

HEC Montréal

Les développeurs immobiliers sont-ils rationnels?

Analyse du marché montréalais de la copropriété

Par

Jérôme Lacasse

Sciences de la gestion

Finance

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences (M.Sc.)*

Décembre 2014

© Jérôme Lacasse, 2014

SOMMAIRE

Le marché canadien de la copropriété a connu un véritable essor au cours des dernières années et plusieurs, dont la Banque du Canada, s'inquiètent du comportement des développeurs immobilier qui continuent de lancer de nombreux projets dans les grandes villes du pays. En se basant sur la théorie des options réelles, on propose un modèle d'évaluation en temps discret où le prix de la propriété (re)développée suit une dynamique GARCH pour déterminer la valeur de l'option de (re)développement, c'est-à-dire le droit pour le détenteur d'une propriété sous-développée de démolir ou de modifier la structure existante pour en construire une nouvelle. Ce droit peut être vu comme une option d'achat américaine sur une propriété (re)développée à un prix d'exercice équivalent à son coût total de réalisation. En comparant l'exercice réel de cette option à l'exercice optimal théorique suggéré par le modèle, on est alors en mesure de déterminer si la décision d'un développeur immobilier de lancer un projet est justifiable d'un point de vue économique. En s'appuyant sur des données inédites et détaillées concernant le (re)développement de 48 projets d'immeubles à condos sur l'Île de Montréal entre 2010 et 2013, on trouve que les développeurs immobiliers exercent leur option de (re)développement de manière rationnelle, mais sous-optimale, alors qu'il aurait été préférable dans la majorité des cas de revendre ou conserver la propriété-développée plutôt que de procéder à son (re)développement.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je voudrais remercier JLR Solutions Foncières et tout particulièrement Félix Laroche et Christian Boivin qui m'ont gracieusement permis d'utiliser leur base de données et sans qui la réalisation de ce travail aurait sans doute été impossible. Les côtoyer aura été un réel plaisir et ils m'auront permis de transformer mon intérêt pour l'immobilier en une réelle passion.

Je tiendrais également à remercier Pascal François, tout d'abord comme professeur pour m'avoir permis d'approfondir mes connaissances dans le domaine des produits dérivés et par la suite comme directeur pour son temps, ses directives et ses judicieux conseils dans le cadre de la réalisation de ce mémoire.

J'aimerais aussi remercier mes proches, famille et amis, et tout particulièrement ma conjointe pour son support inconditionnel et surtout pour sa très grande compréhension face aux nombreuses heures passées à travailler sur ce mémoire, qui au final sera un peu le sien aussi.

Finalement, je souhaiterais terminer en remerciant tous ceux qui ont contribué de près ou de loin, directement ou indirectement, à la réalisation de ce travail. À ce jour, il s'agit sans doute de l'un de mes plus grands accomplissements et je n'oublierai jamais la contribution de chacun d'entre vous.

Table des matières

SOMMAIRE	i
REMERCIEMENTS	ii
I – INTRODUCTION	1
II – REVUE DE LA LITTÉRATURE	5
2.1 - Options financières et options réelles	5
2.2 - Options réelles et développement immobilier	8
2.3 - L'exercice optimal de l'option de développement	14
2.4 - Question de recherche et apport à la littérature	17
III – DONNÉES	18
3.1 – Construction de la base de données	18
3.2 – Statistiques descriptives.....	19
IV – MÉTHODOLOGIE	23
4.1 – Flux monétaires associés à l'option de (re)développement	23
4.2 – Valeur de la propriété (re)développée	26
4.3 – Dynamique de prix de la variable d'état	27
4.4 – Approche de tarification	31
V – ESTIMATIONS EMPIRIQUES	36
5.1 - Estimation du modèle factoriel	36
5.2 – Modélisation GARCH de la variable aléatoire	42
VI – PRÉSENTATION DES RÉSULTATS.....	48
6.1 - Tarification de l'option de (re)développement	48
6.1.1 - Dérivation du modèle de prix de la propriété (re)développée	48
6.1.2 - Choix des paramètres	50
6.1.3 - Valeur de l'option de (re)développement	54
6.2 – Frontière d'exercice et exercice optimal	55

VII – ANALYSE ET ROBUSTESSE DES RÉSULTATS	59
7.1 - Analyse des résultats	59
7.1.1 - Proportion de l'option de (re)développement	60
7.1.2 - Exercice de l'option de (re)développement	66
7.2 - Analyse de sensibilité et test de robustesse	74
7.2.1 - Analyse de sensibilité	75
7.2.2 - Robustesse	79
VIII – CONCLUSION	84
Annexe A : Spécifications GARCH	85
Annexe B : Passage à la mesure de probabilité risque-neutre	88
BIBLIOGRAPHIE	124

Liste des Tableaux

3.1 – Statistiques descriptives des projets composant l'échantillon	20
3.2 – Répartition géographique des projets composant l'échantillon	20
4.1 – Statistiques descriptives des rendements mensuels du <i>PMPC</i>	30
5.1 – Statistiques descriptives de l'estimation MCO du modèle factoriel	37
5.2 – Résultats de l'estimation MCO du modèle factoriel	40
5.3 – Erreurs de prévisions hors échantillon	42
5.4 – Résultats de l'estimation MCO du modèle autorégressif d'ordre 4	43
5.5 – Résultats de l'estimation par maximum de vraisemblance des spécifications GARCH, NGARCH et AGARCH	45
5.6 – Erreur quadratique moyenne de la modélisation de la variable d'état	47
6.1 – Résultats de l'estimation MCO du délai de construction et du délai de vente	53
6.2 – Prime de l'option de (re)développement	89
6.3 – Exercice optimal de l'option de (re)développement	91
6.4 – Synthèse des résultats de l'estimation de la prime de l'option de (re)développement et de son exercice	55
7.1 – Statistiques descriptives des résultats de l'estimation LSM	60
7.2 – Analyse de la proportion de l'option de (re)développement par regroupement	63
7.3 – Résultats de l'estimation MCO des déterminants de la proportion de l'option de (re)développement	66
7.4 – Résultats de l'estimation MCO des déterminants de l'exercice de l'option de (re)développement	69
7.5 – Comparaison de l'exercice réel de l'option de (re)développement à son exercice optimal	71
7.6 – Comparaison des statistiques descriptives de l'estimation LSM et CRR	80
7.7 – Comparaison des différences entre l'exercice réel et l'exercice optimal selon le modèle LSM et le modèle CRR	82

Table des Figures

2.1 - Évolution de la valeur économique d'un terrain	11
3.1 – Répartition temporelle des projets composant l'échantillon	21
4.1 – Évolution mensuelle du <i>PMPC</i> des unités en copropriété à Montréal de décembre 1983 à mars 2014	28
4.2 – Évolution mensuelle du <i>PMPC</i> , de l'Indice Teranet-Banque Nationale et de l'Indice du prix des maisons MLS de janvier 2005 à mars 2015	28
4.3 – Log-rendements mensuels du <i>PMPC</i> de janvier 1984 à mars 2014	93
5.1 – Rendements estimés/réels du <i>PMPC</i> (échantillon : janvier 1984 à décembre 1995)	93
5.2 – Rendements estimés/réels du <i>PMPC</i> (échantillon : janvier 1984 à décembre 2000)	94
5.3 – Rendements estimés/réels du <i>PMPC</i> (échantillon : janvier 1984 à décembre 2005)	94
5.4 – Rendements estimés/réels du <i>PMPC</i> (échantillon : janvier 1984 à décembre 2010)	95
6.1 à 6.8 – Frontière d'exercice de l'option de (re)développement	95
6.9 – Exemple de frontières d'exercice de projets typiques	57
6.10 – Frontière d'exercice d'un call américain à prix d'exercice constant	58
7.1 – Histogramme de la proportion de l'option de (re)développement	61
7.2 – Histogramme de la proportion – Projets de redéveloppement	99
7.3 – Histogramme du ratio d'exercice	67
7.4 – Histogramme du nombre de mois avant l'exercice	68
7.5 à 7.12 – Analyse graphique de l'exercice de l'option de (re)développement	100
7.13 – Exemple de projets typiques	70
7.14 – Distribution de la différence entre la date d'exercice effective et la date d'exercice suggérée par le modèle	73
7.15 – Analyse de sensibilité de la proportion de l'option de (re)développement au <i>PMPC</i> à $t = 0$	108
7.16 – Analyse de sensibilité de la proportion de l'option de (re)développement au coefficient α	109
7.17 – Analyse de sensibilité de la proportion de l'option de (re)développement au coût de construction indirect par pied carré de superficie habitable	110

7.18 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement au délai entre l’exercice et la réception du produit de la vente des condos	111
7.19 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement à la maturité	112
7.20 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement au taux sans risque ..	113
7.21 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement au taux de dividende	114
7.22 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement à la maturité avec un taux de dividende égal à 5%	115
7.23 – Analyse de sensibilité de la frontière d’exercice de l’option de (re)développement au $PMPC$ à t_0	116
7.24 – Analyse de sensibilité de la frontière d’exercice de l’option de (re)développement au coefficient α	117
7.25 – Analyse de sensibilité de la frontière d’exercice de l’option de (re)développement au coût de construction indirect par pied carré de superficie habitable	118
7.26 – Analyse de sensibilité de la frontière d’exercice de l’option de (re)développement au délai entre l’exercice et la réception du produit de la vente des condos	119
7.27 – Analyse de sensibilité de la frontière d’exercice de l’option de (re)développement à la maturité	120
7.28 – Analyse de sensibilité de la frontière d’exercice de l’option de (re)développement au taux sans risque	121
7.29 – Analyse de sensibilité de la frontière d’exercice de l’option de (re)développement au taux de dividende	122
7.30 – Analyse de sensibilité de la frontière d’exercice de l’option de (re)développement à la maturité avec un taux de dividende égal à 5%	123
7.31 – Distribution de la différence entre la date d’exercice effective et la date d’exercice suggérée par le modèle LSM et le modèle CRR	81

I - INTRODUCTION

Depuis quelques années déjà, l'état du marché immobilier résidentiel canadien fait l'objet de vives inquiétudes de la part de plusieurs économistes à travers le monde. Robert Shiller, récipiendaire du prix Nobel en économie, et l'un de ceux à avoir prédit l'éclatement de la bulle immobilière aux États-Unis, a récemment mentionné que le Canada risquait de vivre un épisode similaire, mais moins catastrophique, à celui vécu par son voisin du sud lors de la plus récente crise financière. Tout comme aux États-Unis, le prix des maisons au Canada a commencé son ascension au début des années 2000, alimenté entre autre par de faibles taux d'intérêt. En effet, de 2000 à 2006 le prix des maisons a augmenté de 102,4 % aux États-Unis et de 52,6 % au Canada¹. Toutefois, pendant que le marché américain s'effondrait en 2007 et 2008, au Canada, l'Indice Composite National de Prix de Maison Teranet - Banque Nationale^{MC} progressait de 47,6 % de 2006 à 2013, alors qu'aux États-Unis le S&P/Case-Shiller 20-City Composite Home Price Index perdait 27,8 %. Cette augmentation spectaculaire de 125,2 % du prix des maisons au Canada de 2000 à 2013, conjuguée à des niveaux record d'endettement des ménages canadiens, constitue l'un des principaux facteurs de risque internes pour la stabilité financière du Canada selon la Banque du Canada (2013). Cette dernière n'est d'ailleurs pas la seule à s'inquiéter de la situation, puisque le gouvernement du Canada, par l'entremise de l'ancien ministre des Finances Jim Flaherty, a pris plusieurs mesures destinées à ralentir l'accès à la propriété, la plus récente ayant été la réduction de la période maximale d'amortissement des nouveaux prêts hypothécaires de 30 à 25 ans. Cependant, même si ces mesures ont réussi à ralentir l'activité sur le marché de la revente, leur impact sur les prix tarde à se faire sentir.

En réponse à ces prix de plus en plus élevés et à une forte demande pour les appartements en copropriété (condos), les développeurs immobiliers ont multiplié la construction d'immeubles à condos au cours des dernières années. Entre 2010 et 2013, il s'est

¹ Selon le S&P/Case-Shiller 20-City Composite Home Price Index et l'Indice Composite National de Prix de Maison Teranet - Banque Nationale^{MC}

ainsi construit 251 250 unités en copropriété au pays, soit 35,6 % de toutes les unités résidentielles construites pendant cette période. À titre comparatif, cette proportion s'élevait à 22,7 % entre 2000 et 2003. Cette surconstruction sur ce segment du marché fait d'ailleurs craindre à la Banque du Canada (2013) que les marchés de Montréal, Toronto et Vancouver se retrouvent en situation d'offre excédentaire, ce qui risquerait de créer une pression à la baisse sur les prix qui pourrait ultimement menacer la santé des institutions financières du pays. Pendant ce temps, les développeurs immobiliers semblent toutefois faire la sourde oreille à ces avertissements et continuent de lancer un nombre considérable de nouveaux projets, s'attirant du même coup la méfiance d'un nombre grandissant d'observateurs. À titre d'exemple, un rapport du Groupe Altus (2013) indiquait qu'uniquement au centre-ville de Montréal, 56 nouveaux projets représentant près de 7 700 unités avaient été identifiés au premier trimestre de 2013 seulement. Dans un contexte aussi incertain et où les avis diffèrent quant à la capacité du marché de la copropriété à absorber le nombre d'unités en construction, comment peut-on justifier ce comportement de la part des développeurs ? L'objectif de ce mémoire est précisément de répondre à cette question en déterminant si les décisions des développeurs d'entreprendre ces projets se justifient d'un point de vue économique.

Pour y arriver, il faut tout d'abord convenir d'un modèle économique d'évaluation de projets et définir ce qui constitue une décision justifiable dans un tel contexte. L'un des modèles les plus répandus et utilisés à ce jour a été mis de l'avant par Fisher (1907) et repose sur le critère de valeur actualisée nette (VAN). Ce dernier stipule qu'un projet doit être entrepris si la somme de ces flux monétaires futurs actualisés à un taux reflétant son risque est supérieure à zéro. Sous celui-ci, la construction de ces nouveaux projets pourrait se justifier par le fait que les développeurs estiment encore être en mesure de réaliser des rendements satisfaisants en développant des immeubles à condos, et ce, malgré un environnement de plus en plus incertain. Cependant, cette justification repose sur la justesse du critère de la VAN en matière de décision d'investissement, ce qu'un nombre grandissant d'études conteste. En effet, plusieurs auteurs ont démontré que cette approche peut conduire à des décisions sous-optimales, particulièrement lorsque l'investissement dans le projet en question est irréversible

et accompagné d'un haut degré d'incertitude. Comme ces deux caractéristiques sont inhérentes au développement immobilier, l'utilisation de la VAN comme critère d'évaluation du comportement des développeurs immobilier peut donc s'avérer trompeuse. Pour surmonter ces faiblesses, on fait plutôt appel à la théorie sur les options réelles, dont l'utilisation en finance corporative est de plus en plus répandue et acceptée.

Lorsqu'un développeur fait l'acquisition d'un terrain vacant ou d'une propriété sous-développée, celui-ci fait implicitement l'achat d'une option d'achat (call) lui donnant le droit de recevoir la valeur marchande de la propriété qu'il pourra y développer (l'actif sous-jacent) en échange de son coût total de réalisation (le prix d'exercice). Sous cet angle d'analyse, il est alors possible de déterminer si la décision d'un développeur d'entreprendre un projet (l'exercice de l'option) cadre avec le modèle développé. En utilisant des données inédites et détaillées sur le développement d'immeubles à condos sur l'île de Montréal de 2010 à 2013, ce mémoire propose un modèle pour faire l'évaluation de l'option décrite ci-dessus à l'aide de la méthode *Least Square Monte Carlo* (LSM), sous l'hypothèse que le prix de la propriété (re)développée suit un processus GARCH(1,1). L'application du modèle à 48 projets de (re)développement permet de trouver que la majorité des développeurs immobiliers exercent leur option de (re)développement de manière rationnelle, mais sous-optimale. En effet, 26 projets (54,2 %) ont été (re)développés alors que l'option de (re)développement se trouvait dans la monnaie, mais pour 11 d'entre eux il aurait été plutôt préférable de revendre l'option à sa valeur marchande ou encore la conserver. Quant aux 15 projets pour lesquels le modèle appelait à un exercice, un seul a été (re)développé de manière optimal, tandis qu'une majorité (11) l'ont été en moyenne 9,5 mois plus tard que l'instant défini par le modèle.

La suite de ce mémoire est organisée comme suit : la Section II passe en revue la littérature pertinente sur les options réelles et sur leur application au développement immobilier, de même que sur les méthodes employées pour en faire l'évaluation. La Section III présente les données utilisées dans le cadre de ce travail, tandis que la Section IV détaille la méthodologie par laquelle on répond à la question soulevée plus tôt. À la Section V, on procède

aux principales estimations empiriques nécessaires au modèle d'évaluation, dont les résultats sont présentés à la Section VI et analysés à la Section VII en fait l'analyse. Finalement, la Section VIII conclue en soulevant les limites de la présente étude et en posant quelques suggestions sur ce qui pourrait être fait pour améliorer le modèle proposé dans le cadre de ce travail.

II – REVUE DE LA LITTÉRATURE

Cette revue de littérature se veut à la fois une introduction au concept des options réelles, mais aussi un survol de leur application au domaine du développement immobilier et de la façon dont elles sont évaluées. On débute tout d’abord par une discussion sur les options réelles et comment elles se comparent aux options financières traditionnelles. Par la suite, on s’attarde à quelques études qui constituent les pierres d’assises de la littérature sur l’utilisation des options réelles au développement immobilier en se concentrant sur les principaux modèles d’évaluation qui en découlent de même qu’aux méthodes employées pour en faire l’évaluation. Finalement, on conclut cette revue de littérature en précisant la question de recherche et en définissant en quoi celle-ci se distingue des autres études ayant traitées des options réelles en immobilier.

2.1 – Options financières et options réelles

Dans le jargon financier, une option fait référence à un contrat entre deux parties qui donne le droit, et non l’obligation, à son détenteur d’acheter ou de vendre un actif à un certain prix en échange du versement d’une prime (McDonald, 2006). L’actif, le prix d’exercice de même que la période pendant laquelle ce droit demeure valide sont tous connus au moment de l’achat et spécifiés au contrat. Contrairement aux options financières, les options réelles ne prennent pas la forme d’un contrat, mais elles donnent tout de même le droit (et non l’obligation) à leur détenteur de prendre certaines actions en lien avec un projet d’investissement (McDonald, 2006). Par exemple, une entreprise qui contemple un projet d’investissement peut choisir d’attendre avant d’entreprendre ce dernier ou même de l’abandonner suite à la réception de nouvelles informations. Une firme peut également décider de structurer ses projets séquentiellement de sorte qu’une phase ne soit entreprise que si la précédente a été un succès. Cette flexibilité fait en sorte qu’à l’instar de leurs cousines financières, les options réelles ont en tout temps une valeur non-négative. En d’autres termes, leur détention ne pourra en aucun cas désavantager son porteur et par conséquent, pour faire

une évaluation juste d'un projet d'investissement, il est important de prendre en considération les options réelles qui s'y rattachent, ce qui nécessite d'en déterminer la valeur.

Le premier pas en ce sens prend racine dans les travaux de Black et Scholes (1973) et Merton (1973) qui ont proposé une nouvelle approche pour tarifier les options financières européennes en absence d'opportunité d'arbitrage. En postulant que l'actif sous-jacent à l'option suivait un mouvement brownien géométrique, soit un processus de rendement à dérive et à volatilité constante, ils ont montré qu'il était possible d'évaluer ces options à l'aide d'un portefeuille de duplication en temps continu, sous l'hypothèse que certaines conditions étaient respectées. Leur modèle postule notamment que le taux d'intérêt sans risque est constant et disponible tant aux prêteurs qu'aux emprunteurs, qu'il n'y a aucun frais de transaction ou d'impôt, ni même aucune restriction sur les ventes à découvert et qu'il est possible d'acheter ou de vendre n'importe quelle quantité de l'actif sans risque et du sous-jacent. Les travaux de ces trois auteurs ont culminé à une formule analytique qui a valu à deux d'entre eux (Merton et Scholes) le prix Nobel d'économie en 1997 et qui a contribué à l'essor fulgurant des produits dérivés dans les trente dernières années.

Même si les avancées réalisées par ces trois auteurs ont grandement contribué à l'application des concepts de tarification d'options financières à l'évaluation de projets, c'est davantage les faiblesses du critère de la VAN qui ont poussé les académiciens à y trouver une alternative. Parmi les faiblesses généralement associées à la VAN, on dénote entre autre la difficulté d'y incorporer la flexibilité dont disposent les gestionnaires dans la réalisation d'un projet, ainsi que l'incapacité de cette dernière à refléter adéquatement l'incertitude. En effet, Cukierman (1980) a démontré qu'en présence d'incertitude tant par rapport à l'environnement de la firme que du projet sous considération, il pouvait être plus profitable d'attendre avant d'entreprendre ce dernier, et ce, même si le critère de la VAN appelait à son déclenchement immédiat. De façon similaire, Bernanke (1983) trouvait que pour les projets irréversibles, la possibilité de rendements supérieurs attribuables au fait d'attendre et de recueillir davantage d'information pouvait expliquer en partie les cycles d'investissement observés dans l'économie.

McDonald et Siegel (1986) ont quant à eux dérivé une règle d'investissement optimale et une formule pour évaluer l'option d'attendre. À l'aide de simulations et de paramètres jugés raisonnables, ils sont arrivés à la conclusion qu'il était en moyenne optimal d'attendre que les bénéfices du projet soient deux fois plus élevés que l'investissement requis avant de l'entreprendre. De leur côté, Dixit et Pindyck (1994) sont parvenus à des résultats similaires. Toujours en utilisant des simulations, ils ont trouvé que dans le cas d'un investissement irréversible la valeur du projet à partir de laquelle il était optimal d'exercer pouvait être de deux à trois fois plus grande que dans le cas d'un investissement réversible. Ce que ces études démontrent, c'est qu'il est souvent optimal d'attendre avant d'investir dans un contexte d'incertitude et d'irréversibilité et comme ces éléments ne sont pas considérés par la VAN, celle-ci peut mener à des décisions sous-optimales.

Les premiers à avoir mesuré de façon précise l'ampleur de la valeur d'attendre et prouvé formellement la sous-optimalité de la VAN comme méthode d'évaluation de projets sont Brennan et Schwartz (1985). En prenant l'exemple de l'exploitation d'une mine de cuivre en contexte de prix stochastiques, ils ont adopté l'approche par portefeuille de duplication introduite par Black, Scholes et Merton pour incorporer certains éléments de flexibilité ignorés par le critère de la valeur actuelle nette. En faisant l'hypothèse que les variations de prix pour la ressource exploitée suivaient un mouvement brownien géométrique et que le gestionnaire responsable de la mine avait une certaine flexibilité en fonction du prix de la ressource extraite, ils ont incorporé à leur modèle l'option d'attendre avant de débiter la production, d'ajuster celle-ci une fois l'exploitation commencée et même d'abandonner la mine sous considération. Leurs résultats montrent que se baser exclusivement sur le critère de la VAN peut mener à des décisions d'extraction sous-optimales puisque la valeur d'attendre avant d'investir est perdue une fois l'exploitation commencée (investissement à caractère irréversible). La contribution des deux auteurs va toutefois bien au-delà de ces résultats. En effet, cette façon d'incorporer l'incertitude et la flexibilité managériale à l'évaluation de projets, à l'aide d'une méthodologie similaire à celle utilisée pour tarifier des options financières, constitue la base même de l'approche des options réelles. Ce nouveau cadre d'analyse a d'ailleurs permis l'émergence

d'une nouvelle branche de littérature et une application à de nombreux domaines d'activités, à savoir les projets reliés aux ressources naturelles, aux industries nécessitant d'importants investissements en recherche et développement, de même que les projets de développement immobilier (Pindyck, 2008).

2.2 – Options réelles et développement immobilier

Comme il a été mentionné précédemment, le développement immobilier est l'un des domaines qui se prête naturellement aux options réelles puisqu'il s'agit de projets irréversibles qui sont soumis à un haut degré d'incertitude et pour lesquels les développeurs disposent d'une certaine flexibilité. Titman (1985) a été le premier à appliquer ce concept au développement immobilier en cherchant à expliquer la présence de terrains vacants dans des zones urbaines à densité élevée de Los Angeles. En partant du principe qu'on peut voir un terrain vacant comme le droit, et non l'obligation, de recevoir à tout moment la valeur marchande d'un immeuble en échange du déboursement de son coût de développement, Titman utilise un modèle binomial similaire à celui proposé par Cox, Ross et Rubinstein (1979) pour en faire l'évaluation. En reprenant la terminologie propres aux options financières, le propriétaire du terrain détient en réalité un call américain sur un sous-jacent constitué d'un immeuble avec un prix d'exercice égal au coût de réaliser le projet. L'approche proposée par Titman diffère de manière importante de la méthode de valeur résiduelle encore largement utilisée aujourd'hui pour déterminer la valeur d'un terrain. Selon cette dernière, le prix d'un terrain (vacant ou non) est calculé en estimant la valeur actualisée de la propriété qui représenterait sa meilleure utilisation (*highest best-use*), à laquelle on soustrait la valeur actualisée de son coût de construction (Brueggeman et Fisher, 2011). Le principal avantage de cette approche réside dans sa simplicité, mais elle a le désavantage de ne pas incorporer complètement l'incertitude. En effet, le taux d'actualisation utilisé dans le calcul de la valeur résiduelle capture le risque relié à la construction de la future propriété et à son prix, mais vient diminuer la valeur du terrain à mesure que celui-ci augmente. Selon Titman, cette incertitude devrait plutôt conduire à un prix plus élevé, tel que le suggère la théorie sur les options

financières puisque la probabilité d'obtenir un prix plus élevé ou des coûts de construction plus faibles pour la propriété s'en trouve augmentée.

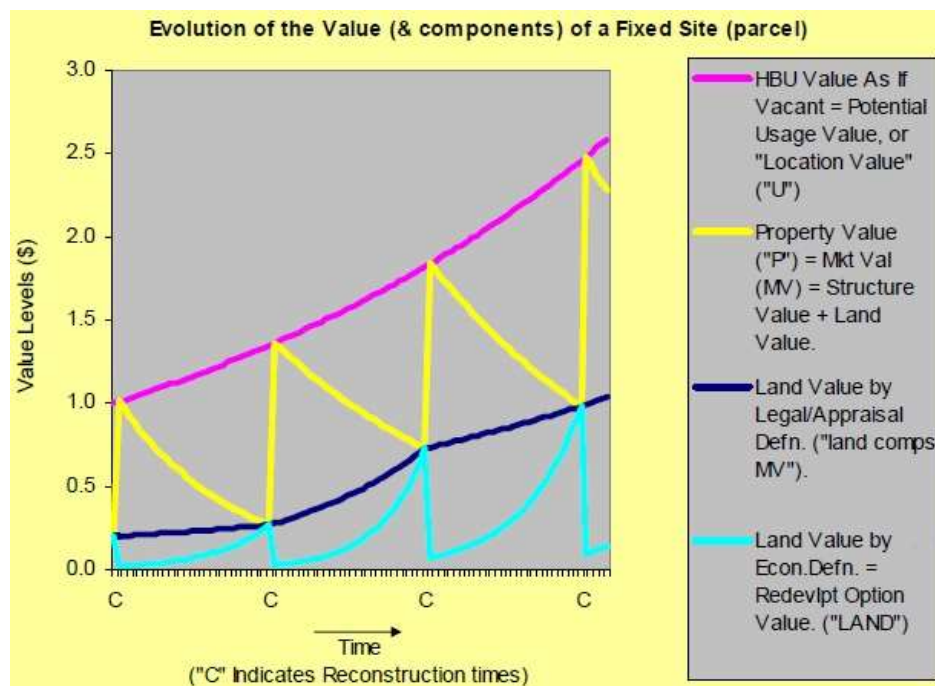
Pour faire l'évaluation de la valeur de ces terrains vacants, Titman s'inspire largement du modèle binomial d'évaluation d'option proposé par Cox, Ross et Rubinstein (CRR). Sous ce dernier, le temps est discrétisé et l'incertitude y est introduite en posant comme hypothèse qu'à chaque sous-période la valeur de l'actif sous-jacent ne peut prendre que deux valeurs, d'où le schéma d'arbre binomial à mesure qu'on augmente le nombre de pas. Cette approche en temps discret contraste notamment avec l'approche en temps continu adoptée par Black et Scholes (1973) et Merton (1973). Cependant, il est facile de démontrer que le prix donné par le modèle CRR converge vers le prix de la formule analytique de Black, Merton et Scholes lorsque le nombre de pas tend vers l'infini et que conséquemment l'intervalle entre les périodes s'approche de zéro. Dans un modèle binomial, la valeur de l'option est retrouvée en partant de l'échéance, où la valeur de l'option est connue, et en remontant l'arbre par induction rétrograde. L'un des avantages de cette méthode est que contrairement à la formule de Black, Scholes et Merton, il est possible d'évaluer les options américaines en comparant à chaque nœud de l'arbre la valeur d'exercer l'option avec la valeur de continuation. Cet avantage est important dans le cadre de l'évaluation d'un terrain vacant, puisque comme Titman le fait remarquer, l'option de développer une parcelle de terre est en fait une option d'achat américaine dont l'exercice peut subvenir à tout moment. Par son modèle, Titman est donc en mesure de capter le moment exact où celle-ci est exercée, c'est-à-dire le moment auquel le terrain est développé. Ce dernier survient au premier moment où la valeur d'exercice, soit la différence entre la valeur marchande de la propriété développée et son coût de développement, est plus élevée que la valeur de continuation, soit la valeur de conserver le terrain vacant. Cette dernière est calculée à l'aide d'un portefeuille de duplication composé d'un actif sans risque et de l'actif sous-jacent qui vise à répliquer parfaitement les flux monétaires dans les deux états de nature possibles. En appliquant cette méthodologie de façon rétrograde jusqu'en date d'aujourd'hui, on parvient à déterminer la valeur du terrain vacant, mais aussi le moment où la propriété sera développée. Titman arrive ainsi à la conclusion que si

plusieurs terrains demeurent vacants, c'est tout simplement parce que les développeurs trouvent préférable d'attendre avant d'exercer leur option. Dans le jargon financier, cela implique que la valeur de conserver l'option (le terrain) ou de la revendre est plus avantageux que son exercice (développement) immédiat. Conformément aux relations mises au jour pour les options financières, Titman trouve des relations positives entre la valeur des terrains vacants et l'actif sous-jacent, de même qu'avec la volatilité. La relation est toutefois négative avec le prix d'exercice et le taux de dividende, c'est-à-dire les revenus de location de la propriété développée. Il souligne également que des restrictions au niveau de la construction, comme par exemple de nouveaux règlements de zonage, peuvent avoir un impact majeur sur le développement de nouveaux immeubles puisque ces restrictions viennent réduire l'incertitude et donc la valeur de l'option, ce qui diminue l'incitatif à garder le terrain vacant.

Évidemment, le modèle proposé par Titman n'est pas sans faiblesse ou à tout le moins, il mérite quelques précisions avant une utilisation tous azimuts. Tout d'abord, ce dernier considère que les coûts de construction sont stables, sinon déterministes, ce que l'auteur lui-même reconnaît comme étant irréaliste. Toutefois, il est juste de penser que la plus grande source d'incertitude provient de l'actif sous-jacent et non des coûts de construction. En effet, Gyourko et Saiz (2006) trouvent que les coûts de construction aux États-Unis sont restés pratiquement inchangés en termes réels depuis les années 80, alors que pendant la même période les prix réels des terrains et des maisons ont augmenté. De plus, le modèle de Titman considère que l'option d'achat inhérente à la détention du terrain vacant est sujette à expiration et donc qu'il est possible d'initialiser l'algorithme de résolution. En réalité, cette option n'expire jamais réellement, car même lorsqu'elle est exercée et qu'une propriété développée est construite sur cette parcelle de terre, le détenteur de la propriété a toujours le droit à une date future de démolir celle-ci pour en reconstruire une nouvelle. On parle alors d'option de redéveloppement. Williams (1997) fait d'ailleurs remarquer qu'il n'existe pas seulement qu'une option de redéveloppement, mais bien une infinité, car il s'agit d'une option composée. À la défense de Titman, on peut néanmoins affirmer que la valeur marginale d'un deuxième, voire d'un troisième redéveloppement est très faible juste après un premier

(re)développement, ce que Geltner et McGrath (2006) illustrent d'ailleurs fort bien (voir Figure 2.1 ci-dessous). On y voit que la valeur économique d'une parcelle de terre, soit la valeur de l'option de redéveloppement, est à son plus haut niveau lorsque la valeur de la structure existante est à son plus bas et à son plus bas immédiatement après la construction d'une nouvelle structure. Quant à l'échéance de l'option, bien qu'elle soit en théorie perpétuelle, un développeur ne gardera pas un terrain vacant indéfiniment en raison des coûts de détention qui y sont reliés, limitant en pratique la durée de vie de cette option.

Figure 2.1 – Extrait de Geltner et McGrath (2006)



Pour pallier ces deux principales limitations, Williams (1991) propose un modèle général d'évaluation en temps continu et à deux sources d'incertitude. Sous ce dernier, Williams fait l'hypothèse que les revenus générés par la propriété à être développée de même que son coût de construction suivent un mouvement brownien géométrique, se rapprochant de l'hypothèse du modèle de Black, Scholes (1973) et Merton (1973). Comme le modèle incorpore également les flux monétaires générés par la propriété sous-développée, celui-ci se veut plus général, car il

peut servir à évaluer l'option de redéveloppement et non seulement la valeur d'un terrain vacant. De plus, en permettant des flux monétaires négatifs pour la propriété sous-développée, le modèle incorpore l'option d'abandon. Williams utilise l'approche par portefeuille de duplication pour résoudre ce problème d'évaluation, qui s'apparente au problème de tarification d'une option d'achat américaine perpétuelle. Sous l'hypothèse que le détenteur de la propriété sous-développée est rationnel et cherche à maximiser sa richesse, ce dernier va choisir le moment et une densité optimale pour en faire le (re)développement. Si on trace un parallèle avec une option d'achat américaine perpétuelle, dont la formule de tarification analytique a été proposée par Samuelson et McKean (1965), l'option est exercée lorsque l'actif sous-jacent atteint un certain niveau pour la première fois. Son prix est alors déterminé par la probabilité que le sous-jacent touche cette barrière étant donné sa dynamique et le prix d'exercice. À la différence du cas standard, où le prix d'exercice est supposé constant, le modèle avancé par Williams se distingue par une évolution stochastique du prix d'exercice. Les implications théoriques du modèle demeurent néanmoins les mêmes, notamment en ce qui concerne les relations entre la volatilité, les taux d'intérêt et le niveau de l'actif sous-jacent. Williams suggère cependant des relations intéressantes sur la densité optimale de développement. Lorsque le détenteur de la propriété sous-développée a la possibilité de (re)développer celle-ci à une densité flexible plutôt que fixe, la densité optimale de développement sera plus élevée, tout comme la valeur de l'option incluse dans la propriété non-développée, ce qui confirme les résultats obtenus par Titman (1985).

Bien que les modèles avancés par Titman et Williams permettent d'établir des relations intéressantes quant aux déterminants du développement immobilier, ces relations demeurent pour la plupart théoriques. En effet, la majorité des études sur les options réelles se contentent de faire concorder les comportements observés aux relations mathématiques découlant des modèles d'évaluation utilisés. Certes, plusieurs études ont démontré qu'il était souhaitable d'incorporer les options réelles aux décisions d'investissement, particulièrement lorsque celles-ci sont irréversibles et qu'elles sont soumises à un haut niveau d'incertitude, mais aucune ne s'était attardée explicitement à en mesurer l'importance de manière empirique avant Quigg

(1993). En utilisant un échantillon de 2 700 transactions de terrains vacants (valeurs marchandes d'options) dans la région de Seattle, Quigg trouve que la prime moyenne attribuable à l'option d'attendre, calculée comme la différence en pourcentage entre la valeur au marché et la valeur théorique d'un terrain, est de 6 %, mais varie entre 1 % et 30 % selon le type de propriétés sous-jacentes. Pour déterminer la valeur théorique de l'option, Quigg s'inspire de Williams (1991) et propose un modèle d'évaluation perpétuel en temps continu et à horizon infini à deux variables d'états : le prix de la propriété développée et le coût de construction. En faisant l'hypothèse que ces deux variables suivent un mouvement brownien géométrique, Quigg arrive à une équation différentielle partielle (EDP) à laquelle le prix du terrain doit obéir en absence d'opportunités d'arbitrage. En procédant à un changement de variable, cette EDP devient une équation différentielle ordinaire (EDO), dont la solution générale est connue. À partir de conditions aux bornes et d'une fonction de valeur, Quigg propose une solution analytique qui permet de calculer la valeur du terrain en introduisant tout simplement les paramètres nécessaires.

Une difficulté additionnelle se présente toutefois dans l'application pratique de ce modèle pour déterminer la valeur d'un terrain. En effet, cette évaluation est compliquée par le fait que l'actif sous-jacent à l'option, c'est-à-dire la propriété développée, est inobservable au moment où on cherche à établir sa valeur. Pour surmonter ce problème, Quigg fait appel à la méthode des prix hédoniques, formalisée par Rosen (1974). Cette méthode vise à exprimer la valeur d'un bien à l'aide d'un ensemble de caractéristiques qui prises individuellement ne sont transigées sur aucun marché. À long terme, un équilibre émerge des transactions de biens similaires, mais aux caractéristiques différentes, entre acheteurs et vendeurs, duquel on peut inférer une valeur monétaire (prix hédonique) pour chacune de ces caractéristiques. En utilisant 3 200 transactions de propriétés développées entre 1976 et 1979 dans la ville de Seattle, Quigg estime un modèle hédonique pour différentes catégories de propriétés à l'aide d'un ensemble de caractéristiques observables comprenant entre autre la superficie, l'âge et l'emplacement géographique. Par la suite, en choisissant une densité optimale de développement et en appliquant celle-ci à un ensemble de caractéristiques qui en moyenne sont les plus

représentatives du type de propriétés choisi, elle arrive à une formulation pour la valeur marchande de la propriété développée qu'elle peut utiliser pour calculer la valeur théorique d'un terrain.

L'étude de Quigg est rapidement devenue la référence dans l'application de la théorie sur les options réelles au domaine du développement immobilier. Celle-ci a d'ailleurs pavé la voie à une multitude d'autres modèles et d'études avec à chaque fois comme objectif de refléter le plus fidèlement possible la réalité. D'autres auteurs ont tout simplement repris la même méthodologie, mais ont cherché à l'appliquer à des données plus récentes et à d'autres segments géographiques. Par exemple, Yanxiang et Cannaday (2004) trouvent une prime d'attendre moyenne de 32 % à Tokyo entre 1985 et 2000, alors qu'Oliveira, Couto et Pimentel (2008) obtiennent une prime moyenne de 5,42 % en ajustant le modèle de Quigg au marché portugais. Grovenstein, Kau et Munneke (2011) arrivent à une prime d'attendre moyenne de 6,6 % après avoir appliqué un modèle similaire à des transactions de terrains à Chicago.

2.3 – L'exercice optimal de l'option de développement

L'un des éléments centraux sur lequel reposent l'ensemble des modèles étudiés jusqu'à maintenant concerne l'instant optimal d'exercice, c'est-à-dire le moment où le détenteur du terrain vacant décide d'exercer son option et de construire la propriété développée. Que ce soit le modèle binomial de Titman (1985) ou les modèles en temps continu de Williams (1991) et Quigg (1993), l'idée générale derrière le concept d'exercice optimal reste le même et prévaut pour tout type d'options américaines. Il s'agit tout simplement du premier instant où l'actif sous-jacent sur lequel est écrite l'option touche la frontière d'exercice. Par exemple, dans un modèle binomial, on peut facilement déterminer tous les nœuds de l'arbre où l'option est exercée et construire la frontière d'exercice d'un put (call) en prenant pour chaque période la plus grande (petite) valeur de l'actif sous-jacent pour laquelle l'option est exercée. Dans les faits, l'évaluation d'une option américaine repose principalement sur la détermination de cette frontière et bien que ce problème intéresse majoritairement les auteurs spécialisés en tarification de produits dérivés, de nombreux auteurs en finance corporative ont néanmoins

décidé d'explorer la question d'exercice optimal dans le cadre de projets de développement immobilier et sur les facteurs qui pouvaient influencer ce dernier.

Capozza et Li (2002) comparent le moment optimal de développement tel que spécifié par un modèle d'option réelle, où les revenus de location d'une propriété sont supposés suivre un mouvement brownien géométrique, à des modèles d'évaluation traditionnels comme la VAN et le taux de rendement interne (TRI). Ils arrivent à la conclusion que l'approche par option réelle appelle à un développement plus tardif que ce que la VAN peut indiquer, conformément à ce qu'il a été démontré plus tôt quant à l'importance de l'option d'attendre avant d'investir. De son côté, Sing (2001) se penche sur l'impact distinct de la volatilité des coûts de construction et des revenus de location, de même que l'élasticité des coûts de construction et des revenus de location à la densité de développement, sur l'instant de développement optimal. Il conclut que la valeur à partir de laquelle il est optimal d'exercer augmente avec la volatilité des coûts de construction et des revenus de location, mais diminue avec la corrélation entre les deux. Quant au choix de la densité de développement, Sing trouve un effet important et opposé entre l'élasticité du coût de construction qui augmente la valeur critique d'exercice et l'élasticité prix qui la diminue. Comme ces deux derniers paramètres sont difficiles à évaluer et que son modèle, tout comme celui de Quigg (1993), est extrêmement sensible à ces paramètres, l'impact sur la valeur de l'option et le moment d'exercice peut s'en trouver grandement affecté.

Récemment, de nouvelles études se sont penchées sur l'aspect stratégique de l'instant optimal d'exercice des options réelles. Bien que cet aspect soit ignoré dans le modèle proposé dans le cadre de cette recherche, on y présente néanmoins les résultats de deux études, considérées importantes. Tout d'abord, le concept d'exercice stratégique en développement immobilier naît de la possibilité pour un développeur en situation de concurrence monopolistique d'influencer la valeur des actifs de ses concurrents et donc d'influencer leurs actions, ainsi que l'instant optimal d'exercice. Williams (1993) trouve que l'instant optimal, soit le niveau à partir duquel il est optimal d'exercer, augmente avec trois paramètres de la

propriété développée : l'élasticité de la demande, le taux maximal de développement et le taux de dépréciation. Cependant, il diminue avec l'offre de propriétés sous-développées par rapport à l'offre de propriétés développées et avec le degré de concentration des actifs sous-développés.

Grenadier (1996) s'est également intéressé à l'exercice stratégique des options réelles en examinant de plus près l'option de redéveloppement. Il base son modèle sur un exemple fictif où deux bâtiments identiques offerts en location sont détenus par deux propriétaires différents qui détiennent chacun une option de redévelopper leur bâtiment actuel en un bâtiment supérieur. L'aspect stratégique émerge du fait que le premier qui ira de l'avant (le meneur) exercera une pression à la baisse sur les revenus du propriétaire de l'immeuble le moins élaboré (le suiveur), alors qu'il pourra de son côté engranger des revenus de location en situation monopolistique sur l'immeuble redéveloppé. Une fois que le suiveur exercera à son tour son option, le meneur ne se retrouvera plus en situation de monopole, mais en duopole, ce qui impactera ses revenus de location. Grenadier propose alors un équilibre à ce problème et arrive à des conclusions fort intéressantes. Bien que son modèle reconnaisse qu'une augmentation de la volatilité de l'actif sous-jacent est associée à une augmentation de la prime de l'option d'attendre comme la plupart des études sur le sujet, cette même volatilité peut néanmoins accélérer le développement de projets concurrents suite à un développement de la part d'un meneur. Cette relation peut ainsi expliquer pourquoi certains marchés immobiliers traversent des épisodes de calme suivi d'épisodes de construction effrénée. Finalement, Grenadier propose une explication logique au phénomène de surconstruction² découlant d'une diminution de la demande pour l'actif sous-jacent. Selon son modèle, la surconstruction peut s'expliquer par la volonté des détenteurs d'options de (re)développer le plus rapidement possible afin que leur propriété (re)développée trouve preneur avant celles de leurs compétiteurs. On se retrouve alors devant une situation de course à la construction où chacun cherche à exercer plus tôt que ses concurrents pour profiter des prix encore élevés.

² Le phénomène de surconstruction correspond à une situation où l'offre d'espace est supérieure à la demande (Grenadier, 1996).

2.4 – Question de recherche et apport à la littérature

Bien que la théorie sur l'application des options réelles au développement immobilier se soit considérablement développée au cours des dernières années, aucune étude à notre connaissance, n'a examiné de manière empirique le comportement des développeurs immobiliers par rapport aux différentes options réelles qu'ils détiennent. En tirant profit d'une base de données inédite et détaillée sur un ensemble de projets de condos réalisés à Montréal de 2010 à 2013, on utilise la théorie sur les options réelles pour bâtir un modèle servant à faire l'évaluation de l'option de redéveloppement, soit le droit pour le détenteur d'une propriété de démolir ou d'en modifier la structure existante afin de la remplacer par une nouvelle de valeur supérieure. On se concentre sur cette option, puisque dans un contexte où l'offre de terrains vacants disponibles à des fins de développement est limitée en milieu urbain, l'option de redéveloppement est plus facile à étudier d'un point de vue empirique. De plus, on verra qu'en modifiant un seul paramètre on arrive facilement à évaluer l'option de développement, soit le droit pour le détenteur d'un terrain de construire une nouvelle propriété. Le modèle proposé se distingue également de ceux avancés par Williams (1991) et Quigg (1993) en abandonnant l'hypothèse que le prix de la propriété (re)développée suit un mouvement brownien géométrique et en postulant plutôt un processus GARCH(1,1). Par la suite, en faisant appel à la méthode *Least Square Monte Carlo* (LSM), qui à notre connaissance n'a jamais été utilisée en développement immobilier, on arrive non seulement à déterminer la valeur de l'option de (re)développement, mais aussi sa frontière d'exercice. Cela permet notamment de comparer l'exercice réel de l'option de (re)développement à l'exercice suggéré par le modèle et ainsi de vérifier si la décision des développeurs immobiliers d'entreprendre ces projets est rationnelle et optimale. Une description exhaustive de la méthodologie employée pour répondre à cette question est détaillée à la Section IV, mais avant, on présente à la section suivante les données à partir desquelles la présente étude s'est basée.

III – DONNÉES

Les données de la SCHL (Société canadienne d'hypothèques et de logement) sur la construction d'unités en copropriété à Montréal au cours des dernières années ne mentent pas. Ce segment du marché a connu un essor fulgurant alors que les unités en copropriété ont représenté en moyenne 54,3 % de toutes les unités résidentielles construites dans la région métropolitaine de recensement de Montréal entre 2010 et 2013. Ces unités n'ont toutefois pas toutes été construites sur des terrains vacants. En effet, un nombre considérable de développeurs ont fait l'acquisition de bâtiments existants et ont décidé d'exercer leur option de redéveloppement en convertissant ces derniers en immeubles à condos. Comme le but de ce mémoire est de déterminer empiriquement si ces (re)développements de propriétés existantes et de terrains vacants (exercices) se sont faits de manière rationnelle et optimale, un nombre important d'information est nécessaire, et ce, tant sur la propriété sous-développée (ou le terrain vacant) que sur la propriété (re)développée. Malheureusement, comme cette information n'est pas disponible de façon regroupée dans aucune base de données à laquelle on a accès, on a été dans l'obligation de créer une base de données spécifique sur le sujet. Le principal avantage d'avoir procédé de la sorte repose sur la quantité et la qualité des données recueillies pour chacun des projets faisant partie de l'échantillon. Cependant, la quantité de données requises a considérablement limité la taille de cet échantillon en raison des moyens mis à disposition. La manière dont on s'y est pris pour construire cette base de données est expliquée ci-dessous, suivie par la suite d'une brève description de ces dernières.

3.1 – Construction de la base de données

L'identification des projets composant cet échantillon a été rendue possible grâce à la collaboration de JLR Solutions Foncières, une entreprise qui collecte de manière électronique les transactions immobilières enregistrées au Registre foncier du Québec depuis 1987. À l'aide de leur base de données, un ensemble de projets a tout d'abord été présélectionné à partir des déclarations de copropriété, un document légal émis lorsque la construction d'un immeuble en copropriété est pratiquement terminée et qui permet de diviser l'immeuble en fractions

pouvant être vendues par le développeur. Pour être éligible, un projet devait compter au minimum quatre unités et un permis de construction devait avoir été enregistré dans la base de données de JLR Solutions Foncières afin de pouvoir estimer les coûts directs de construction (*hard costs*) du projet. Par la suite, pour chacun des projets présélectionnés, on a récupéré les informations sur les unités qui les composent dont l'adresse et la superficie habitable. À partir des déclarations de copropriété, il a en outre été possible de retracer les actes de ventes par lesquels les différents développeurs sont devenus propriétaires de ces terrains vacants ou de ces propriétés sous-développées et ainsi de retrouver la date d'achat de même que le montant de la transaction. À travers ces actes de ventes, on a également pu éliminer les projets où la transaction par laquelle un développeur avait fait l'acquisition de l'option de (re)développement ne s'était pas fait aux conditions de marché. Ces cas particuliers incluent notamment les reprises de finance, les ventes entre parties liées et les ventes de succession. Au final, la base de données est composée de 48 projets totalisant 1 604 unités en copropriété développées sur l'Île de Montréal entre 2010 et 2013. Sur la même période, le nombre d'unités en copropriété mises en chantier sur l'Île de Montréal s'est établi à 22 138 selon les données de la SCHL, ce qui implique que l'échantillon utilisé dans le cadre de ce mémoire représente 7,2% de celles-ci. De ces 48 projets, 41 représentent des cas où une propriété sous-développée a été acquise et redéveloppée en immeuble à condos, alors que les autres concernent des terrains vacants sur lesquels on y a construit un immeuble à condos.

3.2 – Statistiques descriptives

Le Tableau 3.1 dresse le portrait général des principales caractéristiques de ces projets. Pour l'ensemble de ceux-ci, on dispose notamment du nombre d'unités, la présence ou non d'un stationnement intérieur, la date et le montant de la transaction initiale, de même que la date d'émission et la valeur du permis de construction. On peut voir que le projet moyen est composé d'un peu plus de 33 unités réparties sur quatre étages et faisant en moyenne moins de 950 pieds carrés. Ces caractéristiques varient toutefois d'un projet à l'autre comme on peut le constater à l'aide des autres statistiques descriptives présentées au Tableau 3.1. En effet, on remarque que le nombre d'unités par projet varie de quatre à 204, tandis que la superficie

Tableau 3.1 – Statistiques descriptives des projets composant l'échantillon

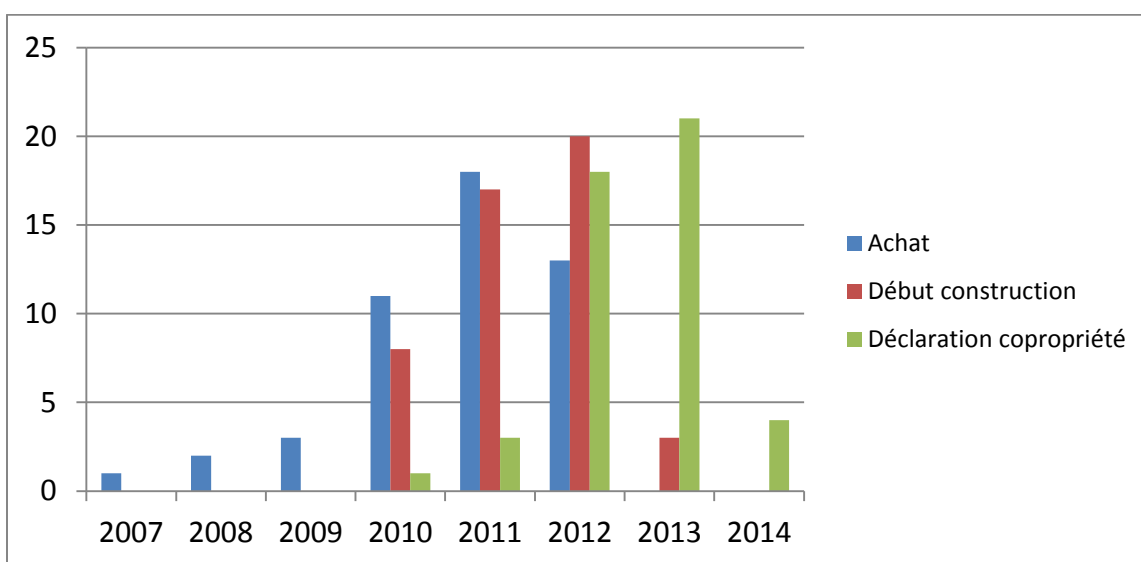
	Moyenne	Médiane	Minimum	Maximum	Écart-Type
Nombre d'unités	33.42	17.00	4.00	204.00	40.62
Superficie moyenne par unité (en pi²)	946.66	931.24	614.00	1,293.48	153.58
Nombre d'étages	4.00	3.00	2.00	12.00	2.17
Coût de construction par unité (en \$)	119,666.47	112,448.75	55,555.56	317,560.46	40,616.86
Coût de construction (en \$/pi²)	125.42	119.40	70.02	245.51	29.84
Coût propriété sous- développée/Terrain par unité (en \$)	51,342.12	47,237.50	8,823.53	182,380.95	30,467.27
Coût propriété sous- développée/Terrain(en \$/pi²)	52.99	49.11	9.63	166.37	27.52
Âge propriété sous- développée	64.44	60.00	24.00	112.00	21.67

Tableau 3.2 – Répartition géographique des projets composant l'échantillon

	Nombre de projets	%	Nombre d'unités	%
AHUNTSIC/CARTIERVILLE	2	4.2%	126	7.9%
COTE-DES-NEIGES/NOTRE-DAME-DE-GRACE	3	6.3%	407	25.4%
MERCIER/HOCHELAGA-MAISONNEUVE	5	10.4%	123	7.7%
MONTREAL-NORD	2	4.2%	104	6.5%
MONT-ROYAL	2	4.2%	109	6.8%
PLATEAU MONT-ROYAL	6	12.5%	80	5.0%
RIVIERE-DES-PRAIRIES/POINTE-AUX-TREMBLES	1	2.1%	16	1.0%
ROSEMONT/PETITE-PATRIE	8	16.7%	104	6.5%
VERDUN	4	8.3%	93	5.8%
VILLE-MARIE	5	10.4%	249	15.5%
VILLERAY/SAINT-MICHEL/PARC-EXTENSION	10	20.8%	193	12.0%
TOTAL	48	100.0%	1604	100%

moyenne par unité va de 614 à près de 1 300 pieds carrés. D'importantes différences subsistent également par rapport aux statistiques sur les coûts de construction et le coût de la propriété sous-développée ou du terrain vacant acheté par le développeur. De plus, lorsqu'on compare les projets par arrondissement dans des résultats non présentés, on constate encore davantage de différences, ce qui met de l'avant la nécessité de développer un modèle permettant de capter les différentes caractéristiques des projets à évaluer.

Figure 3.1 – Répartition temporelle des projets composant l'échantillon



Une répartition géographique des projets est présentée au Tableau 3.2 et l'échéancier de développement de ceux-ci est illustré à la Figure 3.1. On y constate que les arrondissements de Villeray-Saint-Michel-Parc-Extension et Rosemont-Petite-Patrie sont les plus représentés sur la base du nombre de projets, mais que ces derniers sont de petites tailles, puisque ce sont les arrondissements de Côte-des-Neiges-Notre-Dame-de-Grâce et Ville-Marie qui dominent l'échantillon en termes d'unités. Par rapport à la répartition des projets à travers le temps, on observe que la majorité de ceux-ci ont été acquis et (re)développé entre 2010 et 2012, soit une période particulièrement faste pour le marché de la copropriété. De plus, sur la base de la date de la déclaration de copropriété, ces projets ont pour la plupart été terminés en 2012 et 2013, ce qui illustre bien le délai d'un peu plus d'un an nécessaire pour mener à terme ce type de

projet. La question des délais et des différentes particularités spécifiques à la modélisation de l'option de (re)développement est d'ailleurs abordée plus en détail dans la méthodologie, qu'on retrouve à la section suivante.

IV – MÉTHODOLOGIE

L'option de redéveloppement donne droit à son détenteur de démolir ou modifier la structure existante d'une propriété sous-développée afin d'en construire une nouvelle, d'une valeur économiquement supérieure. L'option de développement est quant à elle un cas spécifique de l'option de redéveloppement qui donne tout simplement le droit à son détenteur de construire une nouvelle structure sur un terrain déjà vacant. Comme il a été mentionné précédemment, ces deux options peuvent être vues comme un call américain sur la propriété (re)développée. Pour faire l'évaluation de ce dernier, on repose alors sur le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage qui spécifie que la valeur d'un produit dérivé est égale à l'espérance sous la mesure risque neutre de son payoff futur actualisé au taux sans risque. Dans un premier temps, on pose donc l'équation du payoff de l'option de (re)développement, alors que dans un second temps, on passe en revue les différents éléments de cette équation, dont la dynamique de prix de la variable d'état. Dans un troisième temps, on pose les bases du modèle factoriel servant à l'estimation de la valeur marchande de la propriété (re)développée et finalement dans un quatrième temps, on décrit l'approche utilisée pour faire l'évaluation de cette option et déterminer si les développeurs agissent de manière rationnelle par rapport à l'exercice de celle-ci.

4.1 – Flux monétaires associés à l'option de (re)développement

Un call américain permet à son détenteur de payer le prix d'exercice K et de recevoir le sous-jacent à l'option S tant que l'option n'est pas arrivée à maturité. Mathématiquement, on peut écrire le flux monétaire d'un call américain au temps t comme :

$$C_t = \text{MAX} [S_t - K; 0]$$

De son côté, l'option de redéveloppement permet à son détenteur de recevoir la propriété redéveloppée en échange de son coût total de réalisation. Soit S_t la valeur associée à la vente des unités composant la propriété redéveloppée et à la détention de la propriété sous-développée au temps t où $t \in [0, T]$, c'est-à-dire un moment quelconque où l'option de

redéveloppement peut être exercée entre l'acquisition de la propriété sous-développée et la maturité de l'option, et K_t le coût total de redéveloppement, on peut écrire le flux monétaire au temps t de la manière suivante :

$$\pi_t = \text{MAX} [S_t - K_t; 0]$$

L'équation ci-dessus néglige la possibilité de revendre la propriété sous-développée pendant la vie de l'option et diffère d'un call américain standard par la dépendance temporelle du prix d'exercice. Toutefois, à la différence d'une option financière où la réception du sous-jacent est immédiate une fois celle-ci exercée, un développeur n'aura pas accès immédiatement à la valeur marchande de la propriété redéveloppée. En effet, la construction de cette dernière peut s'échelonner sur plusieurs mois, voire plus d'un an et donc il faut pouvoir tenir compte de ce facteur dans l'évaluation de l'option de (re)développement. De plus, contrairement à une option financière standard, l'option de redéveloppement donne également droit aux flux monétaires générés par la propriété sous-développée jusqu'au moment où l'option est exercée. Ainsi, soit P_t la valeur marchande de la propriété redéveloppée au moment où celle-ci est construite, D le délai entre l'exercice de l'option et la réception du produit de la vente des unités et y les flux monétaires nets annuels de la propriété sous-développée exprimés en pourcentage de sa valeur³, V_0 , on trouve que

$$S_t = P_t e^{-rD} + V_0 (e^{yt} - 1)$$

Quant au coût total de redéveloppement, K_t , il est composé de quatre éléments : (i) HC , les coûts directs de construction (*hard costs*), (ii) SC , les coûts indirects de construction (*soft costs*), (iii) le coût de la propriété sous-développée (ou du terrain vacant dans le cas d'un développement) et (iv) la valeur actualisée des flux monétaires nets futurs de la propriété sous-

³ Dans le cas où la propriété sous-développée est détenue par un propriétaire occupant, il s'agit des flux monétaires nets qu'il pourrait en retirer si la propriété en question était en location.

développée auxquels renonce le détenteur de l'option de redéveloppement une fois qu'il exerce. Mis ensemble, on peut ainsi réécrire le coût total de redéveloppement comme

$$K_t = (HC + SC + V_0 e^{rt} + V_0 (e^{y(T-t)} - 1) e^{-r(T-t)})$$

On capitalise le coût de la propriété sous-développée au taux sans risque r pour refléter les intérêts perdus sur ce montant, qui dans bien des cas est déboursé avant le début des travaux. Dans sa forme détaillée, on peut donc écrire le flux monétaire associé à l'option de redéveloppement de la façon suivante :

$$\pi_t = \text{MAX} [P_t e^{-rD} + V_0 (e^{yt} - 1) - (HC + SC + V_0 e^{rt} + V_0 (e^{y(T-t)} - 1) e^{-r(T-t)})]; 0]$$

Dans l'éventualité où le développeur fait directement l'acquisition d'un terrain vacant ou d'une propriété sous-développée à la fin de sa durée de vie utile, c'est-à-dire une propriété dont la presque-totalité de la valeur est dérivée du terrain, l'équation précédente se simplifie considérablement. En effet, en posant $y = 0$, on obtient l'équation ci-dessous qu'on utilisera pour la suite de ce travail pour fin de simplification :

$$\pi_t = \text{MAX}[P_t e^{-rD} - (HC + SC + V_0 e^{rt}); 0]$$

Cette dernière stipule que le payoff de détenir un terrain vacant au temps t est égal au maximum entre la valeur ajustée de la propriété développée sur ce dernier moins son coût total de développement et zéro. Sous cette prémisse, on peut alors déterminer la valeur du terrain en prenant l'espérance de ce payoff sous la mesure risque-neutre et en l'actualisant au taux sans risque. Cette approche diffère considérablement de la méthode classique de valeur résiduelle expliquée plus tôt en introduisant l'incertitude dans la valeur de la propriété développée. On néglige toutefois l'incertitude concernant les coûts de construction puisque,

comme Bulan, Mayer et Somerville (2008) le font remarquer, il s'agit de la principale source de variabilité dans les flux monétaires nets futurs que recevra un développeur.

4.2 – Valeur de la propriété (re)développée

Tel que soulevé dans la présentation de l'étude de Quigg (1993), une difficulté supplémentaire s'ajoute au problème d'évaluation de l'option de (re)développement. En effet, contrairement à une option sur action où le prix de l'actif sous-jacent est observable en tout temps, l'actif sous-jacent à l'option de (re)développement, c'est-à-dire le prix de la propriété (re)développée, ne peut être observé au moment où l'option est contractée, ni même au moment où elle est exercée. Pour surmonter ce problème, on s'inspire donc de la méthodologie de Quigg en faisant appel à la méthode des prix hédoniques, présentée à la Section II et par laquelle la valeur marchande de la propriété (re)développée est estimée en fonction d'un ensemble de caractéristiques observables. Comme l'échantillon est composé exclusivement de projets en copropriété, le montant payé pour une unité tient évidemment compte de la partie privative (l'unité), mais aussi d'une portion correspondant à sa fraction des parties communes. Au temps t on peut donc définir la valeur de la propriété (re)développée P_t comme la somme de la valeur des unités qui la composent :

$$P_t = \sum_{i=1}^q p_{i,t}$$

De là, on spécifie un modèle de prix hédonique permettant d'estimer *ex ante* la valeur d'une unité en copropriété à l'aide d'un ensemble de caractéristiques observables propre à celle-ci. Ce modèle est par la suite augmenté d'une variable aléatoire affectant la totalité du marché de la copropriété, introduisant ainsi de l'incertitude dans le prix des unités en copropriété et donc de la valeur du projet. Cette variable aléatoire est le prix moyen par pied carré (*PMPC*), calculée comme la moyenne du prix payé par pied carré pour l'ensemble des transactions de condos sur l'île de Montréal. La motivation derrière l'utilisation du *PMPC* repose sur sa capacité à réduire l'activité de ce marché à une mesure comparable, c'est-à-dire

le prix payé pour faire l'acquisition d'un pied carré de superficie habitable en copropriété à Montréal. Ce prix étant le résultat de la rencontre entre l'ensemble des acheteurs et vendeurs sur le marché de la copropriété, il est alors susceptible de fluctuer aléatoirement en fonction des chocs affectant l'offre ou la demande de superficie habitable à Montréal. La forme générale du modèle factoriel qui en résulte est présentée ci-dessous :

$$p_{i,t} = \delta + \alpha PMPC_t + \sum_{k=1}^K \beta_k x_{k,i} + \varepsilon_i$$

où $x_{k,i}$ est la caractéristique k de l'unité i , β_k est le coefficient de la caractéristique k et ε_i est un terme d'erreur avec $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Les paramètres δ , α et β_k sont estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) pour différentes spécifications, dont les résultats sont présentés à la Section V. De plus, on fait l'hypothèse que ces paramètres sont constants et donc que l'importance relative accordée à l'ensemble des déterminants du prix des condos l'est tout autant. Les caractéristiques observables spécifiques à chaque unité étant également fixes dans le temps, le seul élément stochastique du modèle ci-dessus est la variable d'état détaillée ci-dessous.

4.3 – Dynamique de prix de la variable d'état

La Figure 4.1 trace l'évolution du prix moyen par pied carré $PMPC$ pour les unités en copropriété vendues sur l'île de Montréal entre décembre 1983 et mars 2014. Même si de manière générale le $PMPC$ a augmenté entre ces deux dates, on y distingue clairement trois périodes. La première, de 1983 à 1988, a été une période haussière, tandis que la seconde, de 1988 au milieu des années 1990 a vu le $PMPC$ chuter de près de 50 %. La troisième période, celle dans laquelle on se trouve toujours, a quant à elle vu la valeur du $PMPC$ tripler en un peu moins de 20 ans. Cette dernière hausse du $PMPC$ suit la tendance enregistrée par d'autres mesures du marché immobilier pendant la même période comme on peut le voir sur la Figure 4.2 qui compare le $PMPC$ à l'Indice de Prix de Maison Teranet - Banque Nationale^{MC} et à l'Indice des Prix des Propriétés MLS® de janvier 2005 à mars 2014.

Figure 4.1 – Évolution mensuelle du prix moyen par pied carré des unités en copropriété à Montréal de décembre 1983 à mars 2014

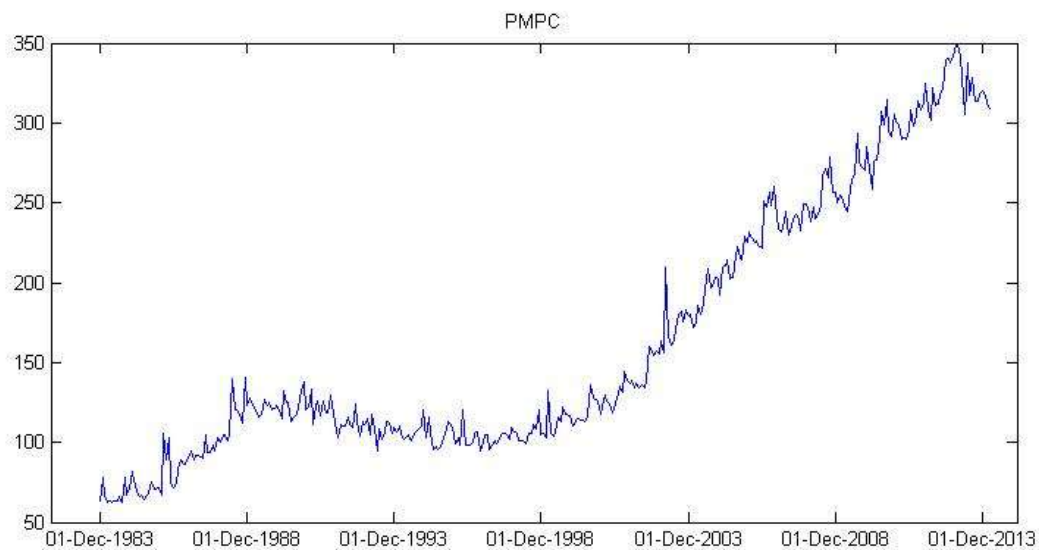
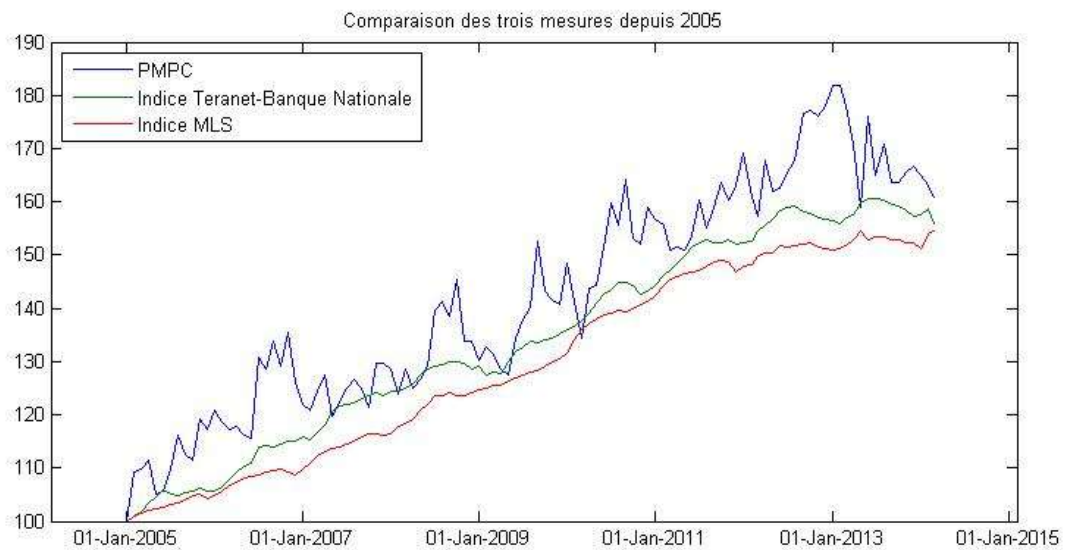


Figure 4.2 – Évolution mensuelle du PMPC, de l'Indice Teranet-Banque Nationale⁴ et de l'Indice du prix des maisons MLS⁵ de janvier 2005 à mars 2014



⁴ Indice de prix pour la région métropolitaine de Montréal

⁵ Indice de prix des appartements en copropriété pour la région métropolitaine de Montréal

Dans le but de définir un processus stochastique pour la variable d'état, on décide, à l'instar des études qui analysent le comportement des indices boursiers, de travailler avec les log-rendements, dont les propriétés statistiques sont plus intéressantes que le simple niveau des prix. On définit R_t comme le log-rendement mensuel du *PMPC* (ci-après « le rendement »), dont la Figure 4.3 illustre l'évolution de janvier 1984 à mars 2014⁶.

$$R_t \equiv \ln \left(\frac{PMPC_t}{PMPC_{t-1}} \right)$$

L'analyse de la Figure 4.3 permet de constater que la variance des rendements mensuels varie à travers le temps⁷. En effet, les grandes variations de prix tendent à être suivies par d'autres grandes variations de prix et les petites par de petites, un phénomène connu sous le nom de *volatility clustering*. De plus, les statistiques descriptives de ces rendements, présentées au Tableau 4.1 montrent que ces derniers ne sont vraisemblablement pas distribués selon une loi normale. Sur l'ensemble de la période allant de janvier 1984 à mars 2014, la distribution historique des rendements apparaît leptokurtique, avec un kurtosis statistiquement supérieur à trois et un coefficient d'asymétrie statistiquement différent de zéro. La non-normalité des rendements est également confirmée par le test de Jarque-Bera qui rejette l'hypothèse nulle de normalité pour la période entière et deux des trois sous-périodes. En plus de ne pas être distribuée selon une loi normale, la série des rendements du *PMPC* exhibe de l'autocorrélation, tout comme la série des rendements au carré, tel que démontré par un test de Ljung-Box sur les six premiers retards, ce qui suggère la présence de dépendance temporelle et d'hétéroscédasticité conditionnelle.

⁶ On considère que le bénéfice de détention d'un pied carré de superficie habitable d'une unité en copropriété est égal à 0 en tout temps.

⁷ On se penche ici sur la série nominale du *PMPC*. Dans des analyses non reportées, la série temporelle du *PMPC* réel a été calculée à partir de l'Indice des Prix à la Consommation de Statistique Canada (IPC), mais aucune différence notable dans l'évolution temporelle de la variable ou de ses statistiques descriptives n'a été observée.

Tableau 4.1 – Statistiques descriptives des rendements mensuels du *PMPC*

	Jan. 1984 Déc. 1993	Jan.1994 Déc. 2003	Jan. 2004 Mars 2014	Jan. 1984 Mars 2014
Moyenne	0.00457	0.00413	0.00444	0.00438
Écart-type	0.10	0.07	0.04	0.07
Skewness	0.78	0.27	0.24	0.70
<i>p-value</i>	2.88E-04	2.88E-04	2.86E-04	2.28E-04
Kurtosis	7.08	7.05	2.95	9.54
<i>p-value</i>	4.01E-16	4.01E-16	3.31E-16	6.25E-19
Jarque-Bera	95.50	83.71	1.17	676.20
<i>p-value</i>	1.00E-03	1.00E-03	0.50	1.00E-03
Ljung-Box Q(6)	25.9171	29.5718	14.8967	66.6729
<i>p-value</i>	2.31E-04	4.74E-05	0.0211	1.96E-12
Ljung-Box Q ² (6)	11.6961	20.7988	1.8522	37.4205
<i>p-value</i>	0.07	1.99E-03	0.93	1.46E-06
Nombre d'observations	120	120	123	363

Ces caractéristiques conjuguées à la non-normalité des rendements rendent inadéquate l'utilisation du mouvement brownien géométrique employé par Williams (1991) et Quigg (1993) pour modéliser la dynamique du *PMPC*. En effet, le mouvement brownien géométrique prévoit la dynamique suivante pour les rendements de l'actif sous-jacent

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$$

où $\{W_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et μ et σ sont respectivement les paramètres constants de dérive et de diffusion. La dépendance temporelle et la non-normalité des rendements violent clairement les propriétés du mouvement brownien, alors que la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle met en doute la constance de σ . Pour inclure ces éléments à la dynamique de prix de la variable d'état, on détermine dans une première étape, le modèle autorégressif qui cadre le mieux avec la série temporelle des rendements mensuels. Une fois ce modèle spécifié, on modélise, dans une seconde étape, les résidus de ce dernier à l'aide d'un

modèle à hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisée (GARCH). Ce type de modèle, proposé par Engle (1982), mais généralisé par Bollerslev (1986), est largement utilisé pour faire l'évaluation d'options sur action puisqu'il permet de modéliser plusieurs phénomènes observés sur les marchés qui sont inconsistants avec les hypothèses classiques de Black et Scholes (1973) et Merton (1973). Dans sa forme générale, le modèle GARCH(1,1) pour les rendements d'un sous-jacent s'écrit comme :

$$R_{t+1} = \mu_{t+1} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1}$$

$$h_{t+1} = \omega + \alpha h_t \varepsilon_t^2 + \beta h_t$$

avec $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Comme on peut le voir dans les deux équations ci-dessus, le modèle GARCH est un modèle à temps discret qui pose que la variance conditionnelle à une période donnée, h_t , dépend de la variance et des chocs aléatoires des périodes précédentes. Cette dépendance permet entre autre de reproduire les phénomènes de *volatility clustering*, mais aussi d'obtenir des sourires de volatilité, deux caractéristiques observées sur les principaux indices boursiers. Différentes spécifications de modèles GARCH ont par la suite été proposées par différents auteurs depuis Bollerslev (1986), dont notamment les spécifications AGARCH d'Heston et Nandi (2000) et NGARCH d'Engle et Ng (1993). L'estimation de ces différentes spécifications et le choix du modèle retenu pour la dynamique de prix de la variable d'état sont présentés à la Section V.

4.4 – Approche de tarification

On a vu précédemment que pour déterminer la valeur d'une option, il suffisait d'appliquer la propriété de martingale qui spécifie que le prix d'un produit dérivé est tout simplement égal à l'espérance sous la mesure de probabilité risque-neutre de son payoff futur actualisé au taux sans risque. Dans certain cas, dont celui d'une option européenne respectant les hypothèses du modèle de Black et Scholes (1973) et Merton (1973), une solution analytique peut être déduite pour ce calcul d'espérance, simplifiant de manière considérable ce problème d'évaluation. En l'absence de telles solutions, on doit alors se tourner vers les méthodes

numériques, particulièrement efficaces dans le cas des options américaines. Du fait que la variable d'état est réputée suivre un processus GARCH, où le niveau de la variance conditionnelle dépend de son niveau passé et des chocs aléatoires l'ayant affecté jusqu'à maintenant, l'approche *Least Square Monte Carlo* (LSM) proposée par Longstaff et Schwartz (2001) est privilégiée afin de capter cette dépendance de trajectoires (*path dependence*).

La première étape pour valoriser l'option de (re)développement par LSM consiste donc à simuler un ensemble de trajectoires pour l'actif sous-jacent à l'aide d'une simulation Monte Carlo. On se rappelle qu'au temps t , le prix de la propriété (re)développée est donné par :

$$P_t = \sum_{i=1}^q p_{i,t}$$

où

$$p_{i,t} = \delta + \alpha PMPC_t + \sum_{k=1}^K \beta_k x_{k,i} + \varepsilon_i$$

Comme on suppose que δ , α , β_k et x_k sont fixes pour l'ensemble des unités composant les projets de l'échantillon, on n'a qu'à y insérer la valeur de la variable d'état au temps t pour retrouver le prix de ces unités et par le fait même la valeur du projet au temps t . Simuler des trajectoires pour P revient donc à simuler des trajectoires pour $PMPC$. Toutefois, comme la dynamique de prix qui découle de l'estimation d'un modèle GARCH est celle observée sous la mesure de probabilité historique (physique) et que la propriété de martingale stipule que le prix du dérivé est égal à l'espérance sous la mesure de probabilité risque-neutre de son payoff futur actualisé au taux sans risque, un changement de mesure doit être effectué. Pour faire le passage de la mesure de probabilité physique à la mesure de probabilité risque neutre, on repose donc sur la méthodologie de Duan (1995) consistant à appliquer une version discrétisée du théorème de Girsanov au modèle choisi.

En pratique, l'utilisation de la mesure risque-neutre pour procéder à la tarification de l'option de (re)développement pose toutefois quelques problèmes. En effet, cette méthode de tarification repose sur le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage qui lui-même repose sur la possibilité de pouvoir en tout temps et sans frais de transaction acheter ou vendre un actif parfaitement corrélé avec la valeur de la propriété (re)développée. En immobilier, où la grande majorité des entreprises de développement sont à capital fermé, il peut alors être excessivement difficile pour un investisseur externe de procéder à la duplication des flux monétaires associés à l'option de (re)développement, sans compter les frais de transaction souvent élevés pour ce type de bien. Face à ces difficultés, il convient donc de souligner les limites de cette approche pour faire l'évaluation de l'option de (re)développement. Ces limites nous apparaissent cependant comme un moindre mal dans la mesure où une approche de tarification sous la mesure de probabilité physique aurait nécessité d'estimer l'aversion au risque de chacun des détenteurs de l'option de (re)développement. De plus, il est important de se rappeler que le taux d'actualisation utilisé dans le calcul de la VAN fait également l'hypothèse que les parts du projet sont transigées sur les marchés (Brach, 2002). L'utilisation des options réelles et la tarification sous la mesure risque-neutre ne nécessite donc pas d'hypothèses très différentes de celles déjà implicites au calcul de la VAN, en plus de permettre une meilleure représentation de l'incertitude et de la flexibilité d'un projet tout en évacuant des calculs l'aversion au risque des investisseurs.

Par définition, une simulation Monte Carlo consiste à simuler un certain nombre de trajectoires, parmi une infinité, de prix pour un actif sous-jacent. Comme ces simulations dépendent de la génération d'une variable aléatoire, il se trouve que le prix du produit dérivé résultant d'une telle estimation est aussi une variable aléatoire, dont la variance peut être considérable. Afin d'améliorer la qualité des estimations, on utilise deux techniques de réduction de variance, soit la variable antithétique et l'approche *empirical martingale simulation* (EMS) développée par Duan et Simonato (1998). Cette dernière comble une importante lacune des simulations Monte Carlo où la propriété de martingale n'est que très rarement respectée. En forçant la simulation de sorte que le rendement espéré de l'actif sous-

jacent sur l'ensemble des trajectoires soit égal au taux sans risque moins le taux de dividende de l'actif, l'EMS assure que les bornes de l'option soient respectées et permet par le fait même de réduire sensiblement la variance des estimations.

Une fois les trajectoires de prix de la propriété (re)développée simulées, on utilise la méthode LSM pour faire l'évaluation de l'option de (re)développement. Cette méthode, proposée par Carrière (1996), mais améliorée par Longstaff et Schwartz (2001), permet de faire l'évaluation d'options américaines par simulation Monte Carlo, ce qui a longtemps été considéré impossible en raison de la nécessité de procéder par induction rétrograde pour calculer une valeur de continuation à laquelle comparer la valeur d'exercice. L'idée derrière la méthode LSM consiste à partir de la date d'échéance de l'option, moment où le vecteur des valeurs de l'option est connu, et de procéder à l'induction rétrograde en comparant à chaque période la valeur d'exercice, également connue, et la valeur de continuation, obtenue par régression. Tant que la valeur de cette dernière est supérieure à la valeur d'exercice, on continue ainsi de manière à détecter les instants où l'option est exercée. Pour chaque trajectoire, l'instant optimal d'exercice est alors défini par la première période où l'option est exercée. En appliquant cette règle à l'ensemble des trajectoires, on arrive donc pour chacune d'entre elles à déterminer le montant et la date du payoff auxquels on applique la propriété de martingale en les actualisant à $t = 0$ au taux sans risque et en prenant la moyenne de ces derniers pour arriver à la valeur de l'option.

En considérant l'ensemble des trajectoires de prix simulées pour l'actif sous-jacent, il est également possible de faire ressortir la frontière d'exercice, c'est-à-dire la valeur pour chaque période à partir de laquelle il est optimal d'exercer l'option de (re)développement. Pour ce faire, il suffit au temps t de retracer les différentes trajectoires où l'option est exercée selon le modèle et de déterminer le niveau de prix de la propriété (re)développée qui y est associé. En prenant le minimum, on trouve donc la plus petite valeur à partir de laquelle il est optimal d'exercer l'option de (re)développement à cette période et en répétant le processus pour $t = 1, 2, \dots, T$ on arrive à une représentation graphique de la frontière d'exercice. On peut alors

comparer la valeur de la propriété (re)développée au moment où le développeur a réellement exercé son option pour déterminer si ce dernier a agi de manière optimale. Avant d'arriver à cette comparaison, il reste toutefois à estimer le modèle factoriel servant à déterminer la valeur marchande de la propriété (re)développée ainsi que les paramètres du modèle GARCH pour la variable d'état, ce qu'on fait à la section suivante.

V – ESTIMATIONS EMPIRIQUES

Afin de pouvoir valoriser l'option de (re)développement et déterminer de manière empirique si les développeurs immobiliers agissent de manière rationnelle et optimale dans l'exercice de cette option, il faut tout d'abord être en mesure d'estimer la valeur de la propriété (re)développée et la dynamique de prix suivie par celle-ci. Pour y arriver, on estime donc dans un premier temps la valeur de la propriété (re)développée à l'aide d'un modèle de prix hédonique augmenté d'une variable stochastique pour le prix des condos à Montréal et dans un second temps, on utilise la série des rendements du *PMPC* de janvier 1984 à mars 2014 pour estimer un modèle GARCH visant à reproduire la dynamique physique de prix de la propriété (re)développée.

5.1 – Estimation du modèle factoriel

À la Section IV, on a vu que la valeur marchande d'une propriété (re)développée en immeuble à condos était égale à la somme de la valeur marchande des unités qui la composent. En se basant une fois de plus sur des données de JLR Solutions Foncières, on a construit un échantillon de 3 095 unités en copropriété nouvellement construites sur l'île de Montréal et vendues entre 2011 et 2014. À l'aide d'un ensemble de caractéristiques observables et de la valeur historique mensuelle du PMPC au moment de la vente de l'unité, on a fait l'estimation de trois spécifications servant à estimer le prix d'une unité en copropriété par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). Le Tableau 5.1 rapporte quelques statistiques descriptives sur ces unités tant pour l'ensemble de l'échantillon que par arrondissement. On y dénote d'ailleurs d'importantes différences entre les arrondissements, et ce, tant au niveau des prix que de la superficie. Ainsi, on ne s'étonne pas que les prix moyens les plus élevés se retrouvent à Outremont et Ville Mont-Royal, même si ces résultats sont principalement dus à leur superficie habitable moyenne plus élevée comme en témoigne leur prix moyen par pied carré inférieur à celui de l'arrondissement Ville-Marie. Cet arrondissement est aussi celui où les

Tableau 5.1 – Statistiques descriptives de l'estimation MCO du modèle factoriel

	Moyenne	Médiane	Écart-Type	Minimum	Maximum			
Prix (en \$)	263,804.62	248,704.00	89,310.22	92,505.00	1,264,385.00			
Superficie habitable (en pi²)	848.36	831.00	217.07	400.00	2,738.00			
Prix (en \$/pi²)	316.42	299.30	83.20	87.60	1,049.32			
WalkScore	82.60	83.00	14.32	32.00	100.00			
	Nombre d'unités	Prix moyen (en \$)	Prix médian (en \$)	Superficie moyenne (en pi²)	Prix moyen (en \$/pi²)	Prix médian (en \$/pi²)	Étage moyen	WalkScore moyen
Ahuntsic/Cartierville	200	226,880	215,124	962.1	240.07	239.43	3.9	78.4
Côte-des-Neiges/Notre-Dame-de-Grâce	224	244,093	240,642	847.5	289.54	286.32	5.5	83.5
Lasalle	32	223,107	239,991	671.1	331.03	328.07	4.2	80.0
Mercier/Hochelaga-Maisonneuve	415	217,936	215,300	812.1	271.90	275.95	2.5	76.0
Montréal-Est	2	200,000	200,000	793.5	252.05	252.05	1.0	63.0
Montréal-Nord	100	210,186	214,200	916.3	231.31	233.86	3.4	60.7
Ville Mont-Royal	108	369,846	339,635	1,080.4	338.65	330.37	3.0	70.4
Outremont	15	432,747	413,740	1,088.8	395.86	398.73	2.5	84.4
Plateau Mont-Royal	111	339,992	326,731	913.8	378.60	360.00	2.1	90.0
Rivière-des-Prairies/Pointe-aux-Trembles	17	161,974	155,047	723.8	225.75	227.57	1.5	61.5
Rosemont/Petite-Patrie	186	254,482	254,634	874.7	294.38	297.55	2.3	86.1
Saint-Laurent	345	252,870	261,389	948.4	269.26	267.31	2.5	63.6
Verdun	106	257,147	261,486	917.0	285.25	285.67	2.3	81.3
Ville-Marie	862	296,263	277,499	747.2	397.81	391.90	5.8	97.1
Villeray/Saint-Michel/Parc-Extension	372	250,762	231,370	843.5	296.25	297.19	2.9	82.9
Total	3,095	263,805	248,704	848.4	316.42	299.30	3.8	82.6

immeubles à condos sont les plus hauts (5,8 étages en moyenne) et possèdent le meilleur WalkScore⁸ (97,1).

La superficie habitable d'une unité, son emplacement et sa proximité des différents services sont autant d'éléments susceptibles d'influencer grandement son prix. Pour connaître précisément l'importance de ceux-ci dans la détermination du prix d'une unité en copropriété, on les inclut dans trois spécifications différentes qu'on a estimées par la méthode MCO. Les deux premières spécifications utilisent le prix comme variable dépendante, alors que la dernière utilise le logarithme naturel du prix. Celle-ci se base entre autre sur les travaux de Brandt et Maennig (2011) ainsi que de Mahan *et al.* (2000) qui arrivent à la conclusion que la spécification semi-logarithmique permet d'améliorer le pouvoir explicatif des régressions et la significativité des coefficients. Les résultats de ces estimations se trouvent au Tableau 5.2 et sans grande surprise la troisième spécification est celle qui présente le plus grand pouvoir explicatif sous la base du coefficient de détermination ajusté (R^2). Celle-ci est d'ailleurs détaillée ci-dessous

$$\ln(p_{i,t}) = \delta + \alpha \ln(PMPC_t) + \beta_1 SQFT_i + \beta_2 SQFT_i^2 + \beta_3 FLOOR_i + \beta_4 FLOOR_i^2 + \beta_5 WALK_i + \beta_6 NEW_i + \beta_7 Sint_i + \sum_{b=1}^B \omega_b Arr_{b,i} + \varepsilon_i$$

où

$p_{i,t}$: Prix de l'unité i au mois t

$PMPC_t$: Le prix moyen par pied carré correspondant au mois où l'unité i a été vendue

$SQFT_i$: La superficie habitable de l'unité i en pied carré

$FLOOR_i$: L'étage sur lequel se trouve l'unité i (0 correspond au sous-sol)

$WALK_i$: Le Walk Score[®] de l'unité i

NEW_i : Une variable indicatrice égale à 1 si l'unité i fait partie d'un projet avec une nouvelle structure et 0 si l'unité i fait partie d'un projet qui a été rénové

$Sint_i$: Une variable indicatrice égale à 1 si l'unité i fait partie d'un projet avec un stationnement intérieur et 0 sinon

$Arr_{b,i}$: Un ensemble de variables indicatrices égales à 1 si l'unité i est située dans l'arrondissement b ⁹

⁸ Le Walk Score[®] est un indice compris entre 0 et 100 qui mesure la proximité d'une adresse aux différents services et utilités publiques pour une personne à pied. Un score de 100 indique une très grande proximité.

⁹ L'arrondissement de référence est Ville-Marie.

Sous celle-ci, le prix de l'unité s'écrit :

$$p_{i,t} = PMPC_t^\alpha \exp \left(\delta + \beta_1 SQFT_i + \beta_2 SQFT_i^2 + \beta_3 FLOOR_i + \beta_4 FLOOR_i^2 + \beta_5 WALK_i + \beta_6 NEW_i + \beta_7 Sint_i + \sum_{b=1}^B \omega_b Arr_{b,i} + \varepsilon_i \right)$$

avec comme unique variable stochastique le *PMPC*.

Le Tableau 5.2 montre que les trois spécifications sont en mesure d'expliquer une proportion considérable de la variation du prix des condos contenus dans l'échantillon. En effet, les coefficients de détermination ajustés sont respectivement de 69,2 %, 69,5 % et 74,9% pour les spécifications un, deux et trois. De plus, les paramètres de ces régressions sont conjointement significatifs comme en témoignent les statistiques *F* élevées. Tel que mentionné précédemment, la spécification semi-logarithmique (spécification trois) est celle qui performe le mieux alors que seulement deux coefficients ne sont statistiquement pas significatifs à un niveau de confiance de 99 %. L'analyse des coefficients de cette régression permet d'ailleurs d'établir des relations intéressantes sur les déterminants de la valeur des unités en copropriété nouvellement construites à Montréal. Tout d'abord, on remarque que le coefficient affectant la variable d'état est positif et significatif, ce qui signifie que le prix d'une unité évolue dans la même direction que le prix moyen par pied carré pour l'ensemble du marché montréalais de la copropriété. On trouve également une relation positive et décroissante pour la superficie et l'étage occupé par l'unité, ce qui confirme les résultats de Conroy, Narwold et Sandy (2013). Ainsi, toute chose étant égale par ailleurs, le prix marginal d'un pied carré supplémentaire de superficie habitable va être plus élevé pour une unité de 700 pieds carrés que pour une unité de 1000 pieds carrés. De même, la valeur marginale d'habiter au deuxième par rapport au premier étage va être supérieure à celle de passer du septième au huitième étage. Le coefficient de la variable *WALK* est aussi positif et statistiquement significatif tel qu'anticipé, tout comme pour la présence d'un stationnement intérieur. De plus, l'analyse des coefficients des variables indicatrices liées aux arrondissements permet également de constater que

Tableau 5.2 – Résultats de l'estimation MCO du modèle factoriel

	Spécification 1			Spécification 2			Spécification 3		
	Coeff.	t-stat.		Coeff.	t-stat.		Coeff.	t-stat.	
Constante	-7.24E+04	-2.9448	***	-2.62E+04	-1.0051		9.5397	26.6767	***
PMPC	113.5396	1.7833	*	102.2482	1.6035		-	-	
LN(PMPC)	-	-		-	-		0.2689	4.4196	***
Sqft	293.2753	62.3612	***	191.8659	9.5375	***	0.0016	26.5463	***
Sqft ²	-	-		0.0531	5.1825	***	-3.14E-07	-10.3564	***
Floor	6.24E+03	18.9802	***	6.61E+03	8.3026	***	0.0289	12.2752	***
Floor ²	-	-		-15.9378	-0.3375		-4.94E-04	-3.5451	***
Walk	702.435	6.6607	***	713.8235	6.7946	***	0.0031	9.8711	***
New	-1.76E+04	-6.6683	***	-1.78E+04	-6.6847	***	-0.0509	-6.4822	***
Sint	2.72E+04	11.4683	***	2.61E+04	10.7715	***	0.0795	11.1253	***
Ahuntsic/Cartierville	-1.18E+05	-24.8699	***	-1.16E+05	-24.3157	***	-0.3873	-27.5428	***
Côte-des-Neiges/Notre-Dame-de-Grâce	-7.68E+04	-18.9255	***	-7.44E+04	-18.2243	***	-0.2535	-21.0249	***
Lasalle	-3.16E+04	-3.4455	***	-3.13E+04	-3.4215	***	-0.1062	-3.939	***
Mercier/Hochelaga-Maisonneuve	-5.21E+04	-13.4761	***	-4.95E+04	-12.7724	***	-0.1867	-16.3	***
Montréal-Est	-3.16E+04	-0.8938		-2.79E+04	-0.7923		-0.1236	-1.1901	
Montréal-Nord	-9.61E+04	-14.3973	***	-9.27E+04	-13.8814	***	-0.3283	-16.6451	***
Ville Mont-Royal	9.42E+03	1.5278		9.17E+03	1.4928		0.0342	1.884	*
Outremont	6.96E+04	5.2583	***	7.14E+04	5.4152	***	0.1854	4.7627	***
Plateau Mont-Royal	3.46E+04	6.592	***	3.61E+04	6.8861	***	0.1167	7.5378	***
Rivière-des-Prairies/Pointe-aux-Trembles	-4.91E+04	-3.833	***	-4.81E+04	-3.7642	***	-0.2566	-6.8039	***
Rosemont/Petite-Patrie	-3.42E+04	-7.7382	***	-3.13E+04	-7.0513	***	-0.1094	-8.3405	***
Saint-Laurent	-4.59E+04	-9.3269	***	-4.23E+04	-8.5496	***	-0.12	-8.2162	***
Verdun	-3.76E+04	-6.7304	***	-3.66E+04	-6.5778	***	-0.1084	-6.5981	***
Villeray/Saint-Michel/Parc-Extension	-4.76E+04	-12.9804	***	-4.56E+04	-12.3831	***	-0.1647	-15.1469	***
R ² ajusté	0.69			0.69			0.75		
F-Stat	348.81			320.91			420.31		
p-value	0.00			0.00			0.00		
Taille de l'échantillon	3,095			3,095			3,095		

Niveaux de significativité : 10 % (*), 5 % (**) et 1 % (***)

Montréal est une ville monocentrique avec des prix qui diminuent au fur et à mesure qu'on s'éloigne de son centre, représenté par les arrondissements de Ville-Marie, Outremont et le Plateau. Ainsi à caractéristiques égales, un condo se vend 18,7 % moins cher dans Mercier/Hochelaga-Maisonneuve que dans Ville-Marie et jusqu'à 38,7 % lorsqu'on s'éloigne encore un plus vers l'est dans Rivière-des-Prairies/Pointe-aux-Trembles, ce qui encore une fois est conforme aux attentes. Le principal élément de surprise découlant de l'analyse des résultats de l'estimation MCO concerne le coefficient négatif de la variable *NEW*. Ce dernier indique qu'un acheteur peut s'attendre à obtenir un escompte de 5 % sur un condo construit dans un bâtiment neuf par rapport à un condo aménagé dans un bâtiment existant. En y regardant de plus près, on remarque que cette échantillon d'unités en copropriété est composé de quelques immeubles à caractère historique ayant été reconvertis en immeuble à condos. Il est donc possible que les acheteurs préfèrent détenir un condo dans ce type de bâtiment, d'où la prime à payer pour en faire l'acquisition. Un autre élément qui pourrait expliquer le prix plus élevé de ces condos concerne le coût de construction typiquement plus élevé pour ce type de projet, ce qui, en supposant un niveau de marge constant pour le développeur, implique un prix de vente plus élevé.

En résumé, le Tableau 5.2 permet de confirmer que la spécification semi-logarithmique est supérieure aux deux autres et démontre une bonne adéquation avec l'échantillon actuel. Il reste néanmoins une possibilité que les capacités prédictives hors-échantillon de celle-ci ne soient pas aussi performantes que les autres. Pour s'assurer de la performance de la spécification choisie, on a donc sélectionné au hasard 500 observations qu'on a exclues de l'échantillon et on a estimé les coefficients de régressions des trois spécifications sur les 2 595 observations restantes. À l'aide de ces derniers, on a calculé le prix prévu par chacune des spécifications pour les 500 observations initialement exclues, à partir desquels il a été possible de mesurer l'erreur de prévision en les comparant aux prix réels. Le Tableau 5.3 relate différentes mesures par rapport à ces erreurs et on peut y voir qu'à nouveau la spécification trois est la meilleure, et ce, sur l'ensemble des mesures présentées. Cela confirme les capacités

prédictives de la spécification semi-logarithmique et conforte le choix de reposer sur celle-ci pour estimer la valeur marchande des projets de condos.

Tableau 5.3 – Erreurs de prévision hors-échantillon

	Spécification 1	Spécification 2	Spécification 3
Moyenne des erreurs (en \$)	4,012	4,233	415
Somme des erreurs (en \$)	2,006,245	2,116,673	207,430
Moyenne des erreurs au carré	1,753,518,094	1,788,118,740	1,485,178,322
Somme des erreurs au carré	876,759,047,151	894,059,369,881	742,589,161,071
Erreur quadratique moyenne	41,875	42,286	38,538

5.2 – Modélisation GARCH de la variable aléatoire

L'analyse de la série temporelle des log-rendements du *PMPC* menée à la section IV a démontré que ces derniers n'étaient pas distribués selon une loi normale et exhibaient une forte dépendance temporelle. On a également vu qu'en raison de ces caractéristiques, l'utilisation du mouvement brownien géométrique n'était pas appropriée pour modéliser les rendements de la variable d'état. Pour capter cette dépendance temporelle, on détermine tout d'abord le nombre de retard optimal d'un modèle autorégressif, dont l'équation pour un modèle d'ordre p peut s'écrire comme :

$$R_t = \sum_{i=1}^p \theta_i R_{t-i} + \varepsilon_t$$

où p est le nombre de retards et $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. En estimant différents modèles pour $p = 1, 2, \dots, 20$ par la méthode des moindres carrés ordinaires et en testant à chaque fois l'hypothèse nulle que le coefficient du retard additionnel est égal à zéro, on arrive à la conclusion que le nombre optimal de retards p^* est égal à quatre. Les résultats de cette

estimation se trouvent au Tableau 5.4 et permettent de valider que les rendements mensuels exhibent une forte dépendance temporelle. En effet, le rendement au mois t est corrélé négativement avec les rendements des quatre mois précédents, corrélation qui diminue de façon graduelle à mesure qu'on recule dans le temps et qui corrobore les résultats de Bulan, Mayer et Somerville (2008). En appliquant un test de Ljung-Box jusqu'à six retards sur les résidus au carré du modèle autorégressif d'ordre quatre, on est incapable de rejeter l'hypothèse nulle de non-autocorrélation tel que démontré par la p -value de 0,44. Toutefois, l'application de ce modèle pour répliquer la dynamique des rendements du *PMPC* ne permet pas de reproduire suffisamment bien toutes les caractéristiques de la série historique de la variable d'état.

Tableau 5.4 – Résultats de l'estimation MCO du modèle autorégressif d'ordre 4

	Coeff.	t-stat.	p-value
θ_1	-0.5061	-8.7617	3.87E-17
θ_2	-0.2313	-3.6237	0.0002
θ_3	-0.2307	-2.8838	0.0021
θ_4	-0.1633	-2.8874	0.0021
R ² ajusté		0.2154	
Taille de l'échantillon		359	
Ljung-Box Q(6) ¹⁰		5.8568	
p-value		0.4394	

Dans l'optique de capter ces éléments et d'avoir une approche orientée vers l'avenir, on se tourne vers les modèles GARCH pour lesquels la variance conditionnelle des périodes futures dépend de leur niveau actuel. Ainsi, on part du modèle autorégressif d'ordre quatre estimé ci-dessus auquel on ajoute une modélisation GARCH(1,1) des résidus tel que le rendement mensuel du *PMPC*, R_t , s'écrit :

$$R_{t+1} = \sum_{i=1}^4 \theta_i R_{t+1-i} + \sqrt{h_{t+1}} \varepsilon_{t+1}$$

¹⁰ Test de Ljung-Box avec 6 retards sur les résidus au carré du modèle autorégressif d'ordre 4.

$$h_{t+1} = \omega + \alpha h_t \varepsilon_t^2 + \beta h_t$$

où $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. L'estimation des paramètres de ce modèle est réalisée en deux temps. Dans un premier temps, les paramètres autorégressifs $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ sont estimés à l'aide la méthode MCO. À partir de ces derniers, on obtient les résidus du modèle autorégressif d'ordre quatre qui servent dans un second temps à estimer les paramètres du GARCH(1,1) $\{\omega, \alpha, \beta\}$ par la méthode du maximum de vraisemblance. Sous celle-ci, on cherche l'ensemble de paramètres $\vartheta = \{\omega, \alpha, \beta\}$ qui maximise la probabilité d'observer les réalisations de rendements générées par le modèle. Pour ce faire, soit :

$$\varepsilon_t(\vartheta) = \frac{(R_t - \sum_{i=1}^4 \theta_i R_{t-i})}{\sqrt{h_t(\vartheta)}}$$

pour $t = 1, 2, \dots, T$. Comme la variance conditionnelle mensuelle dépend de la variance conditionnelle au mois précédent, on initialise le tout en fixant $h_1 = Var(\{R_t\}_{t=1, \dots, T})$ soit la variance des rendements historiques du PMPC de janvier 1984 à mars 2014. En faisant l'hypothèse que ε_t suit une loi normale, la densité de probabilité jointe de l'ensemble des observations s'écrit comme :

$$\prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{h_t(\vartheta)} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2(\vartheta)}{2}\right)$$

On va alors chercher le couple de paramètre ϑ qui va maximiser la probabilité d'observer les rendements du *PMPC* de janvier 1984 à mars 2014, ce qui revient à minimiser l'expression suivante :

$$\vartheta^* = \arg \min_{\vartheta} -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log 2\pi + \log h_t + \varepsilon_t^2$$

Pour s'assurer de la stationnarité du processus de variance, on doit avoir $\alpha + \beta < 1$ qu'on fixe comme condition à l'optimisation. Le résultat de cette estimation est présenté au Tableau 5.5,

tout comme les estimations du AGARCH d'Heston et Nandi (2000) et du NGARCH d'Engle et Ng (1993), dont les spécifications peuvent être retrouvées à l'annexe A. Ces deux dernières spécifications introduisent deux paramètres supplémentaires par rapport au GARCH, soit λ visant à capter la prime de risque du sous-jacent par rapport au taux sans risque¹¹ et γ qui cherche à introduire une corrélation négative entre les rendements et la volatilité, un phénomène connu sous le nom d'effet de levier.

Tableau 5.5 – Résultats de l'estimation par maximum de vraisemblance des spécifications GARCH, NGARCH et AGARCH

	AR(4)-GARCH	AR(4)-AGARCH	AR(4)-NGARCH
θ_1	-0.506083	-0.506083	-0.506083
θ_2	-0.231349	-0.231349	-0.231349
θ_3	-0.230706	-0.230706	-0.230706
θ_4	-0.163348	-0.163348	-0.163348
ω	2.45E-09	0.002676	0.002765
α	0.027039	0.001207	0.252048
β	0.972960	2.72E-08	0.027690
λ		1.004634	0.124955
γ		5.586693	0.372727
Persistence	0.999999	0.037668722	0.314754
LL ¹²	820.2529	820.4877	818.8224
AIC	1654.50	1659.00	1655.60
BIC	1681.70	1693.90	1690.60
Ljung-Box Q(6)	0.516	1.408	2.1625
<i>p-value</i>	0.9976	0.9654	0.9042
Taille de l'échantillon	359	359	359

¹¹ Le rendement mensuel des obligations fédérales canadiennes d'une maturité de 10 ans a été utilisé comme taux sans risque dans l'estimation du AGARCH et du NGARCH.

¹² Logarithme du maximum de vraisemblance (*log-likelihood*).

L'analyse du Tableau 5.5 permet de constater que les trois spécifications rejettent plus clairement l'hypothèse de non-autocorrélation dans les résidus au carré que dans le cas du modèle autorégressif d'ordre quatre comme en témoigne les *p-values* systématiquement supérieures à 0,90 d'un test de Ljung-Box avec six retards. Sur cette base, le AR(4)-GARCH est celui qui performe le mieux, tandis que le AR(4)-AGARCH est celui qui génère le maximum de vraisemblance le plus élevé, tout comme pour le critère d'information d'Akaike (AIC) et Bayésien (BIC). Afin de valider le choix du modèle à utiliser pour modéliser les rendements de la variable d'état, on procède à la vérification des capacités prédictives hors-échantillon de chacune des spécifications considérées jusqu'à maintenant. Pour y arriver, on compare les prévisions obtenues par ces spécifications aux rendements réellement observés et on calcule l'erreur de prévision de la façon suivante

$$\varepsilon_{t+\delta}^* = R_{t+\delta} - R_{t+\delta}^*$$

pour $\delta = 1, 2, \dots, \tau$ avec $t + \tau = T$. En utilisant quatre valeurs de τ différentes de façon à obtenir quatre ensembles de données, soit : janvier 1984 à décembre 1995, janvier 1984 à décembre 2000, janvier 1984 à décembre 2005 et janvier 1984 à décembre 2010, on calcule l'erreur quadratique moyenne (EQM) des erreurs de prévision jusqu'en mars 2014 tel que :

$$EQM = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{\delta=1}^{\tau} (\varepsilon_{t+\delta}^*)^2}$$

Comme ces prévisions dépendent d'un tirage de nombres aléatoires, on répète cette opération 10 000 fois et on calcule la moyenne des EQM, dont les résultats se trouvent au Tableau 5.6. On constate dans ce dernier que l'EQM diminue à mesure qu'on augmente le nombre d'observations à partir desquelles on procède à l'estimation des paramètres et que même si le AR(4)-GARCH et le AR(4)-NGARCH ont en moyenne une EQM de 0,0944, le premier performe mieux que le second lorsqu'on augmente la taille de l'échantillon. Une représentation

Tableau 5.6 – Erreur quadratique moyenne de la modélisation de la variable d'état

Périodes	Nombre d'observations	AR(4)	AR(4)- GARCH	AR(4)- AGARCH	AR(4)- NGARCH
Jan. 1984 à déc. 1995	144	0.1204	0.1074	0.1073	0.1072
Jan. 1984 à déc. 2000	204	0.1117	0.0994	0.0993	0.0992
Jan. 1984 à déc. 2005	264	0.1006	0.0896	0.0899	0.0896
Jan. 1984 à déc. 2010	324	0.0883	0.0812	0.0818	0.0816
Moyenne		0.1052	0.0944	0.0946	0.0944

graphique de la différence entre les rendements observés et les rendements estimés pour ces quatre périodes à partir de la modélisation AR(4)-GARCH pour un seul tirage aléatoire est d'ailleurs présentée aux Figures 5.1 à 5.4. On remarque que ce modèle arrive à capter les phénomènes soulignés plus tôt, dont le *volatility clustering*, en plus de fournir une prévision assez fiable des rendements du PMPC, surtout dans le dernier cas où on se sert de la période allant de janvier 1984 à décembre 2010 pour estimer les paramètres du modèle (Figure 5.4). Armé d'un modèle factoriel pour déterminer la valeur marchande de la propriété (re)développée ainsi que sa dynamique de prix, on dispose de tous les éléments nécessaires pour calculer la valeur de l'option de (re)développement et déterminer si les développeurs immobiliers sont rationnels dans l'exercice de cette option, ce qu'on réalise à la section VI.

VI – PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

À la section 5.1, on a proposé un modèle factoriel pour faire l'estimation de la valeur marchande d'une unité en copropriété à partir d'un ensemble de caractéristiques observables et d'une variable aléatoire, le prix moyen par pied carré, pour laquelle on a déterminé une dynamique physique de prix GARCH. À partir de ces deux éléments, on peut dès lors obtenir la dynamique risque-neutre du processus de prix de la variable d'état et procéder à la simulation de trajectoires de prix pour la propriété (re)développée. Par la suite, la valeur de l'option de (re)développement est estimée par LSM pour l'ensemble des projets de l'échantillon et est présentée en première partie des résultats. En seconde partie, on repart de la méthode LSM pour estimer la frontière d'exercice de chacun des projets et comparer la valeur de la propriété (re)développée à laquelle les développeurs ont exercé au niveau de la frontière à cette date.

6.1 – Tarification de l'option de (re)développement

On a vu précédemment qu'en absence d'opportunité d'arbitrage, la propriété de martingale devait être respectée et que conformément à celle-ci, le prix d'un dérivé était égal à l'espérance, sous la mesure risque-neutre, de son payoff futur actualisé au taux sans risque. Tel que proposé à la Section 4.1, le flux monétaire associé à l'option de (re)développement s'écrit

$$\pi_t = \text{MAX}[P_t e^{-rD} + V_0(e^{y^t} - 1) - (HC + SC + V_0 e^{rt} + V_0(e^{y(L-t)} - 1)e^{-r(L-t)}); 0]$$

où P_t est le seul élément stochastique.

6.1.1. – Dérivation du modèle de prix de la propriété (re)développée

Dans le cas d'un immeuble à condos, son prix est tout simplement égal à la somme des prix de chacune des unités qui le composent, ce qui, selon le modèle factoriel spécifié plus tôt, implique qu'il peut s'écrire comme :

$$P_t = \sum_{i=1}^q PMPC_i^\alpha \exp \left(\delta + \beta_1 SQFT_i + \beta_2 SQFT_i^2 + \beta_3 FLOOR_i + \beta_4 FLOOR_i^2 + \beta_5 WALK_i + \beta_6 NEW_i + \beta_7 Sint_i + \sum_{b=1}^B \omega_b Arr_{b,i} \right)$$

avec q le nombre d'unités du projet. On se rappelle que dans le modèle factoriel spécifié à la Section V, le $PMPC$ est l'unique terme stochastique et que sa dynamique physique de prix pouvait être modélisée par un modèle GARCH. En utilisant l'approche développée par Duan (1995), on obtient après le passage à la mesure de probabilité risque-neutre :

$$R_{t+1} = r - \frac{1}{2} h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}} \varepsilon_{t+1}^*$$

$$h_{t+1} = \omega + \alpha h_t (\varepsilon_t^* - \eta_t)^2 + \beta h_t$$

Avec

$$\eta_t = \frac{\sum_{i=1}^4 \theta_i R_{t-i} + \frac{1}{2} h_t - r}{\sqrt{h_t}}$$

$$\varepsilon_t^* \sim N(0,1)$$

soit la dynamique risque-neutre du rendement mensuel du $PMPC$, dont la dérivation complète se trouve à l'annexe B¹³. En repartant de la définition du rendement mensuel posée à la Section 4.2

$$R_{t+1} \equiv \ln \left(\frac{PMPC_{t+1}}{PMPC_t} \right) = r - \frac{1}{2} h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}} \varepsilon_{t+1}^*$$

le $PMPC$ au mois t peut alors être retrouvé en simulant les rendements jusqu'à t à partir de l'information contenue à $t = 0$, soit le mois où la propriété sous-développée a été acquise, selon l'équation suivante :

¹³ Ici, r est le taux sans risque exprimé sur une base mensuelle contrairement à l'équation du flux monétaire associé à l'option de (re)développement où il est exprimé sur une base annuelle.

$$PMPC_t = PMPC_0 \exp \left(\sum_{n=t_0+1}^t R_n \right)$$

et donc le prix de la propriété (re)développée au mois t s'écrit alors comme :

$$P_t = \sum_{i=1}^q \left(PMPC_0 \exp \left(\sum_{n=t_0+1}^t R_n \right) \right)^\alpha \exp \left(\delta + \beta_1 SQFT_i + \beta_2 SQFT_i^2 + \beta_3 FLOOR_i + \beta_4 FLOOR_i^2 \right. \\ \left. + \beta_5 WALK_i + \beta_6 NEW_i + \beta_7 Sint_i + \sum_{b=1}^B \omega_b Arr_{b,i} \right)$$

Pour évaluer l'option de (re)développement, on utilise donc dans un premier temps une simulation Monte Carlo pour simuler un ensemble de trajectoires de rendements mensuels pour le $PMPC$ à partir desquels on obtient une matrice $N \times M + 1$ de prix pour la propriété (re)développée, avec N le nombre de trajectoires simulées et $M = T/\Delta t$, soit le nombre de sous-périodes jusqu'à l'échéance de l'option (T) obtenue dans la discrétisation du temps. Dans un second temps, l'approche LSM est utilisée pour déterminer à quel moment l'option est exercée sur chacune des N trajectoires et ainsi obtenir les payoffs qui en découlent. Ces derniers sont par la suite ramenés en $t = 0$ en les actualisant au taux sans risque et la valeur de l'option est calculée en prenant la moyenne de ceux-ci pour en calculer l'espérance.

6.1.2. – Choix des paramètres

Nonobstant quelques simplifications dont la constance des coûts de construction et la possibilité d'un seul exercice¹⁴, le modèle élaboré jusqu'à maintenant permet d'évaluer l'option de (re)développement assez simplement. Toutefois, en raison des données disponibles, un certain nombre d'estimations et d'approximations sont toutefois nécessaires. Tout d'abord, même si on a vu précédemment que l'option de (re)développement était perpétuelle, on a choisi de fixer l'échéance de celle-ci à 10 ans de sorte d'être en mesure d'initier l'algorithme

¹⁴ Techniquement, pour une propriété sous-développée quelconque, il n'existe pas qu'une seule option de redéveloppement, mais bien une infinité, c'est-à-dire qu'une certaine parcelle de terrain pourra faire l'objet d'un nombre infini de redéveloppements.

d'induction rétrograde. À la section suivante, on montre que ces résultats sont en réalité peu sensibles à ce paramètre. De plus, en raison de la fréquence d'observation mensuelle de la variable $PMPC$ qui est nécessaire pour vérifier l'optimalité de l'exercice de l'option, on pose que $\Delta t = 1/12$ ce qui implique la simulation de 120 rendements mensuels par trajectoire. De pair avec l'échéance de l'option, on a opté pour le rendement des obligations fédérales canadiennes 10 ans comme représentation du taux sans risque¹⁵.

Les coûts de construction directs HC ont été estimés par la valeur du permis de construction émis par la ville pour chaque projet compris dans l'échantillon. Bien qu'imparfaite, cette information est également recueillie par la SCHL pour estimer la valeur des mises en chantier et donc à défaut d'avoir des données plus précises, il s'agit d'une alternative plutôt fiable. Quant aux coûts de construction indirects SC comprenant l'ensemble des coûts non-directs reliés à la réalisation du projet, ils ont été fixés à 85 \$ par pied carré de superficie habitable, soit la moyenne des coûts indirects pour onze projets de développement d'immeubles à condos sur l'île de Montréal auxquels on a eu accès. La sensibilité des résultats à ce paramètre est présentée à la section suivante.

En ce qui concerne les flux monétaires nets générés par la propriété sous-développée, on fait l'hypothèse que celle-ci est à la fin de sa durée de vie utile et donc que $y = 0$, ce qui réduit l'équation du payoff à

$$\pi_t = \text{MAX}[P_t e^{-rD} - (HC + SC + V_0 e^{rt}); 0]$$

avec V_0 le prix payé pour la propriété sous-développée et D le délai nécessaire avant de recevoir le produit de la vente des unités une fois la construction amorcée. Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice, mais à défaut d'avoir de l'information précise sur les flux monétaires nets générés par chacune des propriétés sous-développées de l'échantillon avant son acquisition il s'agit d'une hypothèse jugée raisonnable. Celle-ci l'est d'autant plus que ces projets ont effectivement été menés à terme, ce qui suppose une valeur peu élevée pour y par

¹⁵ Données provenant de la Banque du Canada, série V122543.

rapport à la valeur de la propriété (re)développée. Encore une fois, la sensibilité du modèle à cette hypothèse sera examinée plus loin.

Finalement, le prix de la propriété (re)développée au temps t est ajusté par le facteur $\exp(-rD)$ afin de refléter le délai entre l'exercice de l'option et la réception des flux monétaires provenant de la vente des unités du projet¹⁶. Soit

$$D = DC + DV$$

où DC est le délai de construction calculé comme la différence (en année) entre la date d'exercice et la date de déclaration de copropriété et DV est le délai moyen par projet pour écouler les unités construites. Afin de conserver un caractère *ex ante* et de reproduire les estimations qui peuvent être effectuées par un développeur avant le lancement d'un projet, on cherche à estimer ces deux composantes à l'aide des caractéristiques du projet sous considération. Pour ce faire, on procède donc à une régression linéaire sur l'échantillon de 48 projets dont on dispose, à l'exception de la spécification servant à estimer DV où il est nécessaire que la majorité des unités d'un projet aient été vendues, ce qui réduit la taille de celui-ci à 36. Ces spécifications sont présentées ci-dessous et les résultats de l'estimation au Tableau 6.1.

$$DC_i = \beta_1 SQFT_i + \beta_2 Redev_i + \beta_3 NEW_i + \beta_4 Sint_i + \varepsilon_i$$

$$DV_i = \beta_1 Units_i + \sum_{b=1}^B \alpha_b Arr_{b,i} + \varepsilon_i$$

avec

¹⁶ En appliquant un délai moyen par projet, on fait implicitement l'hypothèse que chaque unité a le même poids dans la valeur totale du projet et donc qu'une unité de 500 000 \$ vendue en trois mois aura le même impact qu'une unité de 250 000 \$ vendue également en trois mois. On fait également l'hypothèse qu'aucun dépôt n'est versé au développeur avant la livraison des unités et qu'une fois qu'il décide d'exercer, il verrouille la valeur marchande du projet qui sera par la suite ajustée uniquement par le facteur $\exp(-rD)$.

$SQFT_i$: La superficie habitable du projet i en pied carré

$Redev_i$: Une variable indicatrice égale à 1 si le projet est un redéveloppement et 0 sinon

NEW_i : Une variable indicatrice égale à 1 si le projet i a une nouvelle structure et 0 sinon

$Sint_i$: Une variable indicatrice égale à 1 si le projet i a un stationnement intérieur et 0 sinon

$Units_i$: Le nombre d'unités du projet i

$Arr_{b,i}$: Un ensemble de variables indicatrices égales à 1 si l'unité i est située dans l'arrondissement b

Tableau 6.1 – Estimation MCO du délai de construction et du délai de vente

	Délai de construction		
	Coeff.	t-stat.	p-value
Superficie	5.69E-08	0.0258	0.4897
Redev	0.5206	2.8722	0.0031
New	0.4436	2.5296	0.0075
Sint	0.4914	2.3594	0.0113
R ²		0.8061	
Taille de l'échantillon		48	

	Délai de vente		
	Coeff.	t-stat.	p-value
Nbr Unités	0.0058	2.0856	0.0222
AHUNTSIC	0.0855	0.7137	0.2401
CDN/NDG	-0.6053	-1.2788	0.8953
HOMA	0.0746	0.4937	0.3123
MONTREAL-NORD	0.2454	1.2212	0.1151
MONT-ROYAL	-0.0852	-0.5565	0.7093
PLATEAU	0.3176	6.5475	7.39E-08
RDP/PAT	-0.0169	-0.3791	0.6465
ROSEMONT	0.1440	1.2249	0.1144
VERDUN	0.0420	0.4773	0.318
VILLERAY	0.2609	4.0634	1.30E-04
R ²		0.5935	
Taille de l'échantillon		36	

Sans grande surprise, le délai de construction augmente toute chose étant égale par ailleurs avec la superficie du projet et la présence d'un stationnement intérieur qui nécessite souvent d'importants travaux. Ce délai est également plus long s'il s'agit d'un redéveloppement que d'un développement, tout comme s'il s'agit d'une nouvelle construction plutôt qu'une modification de la structure existante. Quant au délai de vente, le modèle explique sensiblement moins la variation de celui-ci par rapport au délai de construction tel que rapporté par les coefficients de détermination ajustés. La raison derrière cette observation vient vraisemblablement du fait que le délai de vente dépend de l'état du marché immobilier, c'est-à-dire l'offre et la demande d'unités en copropriété, et tout porte à croire que ces éléments contiennent un certain degré d'incertitude qu'on néglige ici.

6.1.3. – Valeur de l'option de (re)développement

Le Tableau 6.2 présente les résultats de l'estimation du modèle dans son ensemble pour chacun des 48 projets de l'échantillon. Pour y arriver, on a fixé le nombre d'estimations par LSM à 500 et pour chacune d'entre elles, on a simulé 10 000 trajectoires de 120 rendements. De là, la prime de l'option de (re)développement a été calculée en prenant la moyenne de ces 500 estimations. Les éléments contenus dans le Tableau 6.2 comprennent respectivement: le numéro du projet (i), la date de l'achat de la propriété sous-développée et le point de départ pour chacun des projets (t_0), le nombre de mois à partir duquel les paramètres du modèle GARCH ont été estimés (n) ainsi que la variance inconditionnelle des rendements du *PMPC* calculée comme la variance historique mensuelle de ces rendements servant également de point de départ pour l'estimation du modèle GARCH (h_1). Le Tableau 6.2 contient aussi l'ensemble des paramètres GARCH estimés, le délai estimé entre l'exercice de l'option et la réception des flux monétaires provenant de la vente des unités (D), le prix de la propriété sous-développée (V_0), la valeur de la prime de l'option de (re)développement, la proportion moyenne de celle-ci calculée comme la valeur de la prime divisée par le prix de la propriété sous-développée et finalement l'écart-type de la proportion pour les 500 estimations réalisées. Ces résultats sont analysés plus en détail à la Section VII, mais un résumé peut être retrouvé au Tableau 6.4 ci-dessous.

Tableau 6.4 – Synthèse des résultats de l'estimation de la prime de l'option de (re)développement et de son exercice

Délai moyen	Coût d'acquisition moyen (en \$)	Prime moyenne (en \$)	Proportion moyenne	Nombre moyen de mois avant exercice	Degré d'enjeux moyen	Ratio d'exercice moyen
1.3255	1,245,146	1,151,372	0.8454	8.8750	1.0445	1.0546
Nombre de projets		48.00				
Projets de redéveloppement		41.00				
Projet de développement		7.00				

6.2 – Frontière d'exercice et exercice optimal

À partir du modèle estimé ci-dessus et tel que démontré à la Section 4.4, il est possible de faire ressortir la frontière d'exercice pour chacun des projets composant l'échantillon, c'est-à-dire le niveau de prix que la propriété (re)développée doit atteindre pour que l'option de (re)développement soit exercée de manière optimale. À ce stade-ci, il convient néanmoins de faire la distinction entre l'exercice optimal et l'exercice rationnel, puisqu'il s'agit de l'essence même de la question de recherche soulevée ici. Dans le contexte de ce travail, l'exercice rationnel de l'option de (re)développement peut se définir comme la décision d'exercer lorsque $S_t \geq K_t$ ou

$$P_t e^{-rD} \geq (HC + SC + V_0 e^{rt})$$

c'est-à-dire lorsque le prix ajusté obtenu de la vente de toutes les unités du projet est supérieur à son coût de réalisation, incluant le prix de la propriété sous-développée. Dans le jargon des options financières, un exercice est défini rationnel lorsque l'option se trouve dans la monnaie. Soit, S_i^* , le prix ajusté de la propriété (re)développée au moment où l'option du projet i a été

réellement exercée et K_i^* le coût total de réalisation du projet i au moment de l'exercice. On définit alors le ratio d'exercice pour le projet i de la façon suivante

$$\text{Ratio d'exercice}_i = \frac{S_i^*}{K_i^*}$$

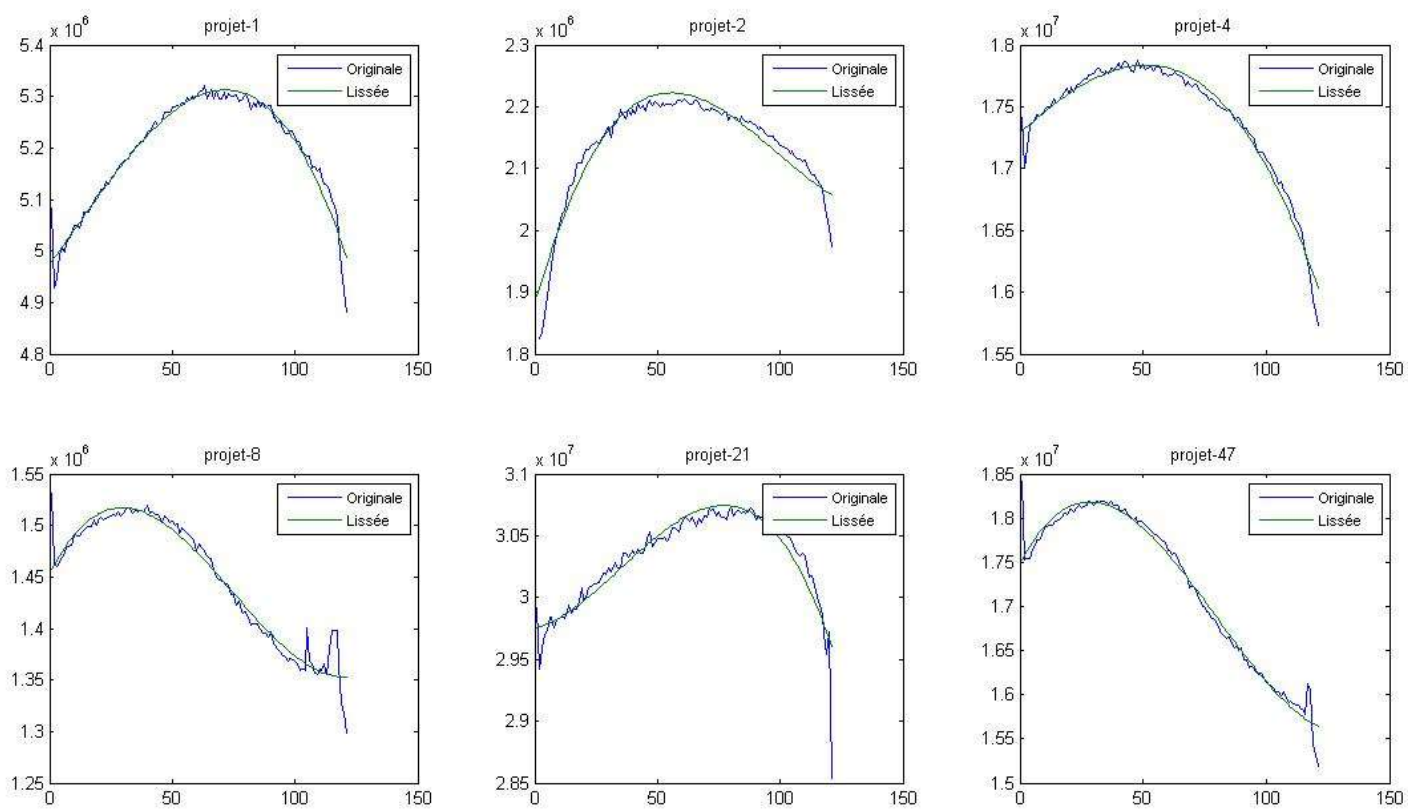
et l'exercice est qualifié de rationnel lorsque ce ratio est supérieur à 1. De façon similaire, soit B_i^* le niveau de la frontière à partir duquel il est optimal d'exercer le projet i au temps t , l'instant optimal se définit par le premier instant où la valeur de l'actif sous-jacent touche la frontière d'exercice, ajoutant ainsi une dimension temporelle au problème. Dès lors, dans la situation où

$$(HC + SC + V_0 e^{rt}) \leq P_t e^{-rD} \leq B_t$$

le détenteur de l'option de (re)développement a avantage à revendre ou conserver son option plutôt que de l'exercer en (re)développant, même si celle-ci se trouve dans la monnaie. Conséquemment, on distinguera les cinq cas de figure suivants : (i) l'option est exercée à temps, (ii) l'option est exercée trop rapidement, (iii) l'option est exercée en retard, (iv) l'option a été exercée, mais n'aurait pas dû l'être selon le modèle et (v) l'option aurait dû être exercée selon le modèle, mais ne l'a pas été. On reviendra plus en détail sur ceux-ci à la Section VII, mais la particularité de l'échantillon qui est constitué de projets ayant été réellement (re)développés fait en sorte qu'uniquement les quatre premiers cas s'appliquent ici.

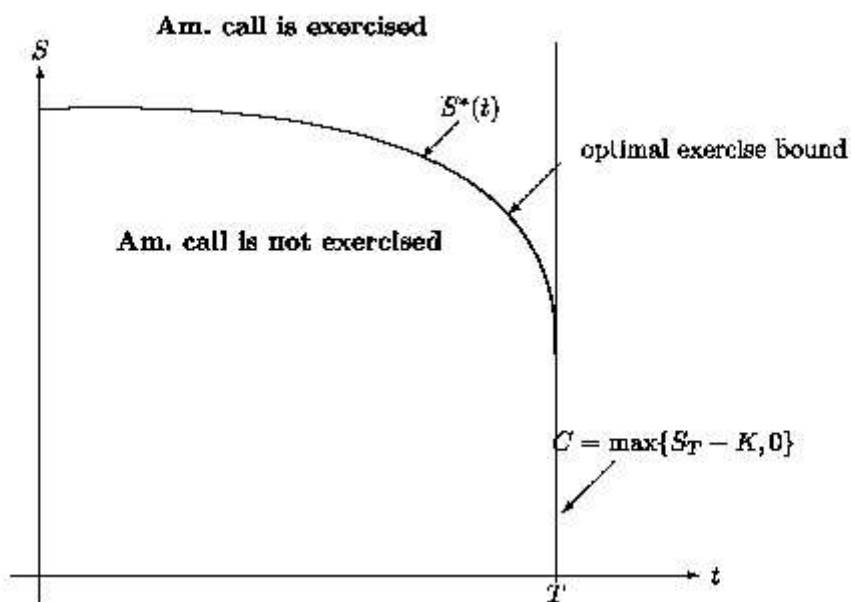
L'utilisation de l'approche LSM pour faire l'évaluation de l'option de (re)développement a toutefois la particularité de produire des frontières d'exercice extrêmement sensibles aux trajectoires simulées et dont la forme peut paraître décousue. Pour surmonter ce problème, on a décidé de procéder à un lissage de la frontière d'exercice produite par l'approche LSM en estimant une fonction polynomiale minimisant la somme des erreurs au carré par rapport à celle-ci, et ce, pour chacun des projets de l'échantillon. Les frontières qui en découlent ainsi que les originales sont illustrées aux Figures 6.1 à 6.8 et la Figure 6.9 reprend cette information pour quelques projets seulement.

Figure 6.9 – Exemple de frontières d'exercice de projets typiques



On y constate que la majorité de ces frontières ont la forme d'un « U » inversé, ce qui diffère du cas classique de la frontière d'exercice d'un call américain qu'on peut retrouver à la Figure 6.10.

Figure 6.10 – Extrait de Cízek, Härdle et Weron (2005)



Cette différence est attribuable au fait que contrairement à un call américain classique où le prix d'exercice est constant, le prix d'exercice de l'option de (re)développement augmente dans le temps en raison notamment du coût d'opportunité relié à l'achat de la propriété sous-développée, ce qui mène initialement à une augmentation du niveau de la frontière qui redescend par la suite vers le prix d'exercice à maturité. L'information concernant le ratio d'exercice et d'autres éléments propres à l'exercice de ces options sont présentés au Tableau 6.3., tandis qu'un résumé de ces derniers se retrouve au Tableau 6.4. Dans l'ordre, le Tableau 6.3 reprend les 12 premières colonnes du Tableau 6.2 auxquelles s'ajoutent la date où l'option a été exercée (t^*), le degré d'enjeux de l'option lors de l'achat de la propriété sous-développée, (S_0/K_0) de même que le ratio d'exercice défini ci-dessus. L'analyse de ces résultats est aussi discutée plus en détail à la section suivante.

VII – ANALYSE ET ROBUSTESSE DES RÉSULTATS

À la section précédente, on a estimé la valeur de l'option de (re)développement pour l'ensemble des projets de l'échantillon en prenant pour chacun la moyenne des primes de l'option obtenues à l'aide de 500 estimations LSM comprenant chacune 10 000 trajectoires de prix. À partir de ces mêmes estimations, il a en outre été possible de générer une frontière d'exercice pour ces projets et de comparer ainsi le niveau d'exercice réel des développeurs par rapport au niveau optimal défini par la frontière découlant de l'estimation LSM. Ces résultats, ainsi que leurs implications sont analysés de manière exhaustive à la Section 7.1. À la Section 7.2 on teste la solidité du modèle en analysant le comportement de celui-ci à différents changements de paramètres et de variables clés afin de voir si les relations qui en découlent sont conformes avec ce qui est observé en réalité. Finalement, on compare les résultats obtenus par l'estimation LSM à ceux obtenus par un modèle binomial inspiré de Cox, Ross et Rubinstein (1979) afin de s'assurer que ceux-ci ne sont pas influencés par la méthode de tarification employée.

7.1 – Analyse des résultats

Un rapide coup d'œil au Tableau 6.2 ainsi qu'au Tableau 6.3 présentés plus tôt permet de constater d'importantes différences dans la proportion qu'occupe la valeur de la prime de l'option de (re)développement dans la valeur de la propriété sous-développée entre les différents projets¹⁷. Ces différences ont également été soulevées par Quigg (1993) et accentuent l'importance d'analyser la prime de l'option de (re)développement sur une base individuelle. On remarque toutefois que la différence est moins prononcée pour les variables touchant l'exercice de celle-ci. Pour se donner une idée générale de la situation et dresser le portrait des résultats obtenus à la section précédente, on résume les principales statistiques descriptives de ceux-ci au Tableau 7.1.

¹⁷ En raison des différences entre les projets, on concentre ici l'analyse sur la proportion de l'option de (re)développement définie comme la valeur de l'option en $t = 0$ divisée par la valeur de la propriété sous-développée en $t = 0$ plutôt que sur la valeur de la prime en dollars.

Tableau 7.1 – Statistiques descriptives des résultats de l'estimation LSM

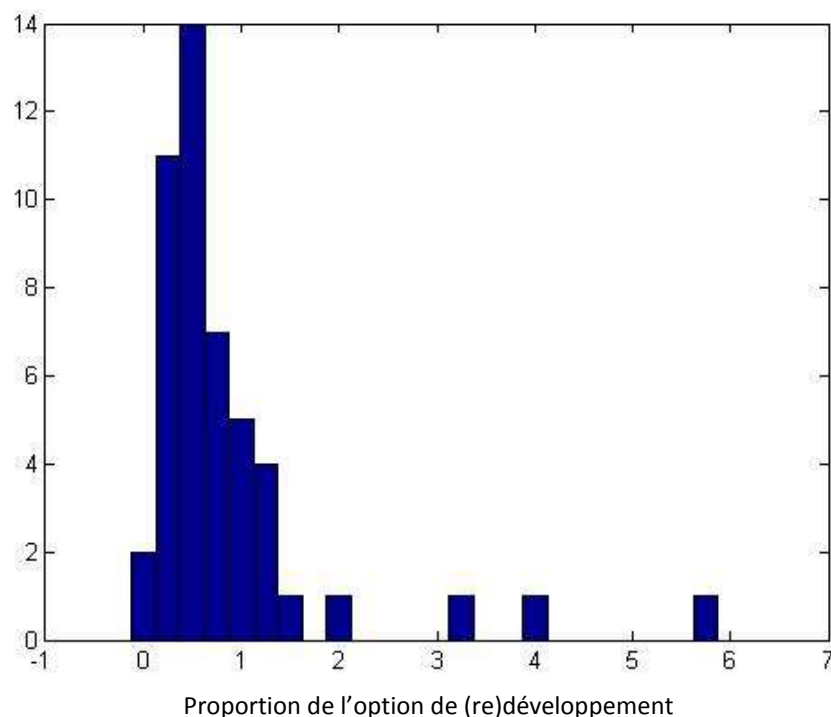
	Redéveloppement	Développement	Total
<u>Proportion</u>			
Moyenne	0.6886	1.7639	0.8454
Médiane	0.4934	1.3364	0.5210
Minimum	0.0423	0.0947	0.0423
Maximum	5.8084	3.9769	5.8084
Écart-type	0.8993	1.3304	1.0303
<u>Ratio d'exercice</u>			
Moyenne	1.0250	1.2278	1.0546
Médiane	0.9900	1.2802	1.0148
Minimum	0.7385	0.7633	0.7385
Maximum	1.4167	1.5025	1.5025
Écart-type	0.1492	0.2285	0.1757
<u>Nombre de mois</u>			
Moyenne	7.34	11.57	7.96
Médiane	6.00	11.00	6.50
Minimum	0.00	3.00	0.00
Maximum	27.00	27.00	27.00
Écart-type	6.03	8.48	6.51
Nombre de projets	41	7	48

7.1.1. – Proportion de l'option de (re)développement

La première partie du Tableau 7.1 concerne la proportion de l'option de (re)développement et on y remarque que pour l'ensemble des 48 projets de l'échantillon, celle-ci s'élève en moyenne à 0,8454. Ce résultat est cependant biaisé par quelques projets présentant des proportions largement supérieures à la moyenne comme on peut le voir par le niveau de la médiane (0,5210) et par la Figure 7.1 illustrant la distribution de cette variable pour l'ensemble de l'échantillon. En effet, pour 32 des 48 projets (66,7%), la proportion de l'option de (re)développement se situe entre 0,20 et 0,80, tandis qu'elle est supérieure à un pour neuf projets, dont un pour laquelle elle atteint même 5,8084. Comme prévu, la proportion

moyenne est plus élevée pour les projets de développement (1,7639) que pour les projets de redéveloppement (0,6886). Cette différence s'explique notamment par le fait que la valeur d'un terrain vacant est presque entièrement déterminée par la valeur de la propriété qui pourra y être construite dans le futur et donc on devrait s'attendre à ce que la proportion de l'option de développement tourne aux alentours de un. De l'autre côté, la valeur d'une propriété sous-développée va à la fois dépendre de sa structure existante, mais aussi du droit de démolir ou modifier celle-ci pour en développer une nouvelle, d'une valeur économiquement supérieure, ce qui devrait normalement signifier une proportion comprise entre zéro et un.

Figure 7.1 – Histogramme de la proportion de l'option de (re)développement



D'ailleurs, tel que mentionné ci-dessus, parmi les 48 projets qui composent cet échantillon, neuf ont une proportion supérieure à un et de ce nombre, six sont des projets où un terrain vacant a été développé. D'un point de vue théorique, une proportion supérieure à un implique que la valeur du droit de (re)développer la propriété sous-développée n'est pas entièrement (ou correctement) reflétée dans son prix. On se trouve alors en situation de

possibilité d'arbitrage, où un développeur peut faire l'acquisition de la propriété sous-développée, la (re)développer en immeuble à condos et vendre les unités du projet afin de réaliser un profit sans risque. D'un point de vue pratique, une proportion supérieure à un peut également indiquer une mauvaise spécification du modèle ou de ses paramètres. Un élément qui n'est pas pris en considération et qui est susceptible d'expliquer pourquoi la proportion de l'option de (re)développement est supérieure à un dans certains cas concerne les règles de zonage. En effet, la méthodologie actuelle considère qu'au moment de l'achat du terrain vacant ou de la propriété sous-développée, les caractéristiques du projet (le nombre d'unités, le nombre d'étages, la superficie habitable, etc.) sont connues *ex ante*. Si par exemple au moment de l'achat les règlements de zonage permettaient le développement d'un immeuble de 2 étages, mais qu'avant le début de la construction du projet ceux-ci sont changés et le développeur y construit un immeuble de 5 étages, la valeur de l'option de (re)développement sera surévaluée puisqu'on utilise l'ensemble des caractéristiques observables *ex post* à la réalisation de chacun des projets. Malheureusement, comme on ne dispose pas d'information sur les règlements de zonage de chacun des projets et des changements qu'il a pu y survenir, on se retrouve dans l'impossibilité de connaître les caractéristiques exactes des projets pouvant y être construits au moment où les développeurs ont fait l'achat de leur propriété sous-développée ou de leur terrain vacant. Dans ce contexte, l'utilisation des caractéristiques *ex post* au développement du projet devient inévitable.

Malgré tout, le modèle donne des résultats intéressants quant à la proportion de la propriété sous-développée attribuable à l'option de (re)développement. La grande divergence qu'on retrouve dans ces derniers met néanmoins de l'avant la nécessité d'analyser plus en détail ces résultats. Le Tableau 7.2 présente la moyenne et la médiane de la proportion de l'option de (re)développement ainsi que des données par rapport à son exercice selon différentes catégories. Dans la première partie du tableau, on a fait la distinction selon le type de propriété sous-développée et on peut voir que la proportion y est la plus élevée en moyenne pour les terrains vacants (1,7639) suivi par les immeubles commerciaux (0,9331). De plus, la proportion semble augmenter avec le nombre d'unités de la propriété (re)développée, alors

Tableau 7.2 – Analyse de la proportion de l'option de (re)développement par regroupement

	Nombre de projets	Proportion		Mois entre achat et exercice		Ratio d'exercice	
		Moyenne	Médiane	Moyenne	Médiane	Moyenne	Médiane
<u>Type de propriété sous-développée</u>							
Terrain	7	1.7639	1.3364	11.57	11.00	1.2278	1.2802
Unifamilial	6	0.4929	0.5002	7.33	4.50	1.0246	1.0003
Plex	8	0.4665	0.3802	4.50	3.00	1.0378	0.9741
Commercial	17	0.9331	0.6009	7.94	8.00	1.0002	0.9490
Autre	10	0.5677	0.5619	8.60	7.00	1.0573	1.1229
<u>Nombre d'unités</u>							
0-4	4	0.4306	0.3400	4.50	3.50	1.0002	0.9605
5-12	15	0.5170	0.4288	4.33	4.00	1.0440	1.0061
13-20	8	0.5923	0.4728	11.13	11.00	1.0469	0.9941
21-40	8	0.9774	0.7145	6.13	4.00	1.0941	1.0916
41-80	8	0.8680	0.7466	14.25	12.50	1.0485	1.1008
81 et plus	5	2.3197	1.1383	9.40	8.00	1.0888	1.1150
<u>Âge propriété sous-développée</u>							
Terrains	7	1.7639	1.3364	11.57	11.00	1.2278	1.2802
1-40	5	0.7040	0.6604	5.60	7.00	1.0532	1.0645
41-60	16	0.9098	0.5997	10.31	9.50	1.0167	0.9715
61-80	11	0.5350	0.4836	3.91	2.00	1.0354	0.9900
81-100	5	0.3884	0.3836	6.00	3.00	0.9788	0.9682
101 et plus	4	0.5812	0.6067	8.75	9.00	1.0524	1.0961
Total	48	0.8453	0.5210	7.96	6.50	1.0546	1.0148

Tableau 7.2 – Proportion de l'option de (re)développement par catégorie (suite)

	Nombre de projets	Proportion		Mois entre achat et exercice		Ratio d'exercice	
		Moyenne	Médiane	Moyenne	Médiane	Moyenne	Médiane
<u>Arrondissement</u>							
Ahuntsic/Cartierville	2	0.3230	0.3230	3.50	3.50	0.8088	0.8088
Côte-des-Neiges/Notre-Dame-de-Grâce	3	3.4620	3.9770	11.00	11.00	1.1864	1.2819
Mercier/Hochelaga-Maisonneuve	5	0.4760	0.4288	6.40	5.00	0.9283	0.9263
Montréal-Nord	2	0.9692	0.9692	10.00	10.00	0.9508	0.9508
Ville Mont-Royal	2	0.4637	0.4637	15.50	15.50	0.9698	0.9698
Plateau Mont-Royal	6	1.0167	1.0492	6.00	4.00	1.2497	1.2681
Rivière-des-Prairies/Pointe-aux-Trembles	1	0.2096	0.2096	10.00	10.00	0.8436	0.8436
Rosemont/Petite-Patrie	8	0.4358	0.4332	7.38	7.50	1.0140	1.0045
Verdun	4	1.3195	0.8727	10.00	5.00	1.1805	1.1647
Ville-Marie	5	0.9372	0.8777	14.60	11.00	1.1224	1.1914
Villeray/Saint-Michel/Parc-Extension	10	0.4539	0.4027	4.10	3.00	1.0174	0.9930
<u>Année achat propriété sous-développée</u>							
2007	1	1.2116	1.2116	27.00	27.00	1.1914	1.1914
2008	2	0.5796	0.5796	22.50	22.50	1.1137	1.1137
2009	3	0.7671	0.8002	14.33	17.00	1.0375	0.9335
2010	11	1.1438	0.8328	8.09	8.00	1.0678	1.1309
2011	18	0.7815	0.4885	6.11	5.50	1.0323	0.9980
2012	13	0.7120	0.3851	5.23	4.00	1.0587	1.0190
<u>Année exercice</u>							
2010	8	1.3334	0.8141	10.5	8.50	1.0793	1.1229
2011	17	0.6128	0.4836	7.59	5.00	1.0191	0.9900
2012	20	0.9078	0.5619	6.95	6.00	1.0851	1.0695
2013	3	0.4455	0.3828	10.00	11.00	0.9870	1.0190
Total	48	0.8453	0.5210	7.96	6.50	1.0546	1.0148

que contrairement à ce qu'on aurait pu penser, l'âge n'apparaît pas comme étant une variable pertinente. Ces deux éléments sont confirmés par le Tableau 7.3 présentant les résultats de l'estimation MCO du logarithme naturelle de la proportion de l'option de (re)développement sur un ensemble de facteurs susceptibles d'influencer celle-ci. Le coefficient affectant l'âge de la propriété sous-développée est positif, mais n'est pas statistiquement significatif aux niveaux usuels. On peut toutefois faire un lien entre le nombre d'unités de la propriété (re)développée et les règles de zonage dont on a discuté plus tôt. Soit une maison unifamiliale construite il y a plusieurs années et qui maintenant, en vertu de nouvelles règles de zonage, pourrait être redéveloppée en immeubles à condos. Il est logique de penser qu'une portion importante de la valeur marchande de cette propriété est attribuable à l'option de redéveloppement qui s'y rattache. En outre, on peut s'attendre à ce que la valeur de cette dernière soit corrélée positivement avec la densité de développement permise, soit le nombre d'unités pouvant être construites sur le terrain, d'où un coefficient positif sur cette variable. Un autre élément susceptible d'influencer la proportion de l'option de (re)développement concerne l'intensité de la concurrence. Afin d'en confirmer l'impact, on a créé un indice de concurrence pour chaque projet de la façon suivante :

$$IC_{i,j} = 1 - \frac{\text{Nombre d'unité}_j}{\text{Mise en Chantier Arrondissement}_j}$$

où le dénominateur correspond au nombre d'unités résidentielles mises en chantier dans l'arrondissement du projet i à l'année j où le projet a été (re)développé¹⁸. Selon Grenadier (1996), on s'attend à ce que cette variable soit négativement reliée à la proportion de l'option de (re)développement puisqu'un projet pour lequel IC est élevé implique que le projet en question ne représente qu'une petite partie de toutes les unités résidentielles construites dans les environs géographiques et donc cela risque de réduire la valeur de l'option. Au Tableau 7.3 on peut voir que comme prévu le coefficient sur cette variable est négatif, mais n'est pas statistiquement significatif aux niveaux de confiance usuels.

¹⁸ Les données sur les mises en chantier résidentielles par arrondissement proviennent de la SCHL

Tableau 7.3 – Résultats de l'estimation MCO des déterminants de la proportion de l'option de (re)développement

	Proportion		
	Coeff.	t-stat.	p-value
Constante	1.7976	1.6642	0.1053
Âge	0.0071	1.1058	0.2766
Type propriété sous-développée ¹⁹			
Unifamilial	-1.2541	-2.034	0.0498
Plex	-1.2346	-2.0282	0.0504
Commercial	-1.2057	-2.218	0.0333
Autre	-1.4423	-2.5381	0.0159
Nombre d'unités	0.0091	2.368	0.0237
Coûts directs par unité	-1.24E-05	-4.3038	1.34E-04
Indice de concurrence	-0.6651	-0.8109	0.4231
Année achat propriété sous-développée ²⁰			
2007	0.1966	0.2435	0.8091
2008	-0.0542	-0.0905	0.9284
2009	0.2081	0.4144	0.6812
2010	-0.0288	-0.0833	0.9341
2011	0.1191	0.4213	0.6762
R ² ajusté		0.4017	
F-Stat		3.4272	
p-value		0.0019	
Taille de l'échantillon		48	

7.1.2. – Exercice de l'option de (re)développement

La deuxième portion du Tableau 7.1 résume l'information contenue dans le Tableau 6.3 par rapport à l'exercice réel de l'option de (re)développement. Si on se penche sur le ratio d'exercice, on constate que ces résultats sont beaucoup moins dispersés que pour la proportion de l'option de (re)développement, variant plutôt entre de 0,7385 et 1,5025. Pour l'ensemble des projets, la moyenne est de 1,0546, mais varie selon le type de projet. En effet, le ratio d'exercice moyen est de 1,0250 pour les projets de redéveloppement alors qu'il est de 1,2278 pour les projets de développement. Dans les deux cas, celui-ci reste néanmoins supérieure à

¹⁹ La catégorie terrain représente le type de propriétés sous-développées de référence.

²⁰ L'année de référence est 2012.

un, ce qui permet d'affirmer qu'en général les développeurs ont fait preuve de rationalité dans leur décision d'entreprendre ces projets, alors que la valeur de la propriété (re)développée était supérieure à son coût total de réalisation au moment de l'exercice. En s'attardant à la Figure 7.3, on peut voir que 54,2 % des projets (26 projets) ont été exercés rationnellement, c'est-à-dire lorsque l'option était dans la monnaie. Même si ce nombre peut paraître faible dans la mesure où tous ces projets ont réellement été (re)développés, 15 projets ont un ratio d'exercice oscillant entre 0,9 et 1,0 ce qui laisse suggérer qu'il pourrait y avoir des différences quant aux coûts indirects par pied carré de superficie habitable pour les différents projets qui viennent diminuer le nombre de projets exercés rationnellement. Le regroupement des résultats par rapport au ratio d'exercice par catégorie au Tableau 7.2 permet de constater que ce dernier est également associé positivement au nombre d'unités, même si aucune tendance claire ne ressort pour les autres regroupements.

Figure 7.3 – Histogramme du ratio d'exercice

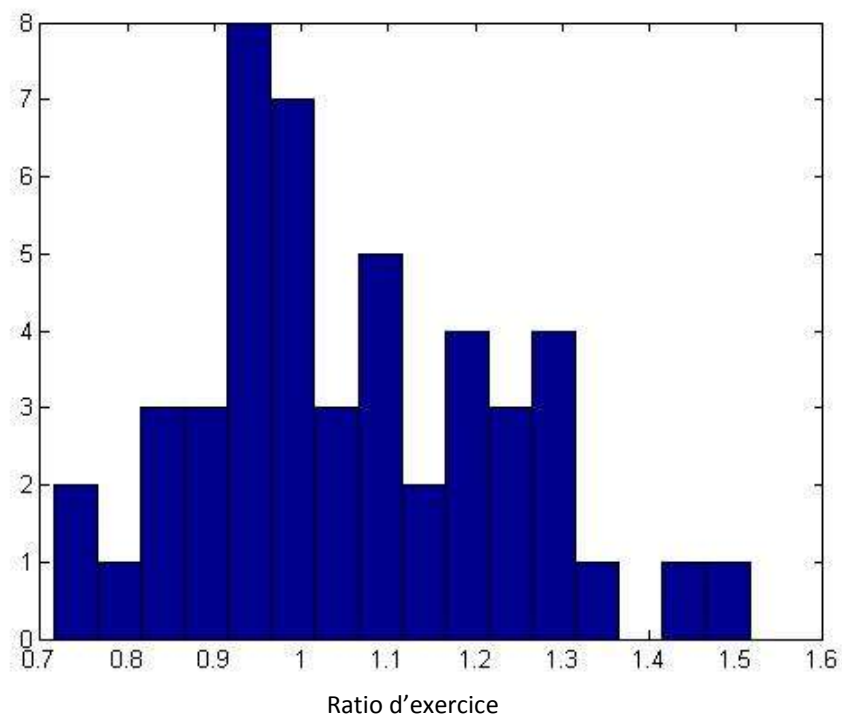
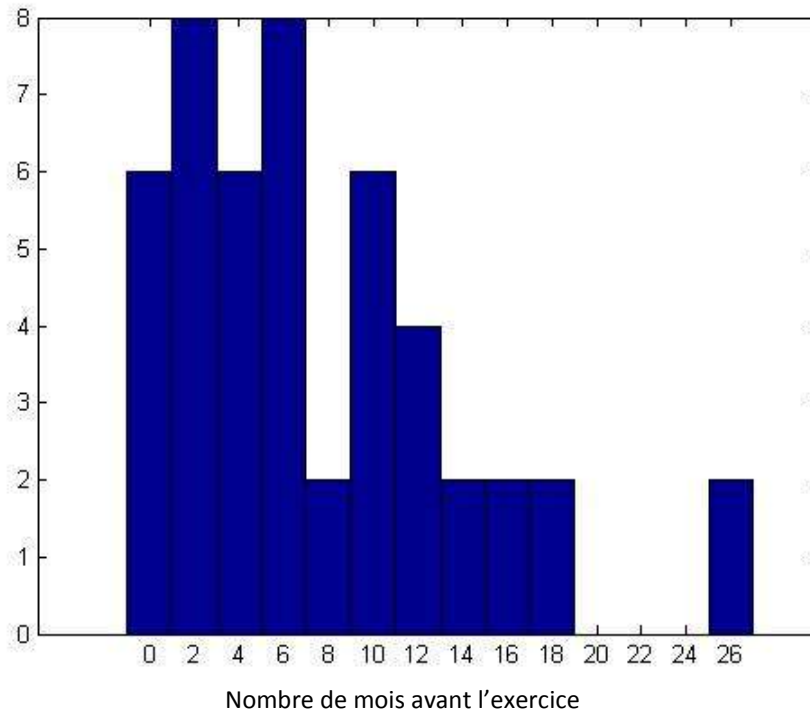


Figure 7.4 – Histogramme du nombre de mois avant l'exercice



La situation est toutefois fort différente en ce qui concerne le nombre de mois entre l'achat de la propriété sous-développée et l'exercice de l'option de (re)développement. Pour l'ensemble des projets, il s'est écoulé en moyenne 7,96 mois entre l'achat et le (re)développement de la propriété (re)développée défini par la date d'émission du permis de construction (ou du permis de démolition si applicable). Ce délai va de zéro, soit un exercice le même mois que l'achat de la propriété sous-développée, à 27 mois. On peut également voir à la Figure 7.4, que seulement six projets ont été démarrés moins de deux mois après l'achat de la propriété sous-développée, alors que 34 des 48 projets l'ont été entre deux et 12 mois. Dans le Tableau 7.2, on remarque aussi que contrairement à la proportion de l'option de (re)développement et de son ratio d'exercice, le nombre de mois n'est pas influencé de manière statistiquement significative par le nombre d'unités de la propriété (re)développée. Ceci est d'ailleurs confirmé par l'estimation MCO du logarithme naturel du nombre de mois entre l'achat de la propriété sous-développée et le (re)développement présentée au Tableau 7.4. Selon celle-ci, le coefficient affectant l'indice de concurrence est toujours négatif quoique

non significatif, alors que le niveau du *PMPC* au moment de l'achat de la propriété sous-développée est fortement négatif et significatif, ce qui implique que les développeurs exercent plus rapidement quand le niveau des prix est plus élevé. Cette relation peut s'expliquer selon Grenadier (1996) par une volonté pour les développeurs d'essayer de bénéficier de prix élevés avant leurs concurrents pour ainsi ne pas se retrouver en position de suiveur.

Tableau 7.4 – Résultats de l'estimation MCO des déterminants du nombre de mois entre l'achat de la propriété sous-développée et l'exercice de l'option de (re)développement

	Nombre de mois		
	Coeff.	t-stat.	p-value
Constante	35.9597	1.3094	0.1983
PMPC	-0.0374	-2.5948	0.0134
Volatilité	-11.4407	-0.9385	0.3539
Unité	0.0055	1.4059	0.1679
Indice de concurrence	-0.1416	-0.1495	0.8819
Année achat propriété sous-développée ²¹			
2007	2.1582	0.7433	0.4619
2008	1.3487	0.5952	0.5552
2009	0.9635	0.6055	0.5484
2010	0.5114	0.456	0.651
2011	-0.0545	-0.0941	0.9255
R ² ajusté		0.2698	
F-Stat		2.9293	
p-value		0.0097	
Taille de l'échantillon		48	

Malgré le fait que les développeurs immobiliers semblent exercer leur option de (re)développement de manière rationnelle, il reste toutefois à déterminer s'ils ont (re)développé leur projet au moment optimal tel que défini par le modèle. Afin de mesurer cet aspect de l'exercice optimal, on compare graphiquement aux Figures 7.5 à 7.12 l'exercice réel de l'option de (re)développement à l'exercice théorique prescrit par le modèle. La Figure 7.13 présentée ci-dessous reprend les mêmes informations, mais pour quelques projets typiques.

²¹ L'année de référence est 2012.

Figure 7.13 – Exemple de projets typiques

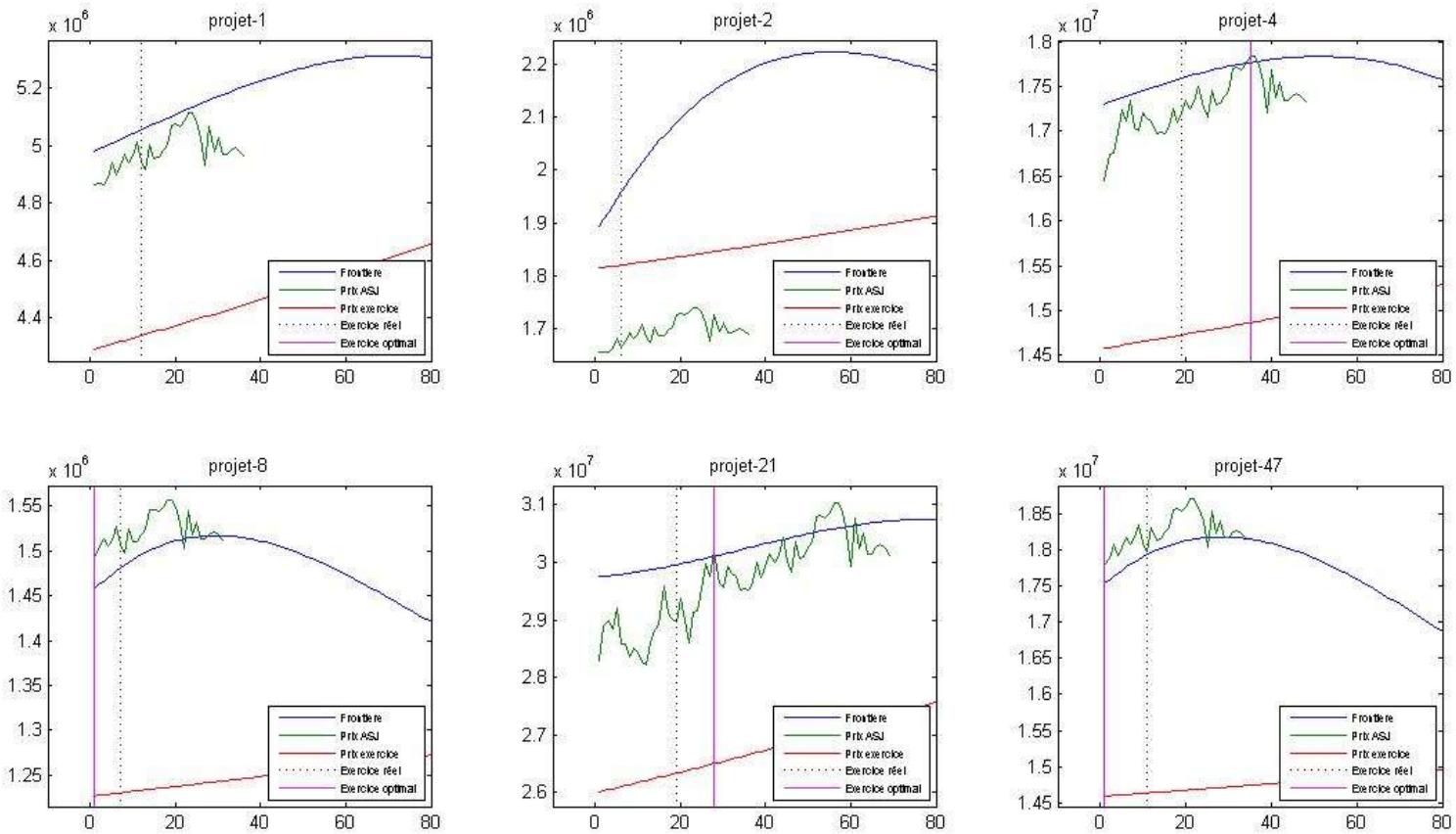


Tableau 7.5 – Comparaison de l'exercice réel de l'option de (re)développement à son exercice optimal

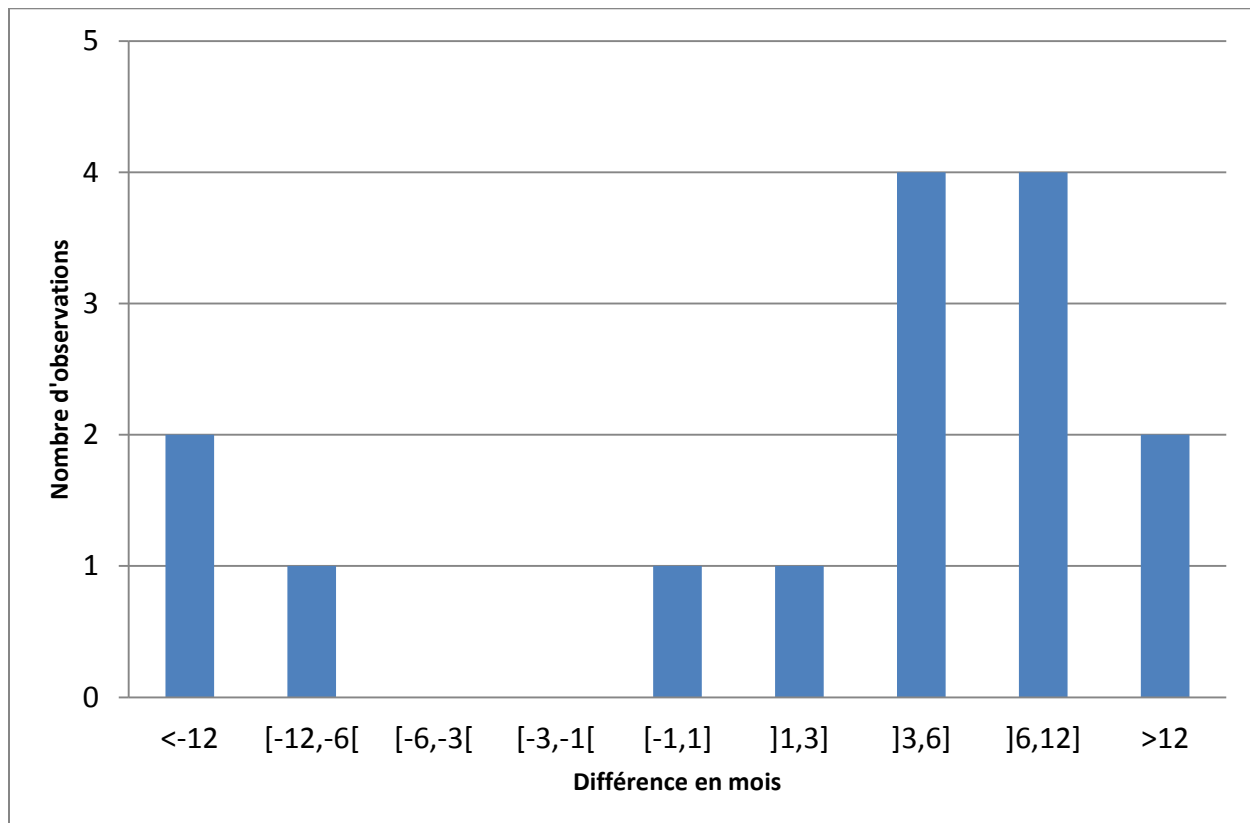
Projets devant être exercés selon le modèle				
	t - t*	Nombre de projets		
		Redéveloppement	Développement	Total
Projets exercés en avance	Plus de 12 mois	2	0	2
	Entre 6 et 12 mois	1	0	1
	Entre 3 et 6 mois	0	0	0
	Entre 1 et 3 mois	0	0	0
		3	0	3
Projets exercés au bon moment	Plus ou moins 1 mois	1	0	1
Projets exercés en retard	Entre 1 et 3 mois	0	1	1
	Entre 3 et 6 mois	2	2	4
	Entre 6 et 12 mois	3	1	4
	Plus de 12 mois	0	2	2
		5	6	11
Projets ne devant pas être exercés selon le modèle				
		Nombre de projets		
		Redéveloppement	Développement	Total
		32	1	33
Nombre total de projets				
		Nombre de projets		
		Redéveloppement	Développement	Total
		41	7	48

Sur ces dernières, on peut y voir respectivement la frontière d'exercice (ligne bleue), le prix de la propriété (re)développée estimé à l'aide de la trajectoire réelle du *PMPC* (ligne verte) et le prix d'exercice (ligne rouge). La ligne verticale pointillée correspond à l'instant où l'option a été réellement exercée par son détenteur et la ligne verticale rose à l'instant optimal d'exercice découlant du modèle de tarification. L'analyse de ces graphiques est intéressante puisqu'elle permet à la fois de visualiser pour chaque projet si l'exercice est rationnel et si le développeur a exercé au bon moment. Suite à cette analyse, on a vu plus tôt qu'on pouvait classer ces projets en quatre groupes distincts : (i) les projets (re)développés au bon moment selon le modèle, (ii) les projets (re)développés trop tôt, (iii) les projets (re)développés trop tard et (iv) les projets qui n'auraient pas dû être (re)développés selon le modèle. Ces différents cas de figure sont d'ailleurs présentés au Tableau 7.5.

On a vu précédemment que 26 projets avaient été (re)développés alors que l'option se trouvait dans la monnaie, ce qu'on a qualifié d'exercice rationnel. Pourtant, selon l'information qu'on retrouve au Tableau 7.5, seulement 15 options de (re)développement auraient dû être exercées selon le modèle en date du mois de mars 2014, ce qui implique que pour 11 d'entre eux, il aurait été préférable de revendre ou conserver la propriété sous-développée plutôt que de la (re)développer. Sur les 15 projets pour lesquels le modèle appelle au (re)développement, on constate qu'un seul est exercé à plus ou moins un mois de différence avec la date d'exercice suggérée par le modèle, soit le projet numéro 14. Pour le reste, on remarque que trois d'entre eux ont été exercé trop tôt, alors que les 11 projets restants l'ont été trop tard. La Figure 7.14 reprend l'information présentée au Tableau 7.5 et illustre graphiquement la distribution de la différence entre la date d'exercice effective et la date prévue par le modèle. En moyenne la différence est de 4,1 mois, mais diffère grandement selon les projets (re)développés hâtivement et les projets (re)développés tardivement. Pour les premiers, la différence moyenne est de 14,3 mois, alors que pour les seconds, elle est plutôt de 9,5 mois. Il est également intéressant de noter que parmi les 15 options de (re)développement devant être exercées selon le modèle, neuf sont des cas de redéveloppement, soit 21,95 % des projets de

redéveloppement composant l'échantillon, tandis que six sont des cas de développement, soit 85,7 % de tous les développements étudiés.

Figure 7.14 – Distribution de la différence entre la date d'exercice effective et la date d'exercice suggérée par le modèle



Évidemment, comme on l'a mentionné plus tôt, la présente analyse exclut l'aspect stratégique du développement immobilier. En réalité, il est raisonnable de penser qu'un développeur se trouvant dans une situation où il détient une propriété sous-développée présentant un potentiel de (re)développement intéressant dans le futur ne soit pas enclin à la revendre à un de ces compétiteurs et perdre une occasion de gagner des parts de marché. De plus, selon Grenadier (1996), ce développeur pourrait même être incité à exercer son option de (re)développement plus rapidement si des développeurs concurrents détiennent également des propriétés pouvant faire l'objet d'un (re)développement à proximité. Malheureusement, les

résultats présentés aux Tableaux 7.3 et 7.4 ne permettent pas de confirmer cette hypothèse à l'aide de la variable utilisée pour représenter l'intensité de la concurrence pour un projet. Il est toutefois possible que ce soit en raison du caractère local d'un marché immobilier dont les subtilités ne peuvent être capturées à l'échelle d'un arrondissement. En résumé, on peut néanmoins affirmer que les développeurs immobiliers se comportent de manière similaire à ce qui a été observé sur l'exercice des options financières américaines. En effet, comme pour Diz et Finucane (1993), on trouve que de manière générale les développeurs exercent leur option de (re)développement de façon rationnelle, mais sous-optimale, alors qu'il aurait été préférable dans plusieurs cas de tout simplement revendre celle-ci à sa valeur marchande ou encore de la conserver. Dans les quelques cas où un exercice aurait effectivement dû avoir lieu, on trouve que pour la majorité de ceux-ci (73,3 %) les développeurs exercent en moyenne 9,5 mois plus tard que ce qui est prescrit par le modèle. L'une des raisons qui pourrait expliquer cet écart concerne la réglementation qui existe dans le domaine du développement immobilier. En effet, aucun projet ne peut être entrepris sans que la ville ou l'arrondissement en question aient donné leur accord et aient émis un permis de construction. Comme le moment d'exercice réel de ces projets est approximé par la date d'émission du permis de construction et non par le moment précis où un développeur décide formellement d'aller de l'avant avec un projet, il est possible qu'une partie de l'écart entre l'instant optimal d'exercice et l'instant réel soit attribuable au délai requis pour l'émission d'un permis de construction et l'approbation du projet par la ville.

7.2 – Analyse de sensibilité et robustesse des résultats

Afin de s'assurer de la cohérence du modèle proposé pour faire l'évaluation de l'option de (re)développement et de valider les résultats obtenus, on procède en premier lieu à une analyse de sensibilité du modèle et en second lieu, on compare les résultats obtenus par l'approche LSM à ceux obtenus d'un modèle binomial inspiré de Cox, Ross et Rubinstein (1979).

7.2.1. – Analyse de sensibilité

L'une des façons de s'assurer de la cohérence du modèle proposé est d'analyser la façon dont il se comporte lorsqu'on fait varier la valeur de certaines variables et de certains paramètres. On se rappelle que dans sa forme complète, le payoff de l'option de (re)développement peut s'écrire comme :

$$\pi_t = \text{MAX}[P_t e^{-rD} + V_0(e^{y_t} - 1) - (HC + SC + V_0 e^{rt} + V_0(e^{y(T-t)} - 1)e^{-r(T-t)}); 0]$$

avec

$$P_t = \sum_{i=1}^q \left(PMPC_0 \exp \left(\sum_{n=t_0+1}^t R_n \right) \right)^\alpha \exp \left(\delta + \beta_1 SQFT_i + \beta_2 SQFT_i^2 + \beta_3 FLOOR_i + \beta_4 FLOOR_i^2 \right. \\ \left. + \beta_5 WALK_i + \beta_6 NEW_i + \beta_7 Sint_i + \sum_{b=1}^B \omega_b Arr_{b,i} \right)$$

et R_n le résultat d'une modélisation GARCH.

Pour déterminer la valeur de l'option de (re)développement, un certain nombre d'hypothèses et d'estimations ont dûes être utilisées. Tout d'abord, le prix de la propriété (re)développée a été estimé à l'aide d'un modèle factoriel combinant une variable stochastique et un modèle de prix hédonique standard, pour ensuite être ajusté par le facteur $\exp(-rD)$ avec D estimé de manière empirique. Par la suite, on a fixé l'échéance de l'option à 10 ans et on a estimé que les coûts de construction indirects étaient de 85 \$ par pied carré de superficie habitable. Finalement, on a également postulé que la propriété sous-développée ne générerait aucun flux monétaire. Comme l'ensemble de ces choix ont un impact sur les résultats présentés et qu'on veut s'assurer de la cohérence du modèle proposé, on mesure la sensibilité de celui-ci en recalculant la proportion de l'option de (re)développement pour six projets selon l'approche LSM avec cette fois-ci une seule estimation comprenant 10 000 trajectoires de prix simulés. On procède également de la même façon pour mesurer la sensibilité de la frontière d'exercice à ces variables.

En termes de résultats, on s'attend à ce que la relation entre la valeur de la prime de l'option de (re)développement (et conséquemment la proportion de celle-ci dans la valeur de la propriété sous-développée) et le prix de la propriété (re)développée soit positive, puisqu'il s'agit d'une option d'achat. Ainsi, le modèle devrait permettre de retrouver une relation positive entre la proportion de l'option de (re)développement et le *PMPC* de même qu'avec le coefficient affectant ce dernier. Cependant, on devrait trouver une relation négative entre la proportion et le délai entre l'exercice de l'option et la réception du produit de la vente des unités du projet. À l'instar d'une option d'achat, le modèle devrait également refléter une relation négative entre la proportion de l'option de (re)développement et le prix d'exercice, soit le coût total de réalisation de la propriété (re)développée. Une représentation graphique de ces résultats peut être retrouvée aux Figures 7.15 à 7.22 et est détaillée ci-dessous. Pour ce qui est de la frontière d'exercice, il est plus difficile d'anticiper l'effet des différents paramètres. On s'attend généralement à ce que les éléments qui augmentent la valeur de l'option de (re)développement augmentent le niveau de la frontière auquel il devient optimal d'exercer et donc diminuent l'incitatif à exercer, tel que mis de l'avant par Titman (1985). Toutefois, le niveau de la frontière dépend également du prix d'exercice et donc du coût total de réalisation du projet. Ainsi, un prix d'exercice plus élevé devrait augmenter le niveau de la frontière puisqu'un prix plus élevé de l'actif sous-jacent sera nécessaire pour que l'option soit exercée. Les résultats de cette analyse de sensibilité pour la frontière d'exercice de chacun des six projets étudiés sont disponibles aux Figures 7.23 à 7.30.

Tout d'abord, on peut voir aux Figures 7.15, 7.16 et 7.18 que le modèle se comporte exactement comme prévu alors qu'on observe respectivement une relation positive avec le *PMPC* et le coefficient alpha, mais négative avec le délai. Tel que mentionné plus tôt, la majorité des projets étudiés sont fortement dans la monnaie et on peut voir que pour cinq des six projets utilisées aux fins de la présente analyse, la valeur de l'option augmente de façon quasi-linéaire avec le *PMPC*. D'ailleurs, on constate que la relation est moins prononcée pour le projet 19 qui est sensiblement moins dans la monnaie que les cinq autres. De la même façon, la Figure 7.23 montre que le niveau de la frontière d'exercice se déplace aussi vers le haut,

reflétant la plus grande valeur de l'option de (re)développement qui nécessite un niveau beaucoup plus élevé de l'actif sous-jacent pour justifier un exercice optimal. Pour ce qui est de la relation entre la proportion de l'option de (re)développement et le coefficient affectant le $PMPC$, α , on remarque qu'à l'instar des résultats de Quigg (1993) et Sing (2001), le modèle est extrêmement sensible à la valeur de ce paramètre. En effet, la valeur de la prime de l'option de (re)développement augmente de façon exponentielle à mesure que la valeur du coefficient α augmente. L'impact de ce dernier sur la frontière d'exercice est tout aussi important alors qu'on est à même de constater à la Figure 7.24 l'augmentation marquée du niveau de la frontière en début de vie de l'option. Quant au délai entre l'exercice et la réception du produit de la vente des unités en copropriété du projet, la Figure 7.18 illustre une relation négative, mais dont l'impact sur la proportion de l'option de (re)développement est plutôt faible, tout comme sur la frontière d'exercice (Figure 7.26). Cet effet peut sans doute s'expliquer par les courts délais (généralement entre 12 et 18 mois) observés et le peu d'impact que cela représente sur la valeur marchande de la propriété (re)développée.

Parmi les autres paramètres qui influencent de manière significative la valeur de l'option de (re)développement dans le modèle ci-dessus, on retrouve l'estimation des coûts de construction indirects SC fixés initialement à 85 \$ par pied carré de superficie habitable. Tel qu'espéré, la Figure 7.17 montre une relation négative entre la proportion de la prime et ce coût lié directement au coût total de réalisation du projet. Cela se traduit par un effet tout aussi direct sur la frontière d'exercice (Figure 7.25) qui augmente de manière graduelle à mesure que le coût de construction indirect par pied carré augmente. En ce qui concerne le taux de dividende, ou encore le taux de flux monétaires nets générés par la propriété sous-développée, on peut voir à la Figure 7.21 que l'impact sur la proportion est négatif si on assume un coût de détention supérieur au bénéfice de détention de la propriété sous-développée. Au contraire, si le bénéfice de détention est supérieur à son coût, l'impact sur celle-ci est positif. Cependant, cette relation dépend aussi de la maturité de l'option en question, car elle dépend effectivement de la valeur actualisée des dividendes auxquels le détenteur renonce une fois qu'il exerce par rapport à la valeur engendrée par ces mêmes dividendes jusqu'à la date

d'exercice. Dans l'analyse de sensibilité présentée à la Figure 7.21, la maturité a été fixée à 10 ans et on a fait varier le taux de dividende. À la Figure 7.22, on fixe plutôt le taux annualisé de dividende à 5 % pour les projets de redéveloppement et on a fait varier la maturité de l'option. On peut clairement voir qu'à ce taux, la relation entre la proportion de l'option de redéveloppement et la maturité est généralement positive jusqu'au point où la valeur actualisée des dividendes perdus est égale à la valeur des dividendes gagnés. Par la suite, plus on augmente la maturité de l'option, plus la proportion de celle-ci dans la valeur de la propriété sous-développée diminue en raison de la valeur accrue associée aux dividendes de la propriété sous-développée auxquels le développeur renonce une fois son option exercée.

Finalement, on peut voir aux Figures 7.19 et 7.20 qu'en gardant les paramètres initiaux et en faisant uniquement varier dans un premier temps la maturité de l'option et dans un second temps le taux sans risque, l'impact de ces deux variables est limité. Tout d'abord, par rapport à la maturité de l'option, on remarque une relation légèrement positive qui s'explique principalement par le degré d'enjeu des options considérées dont la plupart sont fortement dans la monnaie et où le modèle appelle à leur exercice quasi-immédiat. Cette particularité réduit considérablement la valeur temps de l'option et donc la sensibilité de la proportion de l'option de (re)développement à cette variable. Cela confirme que les résultats ne sont pas affectés outre mesure par le choix de fixer une maturité de dix ans plutôt que de travailler en contexte de perpétuité. L'impact sur la frontière d'exercice est également positif à mesure que la maturité de l'option augmente tel que démontré par la Figure 7.27 et même par la Figure 7.30 où un taux de dividende de 5 % a été utilisé. Par rapport au taux d'intérêt sans risque, la Figure 7.20 permet de constater que contrairement au cas classique d'une option d'achat, la relation est négative, mais ne représente pas un impact significatif sur la valeur de la proportion de l'option de (re)développement. La relation négative naît entre autre de l'ajustement du prix de la propriété (re)développée afin de refléter le délai entre l'exercice de l'option et la réception du produit de la vente des condos, causée d'une part par une construction non instantanée et d'autre part par le délai d'écoulement des unités du projet. L'augmentation du taux d'intérêt est donc associée à un prix ajusté plus faible pour la propriété (re)développée,

d'où la relation négative. Du côté de la frontière d'exercice, on remarque une relation positive entre le niveau de celle-ci et le taux sans risque, mais encore une fois, l'impact est plutôt mineur comparé aux autres variables analysées jusqu'à maintenant.

7.2.2. – Robustesse

Les tests de sensibilité menés ci-dessus ont permis de faire ressortir des relations intéressantes par rapport à la proportion de l'option de (re)développement et le niveau de la frontière d'exercice, en plus de démontrer la plausibilité des paramètres choisis dans l'estimation des résultats présentés à la Section VI. L'analyse de ces résultats a d'ailleurs permis de constater que les développeurs exerçaient leur option de (re)développement de manière rationnelle, mais sous-optimale, alors qu'en moyenne celle-ci aurait dû être exercée beaucoup plus tôt. Afin de s'assurer que ces résultats ne dépendent pas de l'approche de tarification employée, on a refait l'estimation de la proportion de l'option de (re)développement et de son exercice optimal pour les 48 projets de l'échantillon en s'inspirant du modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979), dont le principe a été exposé à la Section 2.2. Sous ce dernier, le *PMPC* a été modélisé à l'aide d'un arbre binomial à partir duquel on est en mesure d'appliquer le modèle factoriel utilisé précédemment pour retrouver le prix de la propriété (re)développée à chaque nœud de l'arbre, et ce, jusqu'à l'échéance de l'option de (re)développement. À l'instar de l'approche LSM, on initie l'algorithme de résolution à la maturité de l'option, où sa valeur est connue et on procède par induction rétrograde pour retrouver à chaque nœud la valeur de l'option à l'aide de la propriété de martingale et en comparant à chaque fois la valeur d'exercice à la valeur de continuation. En procédant ainsi jusqu'en $t = 0$, on obtient la valeur de l'option de (re)développement, de même qu'une frontière d'exercice.

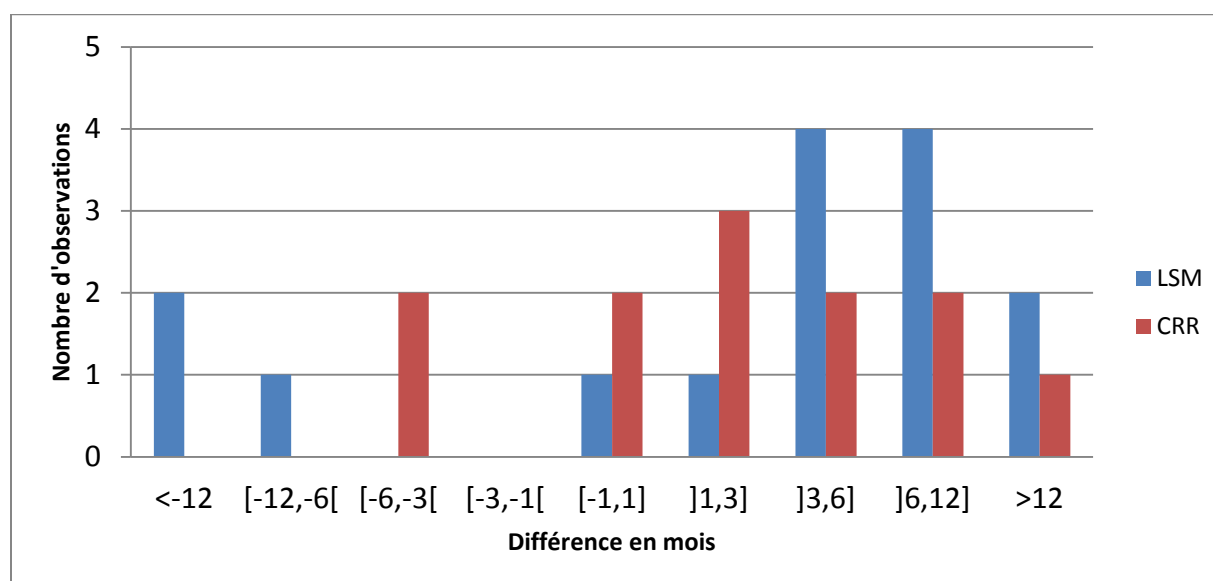
Le Tableau 7.6 compare les résultats obtenus à l'aide de l'approche LSM à ceux obtenus par le modèle CRR avec les mêmes paramètres. Ainsi, pour les deux méthodes, la maturité de l'option de (re)développement a été fixée à 10 ans avec un pas de temps mensuel, ce qui donne 120 sous-périodes. De plus, on a fait l'hypothèse que la propriété sous-développée ne versait

Tableau 7.6 – Comparaison des statistiques descriptives de l'estimation LSM et CRR

	LSM			CRR		
	Redéveloppement	Développement	Total	Redéveloppement	Développement	Total
<u>Proportion</u>						
Moyenne	0.6886	1.7639	0.8453	0.5785	1.7536	0.7498
Médiane	0.4934	1.3364	0.5210	0.3630	1.3402	0.3890
Minimum	0.0423	0.0947	0.0423	0.0135	0.0226	0.0135
Maximum	5.8084	3.9769	5.8084	5.7723	3.9772	5.7723
Écart-type	0.8993	1.3304	1.0303	0.9149	1.3480	1.0583
Nombre de projets	41	7	48	41	7	48

aucun dividende et que le taux sans risque était le taux sur les obligations fédérales d'une maturité de 10 ans. Les deux seules différences entre les deux méthodes se résument donc à la constance de la volatilité dans le modèle CRR, fixée à la variance historique des log-rendements mensuels du *PMPC*, et à la dynamique de prix de la variable d'état. On remarque que les résultats concernant la proportion de l'option de (re)développement sont plutôt semblables sous les deux approches, particulièrement pour les projets de développement, où la proportion moyenne est de 1,7536 selon le modèle binomial et de 1,7639 selon la méthode LSM. La différence est un peu plus prononcée au niveau de l'option de redéveloppement, alors que la proportion moyenne est de 0,5785 pour le modèle binomial contre 0,6886 pour l'approche LSM. Les mêmes différences subsistent également par rapport au ratio d'optimalité avec les deux approches qui donnent des résultats très similaires pour les projets de développement, mais plus contrastés pour les projets de redéveloppement.

Figure 7.31 – Distribution de la différence entre la date d'exercice effective et la date d'exercice suggérée par le modèle LSM et le modèle CRR



Concernant l'exercice optimal, le Tableau 7.7 compare les résultats présentés au Tableau 7.5 à l'aide du modèle LSM à ceux obtenus par le modèle binomial. Bien que les résultats diffèrent, la conclusion reste la même, soit que les développeurs exercent en général

Tableau 7.7 – Comparaison des différences entre l'exercice réel et l'exercice optimal selon le modèle LSM et le modèle CRR

		Modèle LSM			Modèle CRR		
Projets devant être exercés							
	t - t*	Nombre de projets			Nombre de projets		
		Redéveloppement	Développement	Total	Redéveloppement	Développement	Total
Projets exercés en avance	Plus de 12 mois	2	0	2	0	0	0
	Entre 6 et 12 mois	1	0	1	0	0	0
	Entre 3 et 6 mois	0	0	0	1	1	2
	Entre 1 et 3 mois	0	0	0	0	0	0
		3	0	3	1	1	2
Projets exercés au bon moment	Plus ou moins 1 mois	1	0	1	2	0	2
Projets exercés en retard	Entre 1 et 3 mois	0	1	1	1	2	3
	Entre 3 et 6 mois	2	2	4	1	1	2
	Entre 6 et 12 mois	3	1	4	1	1	2
	Plus de 12 mois	0	2	2	0	1	1
		5	6	11	3	5	8
Projets ne devant pas être exercés							
		Nombre de projets			Nombre de projets		
		Redéveloppement	Développement	Total	Redéveloppement	Développement	Total
		32	1	33	35	1	36
Nombre total de projets							
		Nombre de projets			Nombre de projets		
		Redéveloppement	Développement	Total	Redéveloppement	Développement	Total
		41	7	48	41	7	48

de manière rationnelle, mais sous-optimale. Sous l'approche binomiale, 12 des 48 options de (re)développement auraient dû être exercées, contrairement à 15 sous l'approche LSM. Parmi ces 12 projets, on dénombre toujours six cas de développement, mais six cas de redéveloppement, soit trois de moins que précédemment. De plus, on peut voir qu'un projet de plus a été (re)développé à plus ou moins un mois de différence avec l'instant prévu par le modèle, mais que la majorité des projets qui auraient dû être (re)développés (66,7 %) l'ont été trop tard. À la Figure 7.31, on constate que malgré le fait qu'un seul projet de moins ait été (re)développé hâtivement selon le modèle CRR, ces derniers ont en moyenne été (re)développés cinq mois plus tôt contrairement à 14,3 mois selon le modèle LSM. La différence est également moins prononcée pour les projets ayant été exercés en retard alors que celle-ci se chiffre en moyenne à 6,1 mois pour l'approche binominale, contre 9,5 mois pour l'approche LSM.

Au final, il semblerait donc que les deux approches donnent des résultats similaires à savoir que les développeurs exercent leur option de (re)développement de manière rationnelle, mais sous-optimale. On peut également faire un lien entre les différences observées par rapport à la proportion de l'option de (re)développement et la volatilité de la variable d'état. Dans le modèle CRR employée ci-dessus, la volatilité de la variable d'état a été fixée à sa volatilité historique au moment de l'achat de la propriété sous-développée, tandis que sous l'approche LSM, la variance conditionnelle varie en fonction de ses valeurs passées. Comme la relation entre la valeur d'une option et sa volatilité est positive, une volatilité accrue amène des prix plus élevés et conséquemment, il semblerait que pour les projets considérés, la volatilité historique de la variable d'état au moment de l'achat de la propriété sous-développée sous-estime le niveau réel de la volatilité. En effet, cela expliquerait la proportion inférieure de l'option de (re)développement sous l'approche binomiale par rapport à l'approche par simulation Monte Carlo. Comme cette dernière se base sur l'information disponible aujourd'hui pour estimer ce qui risque d'arriver demain, cette approche cadre mieux avec la réalité des développeurs immobiliers qui font face à un marché dont les conditions peuvent changer rapidement et où les décisions sont orientées vers l'avenir.

VIII – CONCLUSION

En réponse aux avertissements de plus en plus nombreux face à l’explosion de l’offre sur le marché canadien de la copropriété, ce mémoire se base sur la théorie des options réelles pour déterminer si les décisions des développeurs immobiliers de lancer ces projets se justifient d’un point de vue économique. Pour ce faire, on propose un modèle pour évaluer le droit pour le détenteur d’une propriété sous-développée (ou d’un terrain vacant) de démolir ou modifier la structure qui s’y trouve afin d’y (re)développer un immeuble à condos. Ce droit peut être vu comme une option d’achat américaine sur cette propriété (re)développée à un prix d’exercice équivalent à son coût total de réalisation. En s’appuyant sur une base de données inédite et détaillée comprenant 48 cas de (re)développement d’immeubles à condos sur l’île de Montréal entre 2010 et 2013, on trouve qu’à l’instar de ce qui a été observé pour les options financières américaines, les développeurs immobiliers exercent leur option de manière rationnelle, mais sous-optimale.

En effet, les résultats montrent que 26 projets (54,2 %) ont été (re)développés alors que l’option de (re)développement se trouvait dans la monnaie, mais que pour 11 d’entre eux il aurait été préférable de revendre l’option à sa valeur marchande ou encore de la conserver. Quant aux 15 projets pour lesquels le modèle suggérait un (re)développement, un seul a été exercé conformément à ce que le modèle prévoyait, tandis que la majorité (11) ont été exercés en moyenne 9,5 mois plus tard et une minorité (3) 14,3 mois plus tôt que le moment défini par le modèle. Ces résultats permettent de conclure qu’entre 2010 et 2013, le lancement de ces projets d’habitation en copropriété était généralement justifiable d’un point de vue économique, même s’il apparaît sous-optimal. Le haut degré de compétitivité persistant à cette époque sur ce segment du marché pourrait toutefois expliquer en partie cette sous-optimalité apparente. Les développeurs ayant fait l’acquisition de propriétés sous-développées cherchent à profiter de prix encore élevés sur le segment des appartements en copropriété et ainsi éviter de se retrouver dans le rôle du suiveur, ce qui peut expliquer leur tendance à exercer même si le modèle en suggère autrement (Grenadier, 1996).

Bien que d'autres auteurs, dont Quigg (1993), se soient efforcés à tester empiriquement la pertinence des options réelles en développement immobilier, cette étude est à notre connaissance la première à avoir tenté de déterminer empiriquement le degré de rationalité des développeurs immobiliers dans l'exercice de ces options. De plus, cette étude se distance du cadre classique où la variable d'état est supposée suivre un mouvement brownien géométrique à variance constante pour permettre à la variance conditionnelle des rendements de varier à travers le temps à l'aide d'une modélisation GARCH. En outre, malgré son utilisation dans l'évaluation d'options réelles dans d'autres domaines d'activité, aucune étude ne semble avoir estimé la valeur de l'option de (re)développement par *Least Square Monte Carlo*.

La présente étude n'est toutefois pas sans limite, alors qu'un nombre considérable d'approximations et d'hypothèses simplificatrices ont dû être effectuées, en raison notamment des données disponibles. Tout d'abord, comme il a été mentionné à maintes reprises, l'aspect stratégique de la décision d'exercer l'option de (re)développement a été ignoré. À lui seul, le faible nombre de développeurs pour la quantité de propriétés sous-développées ou de terrains vacants susceptibles d'être (re)développés disponible mériterait d'inclure cet aspect dans une prochaine étude. Par rapport aux choix de modélisation, l'utilisation de la tarification sous la mesure risque-neutre montre certaines limites, dans la mesure où la duplication des flux monétaires de l'option de (re)développement peut être difficile dans le contexte où ces actifs ne sont généralement pas transigés sur des marchés organisés. On a également négligé le caractère stochastique des coûts de construction ainsi que du délai nécessaire pour écouler la totalité des unités d'un projet. Après avoir discuté avec des développeurs, le deuxième est beaucoup plus important que le premier et constitue un enjeu majeur, en particulier dans le contexte actuel où les ventes ralentissent et les délais de vente s'allongent. La présente analyse ignore aussi les taxes, les impôts et les frais de transaction qui représentent autant d'éléments importants dans une transaction immobilière et la détention d'une propriété sous-développée. Finalement, il pourrait être intéressant de refaire cette étude à l'aide d'un échantillon plus important afin de s'assurer que les résultats présentés ne soient pas biaisés par le faible nombre de projets dont on dispose.

Annexe A : Spécifications GARCH

GARCH(1,1), Bollerslev (1986)

$$R_{t+1} = \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1}$$
$$h_{t+1} = \omega + \alpha h_t \varepsilon_t^2 + \beta h_t$$

avec $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Sous cette spécification, la persistance du processus est $\pi = \alpha + \beta$ et la variance inconditionnelle s'écrit comme :

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \pi}$$

Pour assurer la stabilité du processus de variance, on pose comme condition $\pi \leq 1$ dans l'estimation par maximum de vraisemblance.

NGARCH(1,1), Engle et Ng (1993)

$$R_{t+1} = r + \lambda \sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2} h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}} \varepsilon_{t+1}$$
$$h_{t+1} = \omega + \alpha h_t (\varepsilon_t - \gamma)^2 + \beta h_t$$

avec $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ et r le taux sans risque qui correspond à la fréquence d'observation. λ sert à modéliser la prime de risque de l'actif et γ sert à introduire une corrélation négative entre le rendement de l'actif et son niveau de volatilité (dans la cas où $\gamma > 0$). Sous cette spécification, la persistance du processus est $\pi = \alpha(1 + \gamma^2) + \beta$ et la variance inconditionnelle s'écrit comme :

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \pi}$$

Pour assurer la stabilité du processus de variance, on pose comme condition $\pi \leq 1$ dans l'estimation par maximum de vraisemblance.

AGARCH(1,1), Heston et Nandi (2000)

$$R_{t+1} = r + \lambda h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}} \varepsilon_{t+1}$$
$$h_{t+1} = \omega + \alpha (\varepsilon_t - \gamma \sqrt{h_t})^2 + \beta h_t$$

avec $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ et r le taux sans risque qui correspond à la fréquence d'observation. λ sert à modéliser la prime de risque de l'actif et γ sert à introduire une corrélation négative entre le rendement de l'actif et son niveau de volatilité (dans la cas où $\gamma > 0$). Sous cette spécification, la persistance du processus est $\pi = \alpha \gamma^2 + \beta$ et la variance inconditionnelle s'écrit comme :

$$\sigma^2 = \frac{\omega + \alpha}{1 - \pi}$$

Pour assurer la stabilité du processus de variance, on pose comme condition $\pi \leq 1$ dans l'estimation par maximum de vraisemblance.

Annexe B : Passage à la mesure de probabilité risque-neutre

Duan (1995) montre qu'il est possible de passer de la mesure de probabilité physique à la mesure de probabilité risque-neutre en appliquant une version discrétisée du théorème de Girsanov. Sous la mesure de probabilité risque-neutre, le modèle GARCH s'écrit :

$$R_{t+1} = r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1}^*$$

avec $\varepsilon_t^* \sim N(0,1)$ et $\varepsilon_t = \varepsilon_t^* - \eta_t$ où

$$\eta_t = \frac{\mu_t - r}{\sqrt{h_t}}$$

Sous cette la mesure de probabilité physique, le modèle GARCH estimé pour les rendements du *PMPC* est le suivant :

$$R_{t+1} = \sum_{i=1}^4 \theta_i R_{t+1-i} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1}$$

avec

$$\mu_{t+1} = \sum_{i=1}^4 \theta_i R_{t+1-i} + \frac{1}{2}h_{t+1}$$

En remplaçant μ_t par son expression, on trouve que

$$\eta_t = \frac{\sum_{i=1}^4 \theta_i R_{t-i} + \frac{1}{2}h_t - r}{\sqrt{h_t}}$$

Et le modèle GARCH sous la mesure de probabilité risque-neutre devient :

$$R_{t+1} = r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1}^*$$

$$h_{t+1} = \omega + \alpha h_t (\varepsilon_t^* - \eta_t)^2 + \beta h_t$$

Tableau 6.2 – Prime de l’option de (re)développement

i	t_0	n	Var. (h_1)	Estimation AR-GARCH							D	V_0 (en \$)	Prime (en \$)	Prop.	Écart-type Proportion
				θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	ω	α	β					
1	Mar-11	327	0.00588	-0.50798	-0.23407	-0.23667	-0.16688	2.24E-05	0.020685	0.974168	1.38	1,480,000	622,027	0.42	0.0025493
2	Mar-11	327	0.00588	-0.50798	-0.23407	-0.23667	-0.16688	2.24E-05	0.020685	0.974168	1.09	400,000	94,872	0.24	0.0053988
3	Jun-11	330	0.00583	-0.50771	-0.23366	-0.23659	-0.16699	8.22E-06	0.022352	0.975742	1.09	300,000	155,071	0.52	0.0117935
4	Mar-10	315	0.00604	-0.51177	-0.23873	-0.2421	-0.16599	4.20E-05	0.018859	0.971742	1.69	2,618,000	2,179,875	0.83	0.0046506
5	Jan-11	325	0.00591	-0.50813	-0.23371	-0.23614	-0.16738	2.98E-05	0.019883	0.97330	2.21	1,250,000	1,422,715	1.14	0.0161673
6	Jun-11	330	0.00583	-0.50771	-0.23366	-0.23659	-0.16699	8.22E-06	0.022352	0.975742	1.27	448,500	92,473	0.21	0.0106887
7	Sep-11	333	0.00578	-0.50774	-0.23328	-0.23647	-0.16776	4.93E-08	0.023456	0.976533	0.88	625,000	504,077	0.81	0.0018674
8	Aug-11	332	0.00580	-0.50761	-0.23388	-0.23694	-0.16787	3.80E-06	0.022931	0.976185	0.52	249,000	271,224	1.09	0.0050831
9	Jul-11	331	0.00581	-0.50735	-0.23368	-0.23687	-0.16781	8.81E-06	0.022315	0.97564	1.16	390,000	188,749	0.48	0.0120690
10	Nov-10	323	0.00594	-0.50739	-0.23233	-0.23639	-0.16703	3.66E-05	0.019162	0.972526	1.04	430,000	90,023	0.21	0.0053699
11	Jan-10	313	0.00606	-0.51202	-0.23723	-0.24282	-0.16803	4.17E-05	0.018833	0.971837	1.85	1,500,000	8,712,581	5.81	0.0118346
12	Nov-10	323	0.00594	-0.50739	-0.23233	-0.23639	-0.16703	3.66E-05	0.019162	0.972526	1.12	1,450,000	1,272,693	0.88	0.0002957
13	Jul-11	331	0.00581	-0.50735	-0.23368	-0.23687	-0.16781	8.81E-06	0.022315	0.97564	1.09	315,000	135,119	0.43	0.0126859
14	Feb-12	338	0.00571	-0.50748	-0.2335	-0.23361	-0.16616	1.19E-10	0.024515	0.975485	0.90	745,503	909,967	1.22	0.0000829
15	Mar-11	327	0.00588	-0.50798	-0.23407	-0.23667	-0.16688	2.24E-05	0.020685	0.974168	1.17	6,150,000	582,554	0.09	0.0040115
16	Mar-11	327	0.00588	-0.50798	-0.23407	-0.23667	-0.16688	2.24E-05	0.020685	0.974168	1.33	760,000	280,657	0.37	0.0040799
17	Oct-10	322	0.00596	-0.50814	-0.23185	-0.23624	-0.16631	3.98E-05	0.018867	0.972104	1.16	550,000	98,223	0.18	0.0030442
18	Aug-11	332	0.00580	-0.50761	-0.23388	-0.23694	-0.16787	3.80E-06	0.022931	0.976185	1.14	378,000	186,521	0.49	0.0101882
19	Jul-11	331	0.00581	-0.50735	-0.23368	-0.23687	-0.16781	8.81E-06	0.022315	0.97564	0.83	490,000	120,247	0.25	0.0059631
20	Oct-11	334	0.00577	-0.50716	-0.23334	-0.23503	-0.1667	9.17E-07	0.023401	0.976385	1.80	596,000	313,274	0.53	0.0180089
21	Jun-08	294	0.00634	-0.52387	-0.25028	-0.25165	-0.17455	0.00123	0.024459	0.709765	1.52	5,500,000	2,766,778	0.50	0.0018767
22	Sep-10	321	0.00596	-0.50705	-0.23125	-0.23467	-0.16487	4.31E-05	0.018621	0.971638	1.34	1,575,000	1,381,724	0.88	0.0042746
23	Jun-11	330	0.00583	-0.50771	-0.23366	-0.23659	-0.16699	8.22E-06	0.022352	0.975742	1.05	325,000	124,770	0.38	0.0155342
24	Feb-12	338	0.00571	-0.50748	-0.2335	-0.23361	-0.16616	1.19E-10	0.024515	0.975485	1.16	775,000	2,440,572	3.15	0.0002024

Tableau 6.2 – Prime de l’option de (re)développement (suite)

i	t_0	n	Var. (h_1)	Estimation AR-GARCH							D	V_0 (en \$)	Prime (en \$)	Proportion	Écart-type Proportion
				θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	ω	α	β					
25	Aug-12	344	0.00563	-0.5078934	-0.2360736	-0.2321824	-0.164027	4.57E-09	0.026007	0.973992	1.37	850,000	508,995	0.60	0.0169619
26	Apr-12	340	0.00569	-0.5079375	-0.2358506	-0.2334129	-0.165183	7.50E-10	0.0243558	0.975644	1.54	2,500,000	430,112	0.17	0.0167495
27	Feb-12	338	0.00571	-0.5074845	-0.2334958	-0.2336127	-0.1661574	1.19E-10	0.0245146	0.9754854	1.27	375,000	140,780	0.38	0.0146029
28	Aug-12	344	0.00563	-0.5078934	-0.2360736	-0.2321824	-0.164027	4.57E-09	0.026007	0.973992	1.25	240,000	92,515	0.39	0.0162988
29	Sep-12	345	0.00562	-0.5072413	-0.235177	-0.2321814	-0.165033	6.57E-09	0.0254439	0.9745545	1.25	285,000	84,132	0.30	0.0137041
30	Jul-09	307	0.00613	-0.5158376	-0.2420359	-0.2466398	-0.1707306	4.11E-05	0.0194031	0.9714798	1.13	315,000	51,861	0.16	0.0034227
31	Jun-12	342	0.00566	-0.5082268	-0.2360376	-0.2328393	-0.1648872	1.34E-11	0.0252833	0.9747167	1.18	465,000	334,827	0.72	0.0159168
32	Nov-10	323	0.00594	-0.507395	-0.2323347	-0.2363919	-0.1670288	3.66E-05	0.0191623	0.9725256	1.79	710,000	336,338	0.47	0.0096577
33	Mar-12	339	0.00570	-0.5066343	-0.2341666	-0.2341406	-0.1658643	4.47E-10	0.0245917	0.9754082	1.73	1,500,000	350,515	0.23	0.0160101
34	Jun-10	318	0.00600	-0.5123562	-0.2395691	-0.2436213	-0.1673771	3.59E-05	0.0195019	0.9723984	0.96	1,425,000	1,180,103	0.83	0.0021647
35	Apr-11	328	0.00586	-0.5077908	-0.2339361	-0.2366423	-0.1670674	1.78E-05	0.0212044	0.974695	1.04	850,000	510,680	0.60	0.0141397
36	Jan-12	337	0.00572	-0.5066367	-0.2328886	-0.2334868	-0.1656401	1.83E-10	0.0241995	0.9758005	2.14	3,550,000	2,344,979	0.66	0.0133356
37	Jul-10	319	0.00599	-0.508951	-0.2363254	-0.2395116	-0.1677749	4.49E-05	0.0185009	0.9713835	1.09	3,830,000	162,119	0.04	0.0013881
38	Dec-10	324	0.00593	-0.5081275	-0.2337089	-0.2361483	-0.167377	3.42E-05	0.0194358	0.9727601	1.45	1,750,000	2,606,154	1.49	0.0001959
39	May-12	341	0.00568	-0.5083691	-0.2357107	-0.2330467	-0.1653393	1.98E-11	0.0248071	0.9751929	1.31	250,000	219,472	0.88	0.0102440
40	May-12	341	0.00568	-0.5083691	-0.2357107	-0.2330467	-0.1653393	1.98E-11	0.0248071	0.9751929	1.18	1,000,000	185,959	0.19	0.0098430
41	Mar-12	339	0.00570	-0.5066343	-0.2341666	-0.2341406	-0.1658643	4.47E-10	0.0245917	0.9754082	1.68	780,000	298,634	0.38	0.0132631
42	Jun-10	318	0.00600	-0.5123562	-0.2395691	-0.2436213	-0.1673771	3.59E-05	0.0195019	0.9723984	1.91	680,000	654,926	0.96	0.0179308
43	Dec-08	300	0.00626	-0.5183522	-0.2443693	-0.2469511	-0.172693	0.0011764	0.0235943	0.7201525	1.28	1,647,000	1,080,580	0.66	0.0024956
44	Mar-09	303	0.00620	-0.5171638	-0.2414117	-0.2458843	-0.171077	5.37E-05	0.0176812	0.97053	1.80	205,000	163,949	0.80	0.0142002
45	Nov-09	311	0.00609	-0.5117207	-0.2362743	-0.2412297	-0.1694769	4.79E-05	0.0181256	0.9712228	0.86	1,100,000	1,470,025	1.34	0.0006383
46	Dec-11	336	0.00574	-0.5072034	-0.2330584	-0.2348267	-0.166855	2.34E-11	0.0244561	0.9755439	1.52	3,000,000	11,930,613	3.98	0.0044142
47	May-11	329	0.00584	-0.5076662	-0.2335846	-0.2363887	-0.1668826	1.32E-05	0.0217488	0.9752133	1.91	1,610,000	3,302,725	2.05	0.0082034
48	Dec-07	288	0.00645	-0.5230496	-0.2495879	-0.2513394	-0.1753941	0.001402	0.023264	0.6793347	1.19	1,550,000	1,878,069	1.21	0.0030518

*Résultats obtenus par 500 estimations LSM avec : N = 10000, T=10, dt=1/12, $\gamma=0$

Tableau 6.3 – Exercice optimal de l'option de (re)développement

i	t = 0	n	Var. (h ₁)	Estimation AR-GARCH							D	t*	S ₀ /K ₀	S*/K*
				θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	ω	α	β				
1	Mar-11	327	0.00588	-0.5079807	-0.2340691	-0.2366719	-0.1668768	2.24E-05	0.0206848	0.9741683	1.38	Mar-12	1.1329	1.1320
2	Mar-11	327	0.00588	-0.5079807	-0.2340691	-0.2366719	-0.1668768	2.24E-05	0.0206848	0.9741683	1.09	Sep-11	0.9125	0.9215
3	Jun-11	330	0.00583	-0.507713	-0.2336647	-0.2365901	-0.166992	8.22E-06	0.0223522	0.9757425	1.09	Sep-11	1.0030	1.0106
4	Mar-10	315	0.00604	-0.5117682	-0.238731	-0.2420976	-0.1659886	4.20E-05	0.0188588	0.9717421	1.69	Oct-11	1.1277	1.1764
5	Jan-11	325	0.00591	-0.5081329	-0.2337068	-0.2361402	-0.1673807	2.98E-05	0.0198833	0.97330	2.21	May-11	0.9787	0.9682
6	Jun-11	330	0.00583	-0.507713	-0.2336647	-0.2365901	-0.166992	8.22E-06	0.0223522	0.9757425	1.27	Jul-11	0.8232	0.8324
7	Sep-11	333	0.00578	-0.5077381	-0.2332788	-0.2364709	-0.1677557	4.93E-08	0.0234557	0.9765328	0.88	Jan-12	1.2373	1.2559
8	Aug-11	332	0.00580	-0.5076093	-0.2338751	-0.2369439	-0.1678696	3.80E-06	0.0229306	0.9761854	0.52	Mar-12	1.2163	1.2171
9	Jul-11	331	0.00581	-0.5073547	-0.2336761	-0.2368686	-0.1678101	8.81E-06	0.0223146	0.9756402	1.16	Jul-11	0.9900	0.9900
10	Nov-10	323	0.00594	-0.507395	-0.2323347	-0.2363919	-0.1670288	3.66E-05	0.0191623	0.9725256	1.04	Oct-11	0.8311	0.8436
11	Jan-10	313	0.00606	-0.5120221	-0.2372293	-0.2428181	-0.1680267	4.17E-05	0.0188325	0.9718367	1.85	Oct-10	1.2727	1.2819
12	Nov-10	323	0.00594	-0.507395	-0.2323347	-0.2363919	-0.1670288	3.66E-05	0.0191623	0.9725256	1.12	Nov-11	1.2591	1.2651
13	Jul-11	331	0.00581	-0.5073547	-0.2336761	-0.2368686	-0.1678101	8.81E-06	0.0223146	0.9756402	1.09	Aug-11	0.9553	0.9465
14	Feb-12	338	0.00571	-0.5074845	-0.2334958	-0.2336127	-0.1661574	1.19E-10	0.0245146	0.9754854	0.90	Feb-12	1.4167	1.4167
15	Mar-11	327	0.00588	-0.5079807	-0.2340691	-0.2366719	-0.1668768	2.24E-05	0.0206848	0.9741683	1.17	May-12	0.7553	0.7633
16	Mar-11	327	0.00588	-0.5079807	-0.2340691	-0.2366719	-0.1668768	2.24E-05	0.0206848	0.9741683	1.33	Nov-11	1.0540	1.0645
17	Oct-10	322	0.00596	-0.5081447	-0.2318522	-0.2362409	-0.1663083	3.98E-05	0.0188674	0.972104	1.16	Jan-12	0.9338	0.9490
18	Aug-11	332	0.00580	-0.5076093	-0.2338751	-0.2369439	-0.1678696	3.80E-06	0.0229306	0.9761854	1.14	Sep-12	1.0565	1.0868
19	Jul-11	331	0.00581	-0.5073547	-0.2336761	-0.2368686	-0.1678101	8.81E-06	0.0223146	0.9756402	0.83	Oct-11	1.0033	1.0061
20	Oct-11	334	0.00577	-0.5071595	-0.233339	-0.2350338	-0.1667042	9.17E-07	0.0234007	0.9763848	1.80	May-12	0.9737	0.9691
21	Jun-08	294	0.00634	-0.5238663	-0.25028	-0.2516513	-0.1745466	0.0012299	0.0244592	0.7097648	1.52	Jan-10	1.0880	1.1150
22	Sep-10	321	0.00596	-0.5070509	-0.2312471	-0.2346707	-0.164872	4.31E-05	0.0186205	0.9716376	1.34	Nov-10	1.1552	1.1309
23	Jun-11	330	0.00583	-0.507713	-0.2336647	-0.2365901	-0.166992	8.22E-06	0.0223522	0.9757425	1.05	Nov-11	0.8812	0.8900
24	Feb-12	338	0.00571	-0.5074845	-0.2334958	-0.2336127	-0.1661574	1.19E-10	0.0245146	0.9754854	1.16	Jun-12	1.5002	1.5025

Tableau 6.3 – Exercice optimal de l’option de (re)développement (suite)

i	t = 0	n	Var. (h ₁)	Estimation AR-GARCH							D	t*	S ₀ /K ₀	S*/K*
				θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	ω	α	β				
25	Aug-12	344	0.00563	-0.5078934	-0.2360736	-0.2321824	-0.164027	4.57E-09	0.026007	0.973992	1.37	Dec-12	1.0364	1.0522
26	Apr-12	340	0.00569	-0.5079375	-0.2358506	-0.2334129	-0.165183	7.50E-10	0.0243558	0.975644	1.54	Dec-12	0.7278	0.7385
27	Feb-12	338	0.00571	-0.5074845	-0.2334958	-0.2336127	-0.1661574	1.19E-10	0.0245146	0.9754854	1.27	Jun-12	0.9670	0.9682
28	Aug-12	344	0.00563	-0.5078934	-0.2360736	-0.2321824	-0.164027	4.57E-09	0.026007	0.973992	1.25	Dec-12	0.9653	0.9799
29	Sep-12	345	0.00562	-0.5072413	-0.235177	-0.2321814	-0.165033	6.57E-09	0.0254439	0.9745545	1.25	Dec-12	0.9398	0.9411
30	Jul-09	307	0.00613	-0.5158376	-0.2420359	-0.2466398	-0.1707306	4.11E-05	0.0194031	0.9714798	1.13	May-10	0.8951	0.8988
31	Jun-12	342	0.00566	-0.5082268	-0.2360376	-0.2328393	-0.1648872	1.34E-11	0.0252833	0.9747167	1.18	Jan-13	1.0746	1.1055
32	Nov-10	323	0.00594	-0.507395	-0.2323347	-0.2363919	-0.1670288	3.66E-05	0.0191623	0.9725256	1.79	Nov-10	0.8792	0.8792
33	Mar-12	339	0.00570	-0.5066343	-0.2341666	-0.2341406	-0.1658643	4.47E-10	0.0245917	0.9754082	1.73	May-13	0.8378	0.8365
34	Jun-10	318	0.00600	-0.5123562	-0.2395691	-0.2436213	-0.1673771	3.59E-05	0.0195019	0.9723984	0.96	Nov-10	1.2065	1.2037
35	Apr-11	328	0.00586	-0.5077908	-0.2339361	-0.2366423	-0.1670674	1.78E-05	0.0212044	0.974695	1.04	Jul-12	0.9188	0.9369
36	Jan-12	337	0.00572	-0.5066367	-0.2328886	-0.2334868	-0.1656401	1.83E-10	0.0241995	0.9758005	2.14	Sep-12	1.0799	1.0893
37	Jul-10	319	0.00599	-0.508951	-0.2363254	-0.2395116	-0.1677749	4.49E-05	0.0185009	0.9713835	1.09	Mar-11	0.8102	0.7903
38	Dec-10	324	0.00593	-0.5081275	-0.2337089	-0.2361483	-0.167377	3.42E-05	0.0194358	0.9727601	1.45	May-11	1.3215	1.2999
39	May-12	341	0.00568	-0.5083691	-0.2357107	-0.2330467	-0.1653393	1.98E-11	0.0248071	0.9751929	1.31	Oct-12	1.1546	1.1808
40	May-12	341	0.00568	-0.5083691	-0.2357107	-0.2330467	-0.1653393	1.98E-11	0.0248071	0.9751929	1.18	Dec-12	0.9118	0.9325
41	Mar-12	339	0.00570	-0.5066343	-0.2341666	-0.2341406	-0.1658643	4.47E-10	0.0245917	0.9754082	1.68	Mar-13	0.9902	1.0190
42	Jun-10	318	0.00600	-0.5123562	-0.2395691	-0.2436213	-0.1673771	3.59E-05	0.0195019	0.9723984	1.91	Jul-11	0.9142	0.9263
43	Dec-08	300	0.00626	-0.5183522	-0.2443693	-0.2469511	-0.172693	0.0011764	0.0235943	0.7201525	1.28	Apr-11	1.0878	1.1124
44	Mar-09	303	0.00620	-0.5171638	-0.2414117	-0.2458843	-0.171077	5.37E-05	0.0176812	0.97053	1.80	Sep-10	0.8815	0.9335
45	Nov-09	311	0.00609	-0.5117207	-0.2362743	-0.2412297	-0.1694769	4.79E-05	0.0181256	0.9712228	0.86	May-11	1.2713	1.2802
46	Dec-11	336	0.00574	-0.5072034	-0.2330584	-0.2348267	-0.166855	2.34E-11	0.0244561	0.9755439	1.52	Dec-12	1.3109	1.3404
47	May-11	329	0.00584	-0.5076662	-0.2335846	-0.2363887	-0.1668826	1.32E-05	0.0217488	0.9752133	1.91	Apr-12	1.2193	1.2501
48	Dec-07	288	0.00645	-0.5230496	-0.2495879	-0.2513394	-0.1753941	0.001402	0.023264	0.6793347	1.19	Apr-10	1.1764	1.1914

*Résultats obtenus par 500 estimations LSM avec : N = 10000, T=10, dt=1/12, y=0

Figure 4.3 – Log-rendements mensuels du PMPC de janvier 1984 à mars 2014

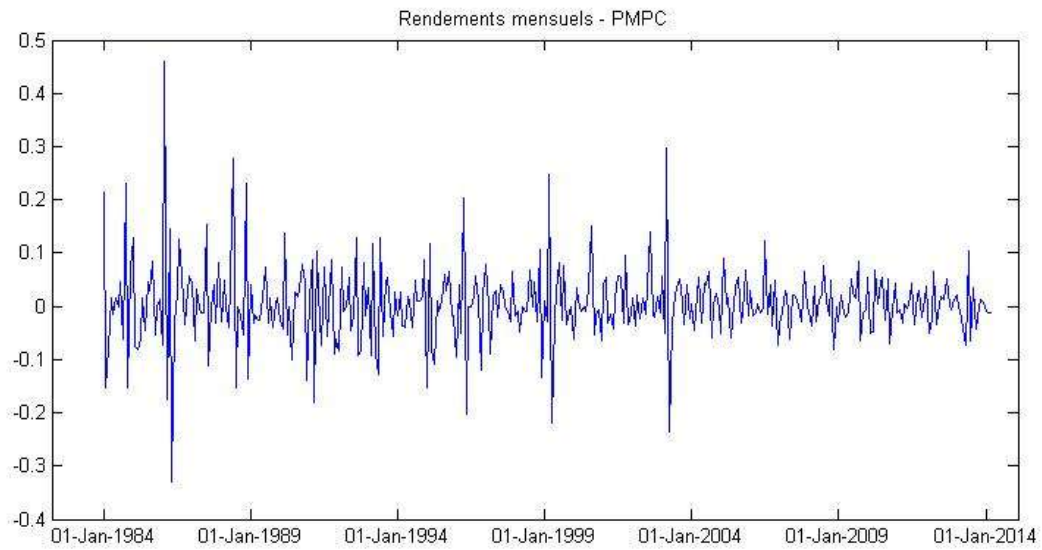


Figure 5.1 – Rendements estimés/réels PMPC (échantillon de janvier 1984 à décembre 1995)

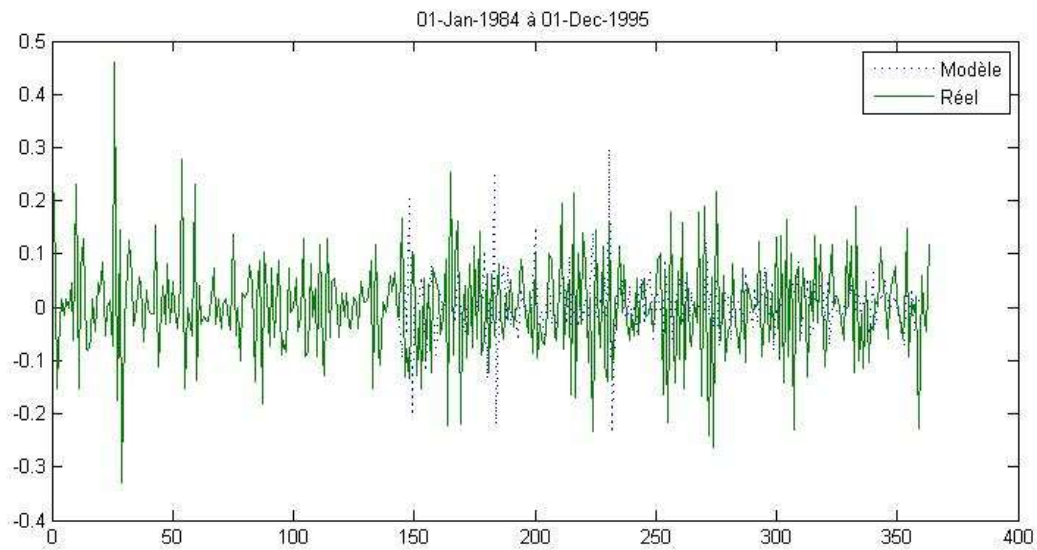


Figure 5.2 – Rendements estimés/réels PMPC (échantillon de janvier 1984 à décembre 2000)

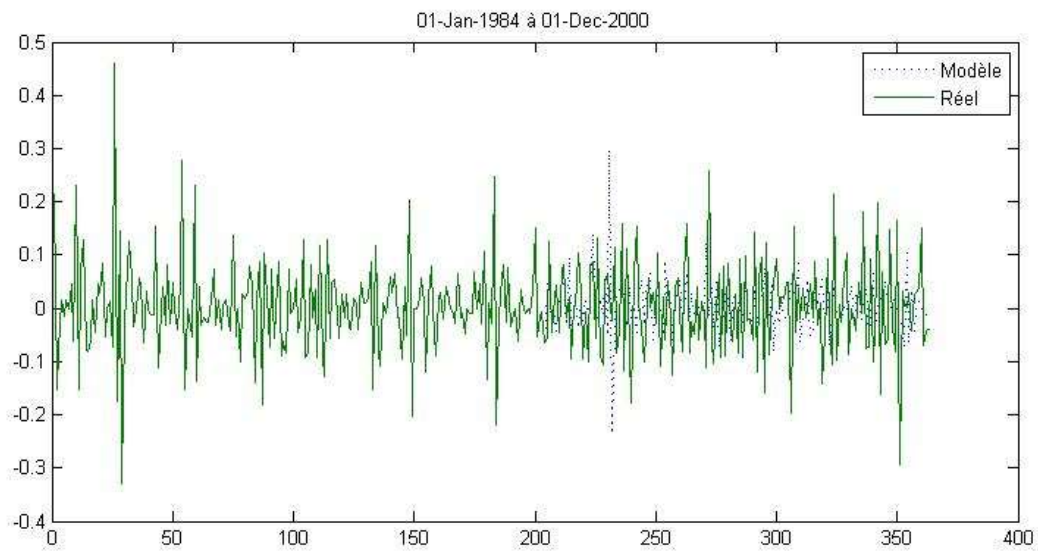


Figure 5.3 – Rendements estimés/réels PMPC (échantillon de janvier 1984 à décembre 2005)

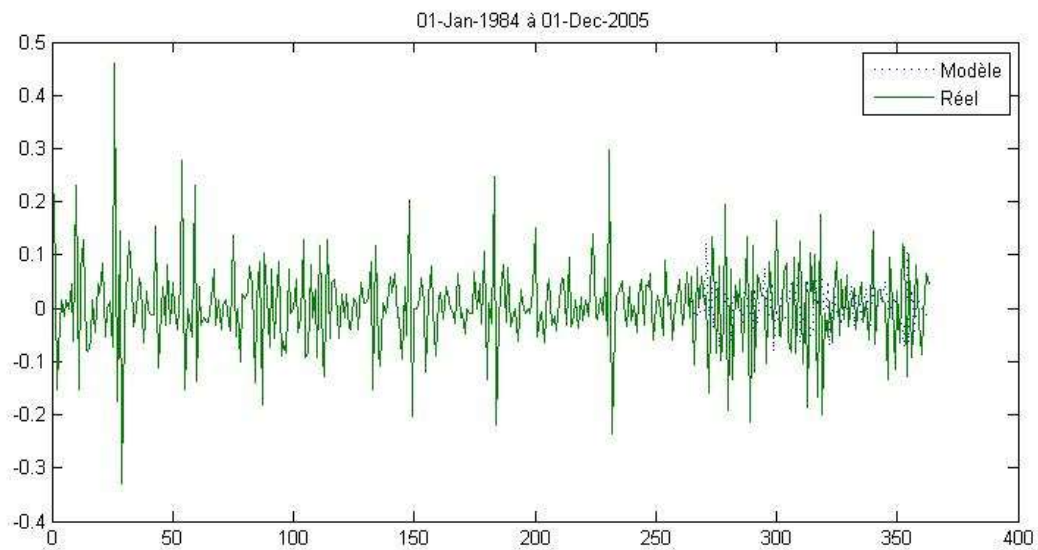


Figure 5.4 – Rendements estimés/réels PMPC (échantillon de janvier 1984 à décembre 2010)

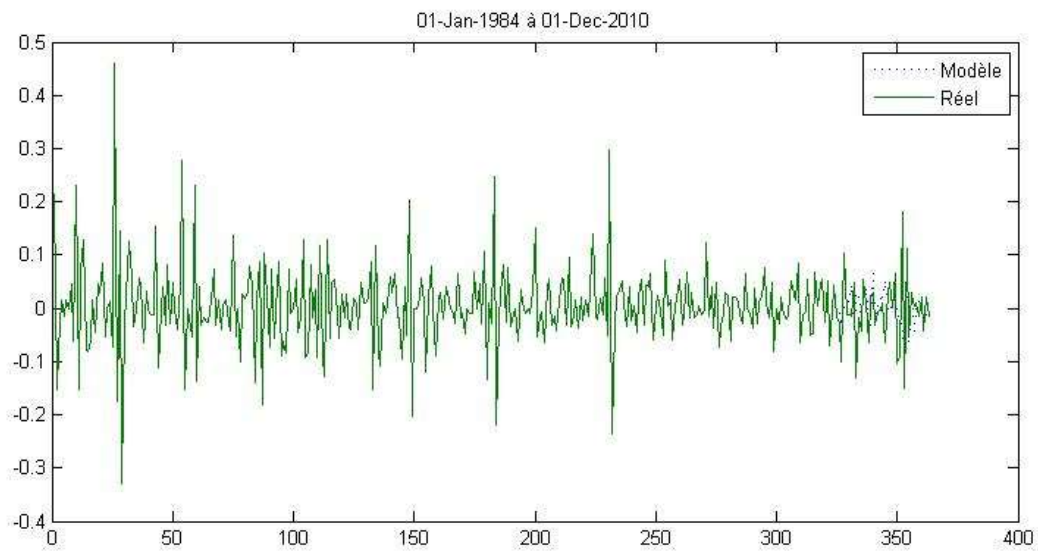


Figure 6.1 – Frontières d'exercice de l'option de (re)développement par LSM (Projets 1 à 6)

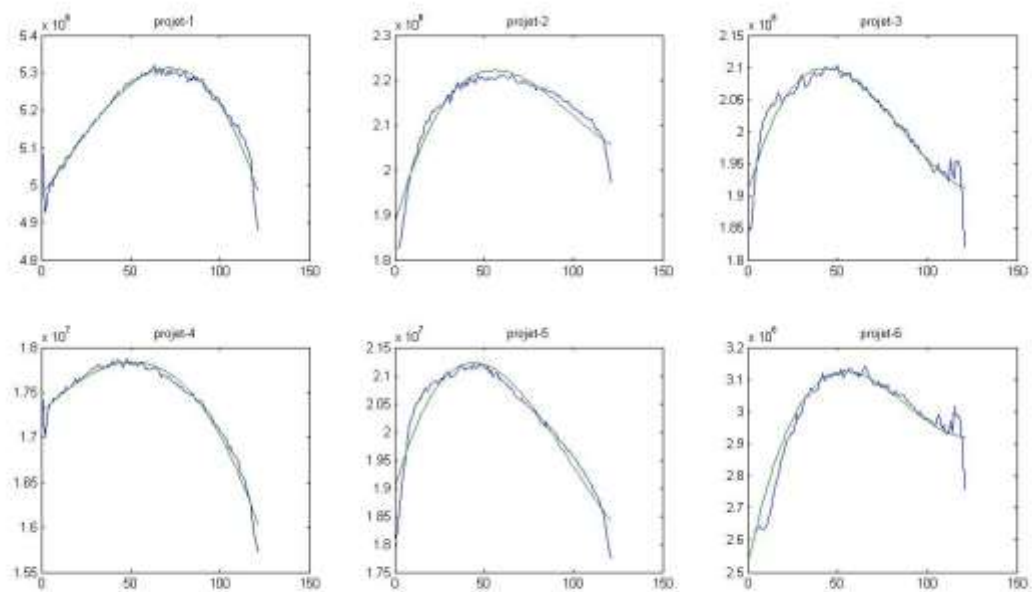


Figure 6.2 – Frontières d'exercice de l'option de (re)développement par LSM (Projets 7 à 12)

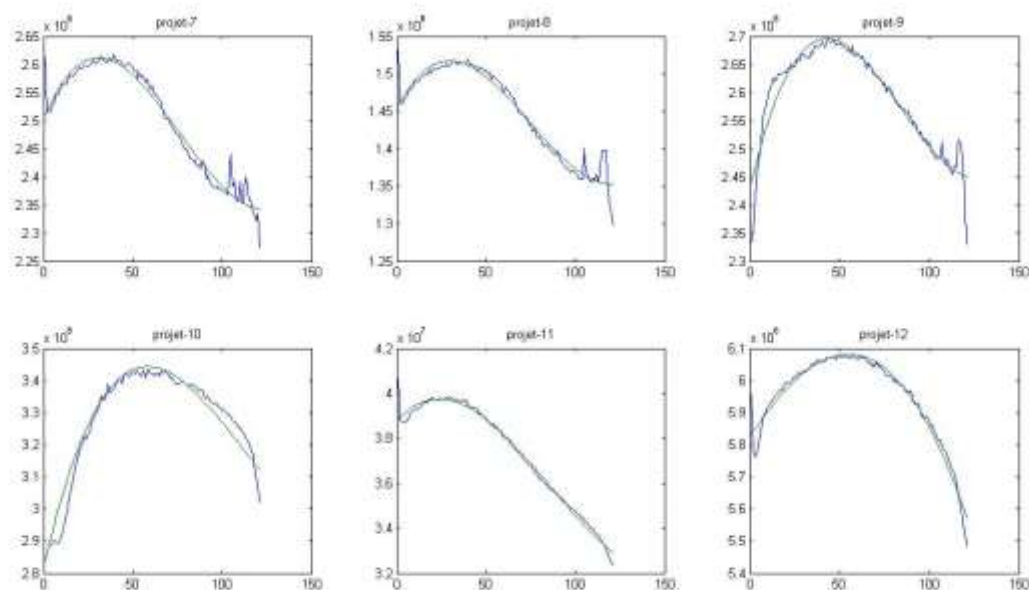


Figure 6.3 – Frontières d'exercice de l'option de (re)développement par LSM (Projets 13 à 18)

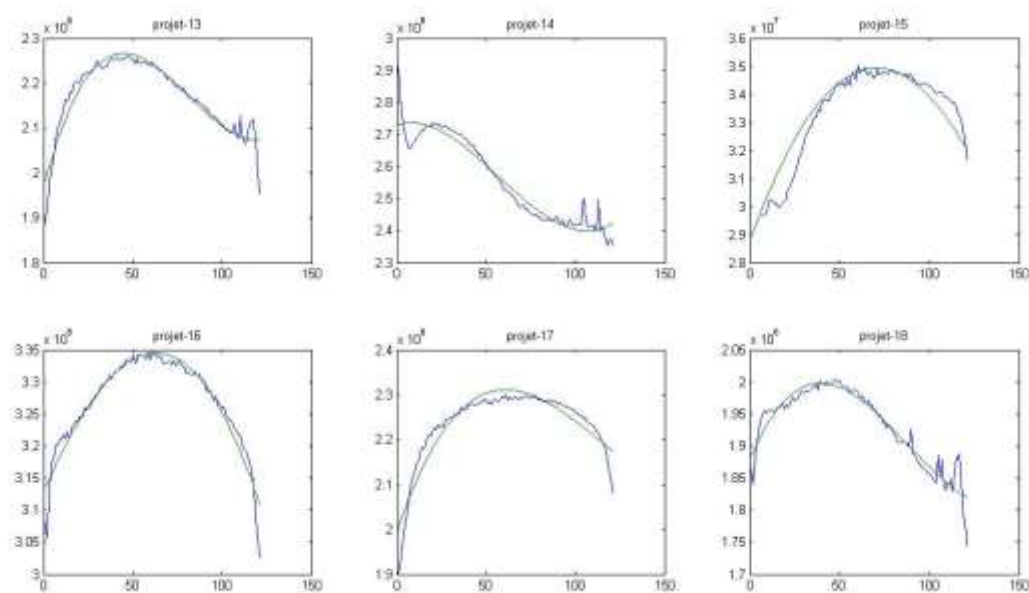


Figure 6.4 – Frontières d'exercice de l'option de (re)développement par LSM (Projets 19 à 24)

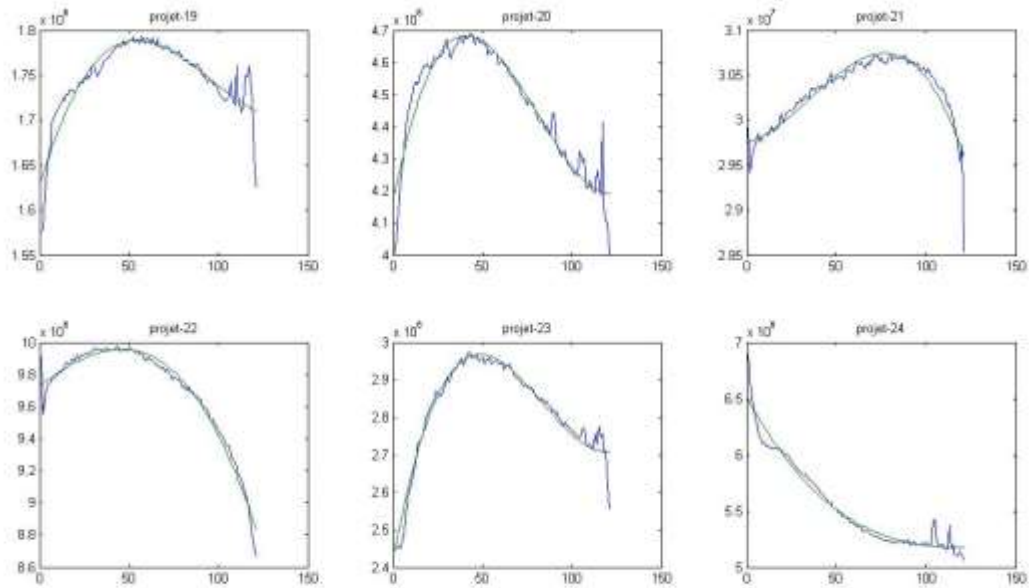


Figure 6.5 – Frontières d'exercice de l'option de (re)développement par LSM (Projets 25 à 30)

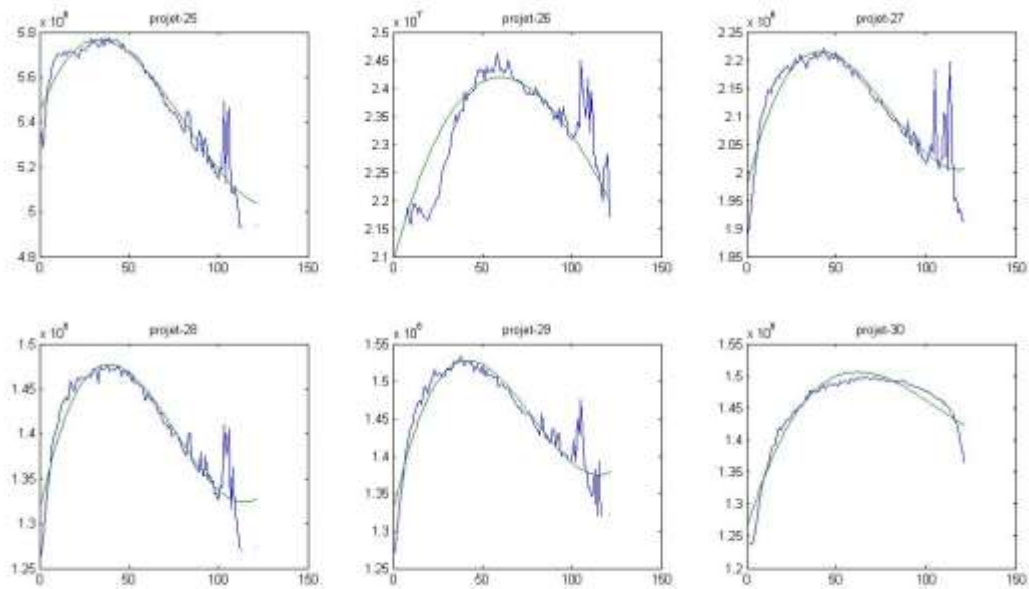


Figure 6.6 – Frontières d'exercice de l'option de (re)développement par LSM (Projets 31 à 36)

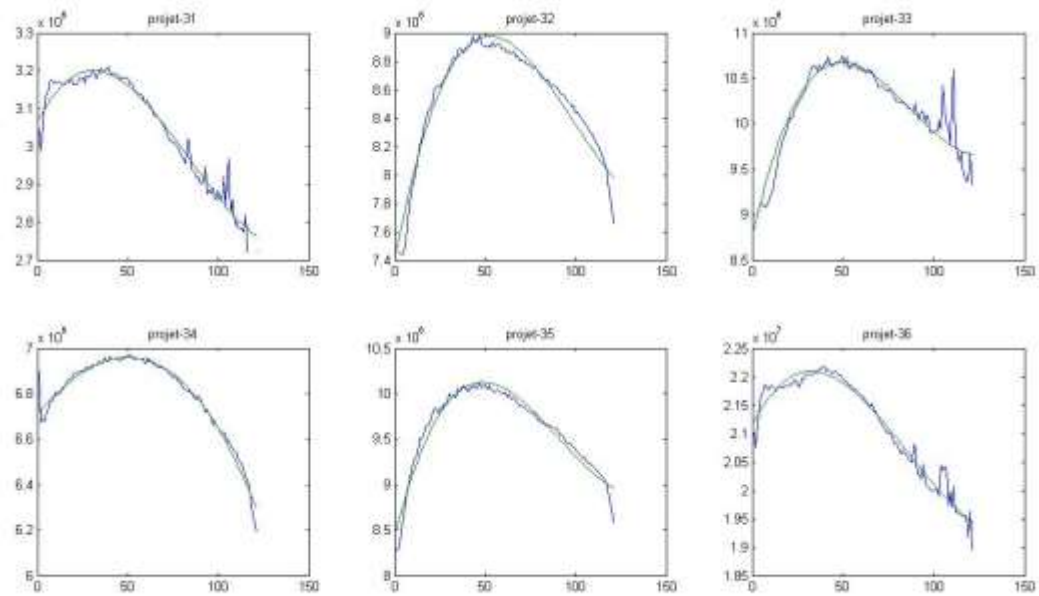


Figure 6.7 – Frontières d'exercice de l'option de (re)développement par LSM (Projets 37 à 42)

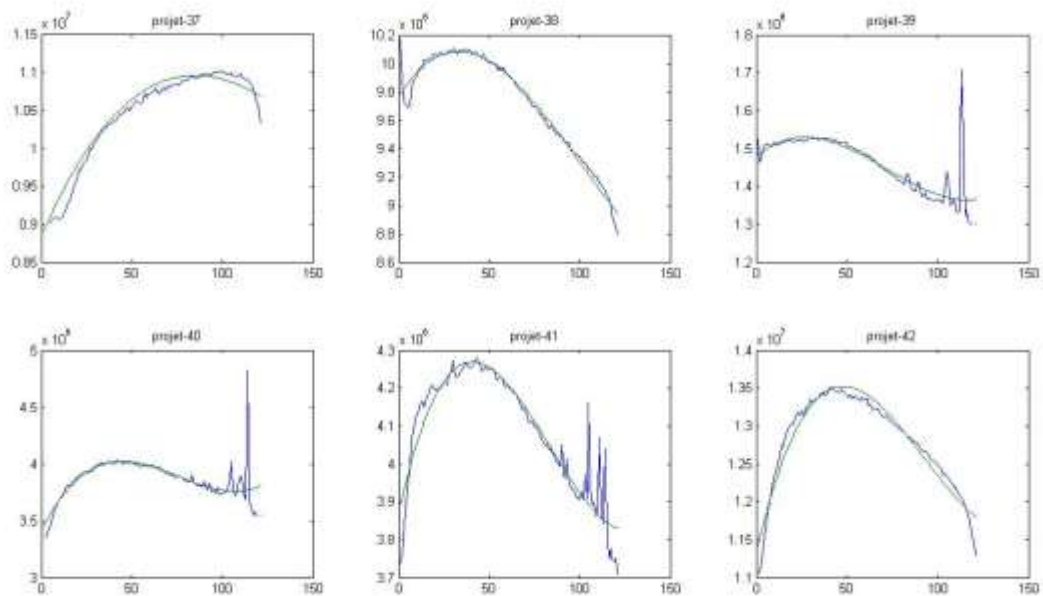


Figure 6.8 – Frontières d'exercice de l'option de (re)développement par LSM (Projets 43 à 48)

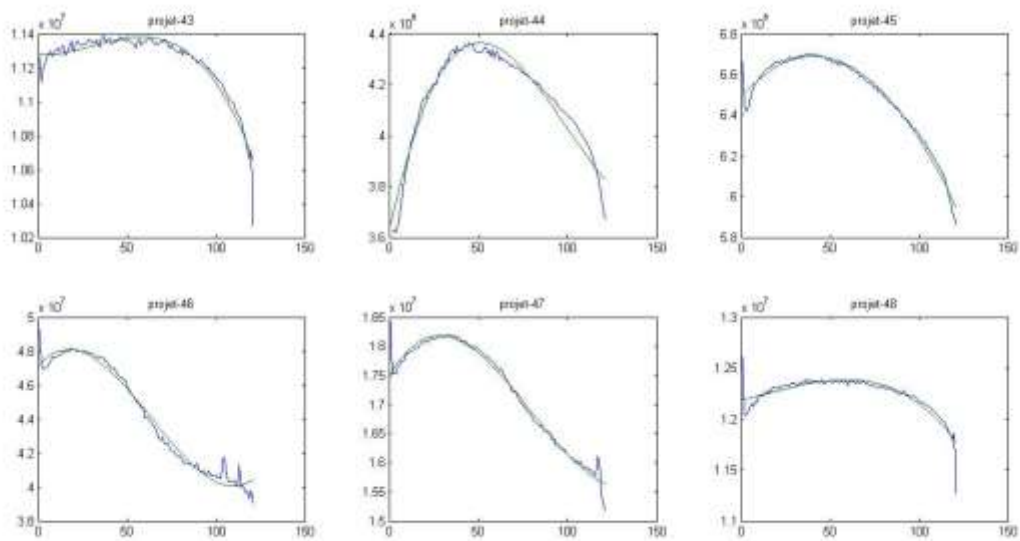


Figure 7.2 – Histogramme de la proportion – Projets de redéveloppement

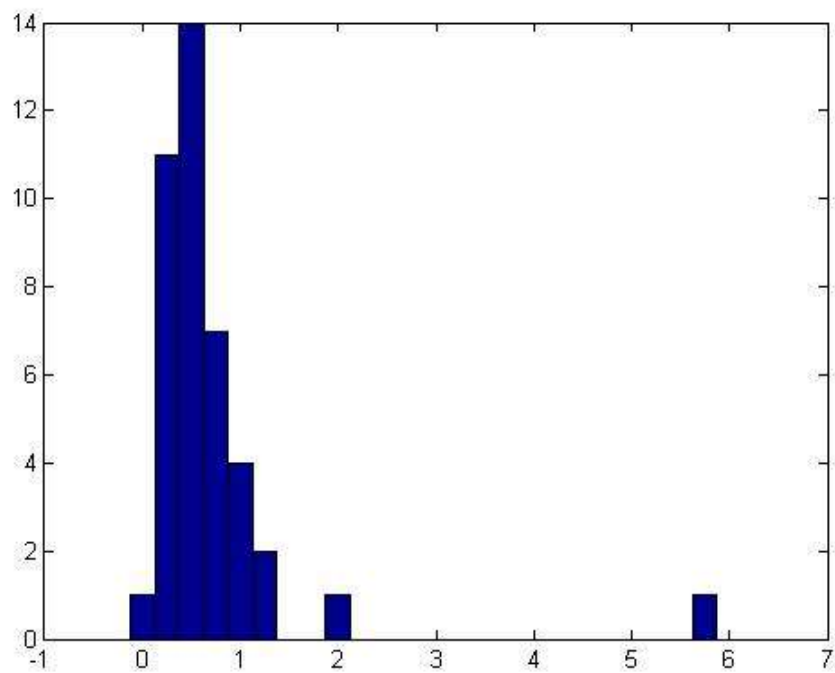


Figure 7.5 – Analyse graphique de l'exercice de l'option de (re)développement (Projets 1 à 6)

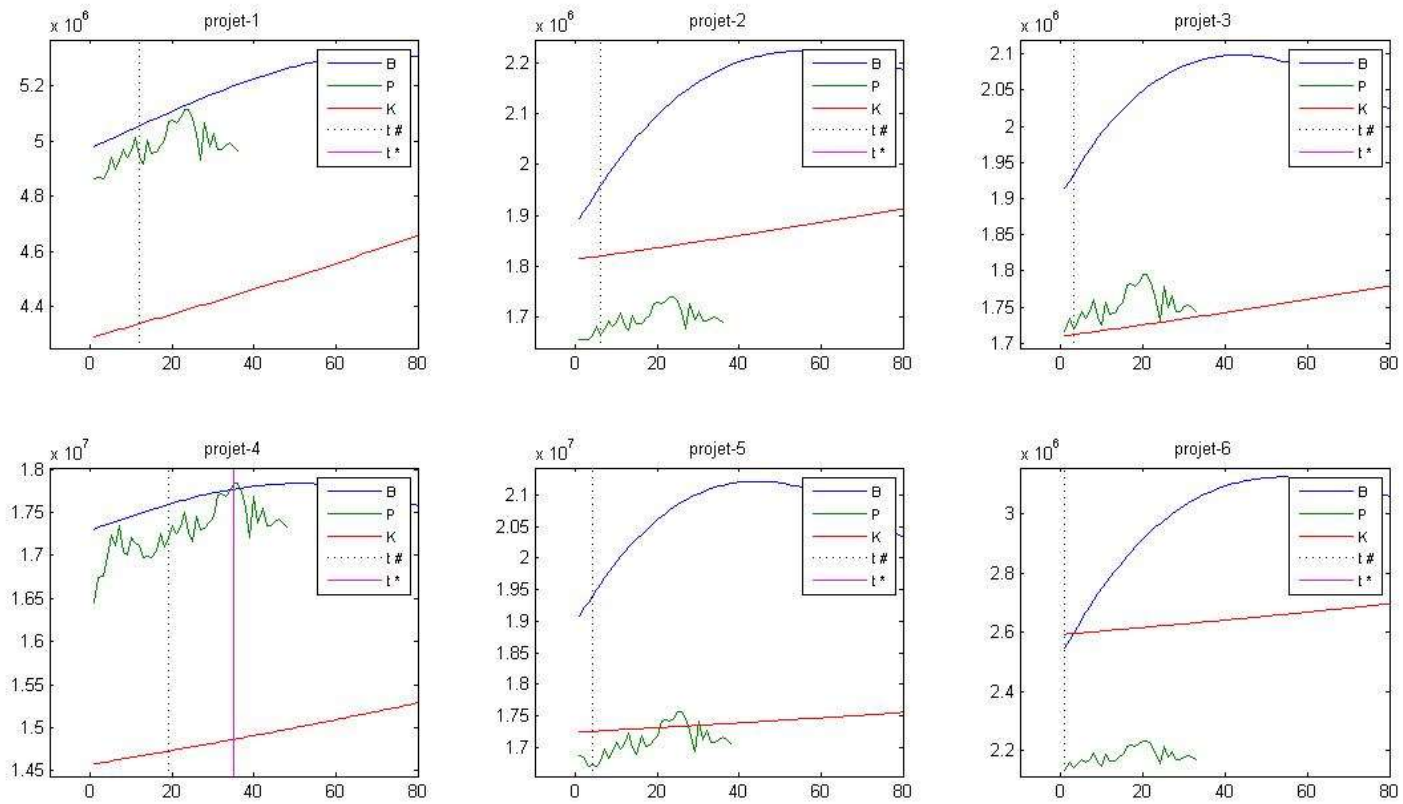


Figure 7.6 – Analyse graphique de l'exercice de l'option de (re)développement (Projets 7 à 12)

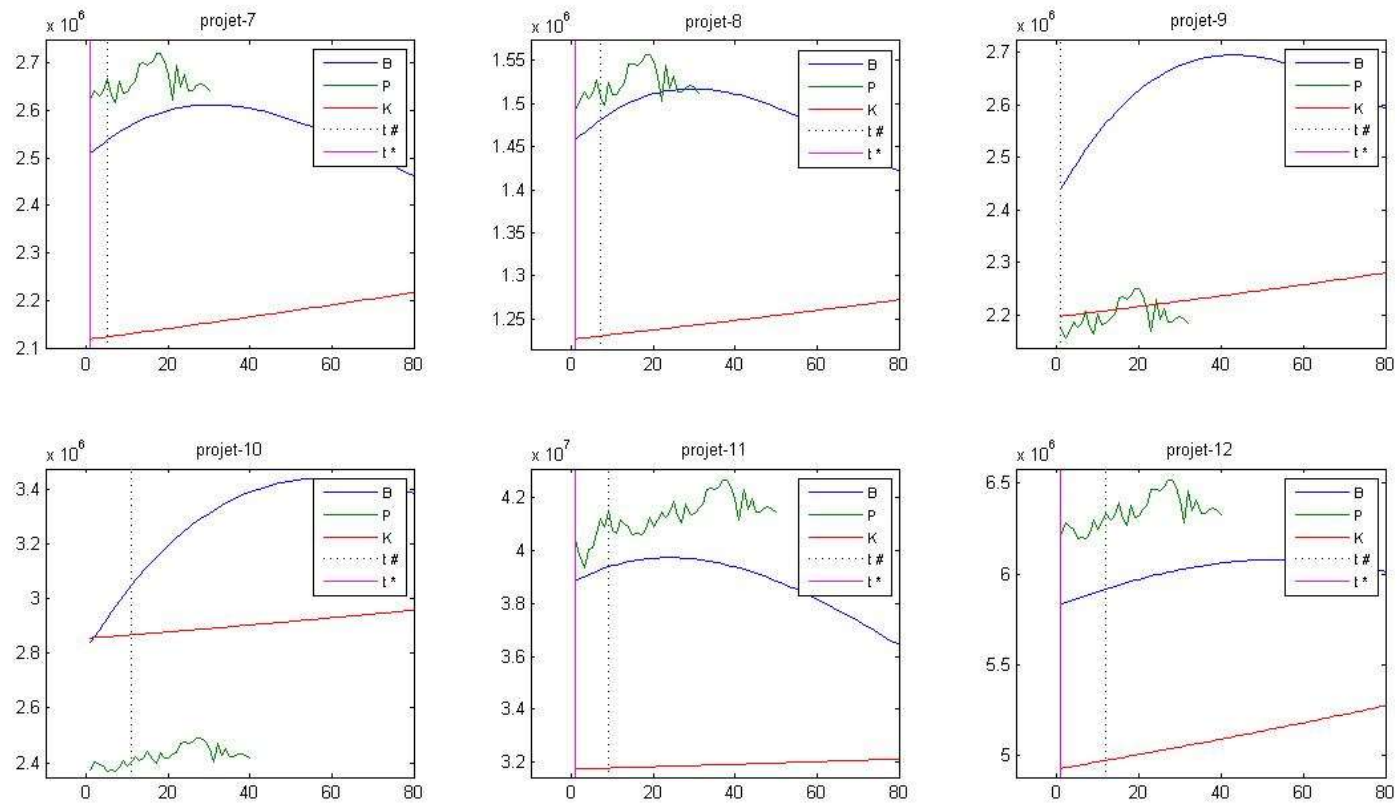


Figure 7.7 – Analyse graphique de l'exercice de l'option de (re)développement (Projets 13 à 18)

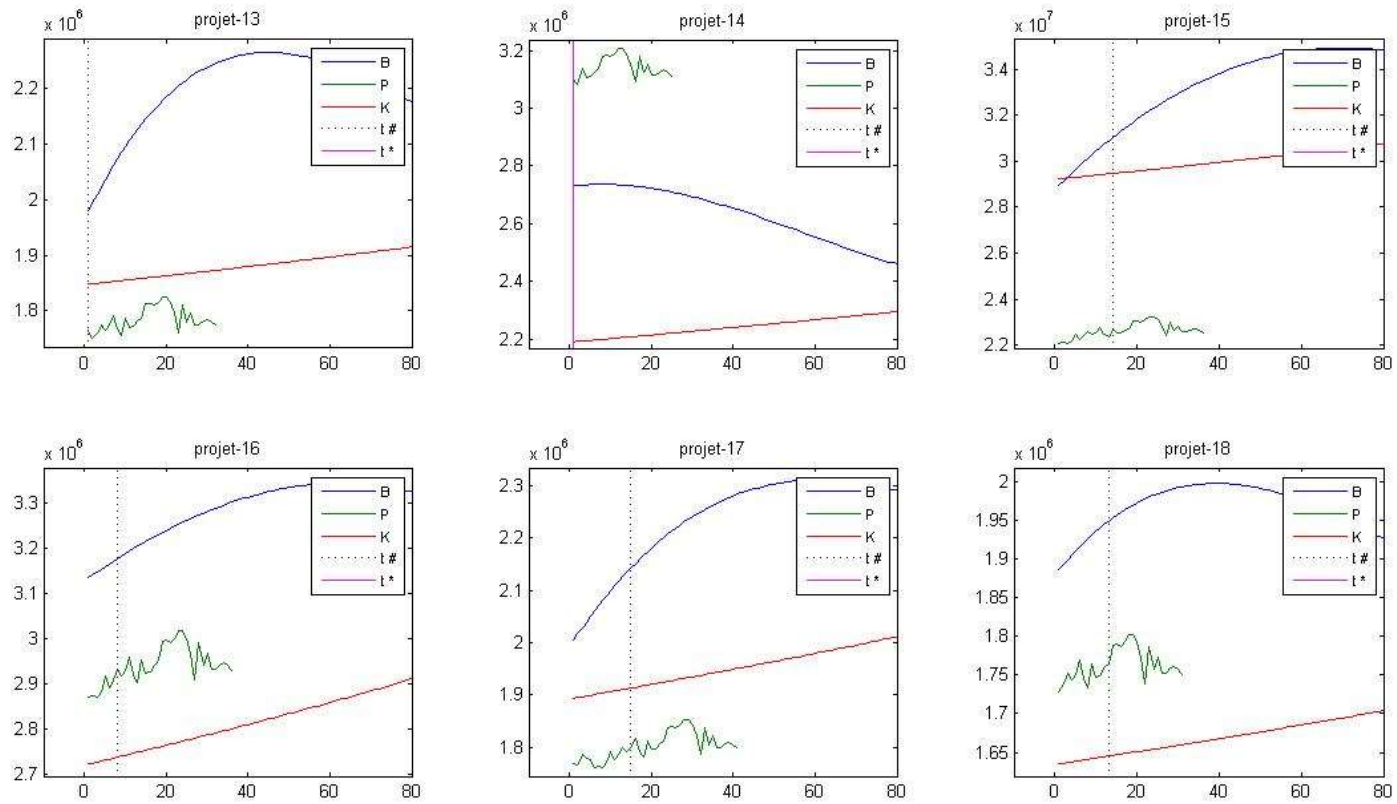


Figure 7.8 – Analyse graphique de l'exercice de l'option de (re)développement (Projets 19 à 24)

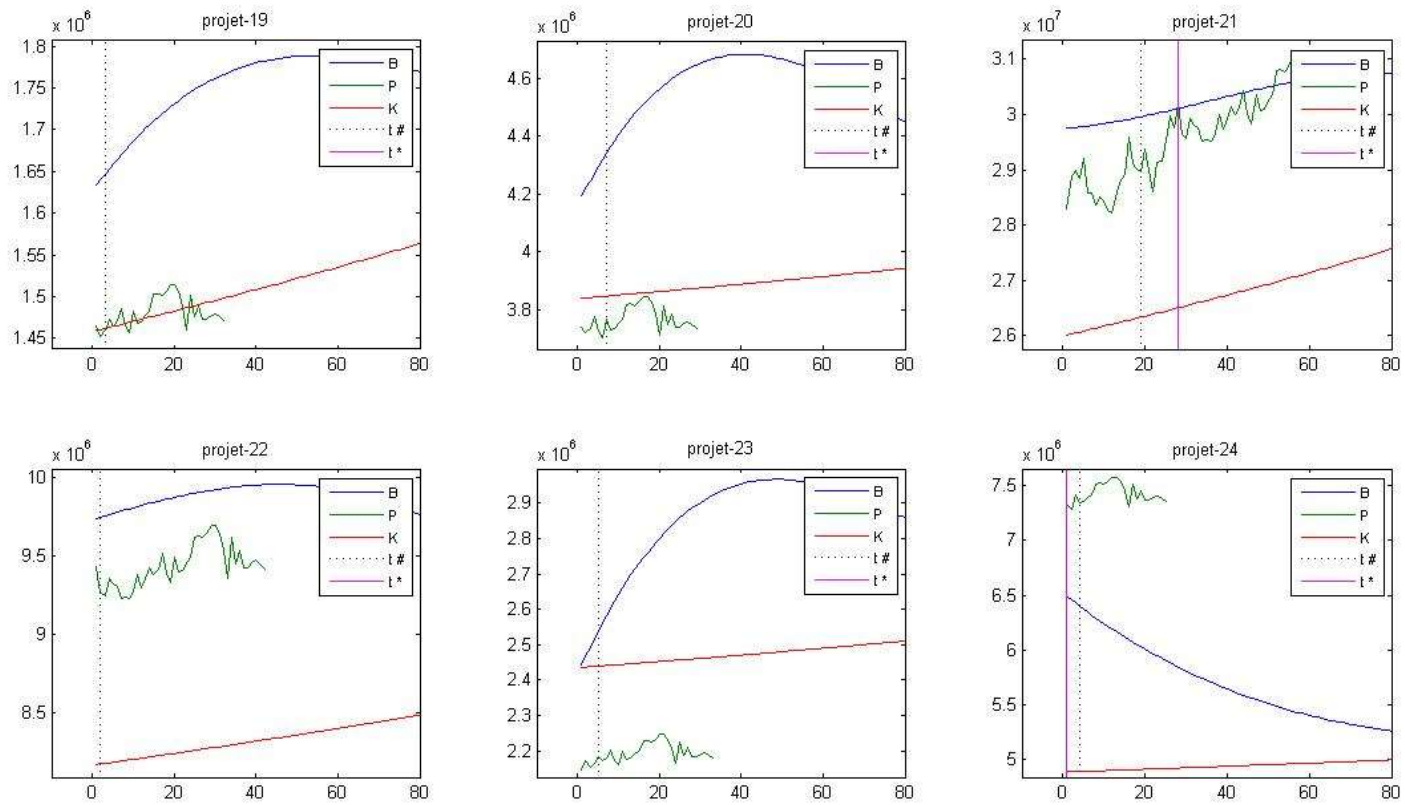


Figure 7.9 – Analyse graphique de l'exercice de l'option de (re)développement (Projets 25 à 30)

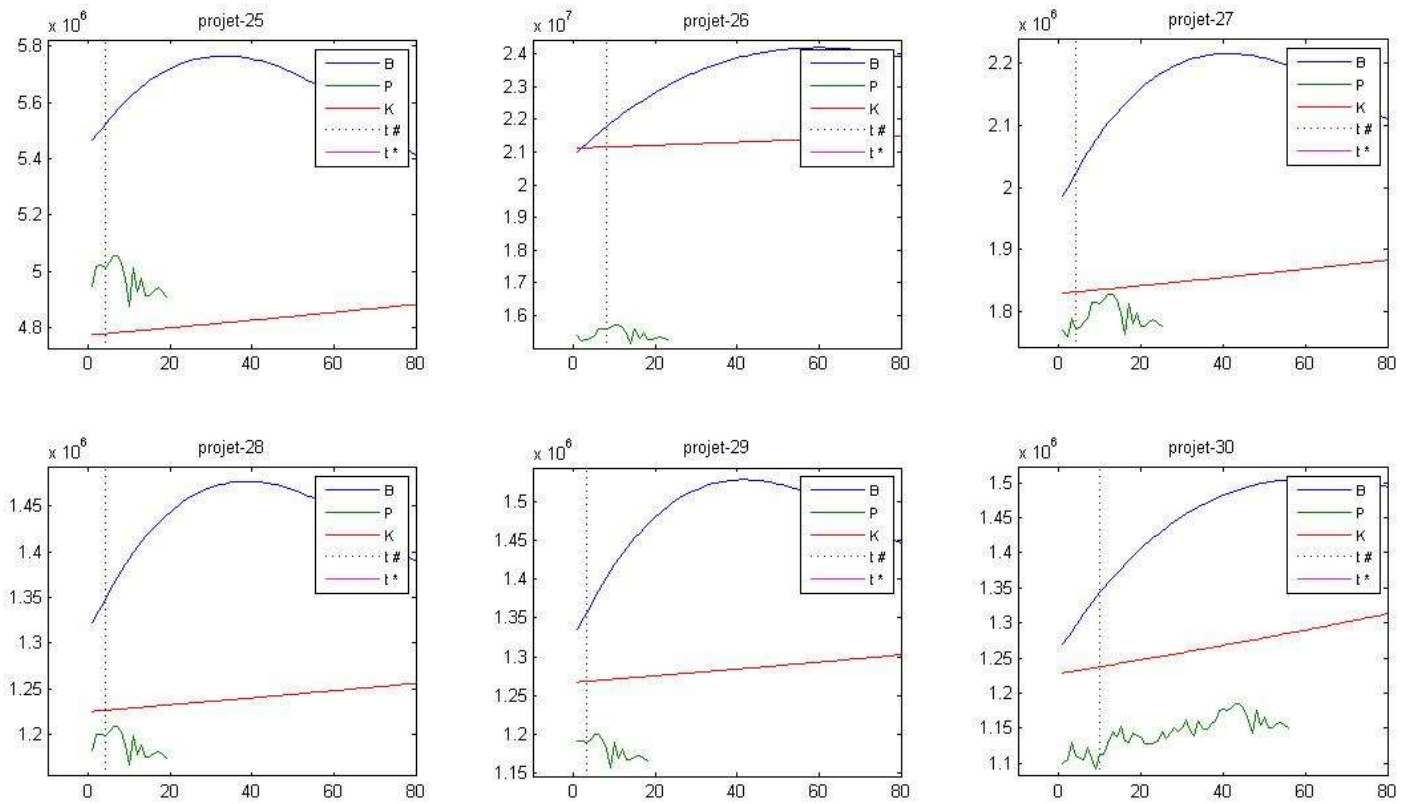


Figure 7.10 – Analyse graphique de l'exercice de l'option de (re)développement (Projets 31 à 36)

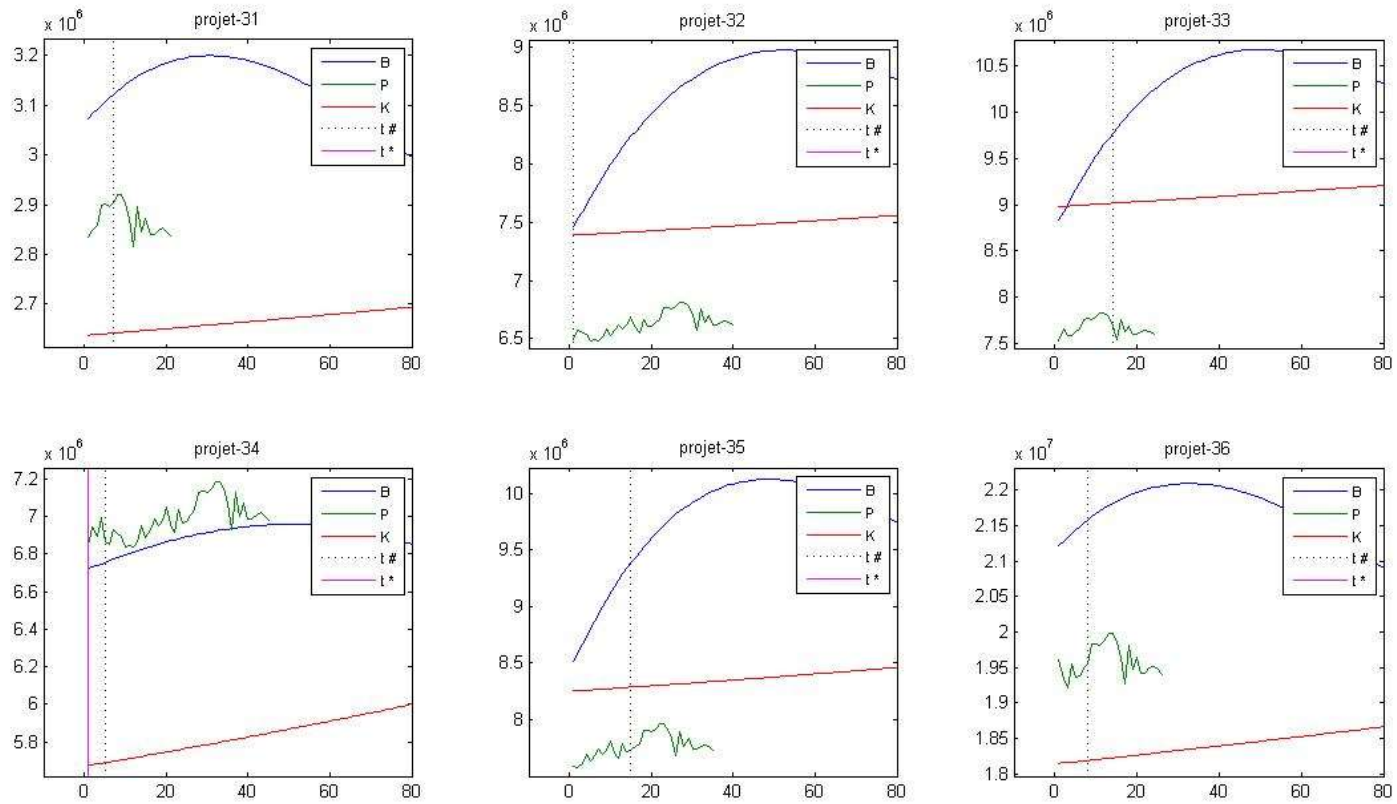


Figure 7.11 – Analyse graphique de l'exercice de l'option de (re)développement (Projets 37 à 42)

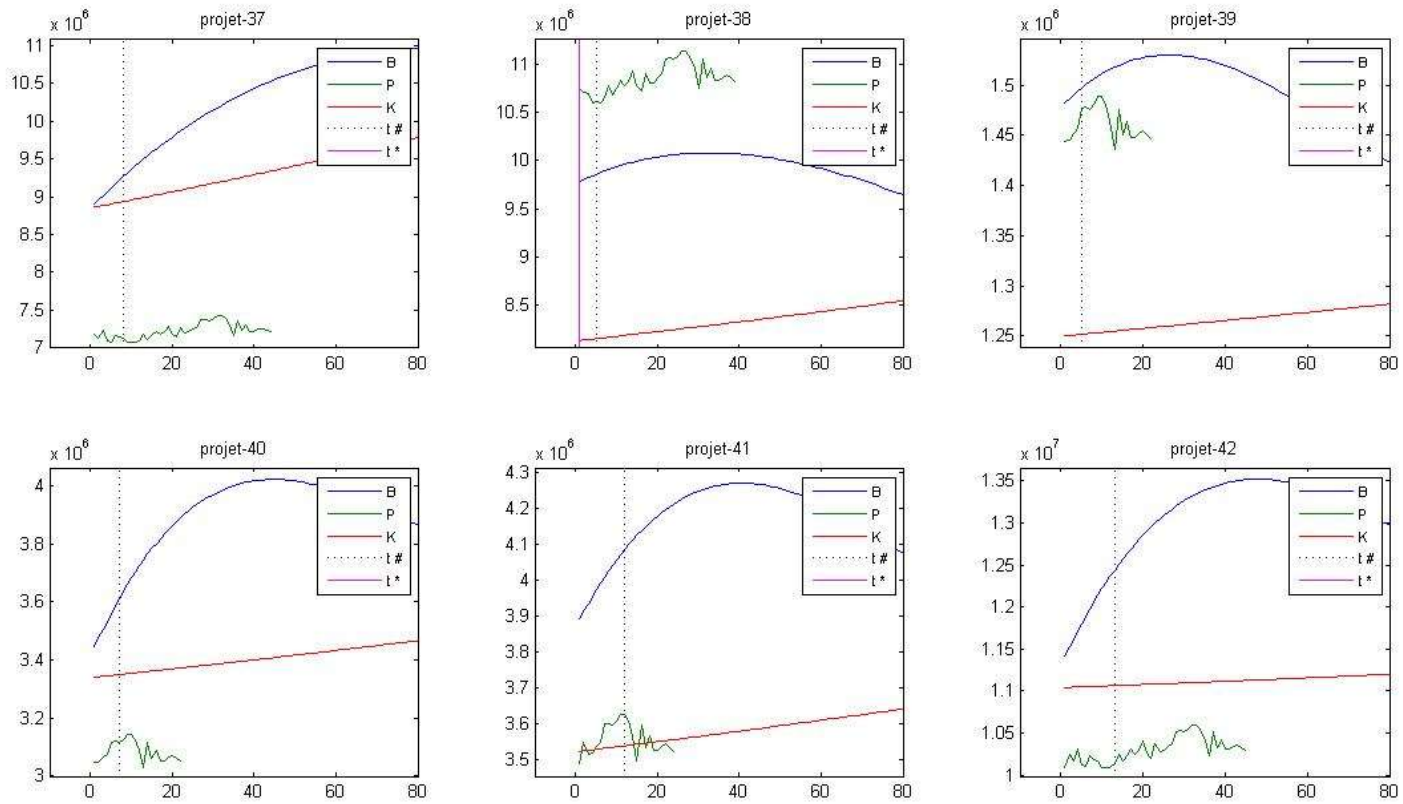


Figure 7.12 – Analyse graphique de l'exercice de l'option de (re)développement (Projets 43 à 48)

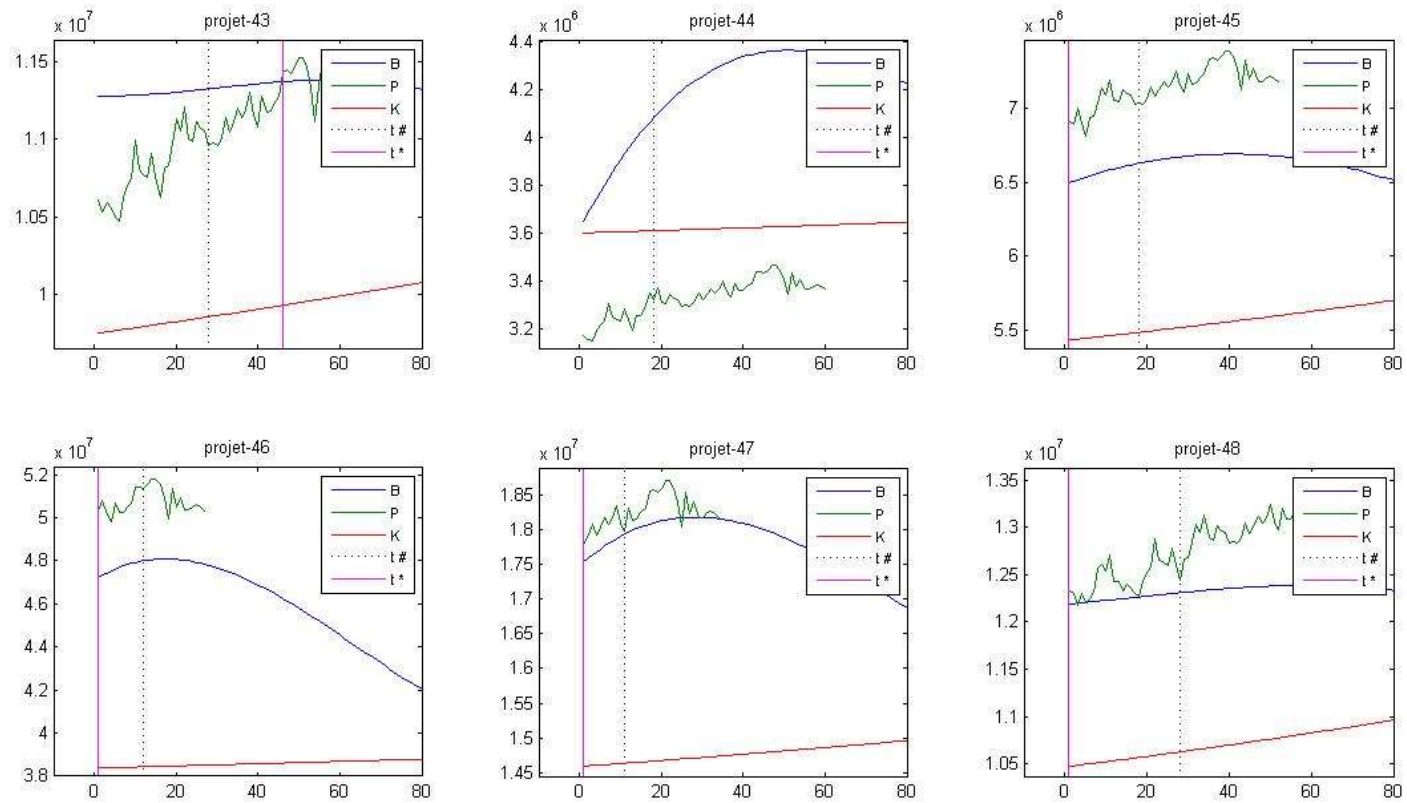


Figure 7.15 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement au PMPC à $t = 0$

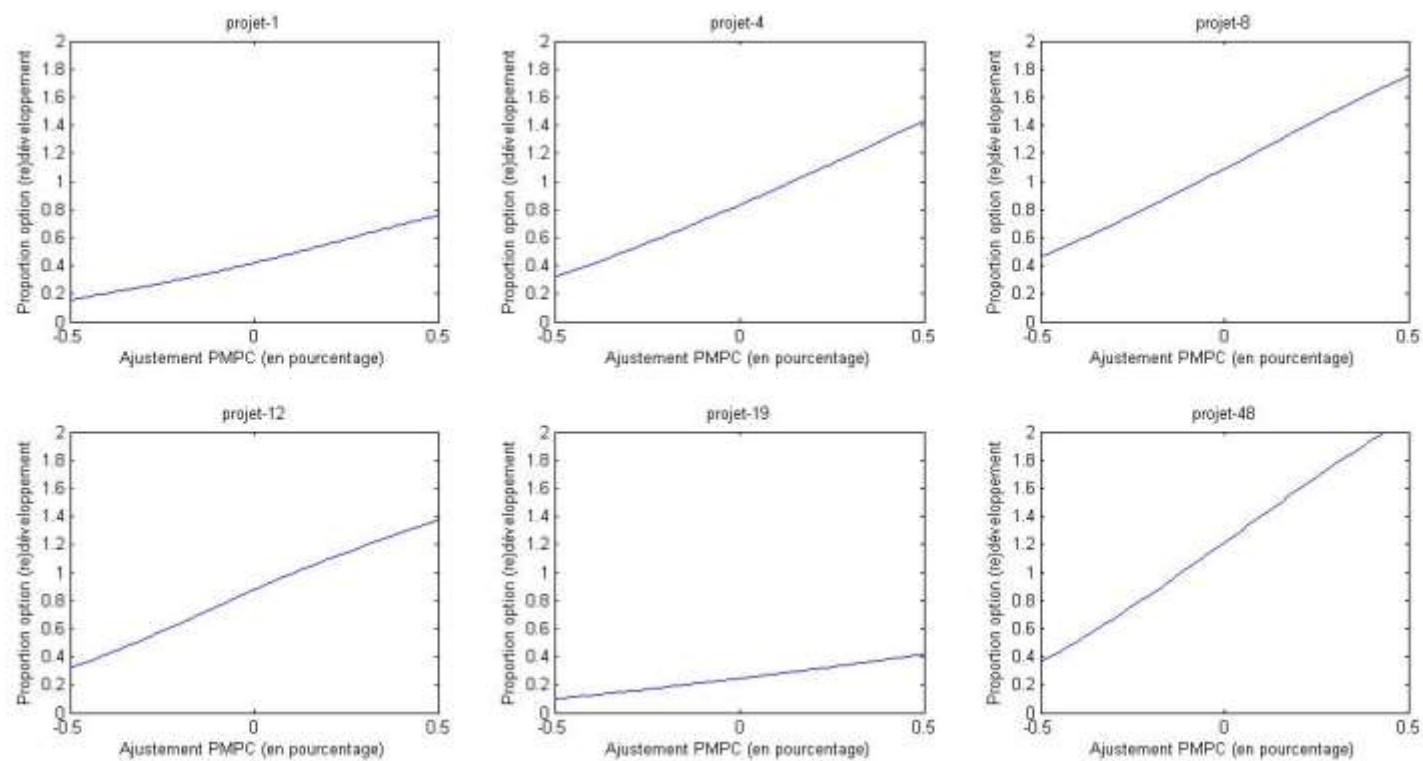
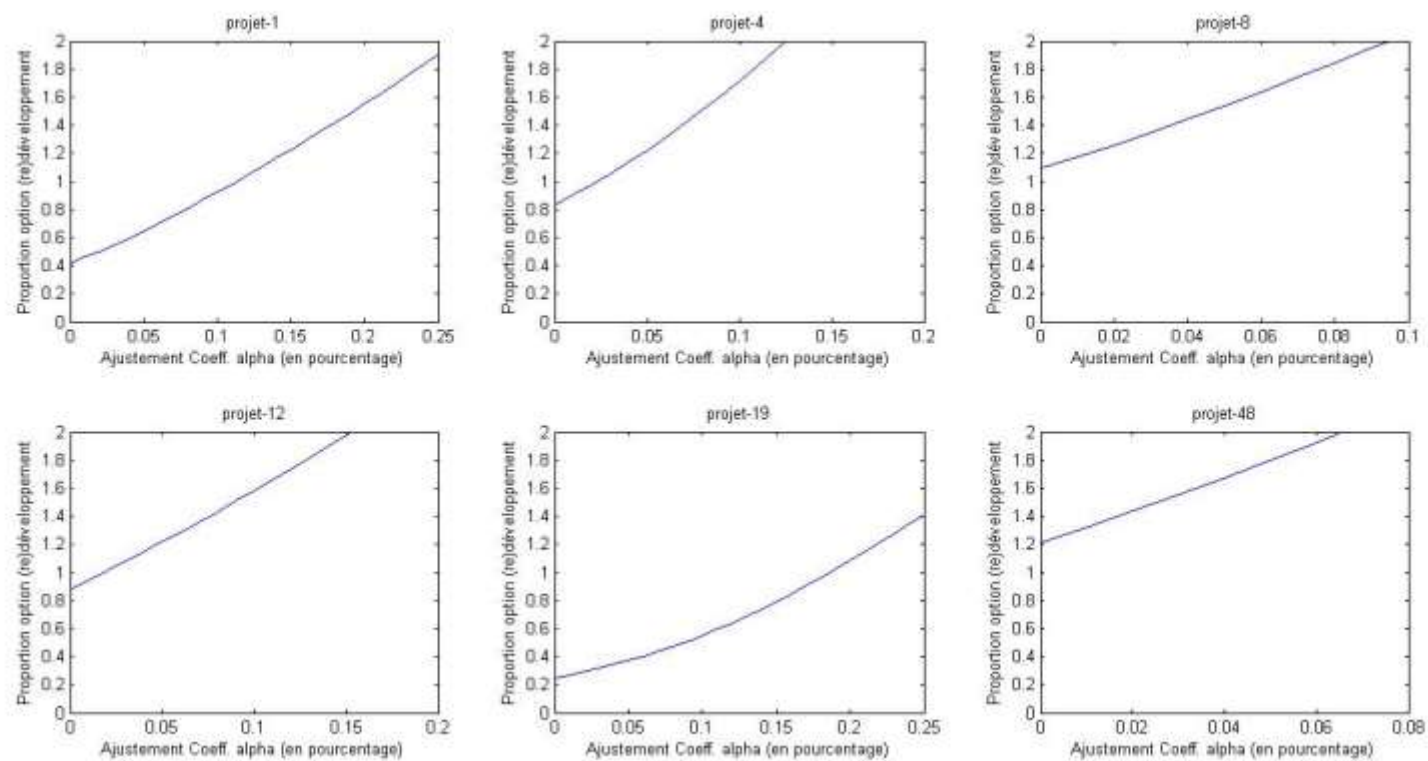
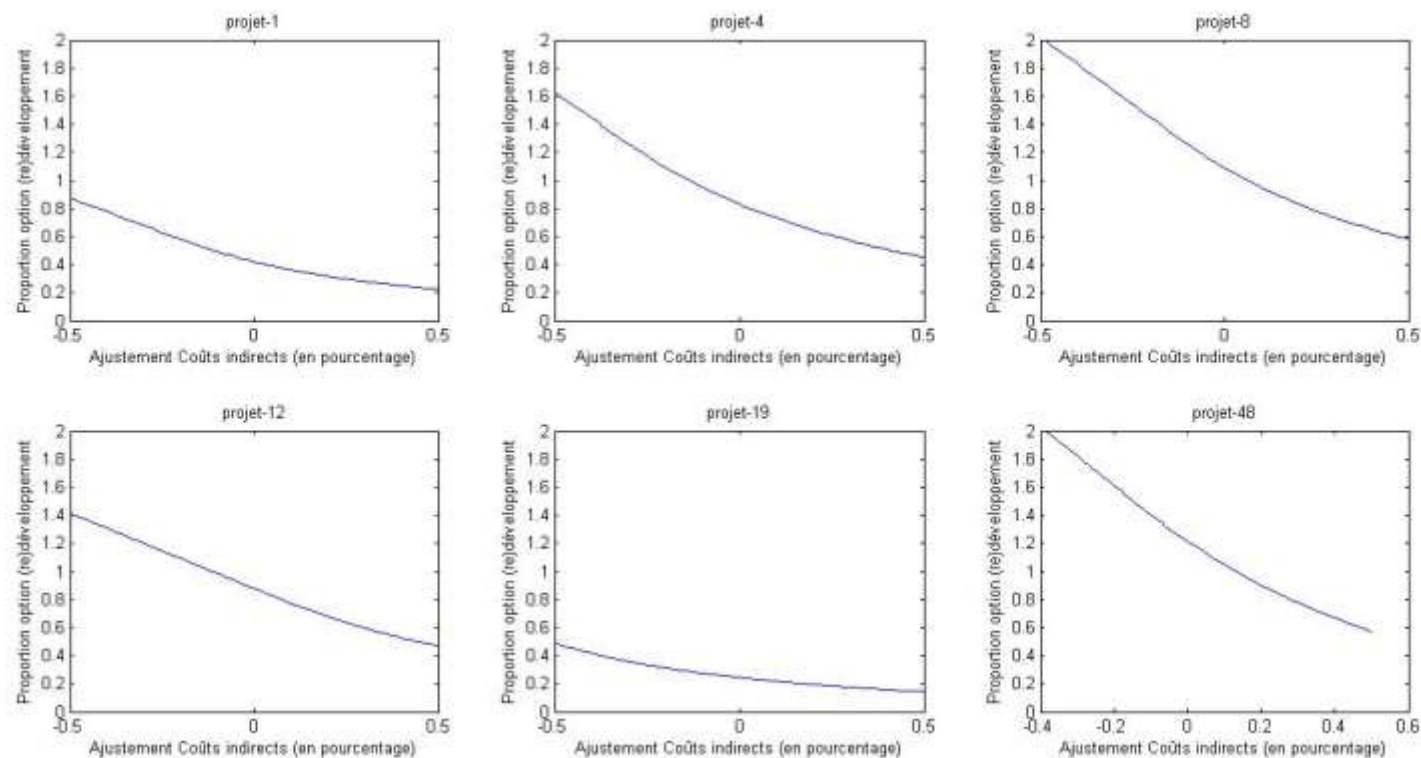


Figure 7.16 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement au coefficient α ²²



²² Le coefficient α utilisé dans l’estimation initiale est de 0,2689.

Figure 7.17 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement au coût de construction indirect par pied carré de superficie habitable²³



²³ Un coût de construction indirect de 85 \$ par pied carré de superficie habitable pour la totalité des projets est utilisé dans l’estimation initiale.

Figure 7.18 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement au délai entre l’exercice de l’option et la réception du produit de la vente des condos

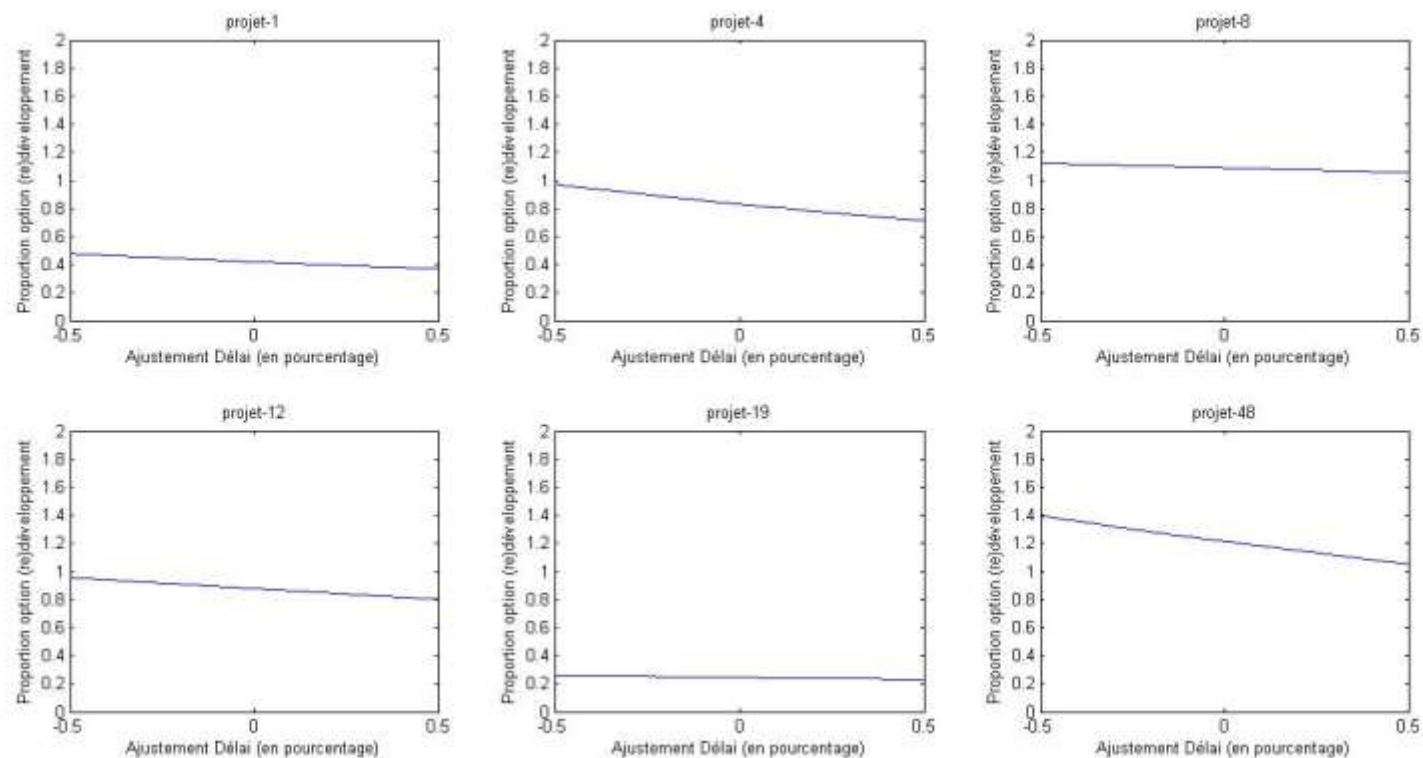
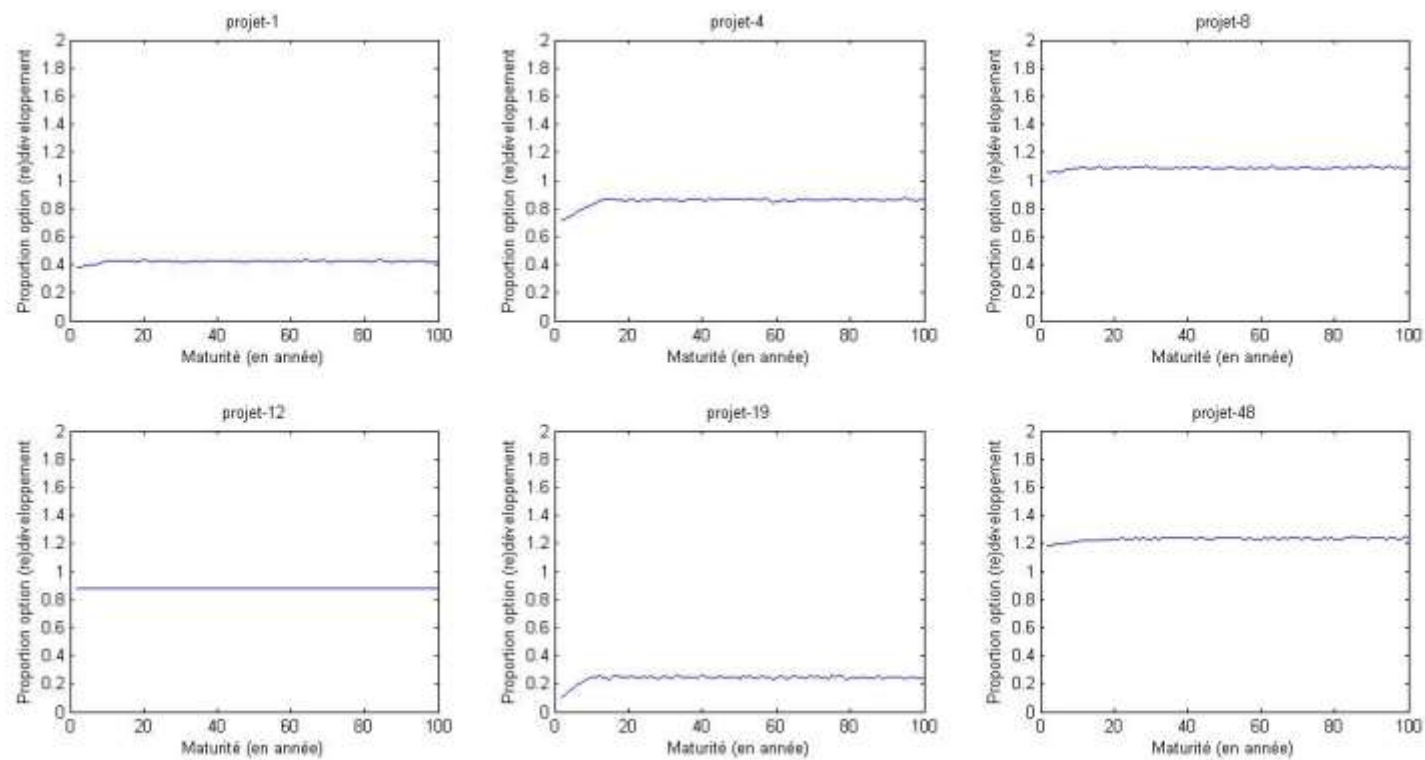


Figure 7.19 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement à la maturité²⁴



²⁴ Une maturité de 10 ans fixe pour la totalité des projets est utilisée dans l’estimation initiale.

Figure 7.20 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement au taux sans risque

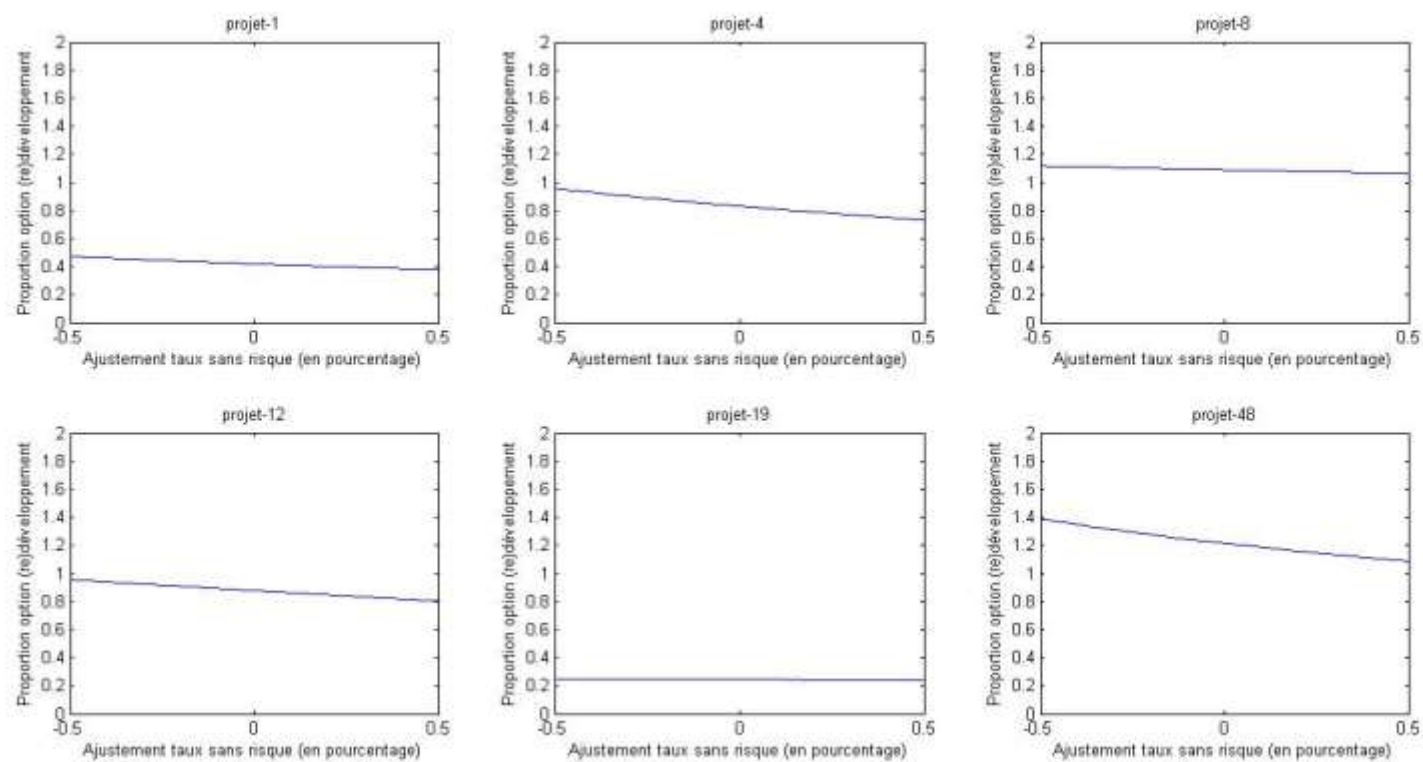
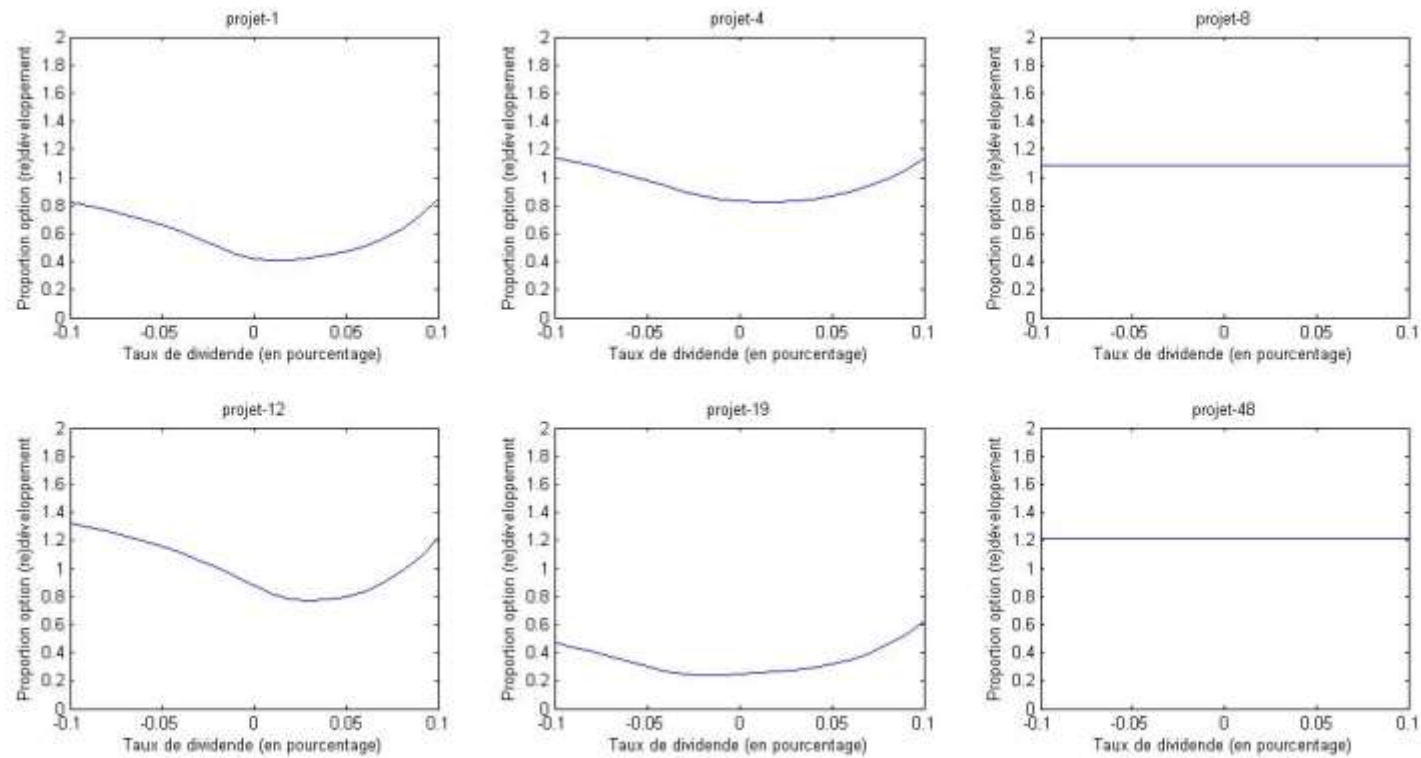
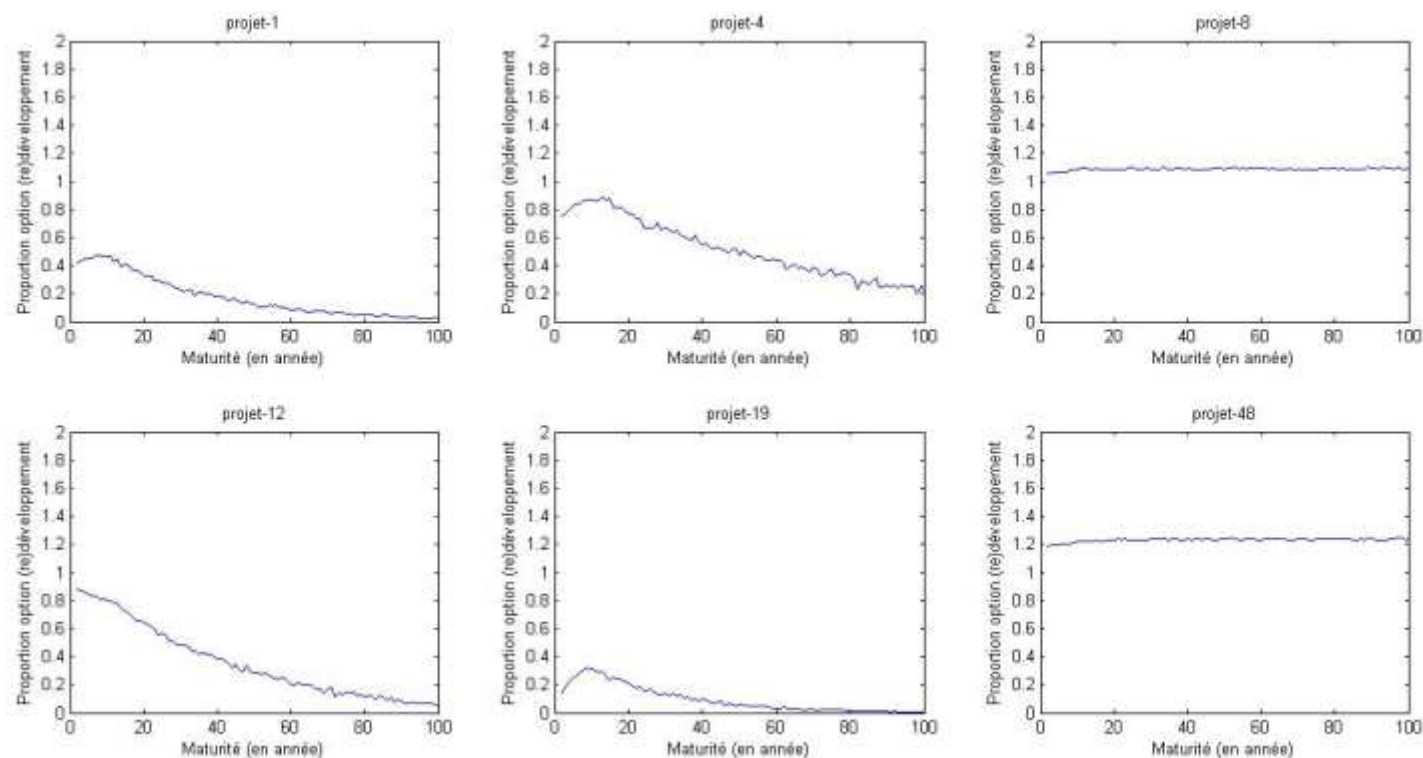


Figure 7.21 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement au taux de dividende²⁵



²⁵ Un taux de dividende de zéro a été utilisé pour la totalité des projets dans l’estimation initiale. Pour cette analyse de sensibilité, un taux de dividende de zéro a été maintenu pour les projets de développement.

Figure 7.22 – Analyse de sensibilité de la proportion de l’option de (re)développement à la maturité lorsque le taux de dividende est égal à 5%²⁶



²⁶ Pour cette analyse de sensibilité, le taux de dividende a été fixé à 5% (sauf pour les projets de développement, soit les projets 8 et 48) et on a fait varier la maturité de l’option.

Figure 7.23 – Analyse de sensibilité de la frontière d'exercice de l'option de (re)développement au PMPC à $t = 0$

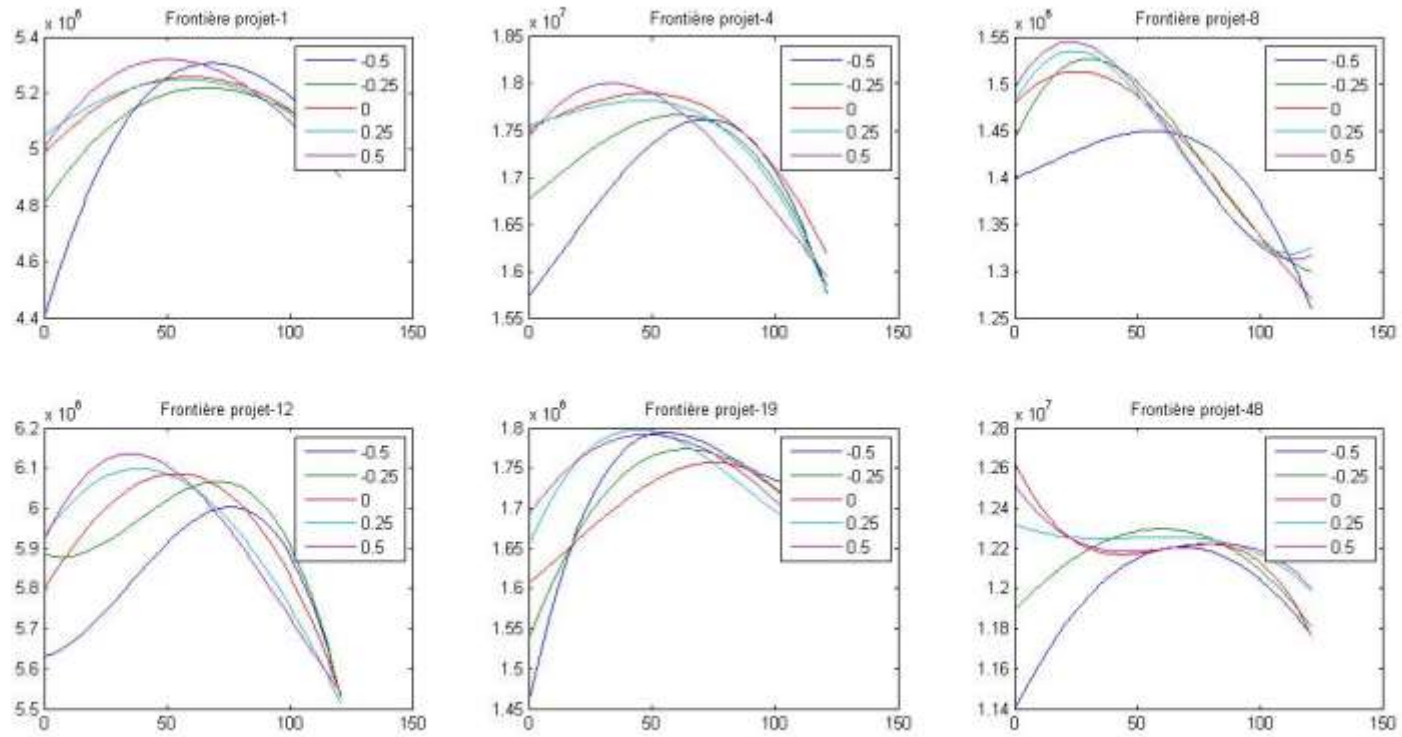


Figure 7.24 – Analyse de sensibilité de la frontière d'exercice de l'option de (re)développement au coefficient α

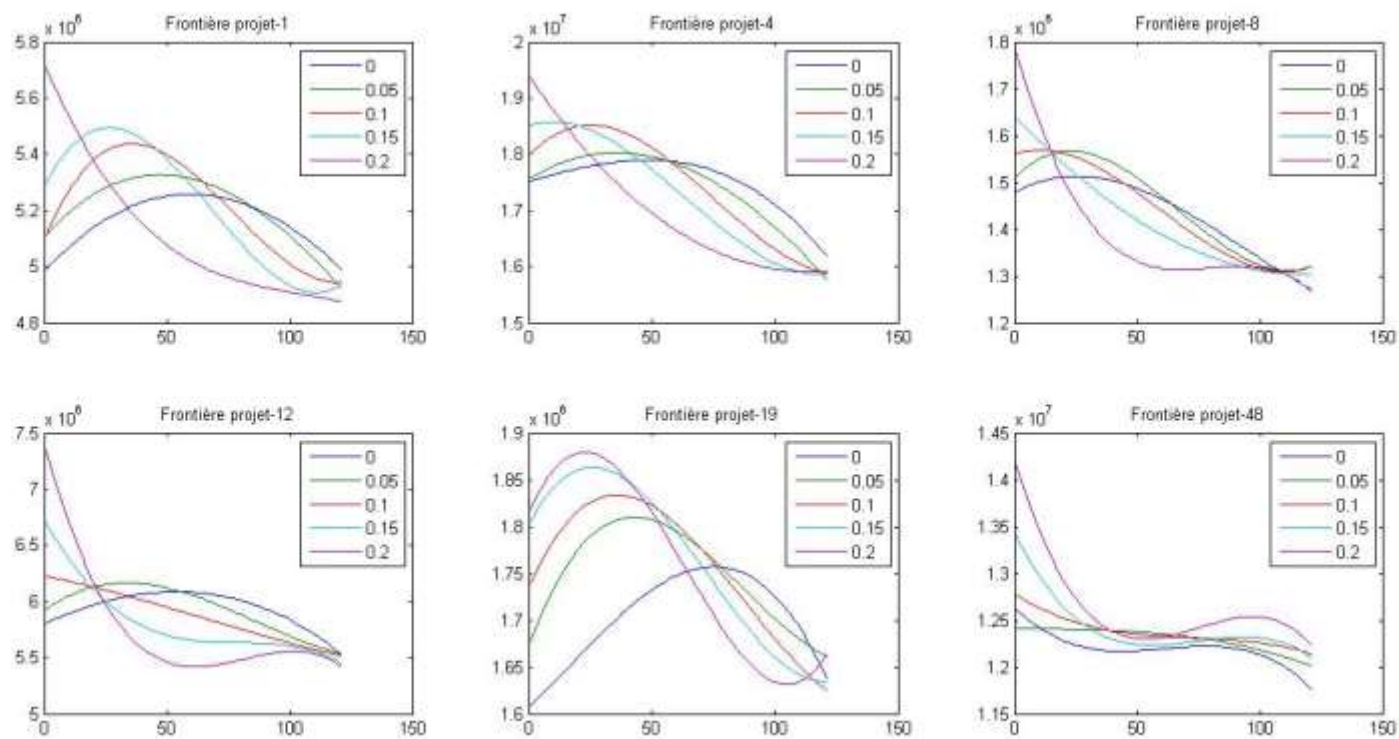


Figure 7.25 – Analyse de sensibilité de la frontière d'exercice de l'option de (re)développement au coût de construction indirect par pied carré de superficie habitable

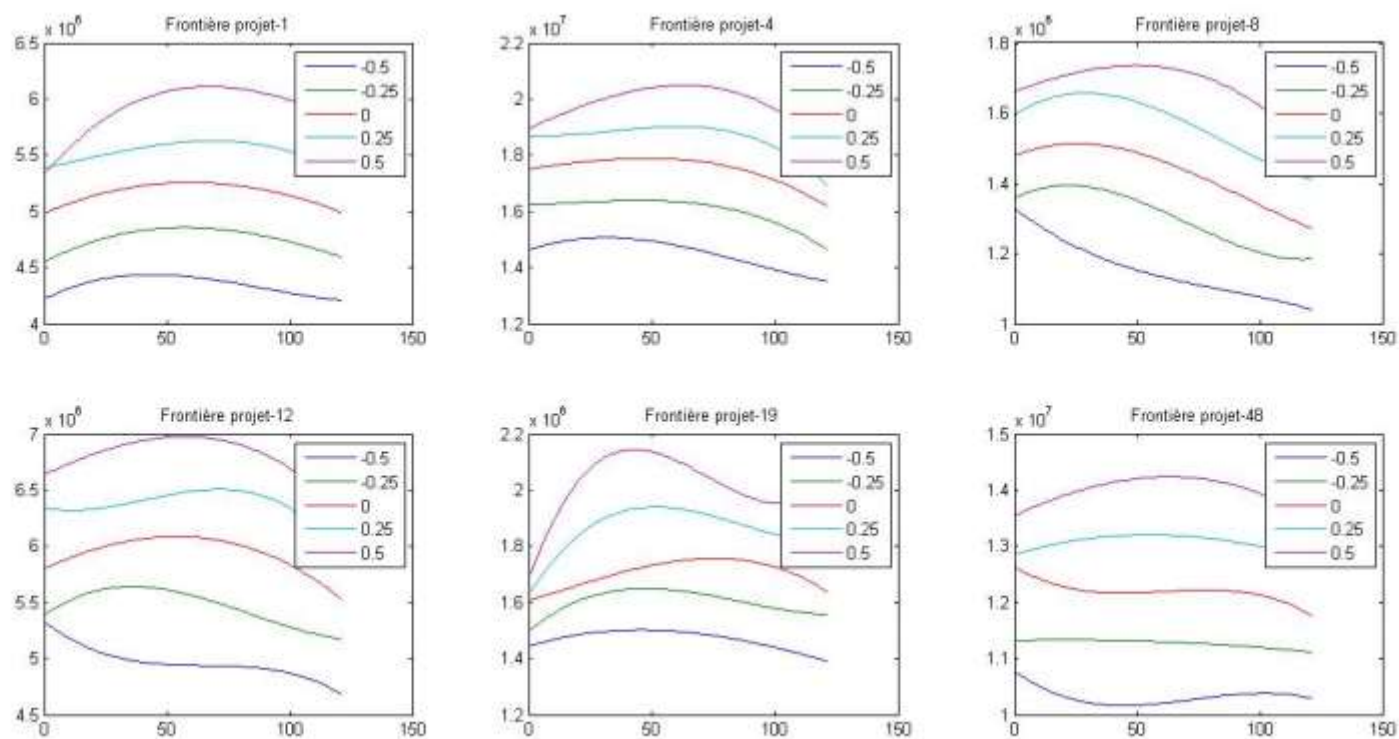


Figure 7.26 – Analyse de sensibilité de la frontière d'exercice de l'option de (re)développement au délai entre l'exercice de l'option et la réception du produit de la vente des condos

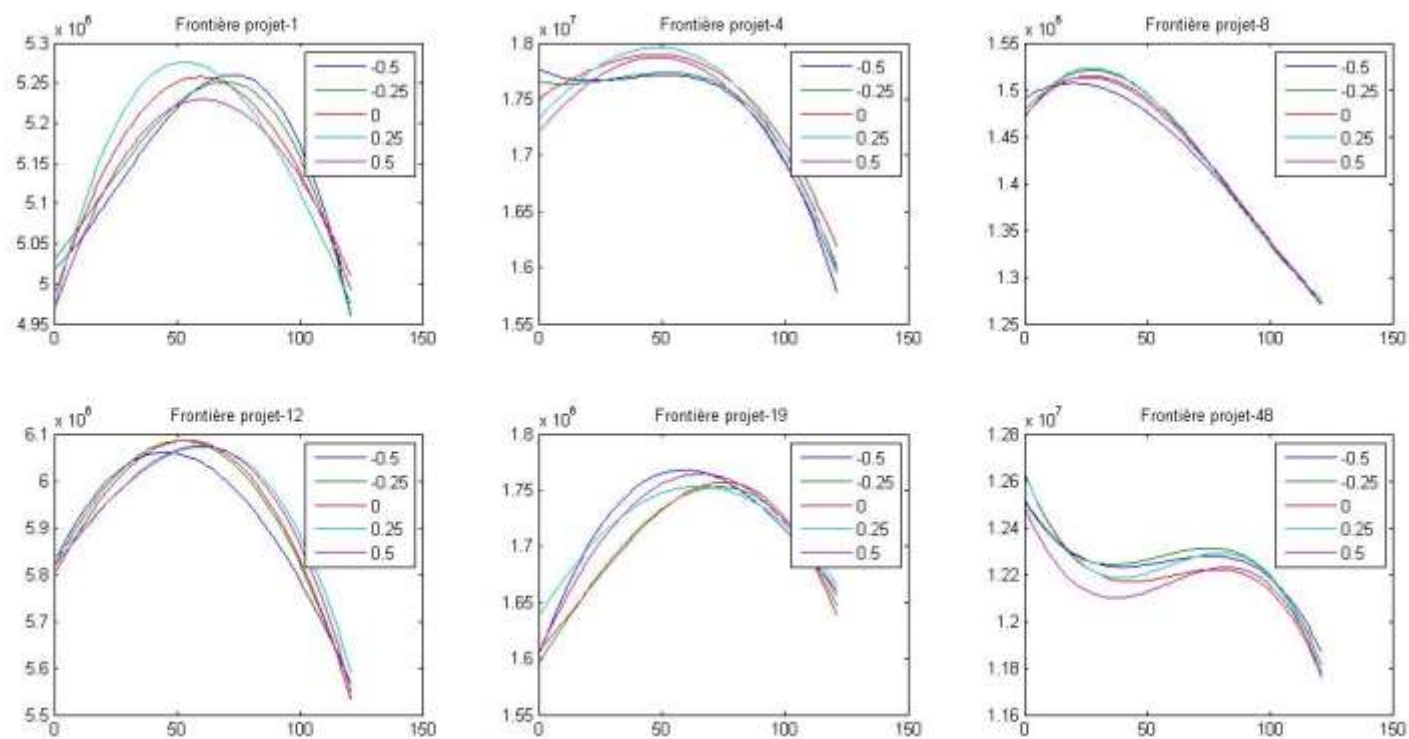


Figure 7.27 – Analyse de sensibilité de la frontière d'exercice de l'option de (re)développement à la maturité

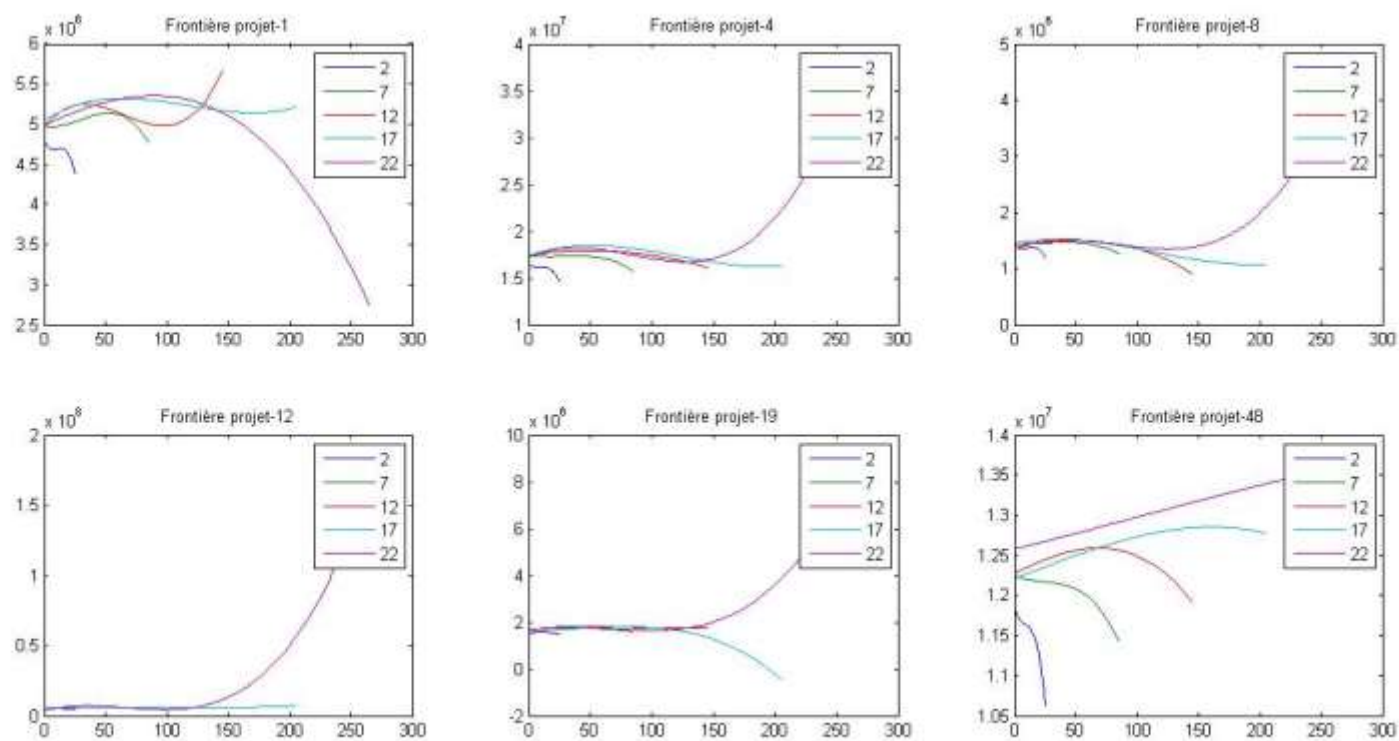


Figure 7.28 – Analyse de sensibilité de la frontière d'exercice de l'option de (re)développement au taux sans risque

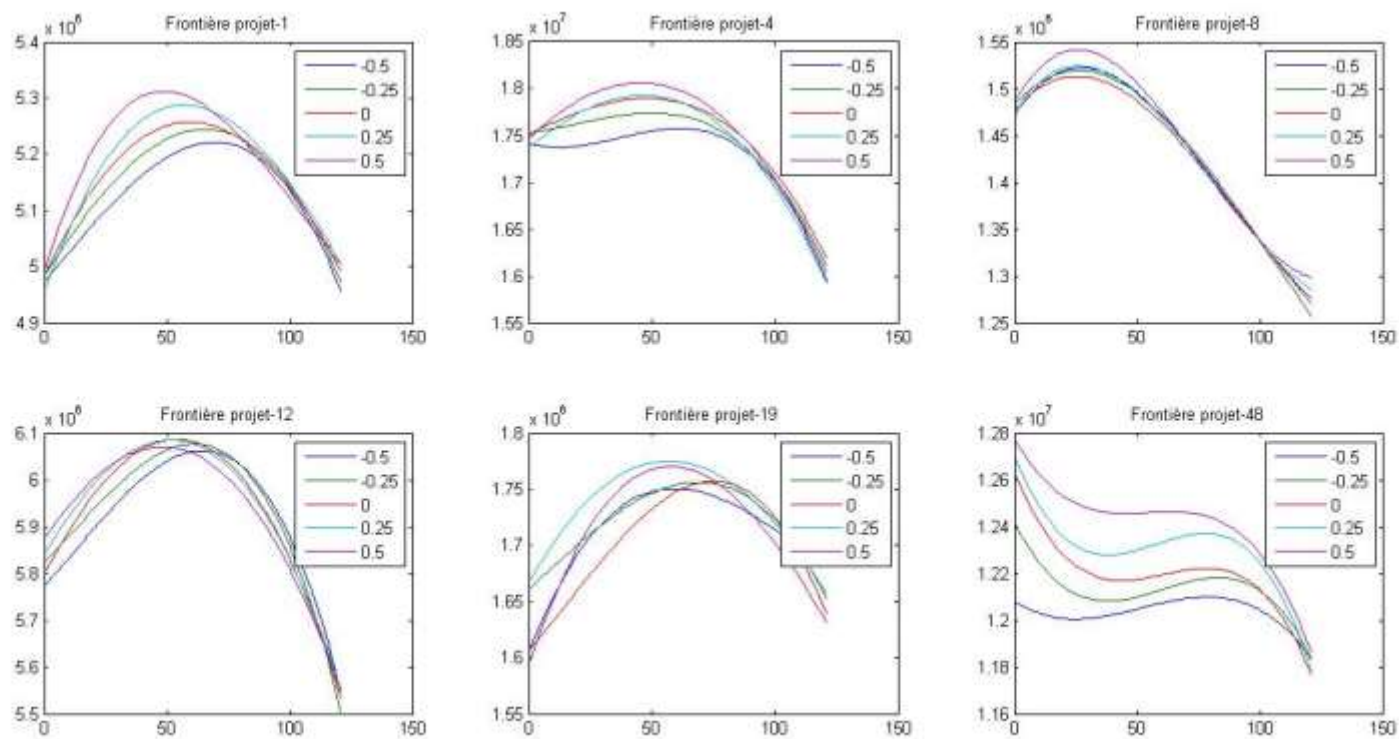


Figure 7.29 – Analyse de sensibilité de la frontière d'exercice de l'option de (re)développement au taux de dividende

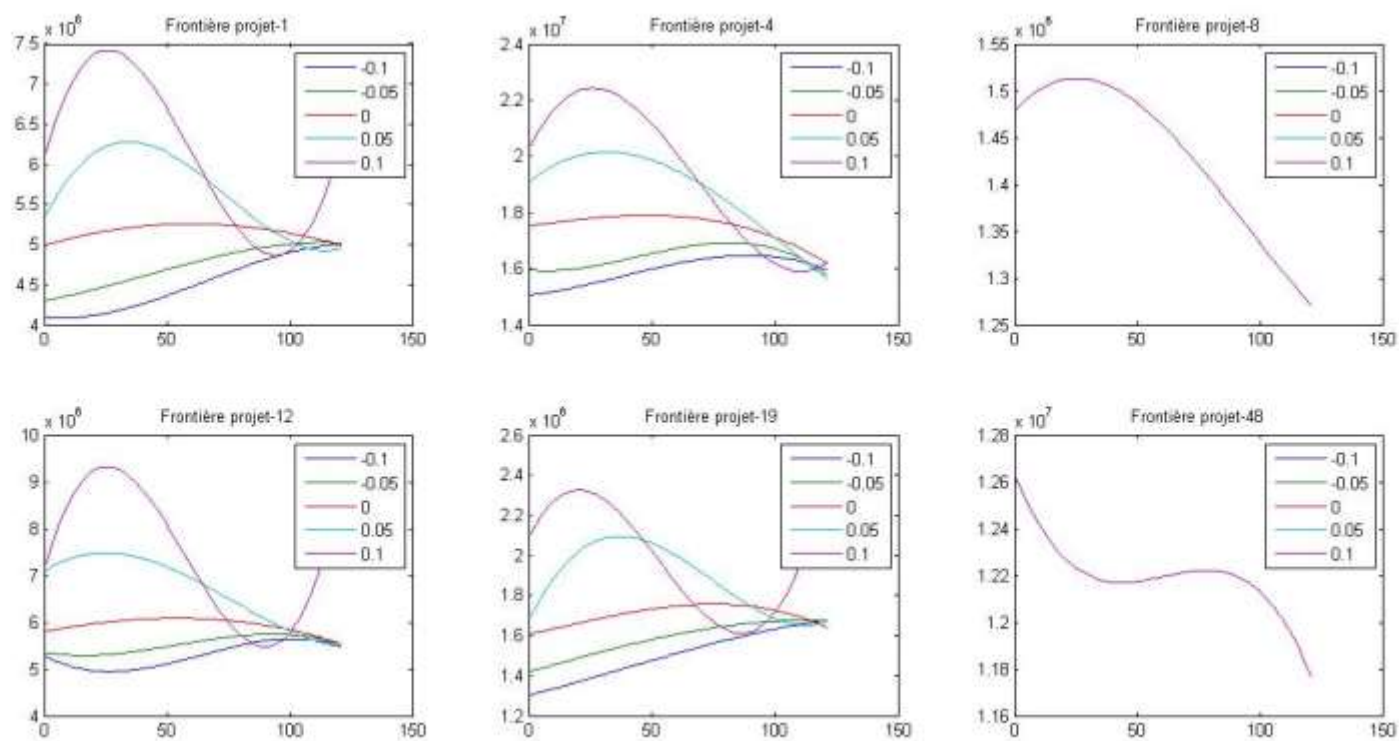
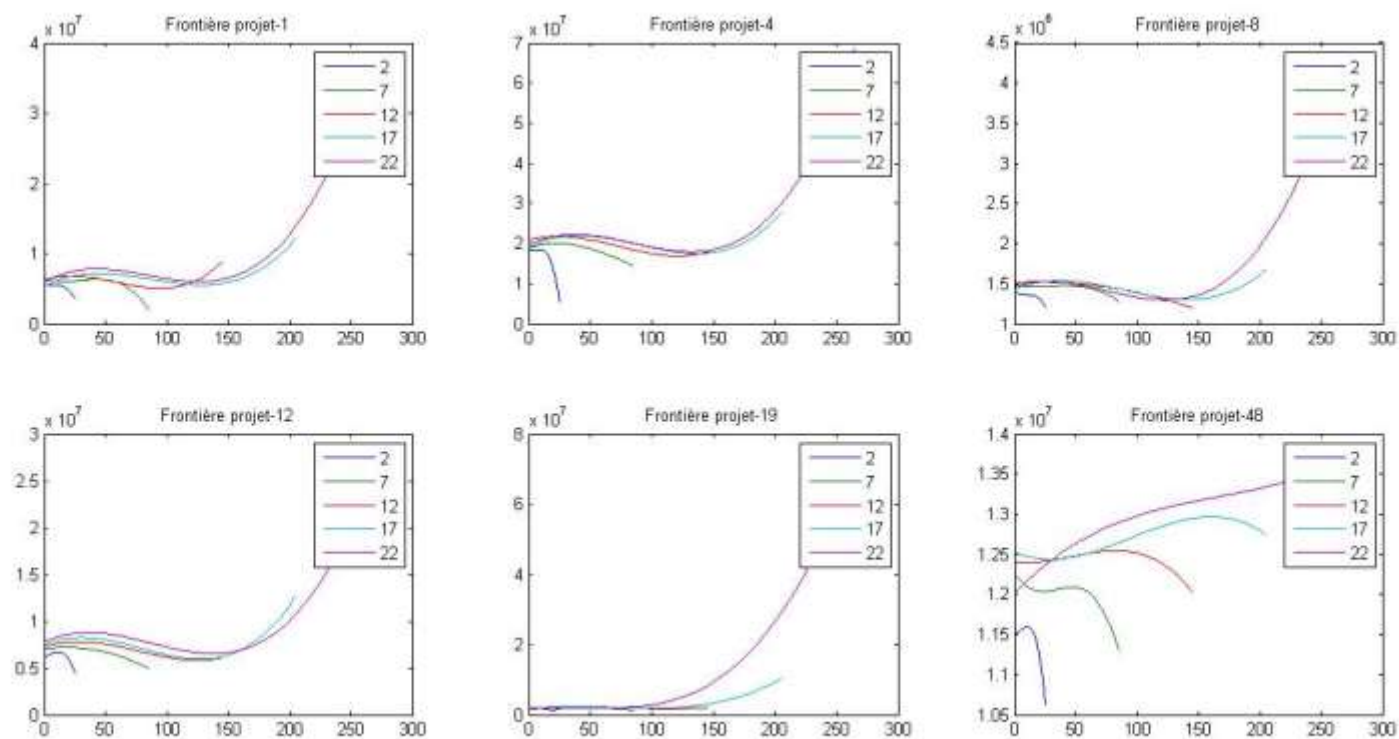


Figure 7.30 – Analyse de sensibilité de la frontière d'exercice de l'option de (re)développement à la maturité lorsque le taux de dividende est égal à 5%



BIBLIOGRAPHIE

Banque du Canada, 2013. Revue du système financier, Juin 2013.

Bernanke, B.S., 1983. Irreversibility, uncertainty and cyclical investment. *Quarterly Journal of Economics* 97, 85-106.

Black, F., et Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637-654.

Bollerslev, T., 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307-327.

Brach, M.A., 2002. Real Options in Practice (John Wiley & Sons, Hoboken, NJ).

Brandt, S., et Maennig, W., 2011. Road noise exposure and residential property prices : evidence from Hamburg. *Transportation Research Part D* 16, 23-30.

Brennan, M.J., et Schwartz, E.S., 1985. Evaluating natural resource investment. *Journal of Business* 58, 135-157.

Brueggeman, W.B., et Fisher, J.D., 2011. Real Estate Finance Investments (McGraw-Hill Irwin, New York, NY).

Bulan, L., Mayer, C., et Somerville, C.T., 2008. Irreversible investment, real options, and competition : Evidence from real estate development. *Journal of Urban Economics* 65, 237-251.

Carrière, J., 1996. Valuation of Early-Exercise Price of Options Using simulations and Nonparametric Regression. *Insurance: Mathematics and Economics* 19, 19-30.

Capozza, D.R., et Li, Y., 2002. Optimal land development decisions. *Journal of Urban Economics* 51, 123-142.

Capozza, D.R., et Sick, G., 1991. Valuing Long Term Leases: The Option to Redevelop.. *Journal of Real Estate Finance and Economics* 4, 209-223.

Case, K.E., et Shiller, R.J., 1989. The Efficiency of the Market for Single-Family Homes. *The American Economic Review* 79, 125-137.

Cížek, P., Härdle, W., et Weron, R., 2005. Statistical Tools for Finance and Insurance. *Humboldt-Universität zu Berlin*. Berlin.

- Collette, M., 2013. Demand remains strong for the Downtown Montreal condominium market. *Quarterly Market Survey – Altus Group*.
- Conroy, S., Narwold, A., et Sandy, J., 2013. The Value of a Floor: Valuing Floor Level in High-rise Condominiums in San Diego. *International Journal of Housing Markets and Analysis* 6, 197-208.
- Cox, J.C., Ross, S.A., et Rubinstein, M., 1979. Option pricing : a simplified approach. *Journal of Financial Economics* 88, 462-475.
- Cukierman, A., 1980. The effects of uncertainty on investment under risk neutrality with endogenous information. *Journal of Political Economy* 88, 462-475.
- Dixit, A.K., et Pindyck, R.S., 1994. Investment Under Uncertainty (Princeton University Press, Princeton, NJ).
- Diz, F., et Finucane, T., 1993. The Rationality of Early Exercise Decisions: Evidence from the S&P 100 Index Options Market. *Review of Financial Studies* 6, 765-797.
- Duan, J.C., 1995. The Garch Option Pricing Model. *Mathematical Finance* 5, 13-32.
- Duan, J.C., et Simonato, J.-G., 1998. Empirical Martingale Simulation for Asset Prices. *Management Science* 44, 1218-1233.
- Engle, R.F., 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica* 50, 987-1007.
- Engle, R.F., et Ng, V., 1993. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *Journal of Finance* 48, 1749-1778.
- Fisher, I., 1907. The Rate of Interest: Its Nature, Determination and Relation to Economic Phenomena (The Macmillan Company, New York, NY).
- Geltner, D., et McGrath, T., 2006. 11.431J Real Estate Finance and Investment, Fall 2006. *Massachusetts Institute of Technology*. Cambridge, Ma.
- Grenadier, S.R., 1996. The strategic exercise of options: Development cascades and overbuilding in real estate markets. *Journal of Finance* 51, 1653-1679.
- Grovenstein, R.A., Kau, J.B., et Munneke, H.J., 2011. Development value : a real option approach using empirical data. *Journal of Real Estate Finance and Economics* 43, 321-335.

- Gyourko, J., et Saiz, A., 2006. Construction costs and the supply of housing structure. *Journal of Regional Science* 46, 661-680.
- Heston, S., et Nandi, S., 2000. A Closed-form GARCH Option Pricing Model. *Review of Financial Studies* 13, 585-626.
- Longstaff, F., et Schwartz, E., 2001. Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *Review of Financial Studies* 14, 113-147.
- Mahan, B.L, Polasky, S. et Adams, R.M., 2000. Valuing urban wetlands: a property price approach. *Land Economics* 76, 100-113.
- McDonald, R.L, et Siegel, D., 1986. The value of waiting to invest. *Quarterly Journal of Economics* 101, 707-727.
- McDonald, R.L., 2006. Derivatives Markets (Pearson Education, Boston, Ma).
- McKean, H.P., 1965. Appendix: a free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics. *Industrial Management Review* 6, 32-39.
- Merton, R.C., 1973. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.
- Oliveira, C., Couto, G., et Pimentel, P., 2008. Real Options Valuation: an Application to the Portuguese Real Estate Market. [Working Paper]
- Ooi, J.T.L., Sirmans, C.F., et Turnbull G.K., 2006. The Option Value of Vacant Land, URAG *Working paper* 605.
- Pindyck, R.S., 2008. Lectures on real options: part I – Basic Concepts. *Massachusetts Institute of Technology*. Cambridge, Ma.
- Quigg, L., 1993. Empirical testing of real option pricing models. *Journal of Finance* 48, 621-640.
- Rosen, S., 1974. Hedonic prices and implicit markets: Product differentiation in pure competition. *Journal of Political Economy* 82, 34-55.
- Samuelson, P., 1965. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review* 6, 13-31.
- Sing, T.F., 2001. Optimal timing of a real estate development under uncertainty. *Journal of Property Investment and Finance* 19, 35-52.
- Titman, S., 1985. Urban land prices under uncertainty. *American Economic Review* 65, 505-514.

Williams, J.T., 1991. Real estate development as an option. *Journal of Real Estate Finance and Economics* 4, 191-208.

Williams, J.T., 1993. Equilibrium and options on real assets. *Review of Financial Studies* 6, 825-850.

Williams, J.T., 1997. Redevelopment of real assets. *Real Estate Economics* 25, 387-407.

Womack, K.S., 2013. Real options and urban land value: a review of the literature. [Working Paper]

Yanxiang, A.G., et Cannaday, R., 2004. Value of the Option to Develop Residential Land: An Empirical Estate. *Real Estate Review* 32, 60-65.