études citées précédemment pour l'indice S&P 500.

TABLE 4 – Comparaison de nos résultats sur la VRP avec quelques études pour l'indice S&P 500

	1996/01 - 2003/02				1996/01 - 2004/12				1996/01 - 2016/11	
	CW (2009)		Mémoire		BCM (2016)		Mémoire		Mémoire	
	Sans modèle	modèle	Sans modèle	modèle	Sans modèle	modèle	Sans modèle	modèle	Sans modèle	modèle
Moyenne (%)	-2,74	N/D	-2,81	-2,05	-1,96	-2,25	-2,70	-2,10	-2,52	-2,00
Skewness	-1,44	N/D	-2,33	-0,91	-1,03	-1,65	-2,30	-1,00	-3,73	-2,76
Kurtosis	17,86	N/D	11,90	3,75	6,36	7,43	11,78	3,88	27,31	14,35

On remarque que la distribution de la prime de risque de variance présente un coefficient d'asymétrie (skewness) négatif et un coefficient d'aplatissement (kurtosis) élevé qu'on retrouve dans les trois résultats. La moyenne de la prime de risque de la variance est aux alentours de -2 %. De plus, on remarque que nos résultats obtenus selon les deux méthodes sont très similaires. Cette forte corrélation est présentée dans le graphique du haut de la figure 7 qui permet de comparer la prime de risque de variance pour l'indice S&P 500. On remarque que les deux dynamiques se suivent malgré la présence de variation durant les périodes de forte volatilité. Le graphique du bas illustre l'écart entre les deux primes de risque de variance, ce dernier est très proche de zéro la plupart du temps.

De plus, d'après la table 3, la moyenne des primes de risque de variance des actions est généralement plus élevée (en valeur absolue) que celle de l'indice S&P 500. Suite à une étude de 500 actions, Han et Zhou (2011) déterminent que la prime de risque de variance est plus importante en valeur absolue pour les actions de plus petite taille, les actions ayant une moins bonne performance historiquement et les actions présentant une plus grande volatilité.

En comparant la prime de risque de variance obtenue selon les deux méthodologies pour les actions, on constate que les dynamiques de la prime de risque de variance présentent majoritairement des corrélations très importantes. La figure 8 démontre que la prime de risque de variance obtenue à partir du modèle parvient à reproduire la dynamique de la prime de risque de variance sans modèle pour l'action de Apple. Par ailleurs, on remarque que la prime de risque de variance avec modèle varie moins que la prime de risque de variance sans modèle. Ceci est également visible dans la table 3 où l'écart-type de la prime de risque de variance obtenue sans modèle est plus élevé que l'écart-type de la prime de risque de variance avec modèle. Cette différence s'explique lorsqu'on porte une attention particulière aux composantes de la prime de risque de variance selon les deux méthodologies. Tout d'abord, on remarque que

l'espérance conditionnelle de la variance réalisée sous la mesure physique obtenue sans modèle et l'espérance conditionnelle de la variance sous la mesure physique obtenue avec modèle dans le haut de la figure 6 ont une dynamique similaire. Par contre, l'écart est beaucoup plus important lorsqu'on compare l'espérance conditionnelle risque-neutre sans modèle avec l'espérance conditionnelle risque-neutre avec modèle. De plus, cette différence s'amplifie durant les périodes de fortes volatilités. Cette observation nous indique que le processus de la variance conditionnelle risque-neutre ne varie pas assez. La variance conditionnelle du processus de variance sous la mesure risque-neutre du modèle GARCH(1,1) de Christoffersen, Heston et Jacobs (2013) notée  $Var_t(h_{t+2}^*)$  est donnée par

$$Var_t(h_{t+2}^*) = 2\alpha^{*2} + 4\alpha^{*2}\gamma^{*2}h_{t+1}^*.$$

Cette dernière dépend des paramètres  $\alpha^*$  et  $\gamma^*$  et varie linéairement par rapport à la variance conditionnelle risque-neutre historique. Le paramètre  $\alpha^*$  joue un rôle important sur le kurtosis en impactant la variance conditionnelle du processus de variance conditionnelle. On remarque que le niveau du paramètre  $\alpha^*$  n'est pas assez élevé. Ceci est expliqué par l'utilisation d'un facteur d'actualisation stochastique qui ne génère pas un niveau de  $\alpha^*$  suffisamment élevé, ce qui a un impact sur la variance conditionnelle risque-neutre. C'est une des raisons qui explique que la moyenne de la prime de risque de variance sans modèle semble être plus négative que celle obtenue avec le modèle.

Une seconde explication réside dans la complexité de la structure du VIX des actions. En effet, la table 1 démontre que l'erreur du VIX est plus importante pour les composantes du DJ 30. Ces résultats ont un impact direct sur les paramètres du modèle qui ne parviennent pas à reproduire la dynamique du VIX du marché. Ce biais se reflète dans un premier temps, sur le niveau de la variance généré à partir de ces paramètres et dans un second temps, sur le calcul de la prime de risque de variance avec modèle.

De plus, tout comme Carr et Wu (2009), on remarque que l'écart-type de la moyenne de la prime de risque de variance obtenue sans modèle pour les actions est plus élevé que celui du S&P 500. Ceci indique qu'il existe une plus grande variance dans les titres individuels comparative-ment à l'indice. En effet, la méthode sans modèle génère un coefficient d'asymétrie (en valeur absolue) et un coefficient d'aplatissement beaucoup plus élevé que celui du S&P 500. Ces caractéristiques de la distribution augmentent la probabilité d'occurrence de sauts négatifs. Du et Kapadia (2011) ont démontré qu'en présence de saut, l'écart entre la méthode de Bakshi, Kapadia, et Madan (2003) et le carré du VIX est plus important.

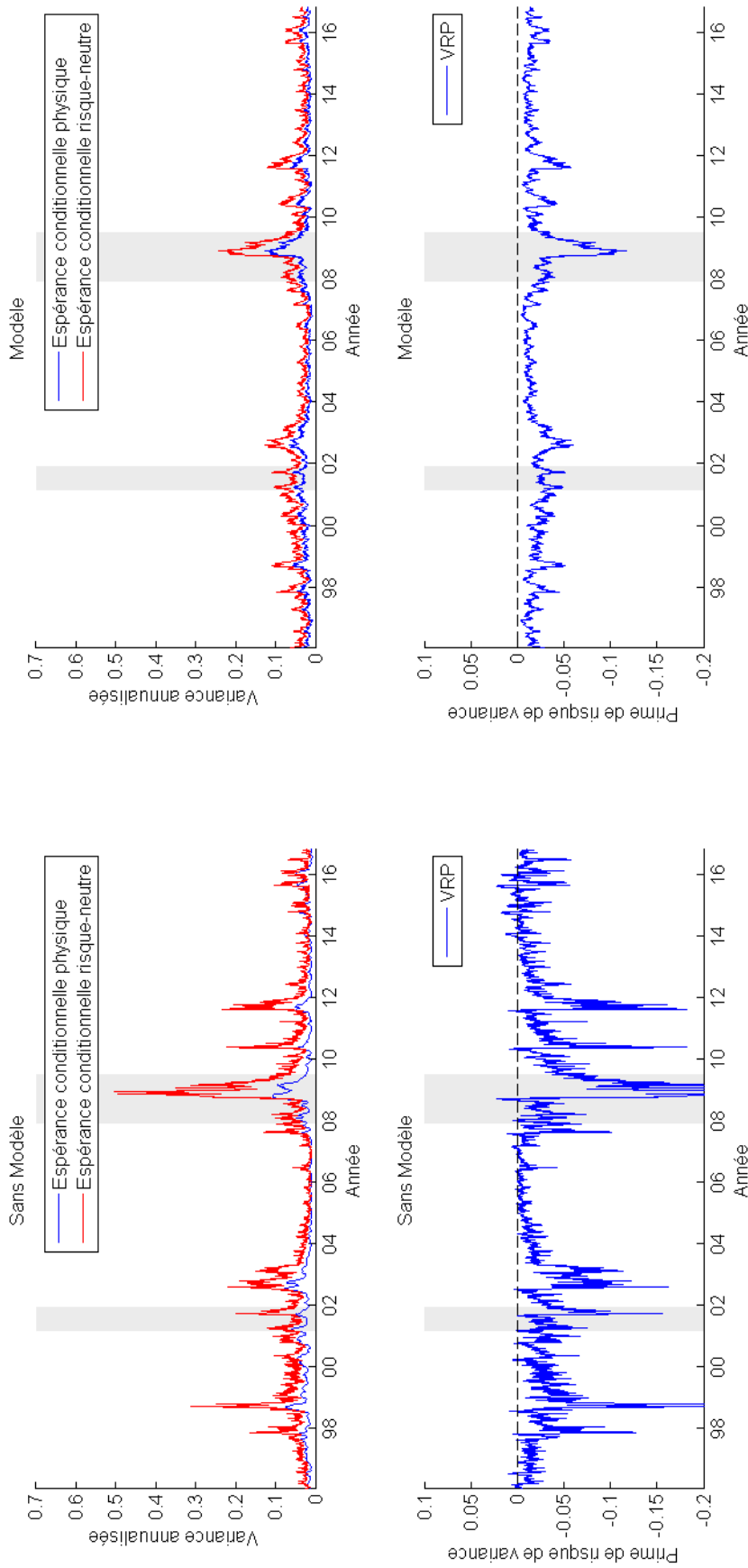
## 5 Conclusion

Ce mémoire compare la prime de risque de variance calculée selon deux méthodologies. La première est une méthode non-paramétrique et une seconde basée sur le modèle GARCH-CHJ. L'étude porte sur l'indice S&P 500 ainsi que les composantes du DJ 30. De plus, l'estimation des paramètres du modèle est effectuée à l'aide de l'estimation du maximum de vraisemblance conjoint basée sur les rendements et le VIX. Cette méthodologie innovatrice nous permet d'extraire la prime de risque de variance. À notre connaissance, non seulement il n'existe aucune étude ayant calculée la prime de risque de variance des actions à l'aide du modèle GARCH-CHJ, mais aussi aucune étude antérieure n'utilise des données aussi récentes que les nôtres.

On remarque que la prime de risque de variance de l'indice S&P 500 est équivalente aux études antérieures. Les résultats démontent que la prime de risque de volatilité obtenue avec le modèle GARCH-CHJ parvient à reproduire la prime de risque de variance calculée selon la méthodologie non-paramétrique. De plus, on constate que la prime de risque de variance selon les deux méthodologies est négative. Bien que la corrélation entre les deux méthodologies est élevée, on remarque que le modèle parvient à répliquer le niveau de la prime de risque de variance de l'indice mieux que celle des actions. Ceci est expliqué en partie par une variation faible du processus de variance sous la mesure risque-neutre engendrée par un niveau faible du paramètre risque-neutre alpha. De plus, l'erreur du VIX produit avec le modèle GARCH-CHJ dont le niveau est plus important pour les actions que pour le S&P 500 nous indique que la dynamique du VIX des actions semble être plus complexe que celle de l'indice S&P 500. Cette situation a un impact sur le niveau de la prime de risque de variance des actions calculée à partir du modèle.

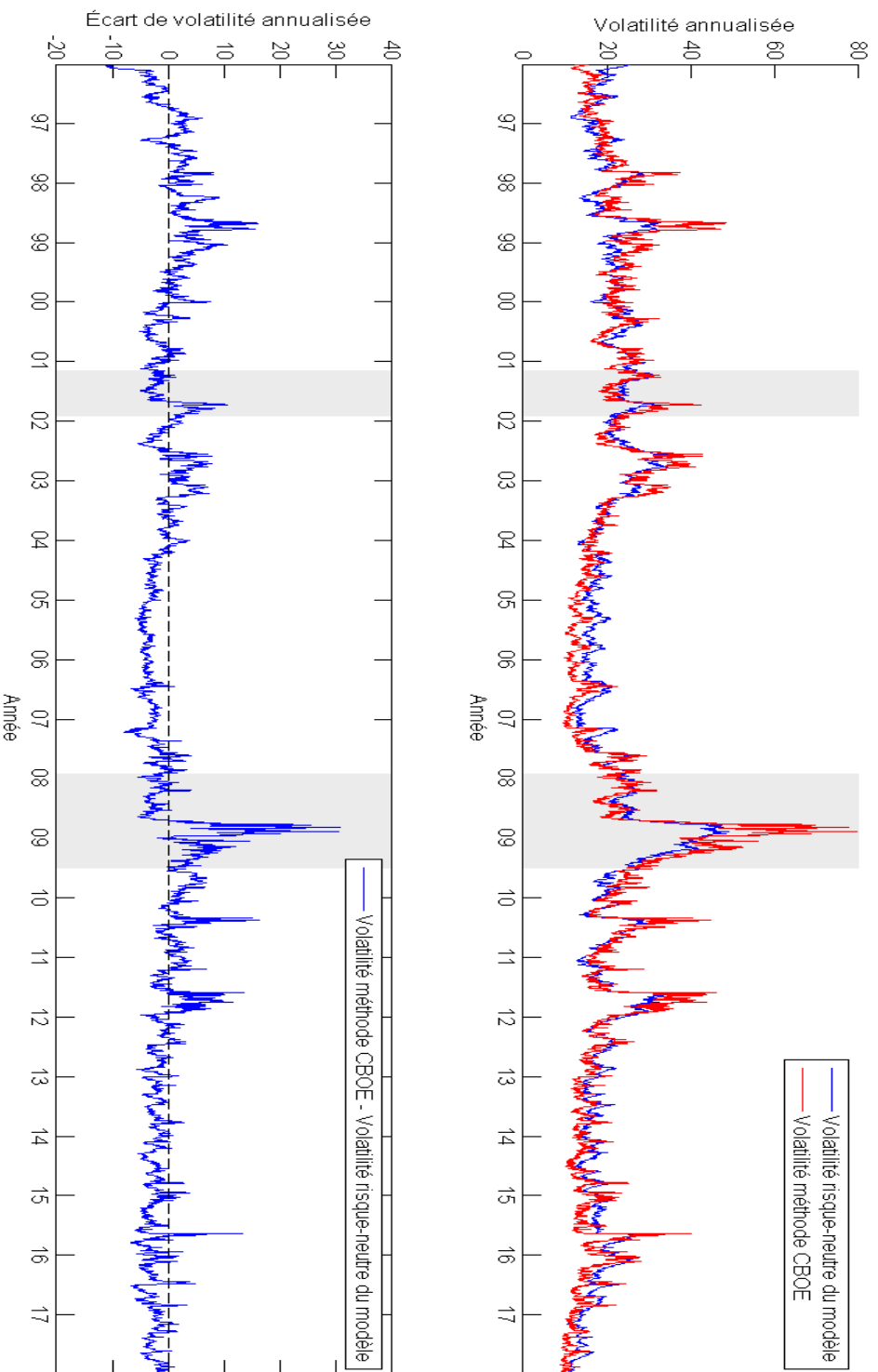
## 6 Annexe

FIGURE 1 – Composantes de la prime de risque de l'indice S&P 500



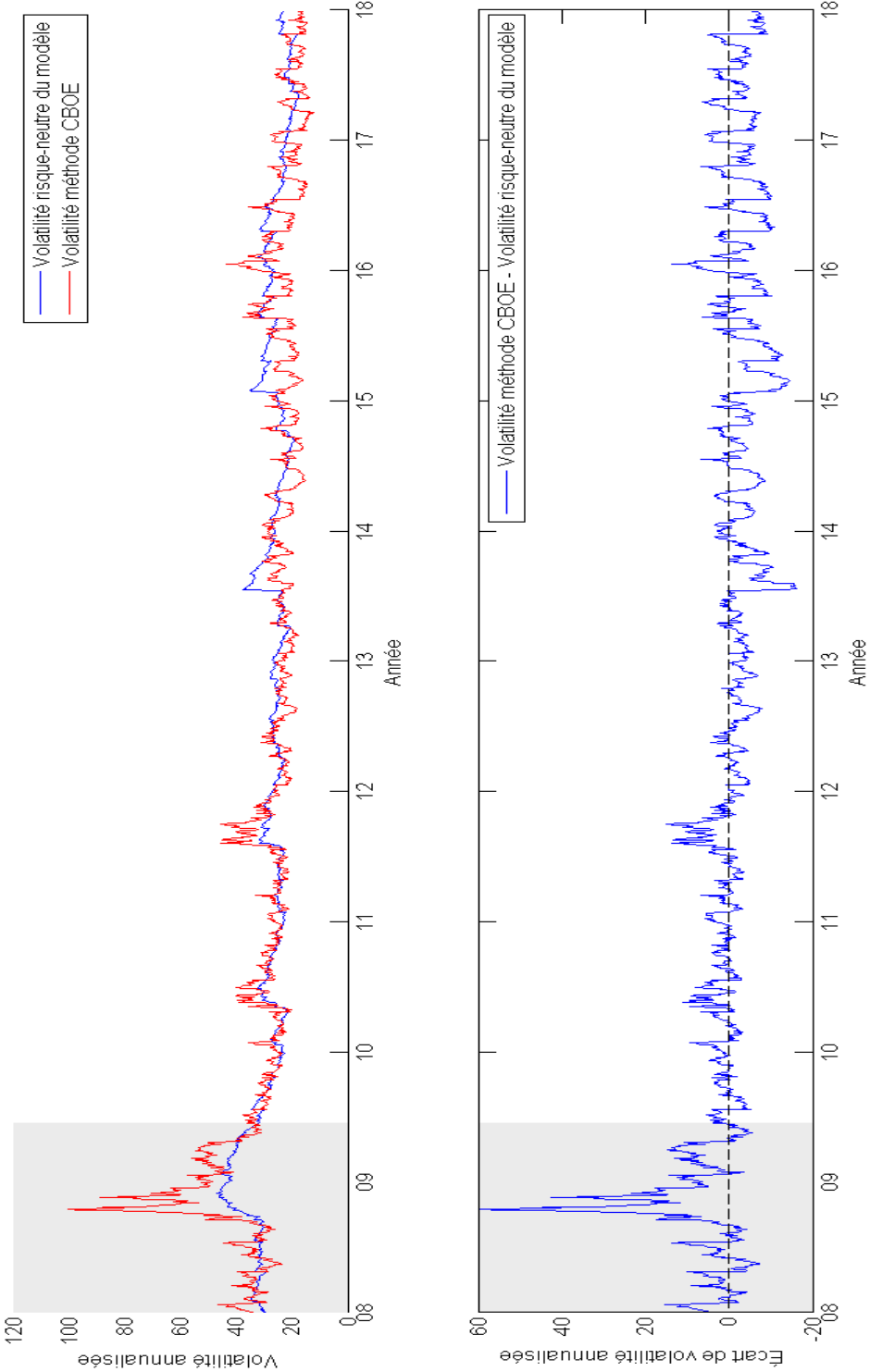
Le graphique du haut à gauche illustre l'espérance conditionnelle sans modèle sous la mesure physique et risque-neutre de la variance réalisée pour la période du 10 janvier 1996 au 19 octobre 2016 de l'indice S&P 500 obtenue à partir des formules 2 et 3. Le graphique du haut à droite illustre l'espérance conditionnelle sous la mesure physique et risque-neutre de la variance obtenue à partir du modèle GARCH-CHJ en appliquant les formules 7 et 8. Les graphiques du bas représentent la prime de risque de variance annualisée (VRP) qui correspond à l'écart entre l'espérance conditionnelle sous la mesure physique et risque-neutre calculée selon les deux méthodes. L'axe des ordonnées de la prime de risque de variance a été limité à  $-0.2$  afin de mieux illustrer les dynamiques. La prime de risque de variance sans modèle atteint un minimum de  $-0.43$  et est inférieure au seuil de  $-0.2$  pendant 23 jours. Les régions grisées représentent les périodes de récession.

FIGURE 2 – Comparaison de la volatilité risqué-neutre du modèle avec la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE pour l'indice S&P 500



Le graphique du haut illustre la volatilité risqué-neutre calculée avec le modèle GARCH-CHJ et la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE pour la période du 4 janvier 1996 au 29 décembre 2017 de l'indice l'indice S&P 500. Le graphique du bas représente l'écart entre la volatilité tirée des options et la volatilité risqué-neutre pour la même période. Les régions grisées représentent les périodes de récession.

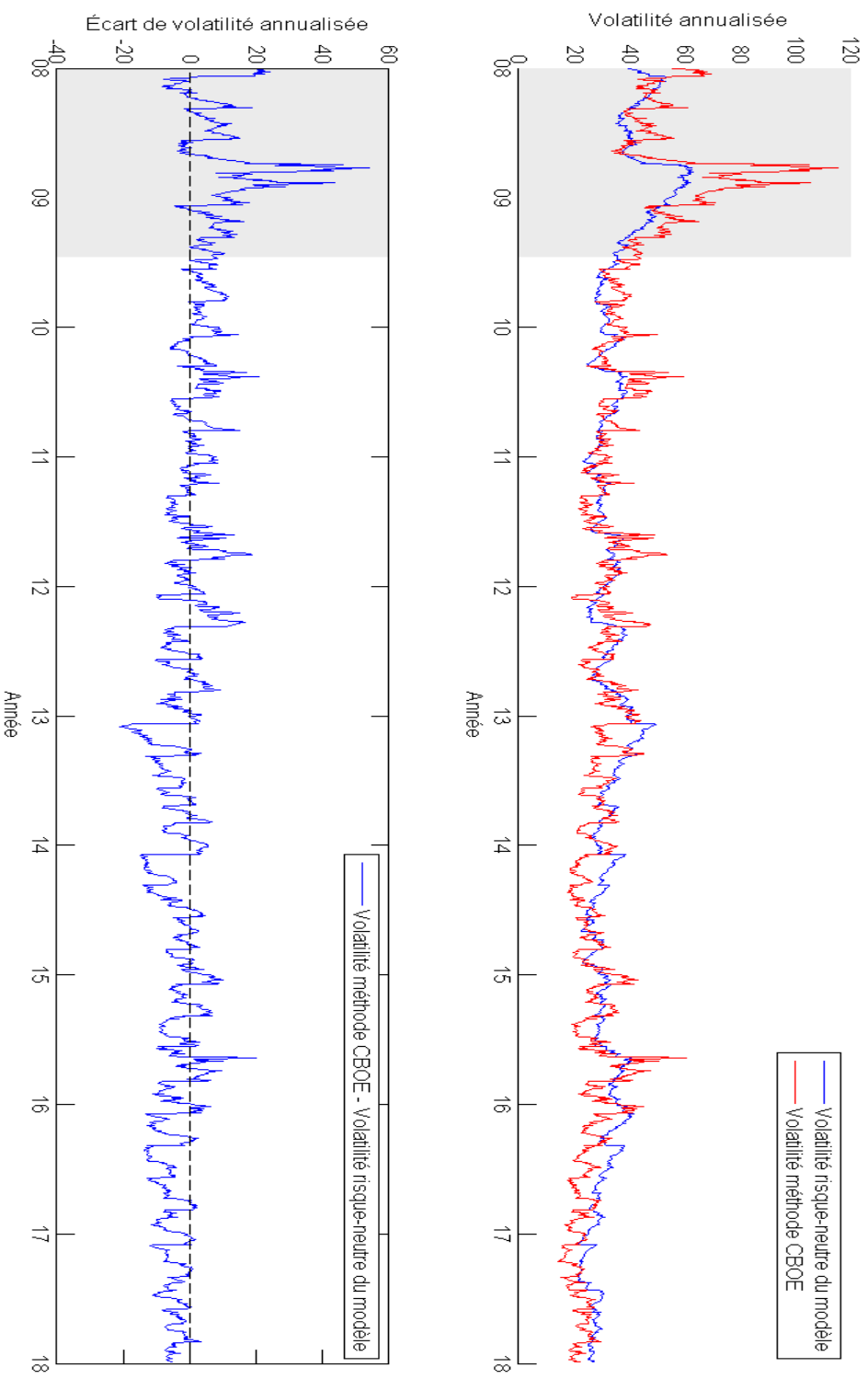
FIGURE 3 – Comparaison de la volatilité risque-neutre du modèle avec la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE pour l'action de Microsoft.



Le graphique du haut illustre la volatilité risque-neutre calculé avec le modèle GARCH-CHJ et la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE pour la période du 2 janvier 2008 au 29 décembre 2017. Le graphique du bas représente l'écart entre la volatilité tirée des options et la volatilité risque-neutre pour la même période. Les régions grisées représentent les périodes de récession.

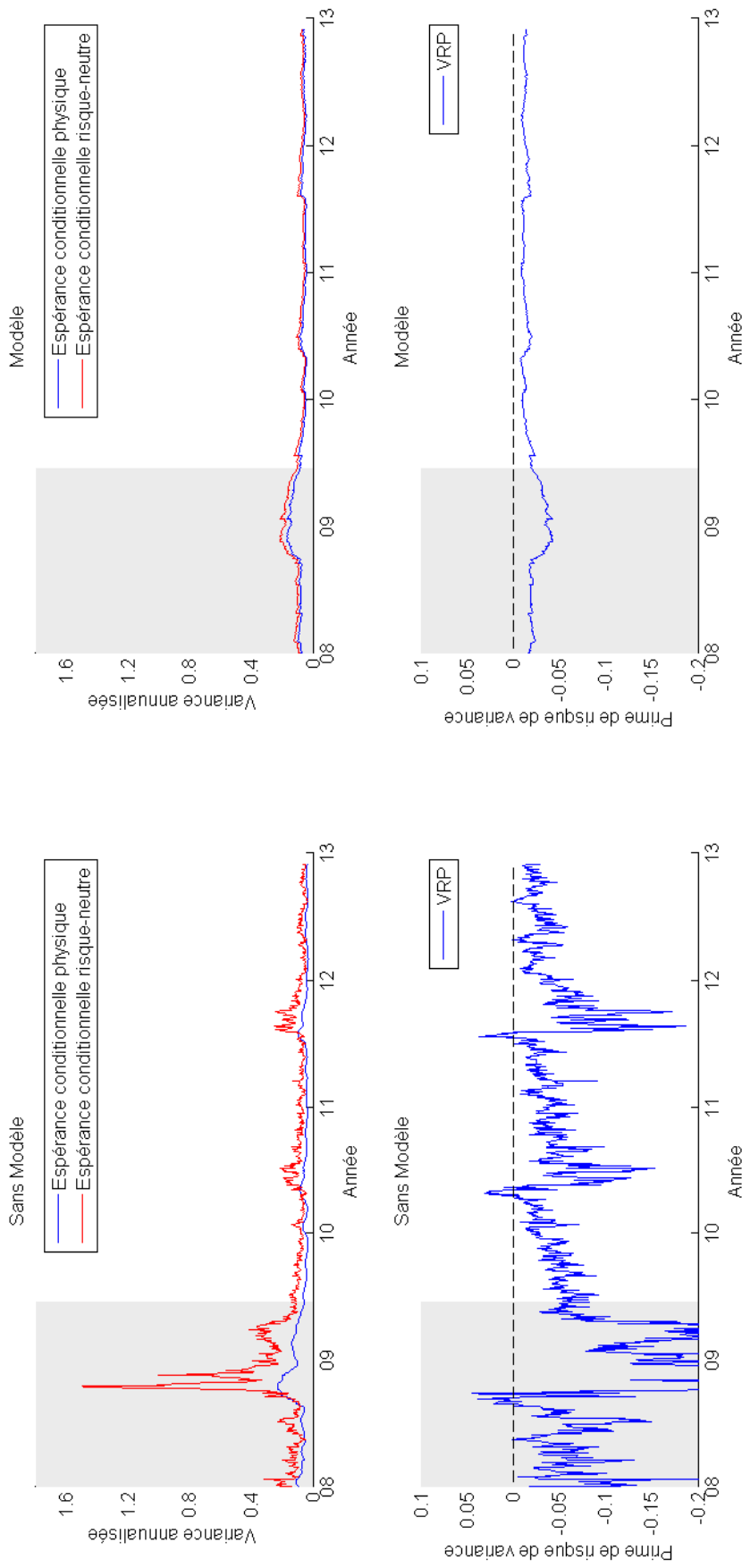


FIGURE 4 – Comparaison de la volatilité risqué-neutre du modèle avec la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE pour l'action de Apple



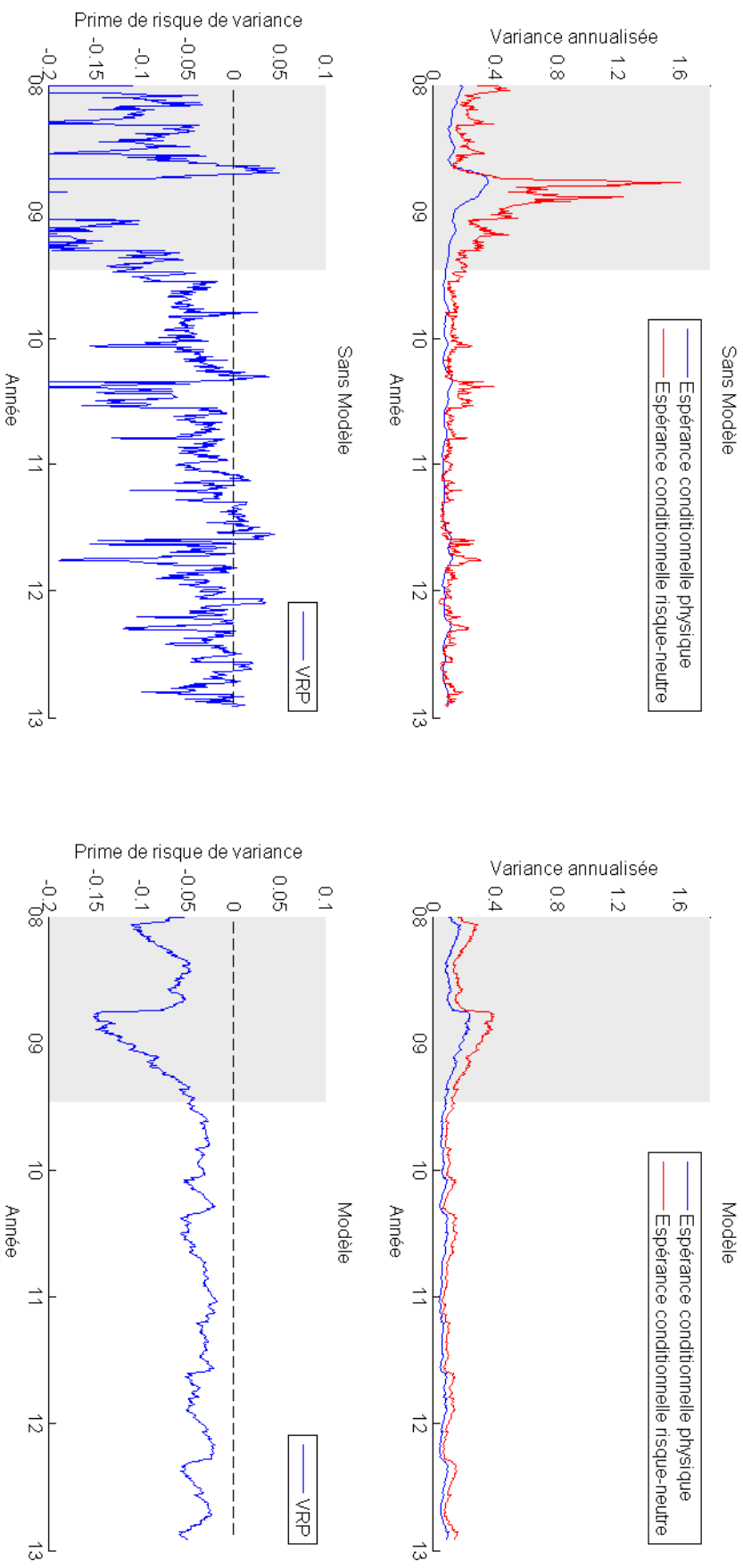
Le graphique du haut illustre la volatilité risqué-neutre calculée avec le modèle GARCH-CHJ et la volatilité tirée des options selon la méthodologie de CBOE pour la période du 2 janvier 2008 au 29 décembre 2017. Le graphique du bas représente l'écart entre la volatilité tirée des options et la volatilité risqué-neutre pour la même période. Les régions grisées représentent les périodes de récession.

FIGURE 5 – Composantes de la prime de risque de variance de l'action Microsoft



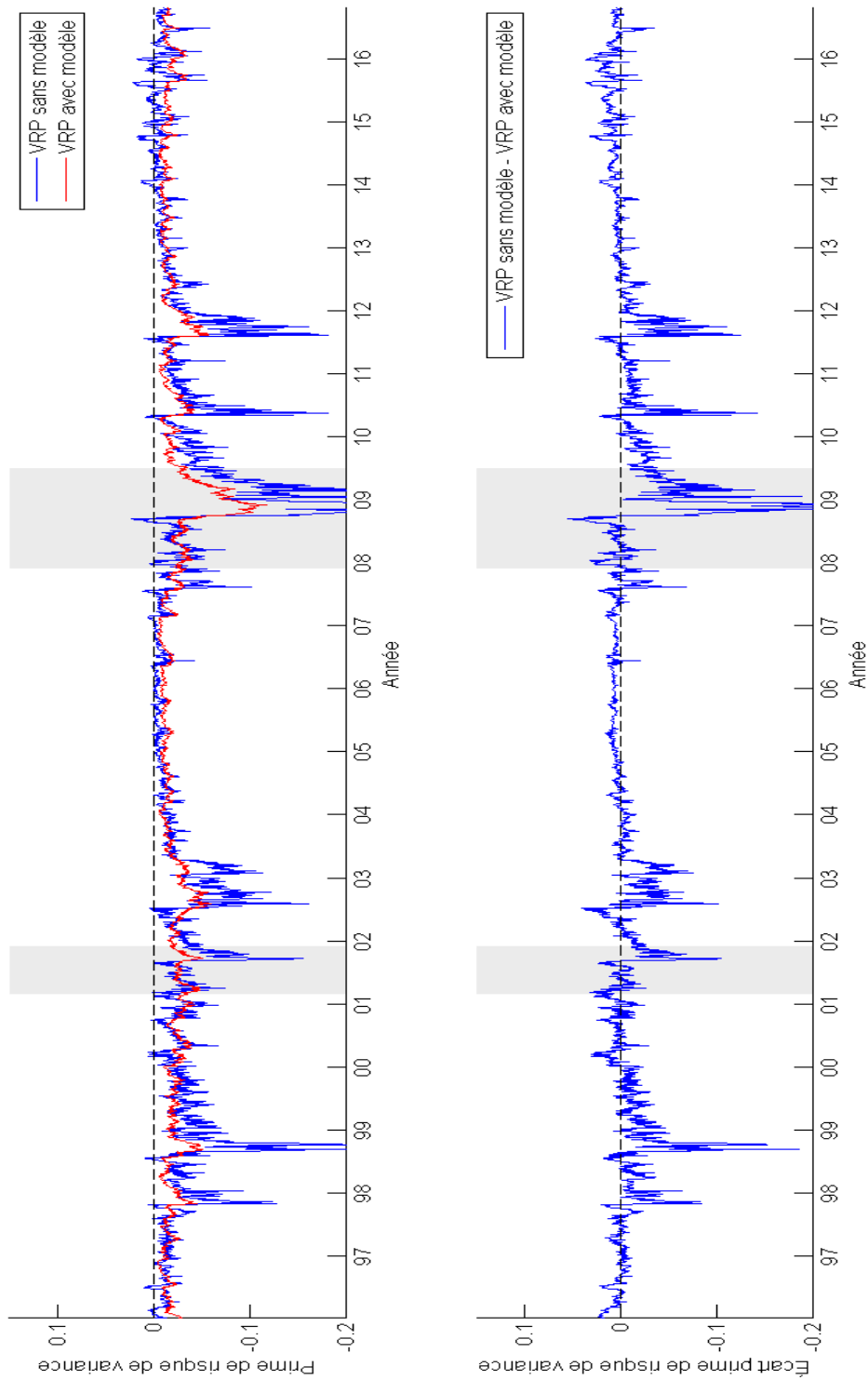
Le graphique du haut à gauche illustre l'espérance conditionnelle sans modèle sous la mesure physique et risque-neutre de la variance réalisée pour la période du 2 janvier 2008 au 29 novembre 2012 de l'action Microsoft obtenue à partir des formules 2 et 3. Le graphique du haut à droite illustre l'espérance conditionnelle sous la mesure physique et risque-neutre de la variance obtenue à partir du modèle GARCH-CHJ en appliquant les formules 7 et 8. Les graphiques du bas représentent la prime de risque de variance annualisée (VRP) qui correspond à l'écart entre l'espérance conditionnelle sous la mesure physique et risque-neutre calculée selon les deux méthodes. L'axe des ordonnées de la prime de risque de variance a été limité à  $-0.2$  afin de mieux illustrer les dynamiques. La prime de risque de variance sans modèle atteint un minimum de  $-1.27$  et est inférieure au seuil de  $-0.2$  pendant 51 jours. Les régions grisées représentent les périodes de récession.

FIGURE 6 – Composantes de la prime de risque de variance de l'action Apple



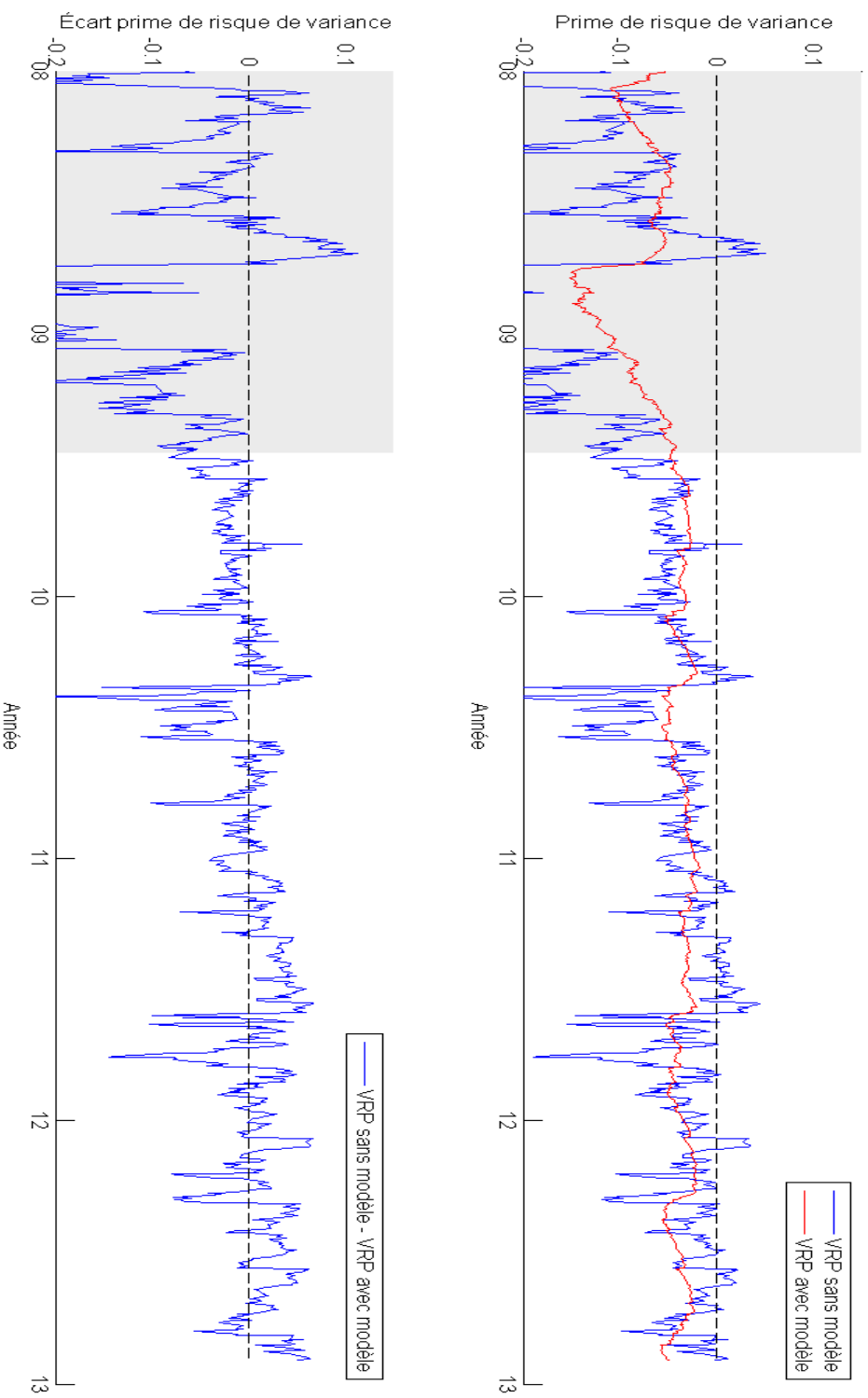
Le graphique du haut à gauche illustre l'espérance conditionnelle sans modèle sous la mesure physique et risque-neutre de la variance réalisée pour la période du 2 janvier 2008 au 29 novembre 2012 de l'action de Apple obtenue à partir des formules 2 et 3. Le graphique du haut à droite illustre l'espérance conditionnelle sous la mesure physique et risque-neutre de la variance obtenue à partir du modèle GARCH-CHJ en appliquant les formules 7 et 8. Les graphiques du bas représentent la prime de risque de variance annualisée (VRP) qui correspond à l'écart entre l'espérance conditionnelle sous la mesure physique et risque-neutre calculée selon les deux méthodes. L'axe des ordonnées de la prime de risque de variance a été limité à  $-0.2$  afin de mieux illustrer les dynamiques. La prime de risque de variance sans modèle atteint un minimum de  $-1.26$  et est inférieure au seuil de  $-0.2$  pendant 96 jours. Les régions grisées représentent les périodes de récession.

FIGURE 7 – Comparaison de la prime de risque de variance selon les deux méthodes pour l'indice S&P 500.



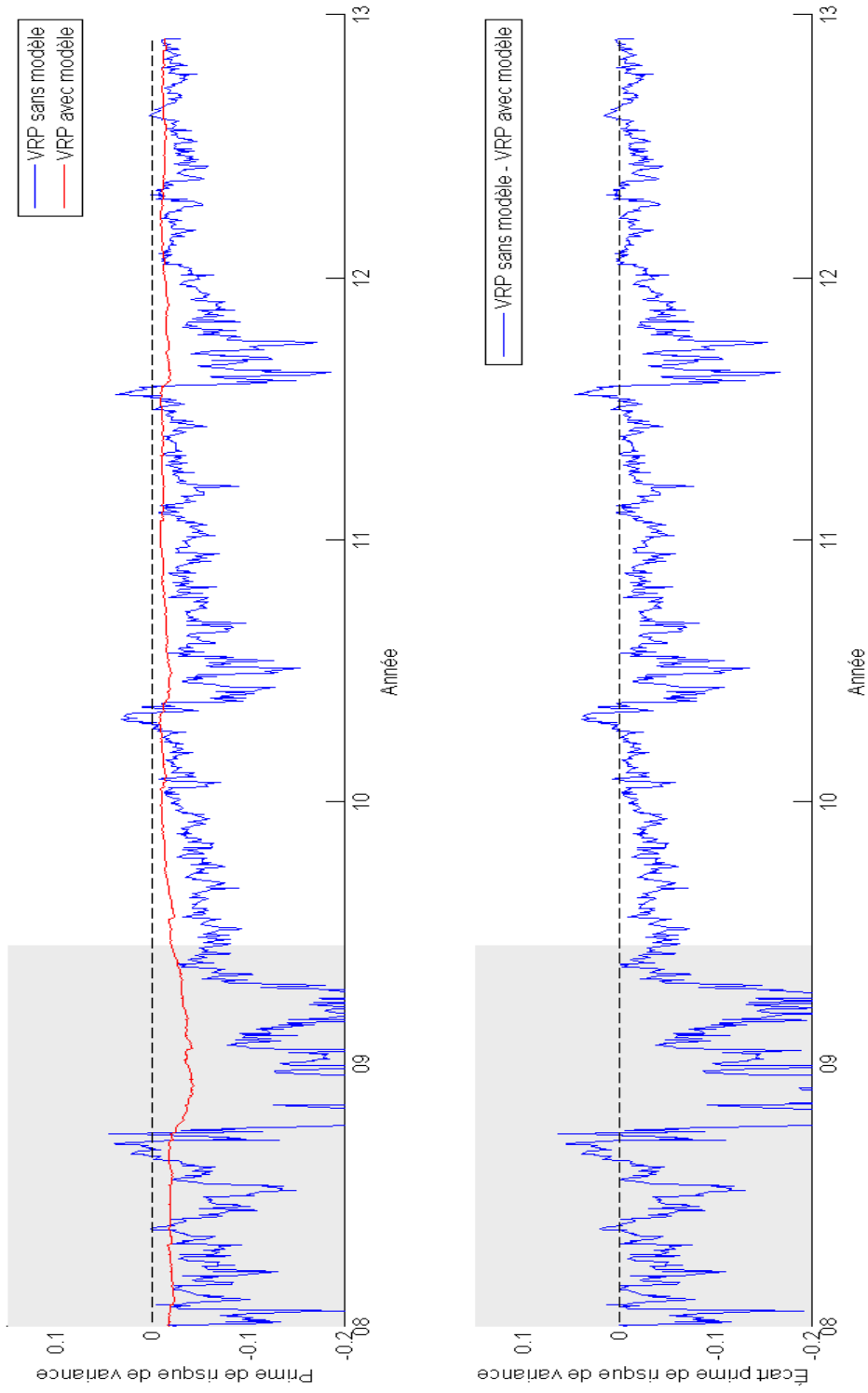
Le graphique du haut compare la prime de risque de variance calculée sans modèle avec la prime de risque de volatilité obtenue à partir du modèle GARCH-CHJ pour la période du 10 janvier 1996 au 26 août 2015 de l'indice S&P 500. Le graphique du bas illustre l'écart entre les deux primes de risque de variance. Les valeurs de l'axe des ordonnées ont été bornées à  $-0,2$  afin de mieux refléter la corrélation entre les deux séries. Les régions grisées représentent les périodes de récession.

FIGURE 8 – Comparaison de la prime de risque de variance selon les deux méthodes pour l'action de Apple.



Le graphique du haut compare la prime de risque de variance calculée sans modèle avec la prime de risque de volatilité obtenue à partir du modèle GARCH-CHJ pour la période du 02 janvier 2008 au 29 novembre 2012 de l'action de Apple. Le graphique du bas illustre l'écart entre les deux primes de risque de variance. Les valeurs de l'axe des ordonnées ont été bornées à -0,2 afin de mieux refléter la corrélation entre les deux séries. Les régions grisées représentent les périodes de récession.

FIGURE 9 – Comparaison de la prime de risque de variance selon les deux méthodes pour l'action de Microsoft.



Le graphique du haut compare la prime de risque de variance calculée sans modèle avec la prime de risque de volatilité obtenue à partir du modèle GARCH-CHJ pour la période du 02 janvier 2008 au 29 novembre 2012 de l'action de Microsoft. Le graphique du bas illustre l'écart entre les deux primes de risque de variance. Les valeurs de l'axe des ordonnées ont été bornées à  $-0,2$  afin de mieux refléter la corrélation entre les deux séries. Les régions grisées représentent les périodes de récession.

TABLE 1 – Comparaison entre le VIX calculé en appliquant la méthodologie de la CBOE et le VIX calculé avec le modèle GARCH-CHJ.

Le tableau ci-dessous permet de comparer la volatilité tirée des prix d'options selon la méthodologie employée par la CBOE à la volatilité risque-neutre 30 jours telle qu'obtenue à l'aide du modèle GARCH-CHJ équation 9. On y présente l'écart-type, l'erreur absolue moyenne (MAE), l'erreur quadratique moyenne (RMSE) et la corrélation pour l'indice S&P 500 et 28 composantes du DJ 30.

Symbole	Période	Écart-type	MAE	RMSE	Corrélation
SP	19960104 - 20171229	3,663	2,871	3,695	0,920
MSFT	20080102 - 20171229	6,421	4,333	6,438	0,787
AAPL	20080102 - 20171229	7,830	5,817	7,855	0,809
JPM	20080102 - 20171229	11,240	8,065	11,621	0,934
JNJ	20080117 - 20171229	3,806	2,525	3,814	0,836
V	20080328 - 20171229	6,658	5,022	6,676	0,846
WMT	20080104 - 20171229	5,421	3,632	5,427	0,789
PG	20080114 - 20171229	4,313	2,965	4,333	0,844
XOM	20080102 - 20171229	5,226	3,744	5,287	0,914
DIS	20080114 - 20171229	6,408	4,129	6,447	0,829
HD	20080114 - 20171229	7,532	5,429	7,586	0,884
VZ	20080102 - 20171229	5,281	3,596	5,317	0,900
KO	20080114 - 20171229	3,986	2,803	4,004	0,838
CVX	20080102 - 20171229	6,618	4,848	6,629	0,809
UNH	20080123 - 20171229	8,224	5,843	8,316	0,902
MRK	20080102 - 20171229	5,910	4,095	5,947	0,856
BA	20080102 - 20171229	6,602	4,596	6,648	0,853
CSCO	20080107 - 20171229	7,067	5,348	7,087	0,777
INTC	20080102 - 20171229	6,380	4,677	6,402	0,854
PFE	20080117 - 20171229	5,421	4,036	5,456	0,848
MCD	20080102 - 20171229	4,847	3,215	4,847	0,811
IBM	20080102 - 20171229	6,324	4,377	6,346	0,783
UTX	20080102 - 20171229	5,668	3,944	5,717	0,863
NKE	20080114 - 20171229	6,974	5,432	6,996	0,758
AXP	20080102 - 20171229	12,744	8,617	12,945	0,877
MMM	20080114 - 20171229	5,578	3,722	5,614	0,838
GS	20080102 - 20140416	14,200	9,618	14,456	0,881
CAT	20080102 - 20171229	7,943	6,173	7,997	0,847
GE	20080102 - 20171229	12,752	8,911	12,940	0,877

TABLE 3 – Statistiques descriptives de la prime de risque de variance.

Le tableau ci-dessous présente les statistiques descriptives de la prime de risque de variance sans modèle et avec modèle pour l'indice S&P 500 ainsi que 28 composantes de l'indice DJ 30. La période de comparaison évolue entre 10 janvier 1996 et le 26 août 2015 pour la prime de risque de volatilité pour l'indice S&P 500 et du 02 janvier 2008 au 28 novembre 2012 pour les composantes de l'indice DJ 30. Min, Max, Skewness et Kurtosis correspondent au minimum, maximum, coefficient d'asymétrie et coefficient d'aplatissement.

Symbole	Période	Prime de risque de volatilité sans modèle						Prime de risque de volatilité avec modèle						Corr.		
		Moyenne	Médiane	Min	Max	Écart-type	Skewness	Kurtosis	Moyenne	Médiane	Min	Max	Écart-type		Skewness	Kurtosis
SP	19960104 - 20161019	-0,0252	-0,0165	-0,4339	0,0228	0,0322	-3,7370	27,3135	-0,0200	-0,0166	-0,1112	-0,0045	0,0120	-2,4436	12,3969	0,8417
MSFT	20080102 - 20121129	-0,0628	-0,0415	-1,2697	0,0449	0,0892	-6,7303	73,2826	-0,0171	-0,0146	-0,0443	-0,0081	0,0079	-1,6064	4,9477	0,6443
AAPL	20080102 - 20121129	-0,0766	-0,0449	-1,2601	0,0502	0,1180	-4,0053	26,6532	-0,0494	-0,0429	-0,1521	-0,0174	0,0270	-1,8333	6,2157	0,7896
JPM	20080102 - 20121129	-0,1900	-0,0854	-4,1207	0,0539	0,3366	-4,4878	31,6131	-0,0914	-0,0730	-0,3248	-0,0247	0,0575	-1,5159	4,8261	0,8169
JNJ	20080318 - 20121128	-0,0424	-0,0270	-0,3302	0,0052	0,0460	-2,4445	10,0968	-0,0153	-0,0127	-0,0463	-0,0065	0,0074	-1,7939	6,5180	0,7743
V	20080328 - 20121128	-0,0888	-0,0696	-0,8334	0,0598	0,0838	-2,9251	16,3017	-0,0385	-0,0318	-0,1262	-0,0098	0,0231	-1,4401	5,1093	0,7252
WMT	20080104 - 20121128	-0,0471	-0,0310	-0,3494	0,0035	0,0539	-3,1009	13,8945	-0,0202	-0,0165	-0,0469	-0,0096	0,0094	-1,3512	3,7978	0,8048
PG	20080114 - 20121129	-0,0425	-0,0292	-0,3531	0,0015	0,0443	-3,6292	19,3459	-0,0212	-0,0179	-0,0623	-0,0090	0,0117	-1,7587	5,3250	0,8024
XOM	20080102 - 20121127	-0,0685	-0,0478	-0,6019	0,0160	0,0776	-3,4905	18,9434	-0,0321	-0,0277	-0,1209	-0,0083	0,0179	-1,9635	8,0733	0,8616
DIS	20080114 - 20121127	-0,0751	-0,0484	-0,9343	0,0109	0,0960	-4,2206	26,1978	-0,0397	-0,0335	-0,0986	-0,0210	0,0168	-1,2844	3,9924	0,7531
HD	20080114 - 20121129	-0,1014	-0,0535	-1,2538	0,0100	0,1447	-3,5581	18,9629	-0,0564	-0,0460	-0,1969	-0,0106	0,0343	-1,5093	5,0903	0,8428
VZ	20080102 - 20121128	-0,0511	-0,0266	-0,6835	0,0161	0,0698	-3,4812	19,7192	-0,0242	-0,0206	-0,0741	-0,0109	0,0120	-2,1608	7,7479	0,8632
KO	20080114 - 20121128	-0,0401	-0,0308	-0,3034	0,0113	0,0370	-3,0113	15,6162	-0,0190	-0,0169	-0,0477	-0,0091	0,0075	-1,6074	5,9097	0,8232
CVX	20080102 - 20121128	-0,0787	-0,0566	-0,5875	0,0003	0,0782	-3,3165	16,6759	-0,0158	-0,0136	-0,0554	-0,0023	0,0102	-1,2642	4,4656	0,7752
UNH	20080123 - 20121128	-0,1119	-0,0740	-1,0686	0,0186	0,1338	-3,7914	20,7169	-0,0627	-0,0532	-0,1344	-0,0346	0,0238	-1,1335	3,2645	0,7020
MRK	20080102 - 20121126	-0,0637	-0,0426	-0,6497	0,0200	0,0792	-3,3273	17,9801	-0,0272	-0,0243	-0,0659	-0,0128	0,0120	-1,2211	3,7057	0,7815
BA	20080102 - 20121128	-0,0926	-0,0619	-0,8875	0,0042	0,1041	-3,2799	17,0951	-0,0418	-0,0372	-0,1041	-0,0201	0,0174	-1,3518	4,4740	0,8162
CSCO	20080107 - 20121128	-0,0710	-0,0524	-0,6314	0,0716	0,0776	-2,6812	13,9272	-0,0354	-0,0328	-0,0635	-0,0179	0,0101	-0,8444	3,0140	0,6012
INTC	20080102 - 20121129	-0,0647	-0,0454	-0,5916	0,0640	0,0752	-2,3469	10,8019	-0,0397	-0,0362	-0,0919	-0,0203	0,0150	-1,4062	4,4966	0,7500
PFE	20080117 - 20121127	-0,0738	-0,0584	-0,4587	0,0098	0,0625	-2,1872	10,2639	-0,0399	-0,0359	-0,0984	-0,0123	0,0172	-1,0699	4,1261	0,7324
MCD	20080102 - 20121128	-0,0370	-0,0230	-0,4531	0,0143	0,0473	-3,9851	25,8949	-0,0237	-0,0211	-0,0499	-0,0108	0,0093	-1,0987	3,1930	0,6647
IBM	20080102 - 20121127	-0,0514	-0,0318	-0,5384	0,0240	0,0660	-3,4073	17,4825	-0,0246	-0,0216	-0,0617	-0,0123	0,0105	-1,6441	5,1925	0,8107
UTX	20080102 - 20121127	-0,0843	-0,0588	-0,8259	0,0189	0,0914	-3,6867	21,0180	-0,0378	-0,0336	-0,1247	-0,0115	0,0191	-1,5621	5,8928	0,8080
NKE	20080114 - 20121127	-0,0827	-0,0473	-0,7901	0,0129	0,1023	-2,8934	13,6687	-0,0280	-0,0245	-0,0723	-0,0115	0,0137	-1,4269	4,5802	0,8109
AXP	20080102 - 20121126	-0,1937	-0,0799	-3,7593	0,0654	0,4162	-4,7222	27,9792	-0,0836	-0,0625	-0,3051	-0,0152	0,0614	-1,8373	5,9223	0,7775
MMM	20080114 - 20121128	-0,0721	-0,0489	-0,7231	0,0042	0,0736	-3,1131	18,2793	-0,0309	-0,0264	-0,0768	-0,0148	0,0140	-1,3181	4,0254	0,7868
GS	20080102 - 20121127	-0,2004	-0,0779	-4,3075	0,0833	0,4106	-4,9948	33,6398	-0,0834	-0,0689	-0,3553	-0,0177	0,0545	-1,9761	7,7288	0,8165
CAT	20080102 - 20121127	-0,1157	-0,0788	-0,9157	0,0369	0,1119	-2,7457	13,3714	-0,0581	-0,0515	-0,1489	-0,0143	0,0261	-1,1319	4,1207	0,7595
GE	20080102 - 20121129	-0,1900	-0,0731	-3,3197	0,1085	0,3397	-4,0410	24,4606	-0,0384	-0,0324	-0,1495	-0,0081	0,0250	-1,5923	5,3891	0,8194



TABLE 5 – Estimation du maximum de vraisemblance du modèle HARG pour l'indice S&P 500 et 28 composantes du DJ 30.

Symbole	Période	$\beta_d$	$\beta_w$	$\beta_m$	$\delta$	$c$	$L(RV_t)$
SP	19900201 - 20161019	19355	14995	5524	1,20	1,84E-05	-58206
MSFT	19980204 - 20121129	3673	3602	2826	1,00	7,23E-05	-27249
AAPL	19980204 - 20121129	1478	1032	1149	0,98	1,83E-04	-24577
JPM	19980204 - 20121129	2174	1866	2068	0,85	1,18E-04	-26229
JNJ	19980204 - 20121129	6601	6740	6380	0,97	3,40E-05	-30055
V	19980204 - 20121129	2796	2822	1644	0,88	9,48E-05	-19588
WMT	19980204 - 20121129	2824	5663	3817	0,98	5,49E-05	-28582
PG	19980204 - 20121129	6546	7939	4207	1,03	3,56E-05	-30012
XOM	19980204 - 20121129	6452	7546	2635	1,27	3,88E-05	-25545
DIS	19980204 - 20121129	2516	3253	2083	0,96	8,15E-05	-27167
HD	19980204 - 20121129	2988	3249	2141	1,04	8,04E-05	-26971
VZ	19980204 - 20121129	3360	4799	3320	1,01	5,67E-05	-23671
KO	19980204 - 20121129	3360	4799	3320	1,01	5,67E-05	-23671
CVX	19980204 - 20121129	6166	5583	2909	1,26	4,29E-05	-21719
UNH	19980204 - 20121129	1625	1860	1429	0,93	1,22E-04	-26505
MRK	19980204 - 20121129	3532	3304	2048	1,11	6,58E-05	-27986
BA	19980204 - 20121129	2110	2253	2131	1,06	8,89E-05	-27074
CSCO	19980204 - 20121129	2134	1918	1282	1,00	1,31E-04	-25566
INTC	19980204 - 20121129	7937	101	816	1,19	8,78E-05	-25663
PFE	19980204 - 20121129	3416	3581	2161	1,22	6,31E-05	-28051
MCD	19980204 - 20121129	3414	1902	4260	1,07	6,06E-05	-28486
IBM	19980204 - 20121129	3674	4285	2326	0,98	6,37E-05	-28348
UTX	19980204 - 20121129	3946	4314	4200	0,98	5,60E-05	-28308
NKE	19980204 - 20121129	1957	1939	2045	0,90	1,02E-04	-27308
AXP	19980204 - 20121129	3089	2971	1501	0,81	9,95E-05	-26687
MMM	19980204 - 20121129	3970	5899	4064	1,07	4,67E-05	-29068
GS	19980204 - 20121129	3970	5899	4064	1,07	4,67E-05	-29068
CAT	19980204 - 20121129	3280	2781	2268	1,16	8,02E-05	-26940
GE	19980204 - 20121129	3914	3575	2117	0,97	7,38E-05	-27676

Le tableau ci-dessus présente les paramètres optimaux du modèle HARG estimés avec la méthode du maximum de vraisemblance utilisant la variance réalisé.

TABLE 6 – Estimation du maximum de vraisemblance conjoint du modèle GARCH-CHJ pour l'indice S&P 500 et 28 composantes du DJ 30.

Symbole	Période	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\lambda$	$(1 - 2\alpha\xi)^{-1}$	$\omega^*$	$\alpha^*$	$\beta^*$	$\gamma^*$	$L(VIX_t, R_t)$	$L(VIX_t) L(R_t)$	
SP	19960104 - 20171229	2,09E-12	1,44E-06	0,924	203,16	2,1	1,901	3,97E-12	5,20E-06	0,924	108,26	1336	-15031	17702
MSFT	20080102 - 20171229	2,21E-11	3,02E-06	0,973	69,80	1,2	1,255	2,78E-11	4,76E-06	0,973	56,63	-666	-8095	6763
AAPL	20080102 - 20171229	2,43E-11	3,91E-06	0,961	77,06	3,0	1,632	3,96E-11	1,04E-05	0,961	49,24	-1043	-8554	6467
JPM	20080102 - 20171229	1,15E-11	5,10E-06	0,919	111,30	1,7	1,745	2,00E-11	1,55E-05	0,919	64,97	-1693	-9682	6297
JNJ	20080117 - 20171229	1,07E-09	1,78E-06	0,956	99,29	3,5	1,898	2,02E-09	6,43E-06	0,956	54,40	516	-5311	6343
V	20080328 - 20171229	2,03E-11	4,08E-06	0,877	159,56	4,2	1,441	2,93E-11	8,47E-06	0,877	113,78	-703	-8035	6628
WMT	20080104 - 20171229	9,33E-10	8,90E-07	0,980	106,86	5,0	1,703	1,59E-09	2,58E-06	0,980	65,89	-69	-7250	7112
PG	20080114 - 20171229	5,00E-12	1,26E-06	0,970	100,48	0,9	1,984	9,92E-12	4,95E-06	0,970	51,37	357	-6610	7323
XOM	20080102 - 20171229	4,33E-12	2,11E-06	0,932	155,59	-5,0	1,997	8,64E-12	8,43E-06	0,932	75,68	-143	-7514	7227
DIS	20080114 - 20171229	7,93E-14	2,96E-06	0,978	0,00	4,0	1,944	1,54E-13	1,12E-05	0,978	2,29	-467	-7399	6465
HD	20080114 - 20171229	1,05E-11	1,80E-06	0,903	213,82	4,9	2,139	2,24E-11	8,23E-06	0,903	102,53	-720	-8289	6849
VZ	20080102 - 20171229	1,29E-13	2,13E-06	0,978	37,98	-2,2	1,799	2,32E-13	6,91E-06	0,978	20,11	-81	-7372	7210
KO	20080114 - 20171229	8,40E-14	1,44E-06	0,978	30,73	2,0	1,975	1,66E-13	5,63E-06	0,978	16,82	436	-6059	6930
CVX	20080102 - 20171229	2,97E-11	5,35E-06	0,815	173,12	0,8	1,291	3,83E-11	8,91E-06	0,815	134,89	-499	-7693	6695
UNH	20080123 - 20171229	2,00E-14	2,60E-06	0,985	0,00	5,0	2,034	4,06E-14	1,08E-05	0,985	2,71	-922	-8157	6313
MRK	20080102 - 20171229	3,91E-13	1,52E-06	0,981	69,06	1,2	1,633	6,38E-13	4,05E-06	0,981	43,23	-375	-7448	6697
BA	20080102 - 20171229	1,96E-11	2,94E-06	0,966	77,91	3,3	1,690	3,32E-11	8,41E-06	0,966	48,23	-713	-7945	6520
CSCO	20080107 - 20171229	1,29E-11	1,51E-06	0,986	62,40	2,6	1,502	1,94E-11	3,42E-06	0,986	43,46	-816	-7879	6246
INTC	20080102 - 20171229	1,89E-09	1,66E-06	0,962	130,07	2,0	1,638	3,10E-09	4,47E-06	0,962	80,84	-700	-7838	6437
PFE	20080117 - 20171229	2,35E-10	2,11E-06	0,964	73,84	2,2	2,390	5,61E-10	1,20E-05	0,964	32,10	-129	-6453	6196
MCD	20080102 - 20171229	1,16E-08	6,40E-07	0,973	165,63	3,4	2,000	2,32E-08	2,56E-06	0,973	84,78	152	-6972	7276
IBM	20080102 - 20171229	1,30E-11	1,08E-06	0,979	101,58	0,0	1,686	2,19E-11	3,07E-06	0,979	60,48	-442	-8157	7273
UTX	20080102 - 20171229	1,35E-13	2,85E-06	0,950	91,44	2,4	2,107	2,84E-13	1,27E-05	0,950	44,81	-204	-6840	6433
NKE	20080114 - 20171229	5,33E-11	2,53E-06	0,966	88,55	4,2	1,432	7,63E-11	5,19E-06	0,966	64,95	-699	-7274	5876
AXP	20080102 - 20171229	7,47E-12	2,71E-06	0,869	209,65	2,2	1,823	1,36E-11	8,99E-06	0,869	116,42	-1664	-9834	6506
MMM	20080114 - 20171229	1,03E-09	2,55E-06	0,964	69,98	4,9	1,924	1,98E-09	9,43E-06	0,964	39,18	-95	-6880	6691
GS	20080102 - 20140416	3,13E-11	4,00E-06	0,825	204,55	-0,4	1,550	4,85E-11	9,62E-06	0,825	131,83	-1365	-6463	3733
CAT	20080102 - 20171229	2,91E-12	2,39E-06	0,926	160,02	3,9	1,690	4,92E-12	6,83E-06	0,926	97,22	-1112	-8549	6325
GE	20080102 - 20171229	2,55E-12	2,85E-06	0,876	206,32	-4,9	1,434	3,66E-12	5,87E-06	0,876	140,55	-1511	-9603	6580

Le tableau ci-dessus présente les paramètres optimaux du modèle GARCH-CHJ estimés avec la méthode du maximum de vraisemblance conjoint  $L(VIX_t, R_t)$  utilisant les rendements et l'indice de volatilité historique quotidien.  $L(VIX_t)$  et  $L(R_t)$  représentent respectivement la portion du log vraisemblance provenant du VIX et des rendements.

## 7 Bibliographie

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., et Labys, P. (2003). Modeling and Forecasting Realized Volatility. *Econometrica*, 71(2), 579-625.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., et Labys, P. (2001). The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility. *Journal of the American Statistical Association*, 96(453), 42-55.

Badescu, A., Chen, Y., Couch, M., et Cui, Z. (2019) Variance Swaps Valuation Under Non-affine GARCH Models and their Diffusion Limits. *Quantitative Finance*, 19(2), 227-246.

Bakshi, G., et Madan, D. (2000), Spanning and Derivative-security Valuation, *Journal of Financial Economics*, 55, 205-238.

Bakshi, G., et Kapadia, N. (2003, a). Delta-Hedged Gains and the Negative Volatility Risk Premium. *Review of Financial Studies*, 16 (2), pp. 527-566.

Bakshi, G., et Kapadia, N. (2003, b). Volatility Risk Premiums Embedded in Individual Equity Options : Some New Insights, *Journal of Derivatives*, 11 , 45-54.

Bakshi, G., Kapadia, N., et Madan, D. (2003), Stock Return Characteristics, Skew Laws, and the Differential Pricing of Individual Equity Options, *Review of Financial Studies*, 16(1), 101-143.

Bormetti, G., Corsi F., et Majewski A. A. (2016). Term Structure of Variance Risk Premium and Returns' Predictability. Working paper, Available at SSRN : <https://ssrn.com/abstract=2619278>

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31 :307-27.

Bollerslev, T., Gibson, M., et Zhou, H. (2011). Dynamic Estimation of volatility risk premia and investor risk aversion from option-implied and realized volatilities, *Journal of Econometrics*, 160(1), 235-245.

Bekaerta, G., et Hoerovab. M. (2014). The VIX, the Variance premium and stock market volatility. *Journal of Econometrics*, 183, 181-192

Bruno, F., Ricardo, A., Roméo, T., et Lai., X. (2017). Variance Premium, Downside Risk, and Expected Stock Returns. *SSRN Electronic Journal*. 10.2139/ssrn.3189810.

- Carr, P., et Madan, D. (2001). Optimal Positioning in Derivative Securities. *Quantitative Finance*, 1, 19-37.
- Carr, P., et Wu, L. (2006). A tale of two indices. *The Journal of Derivatives*, 13(3), 13-29.
- Carr, P., et Wu, L. (2009). Variance Risk Premia. *The Review of Financial Studies*, vol. 22, No. 3
- Chicago Board Options Exchange (2009). The CBOE volatility index. White Paper .
- Christian, Dorion (2016). 6-206-10A Derivatives II GARCH, notes de cours GARCH Models and Derivatives, HEC Montréal.
- Christoffersen, P., Heston, S., et Jacobs, K. (2013). Capturing Option Anomalies with a variance dependent pricing kernel. *Review of Financial Studies*, 26(8), 1963–2006.
- Christoffersen, P., Jacobs, K., Ornathanalai, C., et Wang, Y. (2008), Option Valuation With Long-Run and Short-Run Volatility Components, *Journal of Financial Economics*, 90, 272–297. [483,485,495]
- Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized-volatility. *Journal of Financial Econometrics* 7, 174–196.
- Corsi, F., Audrino, E., et Reno, R. (2012). HAR modeling for realized volatility forecasting. In L. Bauwens, C. Hanfer, & S. Laurent (Eds.), *Handbook of volatility models and their applications*, (Chapter 15, pp. 363–382), Hoboken, New Jersey, USA : John Wiley & Sons, Inc.
- Corsi, F., Fusari, N., et La Vecchia, D. (2013). Realizing smiles : Options pricing with realized volatility. *J. Financ. Econom.* 107 (2), 284–304.
- Du, J., et Kapadia, N. (2011). The tail in the volatility index. Working Paper, University of Massachusetts.
- Duan, J.-C. (1995). The garch option pricing model. *Mathematical Finance*, 5(1), 13-32.
- Driessen, J., Maenhout, P., et Vilkov, G. (2009). The price of correlation risk : Evidence from equity options, *Journal of Finance* 64, 1377, 1406.

- Gourieroux, C., et Jasiak, J. (2006). Autoregressive gamma processes. *Journal of Forecasting*, 25(2), 129–152.
- Heston, S. et Nandi, S. (2000). A Closed-Form GARCH Option Valuation Model. *Review of Financial Studies*, 13(3) :585–625
- Han, B., et Zhou, Y. (2011). Variance Risk Premium and Cross-Section of Stock Returns. Working paper. University of Texas at Austin
- Hansen, P.R., Huang, Z., et Wang, T. (2015). Realized EGARCH, CBOE VIX and Variance Risk Premium. Working Paper.
- Hao, J., et Zhang, J. E. (2013). GARCH Option Pricing Models, the CBOE VIX, and Variance Risk Premium. *Journal of Financial Econometrics*, 11(3), 556-580.
- Heston, S. L., & Nandi, S. (2000). A Closed-form GARCH Option Valuation Model. *The Review of Financial Studies*, 13(3), 585-625.
- Huang, Z., Tong, C., et Wang, T. (2019). VIX Term Structure and VIX Futures Pricing with Realized Volatility. *Journal of Futures Markets*, 39, 72–93.
- Kanniainen, J., Lin, B., et Yang, H. (2014). Estimating and using GARCH models with VIX data for option valuation. *Journal of Banking & Finance*, 43, 200-211.
- Majewski, A. A., Borinetti, G., et Corsi, F. (2015). Smile from the Past : A General Option Pricing Framework with Multiple Volatility and Leverage Components. *Journal of Econometrics*, 187(2), 521–531.
- Papantonis, I. (2016) Volatility Risk Premium Implications of GARCH Option Pricing Models. *Economic Modelling* 58, 104-115.
- Philippe, H. (2015). Les déterminants macroéconomiques de la prime de risque de volatilité, [travail dirigé], Montréal, École des hautes études commerciales, 79 p.
- Poon, S. H. (2008). Volatility Estimation.
- Wahl, A. (2016). Variance Risk Premia. *Junior Management Science*, 1(1), 1-33.
- William, McCausland (2006). ECN 6578 Économétrie des marchés financiers, notes de cours ECN 6578 Module 5 [présentation PDF], UDEM.

Yue, Y. (2015). Variance Risk Premium : Estimation, Term Structure and Equity Risk Premium Predictability.

Zhang, L., Mykland, P. A., et Ait-Sahalia, Y. (2005). A Tale of Two Time Scales : Determining Integrated Volatility with Noisy High-frequency Data. *Journal of the American Statistical Association*, 100(472), 1394–1411.

