

HEC MONTRÉAL

Affilié à l'Université de Montréal

**Évaluation empirique et comparative des  
modèles de valorisation des produits dérivés  
de taux d'intérêt**

**Alexis Bélanger-Vigneault**

Sciences de la gestion

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)*

7 Avril 2014

**Retrait d'une ou des pages pouvant contenir des renseignements personnels**

# Sommaire

Ce mémoire a pour objectif de comparer empiriquement le modèle SABR/LMM au modèle SABR dans leur performance de tarification des caplets et dans la qualité des paramètres de couverture liés à ceux-ci. Nous nous intéressons principalement aux caractéristiques des différents modèles et nous calibrons chacun d'eux sur les données de marchés. À l'aide des paramètres calibrés, nous valoriserons des caplets sur la période portant du 1<sup>er</sup> janvier 2007 au 27 octobre 2010 et calculerons le delta de chaque caplet. Finalement, nous analyserons les prix et les deltas obtenus à l'aide des modèles et les comparerons à ceux observés sur le marché avec pour objectif d'obtenir une classification basée sur la performance des modèles d'évaluation de produits dérivés de taux d'intérêt.

# Remerciements

Ce mémoire est la dernière étape dans le but d'obtenir mon grade de maître ès sciences et est le fruit de plusieurs mois de travail. J'aimerais souligner le soutien inconditionnel de ma conjointe Maxine Tétreault-Robert et de mes parents, Mariette Bélanger et André Vigneault. À juste titre, j'aimerais également souligner l'aide que m'a apporté Pascal Létourneau dans le partage de ses résultats pour l'extraction des volatilités des caplets à partir des matrices de volatilités des caps. Un remerciement également tout particulier à Pascale Valéry pour son aide dans la compréhension des modèles et pour ses commentaires constructifs. Finalement, j'aimerais remercier tous mes amis et collègues qui m'ont soutenu et encouragé.

# Table des matières

<b>Sommaire</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Problématique . . . . .	1
1.2 Motivation . . . . .	2
1.3 Contribution . . . . .	3
1.4 Aperçu des résultats . . . . .	4
<b>2 Revue de la littérature</b>	<b>5</b>
2.1 Le modèle SABR . . . . .	6
2.1.1 Description du modèle SABR . . . . .	6
2.1.2 Forces du modèle SABR . . . . .	7
2.1.3 Faiblesses du modèle SABR . . . . .	8
2.2 Le modèle SABR/LMM . . . . .	9
2.2.1 Description du modèle SABR/LMM . . . . .	9
2.2.2 Forces du modèle SABR/LMM . . . . .	10
2.2.3 Faiblesses du modèle SABR/LMM . . . . .	11
<b>3 Modèles</b>	<b>13</b>
3.1 Le modèle SABR . . . . .	13

*TABLE DES MATIÈRES*

iv

3.2	Le modèle SABR/LMM de Rebonato, McKay et White (2009) . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Données</b>	<b>19</b>
4.1	Données brutes . . . . .	19
4.2	Construction de la structure par terme . . . . .	20
4.3	Extraction du prix des caplets . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Résultats et Analyses</b>	<b>23</b>
5.1	Stabilité des paramètres dans le temps . . . . .	24
5.2	Évaluation empirique des erreurs de tarifications . . . . .	27
5.2.1	Résultats et analyses . . . . .	27
5.2.2	Décompositions des erreurs de tarifications par facteur . . . . .	30
5.2.3	Résultats et analyse d'une calibration sur les options ATM . . . . .	35
5.2.4	Étude du biais systématique des erreurs de tarifications . . . . .	37
5.3	Résultats empiriques du DV01 . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>43</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>Graphiques</b>	<b>49</b>
<b>B</b>	<b>Tableaux</b>	<b>58</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Problématique

Au cours des dernières années, et suivant la crise financière de 2008, la confiance dans les modèles d'évaluation a été fortement ébranlée, celle-ci étant pourtant un impératif au bon fonctionnement des marchés financiers. La gestion des risques a alors pris une place encore plus importante et est devenue un incontournable dans l'évaluation de la qualité d'un modèle de valorisation des instruments financiers. À cet égard, il est nécessaire de valider un modèle en examinant sa capacité à déterminer le juste prix aujourd'hui, mais également, son aptitude à gérer le risque des actifs qu'il valorise.

Dans cette optique, nous cherchons à valider la qualité des modèles d'évaluation des produits dérivés de titres à revenu fixe et plus spécifiquement les caplets découlant des volatilités des caps. Pour ce faire, nous évaluerons empiriquement chacun des modèles et procéderons à une analyse comparative de ceux-ci. Les modèles qui feront l'objet de notre recherche sont les modèles SABR et SABR/LMM. Ainsi, nous étudierons les propriétés d'ajustement des modèles en déterminant leurs capacités à reproduire les prix observés sur le marché et en mesurant la qualité de leur paramètre de couverture. Pour y parvenir, nous calibrerons les différents modèles à partir des

données historiques sur les prix des caplets, et par la suite, nous valoriserons les produits dérivés à l'aide des paramètres calibrés pour comparer les prix obtenus à ceux du marché. Finalement, comme paramètre de gestion de risque nous calculerons le delta de chaque caplet pour chacun des modèles et les comparerons entre-eux.

À l'aide des résultats obtenus, nous pourrons alors compléter l'analyse comparative des modèles et valider ou invalider l'hypothèse selon laquelle le modèle SABR/LMM est en mesure de surperformer le modèle SABR en permettant d'obtenir des prix très proches de ceux du marché, tout en fournissant une évolution future raisonnable de la surface du *smile*, ce qui assure une bonne qualité de la couverture. Nous serons également à même de mesurer les qualités des différents modèles sur une longue période et de valider leur performance dans le temps, sachant que la période étudiée contient des tranches de stabilité sur les marchés financiers et des tranches de grandes décroissances des taux d'intérêt.

## 1.2 Motivation

Nous souhaitons mettre en lumière l'importance de la qualité des modèles dans l'évaluation de produits dérivés de titres à revenu fixe avec une courbe de volatilité implicite et de valider ceux-ci. De plus, le modèle SABR/LMM n'a pas fait l'objet d'analyse face à des données historiques sur une longue période, ainsi que sur des données plus volatiles et des taux d'intérêt très faibles, ce que les dernières années avec différents événements financiers nous ont fourni. Nous pourrons valider leur capacité à résister à des mouvements de marché inhabituels et à fournir des prix et des mesures de risques justes et fiables. Nous serons ainsi davantage au fait de sa capacité à être intégré comme modèle d'évaluation de produits dérivés de taux d'intérêt au sein des marchés financiers.

Enfin, l'une de nos grandes motivations est d'être en mesure d'offrir une critique solide, basée sur des données empiriques, en approfondissant nos connaissances des modèles d'évaluation de produits dérivés de titre à revenu fixe.

### 1.3 Contribution

En apportant une évaluation empirique et comparative des différents modèles, nous serons à même de mesurer leurs forces et faiblesses et de faire une critique juste et objective de ces derniers. De plus, notre contribution se fera au niveau de l'importance accordée à la période d'étude, pratiquement 4 ans, et à la capacité des modèles à perdurer dans le temps. Ainsi, nos observations se feront durant des périodes de grandes volatilités sur les marchés, mais également sur des taux d'intérêt d'une faiblesse quasi-inégalée. Nous serons à même de mesurer la qualité des modèles dans leur capacité à modéliser les prix et les paramètres de risques des options et à reproduire le plus fidèlement possible l'évolution de la surface du *smile* de volatilité.

Ce mémoire se divisera de la manière suivante. Dans le chapitre 2, nous ferons une revue de la littérature permettant d'exposer les modèles utilisés ainsi que leurs forces et faiblesses respectives dont la compréhension est nécessaire pour aller plus en profondeur par la suite. Le chapitre 3 portera principalement sur l'approfondissement des connaissances des modèles et leurs systèmes d'équations afin d'en permettre l'implémentation et la calibration. Nous présenterons dans le chapitre 4 les données financières recueillies et les transformations nécessaires à leur utilisation. Le chapitre 5 présentera nos résultats et notre analyse comparative des différents modèles et finalement, nous conclurons dans le chapitre 6.

## 1.4 Aperçu des résultats

Nos résultats démontrent que dans le cadre d'une évaluation empirique des modèles de valorisation des produits dérivés de taux d'intérêt dits vanille, le modèle SABR reste plus performant à tous les égards. De manière globale, il a été en mesure de modéliser des prix minimisant les écarts avec ceux observés sur le marché, mais plus spécifiquement, il a produit beaucoup moins d'erreurs de valorisation dans les périodes de fortes décroissances des taux d'intérêt et lorsque ceux-ci se sont maintenus à un niveau historiquement faible. Le modèle SABR/LMM, au delà de sa complexité à implémenter, a produit des résultats moins intéressants comparativement au SABR en ayant des erreurs de tarifications généralement plus grandes.

De plus, nous avons décomposé nos résultats pour avoir une meilleure idée de la performance de chacun des modèles par rapport à certaines particularités. Cependant, il ne s'est pas dégagé de tendance particulière pour l'ensemble de nos modèles d'étude. Ce constat s'est par la suite confirmé lors d'une étude des biais systématiques des modèles par régression linéaire. Le modèle SABR et le modèle SABR/LMM se sont avérés tous les deux biaisés, mais dans des proportions très différentes selon les variables explicatives. Globalement, seul le niveau général des taux s'est avéré une variable explicative importante pour les deux modèles. Nous avons également observé que le delta, mesuré à l'aide du DV01, était cohérent avec la théorie, c'est-à-dire qu'il évoluait dans la même direction que le sous-jacent.

# Chapitre 2

## Revue de la littérature

Les modèles de valorisation des produits dérivés de taux d'intérêt ont fait l'objet de nombreuses recherches, ce qui a donné naissance à différents modèles. Notre objectif étant de faire une analyse comparative de ceux-ci, nous présenterons dès lors les modèles en mettant de l'avant leurs avantages et inconvénients respectifs. Pour ce faire, nous utiliserons le modèle SABR (*Stochastic Alpha Beta Rho*) de Hagan, Kumar, Lesniewski et Woodward (2002) comme point de départ, puisqu'il est devenu le standard du marché<sup>1</sup> pour évaluer les options sur taux d'intérêt. Nous présenterons par la suite le modèle qui est au centre de cette étude : le modèle SABR/LMM de Rebonato, McKay et White (2009) qui s'inspire, comme son nom l'indique, du modèle SABR et du modèle de marché LIBOR (LIBOR Market Model — LMM).

Avant d'aller plus loin, quelques définitions s'imposent sur les dérivés de taux d'intérêt. Un cap est une chaîne d'options d'achat sur taux d'intérêt dont chaque option est un caplet et inversement, un floor est une chaîne d'options de vente sur taux d'intérêt dont chaque option est un floorlet. Un swaption est une option donnant droit d'acheter (*call swaption*) ou de vendre (*put swaption*) un swap sur taux d'intérêt. De plus, lorsqu'il est question de volatilité, il est courant de référer au *smile* et au

---

1. Rebonato, McKay et White (2009)

*backbone*. Ils sont respectivement la courbe de la volatilité implicite en fonction du taux d'exercice sachant le taux *forward* fixe et la courbe de la volatilité à la monnaie en fonction des variations du taux *forward*. Finalement, on mesurera à l'aide du *skew* l'asymétrie du *smile* de volatilité.

## 2.1 Le modèle SABR

### 2.1.1 Description du modèle SABR

Le modèle SABR a été développé par Hagan, Kumar, Lesniewski et Woodward (2002) dans le but d'obtenir un modèle d'évaluation des produits dérivés de titres à revenu fixe cohérent avec les données de marché et qui réponde au besoin de *trading* et de couverture. Jusqu'alors, le modèle utilisé pour gérer le *smile* de volatilité de ces produits était le modèle de volatilité locale de Dupire (1994), mais les prévisions du modèle sur le comportement du *smile* s'avéraient erronées. Selon ce modèle, la volatilité implicite se déplace dans la direction opposée du prix du sous-jacent, or sur les marchés, le *smile* bouge dans la même direction que les taux *forward*. Ainsi, Hagan *et al.* (2002) constatent qu'il n'est pas possible d'utiliser un modèle markovien fondé sur un seul mouvement brownien pour gérer le risque du *smile*.

Le modèle SABR est donc un modèle markovien, mais fondé sur deux mouvements browniens, l'un pour la dynamique des taux *forward* et le second pour la dynamique de la volatilité. Le choix d'introduire un facteur stochastique dans la volatilité provient du fait que les marchés ont des périodes relativement tranquilles et relativement chaotiques, ce qui, selon les auteurs, suggère que la volatilité n'est pas constante, mais plutôt une fonction aléatoire du temps. Suivant cette spécification, ils ont démontré l'existence d'une solution unique pour la volatilité implicite qui peut directement être introduite dans le modèle de valorisation des produits dérivés de Black (1976).

Il est également important de noter que les paramètres du modèle sont constants dans le temps et spécifiques à un taux *forward* particulier, ce qui fait que le modèle SABR n'est pas en mesure de décrire la dynamique de la courbe de la structure par terme. Cela étant dit, ce n'est pas problématique pour l'évaluation des produits dérivés de taux d'intérêt «vanille».

### 2.1.2 Forces du modèle SABR

Plusieurs modèles à volatilité stochastique ont précédé le modèle SABR tels que ceux de Hull et White (1987), de Heston (1993), de Lewis (2000) ou de Fouque et Papanicolaou (2000), mais la simplicité de celui-ci a certainement facilité son émergence. Hagan *et al.* (2002) présentent un modèle homogène dans le temps, autant pour la dynamique des taux forward que pour la dynamique de la volatilité, qui peut être utilisé pour ajuster la courbe de volatilité observée sur le marché pour n'importe quelle date d'exercice unique et qui prédit correctement la dynamique de la courbe de la volatilité implicite. Ainsi, le modèle SABR permet d'obtenir un juste prix pour des produits dérivés de taux d'intérêt à date d'exercice unique tel que les caplets, floorlet et les swaptions, mais contrairement à tous les modèles l'ayant précédé, il peut être utile pour gérer le risque du *smile* de volatilité.

L'un des grands avantages du modèle SABR, pour ses utilisateurs, est sa facilité d'implantation et cela explique son essor sur les marchés financiers. D'ailleurs, Rebonato, McKay et White (2009) considèrent qu'il est devenu le modèle de référence sur les places financières pour communiquer le prix des options «vanille». Bien que la formule explicite de la volatilité implicite soit lourde et complexe, elle n'est pas particulièrement difficile à calibrer et une fois programmée, il suffit d'injecter directement la valeur obtenue pour la volatilité dans la formule de Black (1976). Il est important de noter que cette formule est une approximation, mais son niveau de précision est suffisant pour des options à la monnaie ou autour de la monnaie.

Un autre avantage pour l'utilisateur du modèle SABR est la possibilité de décomposer la formule de la volatilité implicite pour les options à la monnaie de manière à obtenir de l'information sur le *smile* de volatilité, et plus particulièrement sur le *skew* et le *backbone*. De plus, les paramètres grecs<sup>2</sup> sont faciles à obtenir ce qui simplifie la gestion des risques et améliore les stratégies de couverture.

### 2.1.3 Faiblesses du modèle SABR

La plus grande faiblesse du modèle SABR est probablement le fait qu'il n'est pas en mesure de modéliser la courbe de la structure par terme des taux, et de ce fait, chaque taux *forward* vit en vase clos sous sa propre mesure martingale. Il n'est donc pas possible de faire la valorisation de produits dérivés reposant simultanément sur une série de taux *forward* puisqu'on ne peut modéliser l'interaction existante entre ceux-ci. Cette faiblesse est d'ailleurs l'une des principales raisons qui a poussé des auteurs tels que Henry-Labordère (2007), Hagan et Lesniewski (2008), Mercurio et Morini (2009) et Rebonato (2007) à développer de nouveaux modèles fondés en partie sur les hypothèses du modèle SABR.

Un autre problème du modèle SABR vient du fait que la formule analytique de la volatilité implicite n'est valide que pour des options à la monnaie ou autour. Ainsi, il n'y a pas de solution en forme fermée pour les produits dérivés très hors de la monnaie. De plus, la formule analytique pour trouver la volatilité implicite n'est valide que pour les caplets et les floorlets, Nawalkha (2009). En effet, le processus du taux *forward* et

---

2.

- delta : mesure du risque associé à des variations de l'actif sous-jacent ;
- vega : mesure du risque d'un changement général dans le paramètre de volatilité ;
- vanna : mesure du risque que le skew augmente ; et
- volga : mesure du risque que le smile devienne plus prononcé.

de la volatilité est défini sous la mesure du taux *forward* spécifique au dérivé, alors que la tarification du swaption requiert que tous les processus des taux *forward* et ceux des volatilités soient définis sous une mesure commune.

## 2.2 Le modèle SABR/LMM

### 2.2.1 Description du modèle SABR/LMM

Le développement du modèle SABR/LMM provient de la grande popularité du modèle SABR, mais également de son incapacité à générer une structure par terme, qualité offerte par le modèle LMM de Brace, Gatarek et Musiela (1997). L'idée de réconcilier la dynamique du modèle SABR avec le cadre théorique du modèle LMM est d'abord celle de Henry-Labordère (2007), puis nous avons assisté à l'émergence de différents modèles SABR/LMM tels que celui de Rebonato (2007), Morini et Mercurio (2009) et Hagan et Lesniewski (2008). Dans le cadre de notre évaluation comparative, nous nous pencherons principalement sur le modèle le plus complet et qui a fait l'objet d'un livre, celui de Rebonato, McKay et White (2009). Ce modèle a une dynamique stochastique pour le taux *forward* et pour la volatilité et présente une structure de corrélation entre les taux, entre les volatilités et entre les taux et les volatilités.

Tout d'abord, le modèle de Rebonato, McKay et White (2009) est un enrichissement du modèle LMM dont la volatilité stochastique est modélisée selon les préceptes du modèle SABR dans l'objectif d'atteindre des résultats proches de celui-ci, tout en ayant la capacité de générer une structure par terme. L'idée derrière ce modèle est d'utiliser les paramètres du modèle SABR pour trouver ceux du modèle SABR/LMM, et par la suite, de procéder par simulation Monte Carlo pour obtenir des volatilités instantanées. De plus, le modèle décompose la volatilité en deux fonctions : l'une déterministe et l'autre stochastique, ce qui a théoriquement pour effet de réduire la composante stochastique de la volatilité et d'offrir plus de stabilité au modèle.

### 2.2.2 Forces du modèle SABR/LMM

La principale force du modèle SABR/LMM qui est, par ailleurs, la raison de leurs créations est d'être en mesure d'avoir un modèle qui lie la tarification des caps et des floors avec celles des swaptions en étant capable de modéliser l'évolution conjointe des taux. Non seulement, le modèle SABR/LMM est en mesure de le faire, mais il est aussi en mesure de capturer le *smile* non monotone observé sur le marché des caps et des swaptions. Par ailleurs, Rebonato, McKay et White (2009) ont démontré la capacité de leur modèle à mettre en place des stratégies de couverture de premier et de second ordre afin de valider les aptitudes du modèle à prédire le comportement du *smile* de volatilité et celle du *backbone*.

De plus, les modèles SABR/LMM sont généralement homogènes dans le temps, mais le modèle de Rebonato, McKay et White (2009) n'est pas stationnaire en covariance en comparaison avec le modèle LMM et les autres modèles SABR/LMM. En effet, la structure de covariance étant stochastique, la condition de stationnarité s'applique difficilement et il est nécessaire de l'affaiblir. Ainsi, ils proposent de définir l'homogénéité dans le temps tel un ensemble de processus stochastiques dont les moments de deuxième ordre peuvent être stochastiques, mais avec des distributions qui sont stationnaires en covariance.

Finalement, il est possible de modifier la structure de volatilité du modèle de manière à s'adapter aux périodes chaotiques du marché. En fait, les modèles SABR et SABR/LMM font, par construction, prévaloir un seul régime de volatilité stochastique, or, plusieurs travaux dont Rebonato et White (2009) suggèrent qu'il existe au moins deux états différents : normal et chaotique. L'utilisation d'un modèle SABR/LMM avec changement de régime peut être très utile pour la valorisation simultanée d'op-

tions avec des échéances différentes, puisque les options à courte échéance en période chaotique réagissent différemment des options avec une échéance plus lointaine. Par contre, un modèle à changement de régime n'est pas, par définition, homogène dans le temps puisqu'on ne peut plus tenir compte uniquement du temps résiduel pour déterminer les volatilités, les corrélations et les volatilités de volatilités.

### 2.2.3 Faiblesses du modèle SABR/LMM

Les principales critiques faites au modèle SABR/LMM de Rebonato, McKay et White (2009) proviennent de Nawalkha (2009) qui tente de mettre en lumière deux problématiques importantes et inhérentes aux modèles. La première est l'hypothèse d'une dérive nulle pour le processus de la volatilité lorsqu'il y a un seul taux *forward* entrant dans la valorisation d'un produit dérivé et l'utilisation de cette spécification dans l'obtention de dérives non nulles pour les processus des volatilités des dérivés plus complexes. Cela permet au modèle SABR/LMM d'être général et cohérent avec le modèle SABR, mais également de relier les caps et les swaptions, Rebonato et White (2009). Une dérive nulle pour le processus de la volatilité est difficilement justifiable économiquement, et Nawalkha (2009) soutient que le problème n'est pas que théorique, mais aussi pratique puisque la volatilité est l'intrant le plus important dans la tarification des options et qu'une hypothèse erronée sur celle-ci peut entraîner de sérieuses erreurs dans les prix. Par conséquent, il est probable que les options avec une longue échéance aient des prix surestimés, et inversement, les prix de celles avec une courte échéance, sous-estimés.

La seconde critique est l'impossibilité pratique de faire une analyse risque/rendement qui requiert de l'information sur la mesure physique, mais en raison de la nature de la calibration nécessaire avec le modèle SABR/LMM, il n'est pas possible de l'obtenir. Nawalkha (2009) rappelle l'importance de ce critère dans l'évaluation de la qualité

d'un modèle puisque pour un investisseur/spéculateur l'équilibre entre le risque et le rendement est une préoccupation importante. Or, le modèle SABR/LMM est calibré de telle manière qu'il n'est pas possible de déterminer l'évolution physique des variables d'état, et ce, parce que le modèle ne les distingue pas des paramètres. En fait, le modèle n'est pas homogène dans le temps au sens strict du terme puisque les intrants du modèle ont la possibilité de changer d'une période à l'autre. Nawalkha (2009) précise que l'objectif d'estimer des paramètres neutres au risque qui assurent au modèle de s'adapter parfaitement à la coupe transversale des prix du marché des dérivés rend inapplicable des techniques économétriques de séries temporelles qui permettraient de déduire les prix de marché du risque de taux d'intérêt et du risque de volatilité. Ainsi, ne pouvant connaître la nature du processus physique, il n'est pas possible de faire une analyse risque/rendement.

# Chapitre 3

## Modèles

Dans ce chapitre, nous présentons la modélisation mathématique des différents modèles dont l'étude comparative nous intéresse. Cela permettra de bien comprendre les dynamiques des modèles SABR et SABR/LMM et leurs caractéristiques propres dans le cadre de la valorisation des produits dérivés de taux d'intérêt, et plus particulièrement des caplets.

### 3.1 Le modèle SABR

Le modèle SABR développé par Hagan, Kumar, Lesniewski et Woodward (2002), rappelons le, utilise la formule de Black (1976) qui assure une relation objective entre le prix de l'option européenne et le paramètre de volatilité,  $\sigma_B$ , tel que les prix d'un caplet et d'un floorlet sont :

$$Cpl(F_i, K, t, \tau_i, \sigma_i) = \tau_i P(t, T_{i+1}) [F_i(t) \mathcal{N}(d_1) - K \mathcal{N}(d_2)], \quad (3.1)$$

$$Flt(F_i, K, t, \tau_i, \sigma_i) = \tau_i P(t, T_{i+1}) [K \mathcal{N}(-d_2) - F_i(t) \mathcal{N}(-d_1)], \quad (3.2)$$

avec

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{F_i(t)}{K} \pm \frac{1}{2} \sigma_B^2 T_i}{\sigma_B \sqrt{T_i}}, \quad (3.3)$$

où  $\tau_i = T_{i+1} - T_i$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, N$ .

$P(t, T_{i+1})$  est le prix d'une obligation zéro-coupon venant à échéance à la date  $T_{i+1}$ ,  $F_i(t) = F(t, T_i, T_{i+1})$  est le taux *forward*,  $K$  est le taux d'exercice de l'option et  $\mathcal{N}(\cdot)$  représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Les dynamiques du taux *forward*,  $F_i(t)$ , et de la volatilité,  $V_i(t)$  pour le modèle SABR sous la mesure *forward* neutre sont les suivantes :

$$dF_i(t) = V_i(t)F_i(t)^{\beta_i}dZ_i(t), \quad (3.4)$$

$$dV_i(t) = \nu_i V_i(t)dW_i(t), \quad (3.5)$$

$$V_i(0) = \alpha_i, \quad (3.6)$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_i}[dZ_i(t)dW_i(t)] = \rho_i dt, \quad (3.7)$$

où  $Z_i(t)$  et  $W_i(t)$  sont des mouvements browniens standards et où  $\beta_i \in (0, 1]$ ,  $\nu_i$  et  $\alpha_i$  sont des constantes positives et  $\rho_i \in [-1, 1]$ . Le modèle est ainsi entièrement spécifié dans la mesure terminale  $\mathbb{Q}_i$  sous laquelle le taux *forward* et la volatilité sont martingales. Cette spécification est valide pour tous les taux *forward*, mais uniquement lorsqu'ils sont isolés les uns des autres. Ainsi, les paramètres  $\beta_i$ ,  $\rho_i$  et  $\nu_i$  sont propres à chaque taux *forward*  $i$  et ne dépendent pas du temps.

À partir de ce cadre théorique, Hagan *et al.* (2002) ont utilisé des techniques de perturbations singulières pour obtenir les prix des options européennes, et de ces prix, ils ont démontré que la volatilité implicite correspond à la formule analytique approximative suivante :

$$\sigma_B(K, F_i) = \frac{\alpha_i}{(F_i K)^{\frac{1-\beta_i}{2}} \left[ 1 + \frac{(1-\beta_i)^2}{24} \ln^2 \frac{F_i}{K} + \frac{(1-\beta_i)^4}{1920} \ln^4 \frac{F_i}{K} + \dots \right]} \cdot \left( \frac{z_i}{x(z_i)} \right) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{(1-\beta_i)^2}{24} \frac{\alpha_i^2}{(F_i K)^{1-\beta_i}} + \frac{1}{4} \frac{\rho_i \beta_i \nu_i \alpha_i}{(F_i K)^{\frac{1-\beta_i}{2}}} + \frac{2-3\rho_i^2}{24} \nu_i^2 \right) T + \dots \right], \quad (3.8)$$

où

$$z_i = \frac{\nu_i}{\alpha_i} (F_i K)^{\frac{1-\beta_i}{2}} \ln \frac{F_i}{K}, \quad (3.9)$$

et

$$x(z_i) = \ln \left[ \frac{\sqrt{1 - 2\rho_i z_i + z_i^2} + z_i - \rho_i}{1 - \rho_i} \right]. \quad (3.10)$$

Notons que les points de suspension de l'équation (3.8) indiquent qu'il est possible d'ajouter des termes de moments supérieurs, mais cela n'est généralement pas utile, spécialement dans le cas d'options avec de courtes échéances.

Rappelons que le grand avantage du modèle SABR est qu'une fois la volatilité implicite obtenue, il suffit de l'introduire dans la formule de Black pour trouver le prix d'un caplet ou d'un floorlet. De plus, il est important de noter que les paramètres  $\beta_i$  et  $\rho_i$  ne peuvent être optimisés en même temps, mais Rebonato, McKay et White (2009) soutiennent que les participants au marché ont choisi de fixer le  $\beta_i$  à 0,5 et démontrent empiriquement que les volatilités modélisées par le SABR sont plus proches de celles observées sur le marché lorsque le  $\beta_i$  est à 0,5 que lorsqu'il est égale à 0. Ainsi, il est possible de calibrer le modèle uniquement à partir des trois autres paramètres.

## 3.2 Le modèle SABR/LMM de Rebonato, McKay et White (2009)

Plusieurs auteurs ont travaillé afin de lier le cadre théorique du modèle SABR et celui du modèle LMM pour obtenir un modèle à volatilité stochastique qui tient compte de l'interdépendance des dynamiques des taux d'intérêt. Cet objectif n'est pas que conceptuel puisque certains produits dérivés dépendent de plusieurs taux d'intérêt ce qui nécessite une modélisation conjointe de ceux-ci. Ainsi, les dynamiques du taux

*forward* et de la volatilité sous la spécification du modèle SABR/LMM de Rebonato, McKay et White (2009) pour la tarification des caplets peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$dF_i(t) = F_i(t)^{\beta_i} s_i(t) dZ_i(t), \quad (3.11)$$

$$ds_i(t) = g_i(t) dk_i(t), \quad (3.12)$$

$$\frac{dk_i(t)}{k_i(t)} = \eta_i(k) dt + h_i(t) dW_i(t), \quad (3.13)$$

avec

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[dZ_i(t)dZ_j(t)] = \rho_{ij} dt, \quad (3.14)$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[dW_i(t)dW_j(t)] = r_{ij} dt, \quad (3.15)$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[dZ_i(t)dW_j(t)] = R_{ij} dt, \quad (3.16)$$

et

$$g_i(t) = (a + b\tau_i)e^{-c\tau_i} + d, \quad (3.17)$$

$$k_i(t) = k_i(0)e^{\int_0^t \left(-\frac{1}{2}h^2(T-s)ds + h(T-s)dW_s\right)}, \quad (3.18)$$

$$h_i(t) = (\alpha + \beta\tau_i)e^{-\gamma\tau_i} + \delta, \quad (3.19)$$

$$\text{où } \tau_i = T_i - t. \quad (3.20)$$

Ce modèle ne possédant pas de forme fermée permettant d'obtenir directement des prix de caplets, il est nécessaire de procéder à une simulation Monte Carlo.

Notons également que l'absence d'une solution analytique rend la calibration du modèle directement à partir des prix de marché particulièrement complexe. Sachant cela, et sachant que les prix de marché sont obtenus à l'aide du modèle SABR, Rebonato, McKay et White (2009) proposent d'utiliser les paramètres de ce dernier comme point de départ et de les mettre en relation avec les paramètres de leur modèle.

Pour commencer, Rebonato, McKay et White (2009) cherchent à identifier des paramètres de la fonction de volatilité déterministe du modèle,  $g_i(t)$ . Pour ce faire, ils

utilisent la racine carrée de la valeur moyenne quadratique de la fonction, telle que :

$$\hat{g}(T_i) = \sqrt{\frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} g(u, T_i)^2 du}, \quad (3.21)$$

puisque'ils démontrent que sa valeur devrait être égale à la volatilité de Black,  $\sigma_i(0)$ , calculée par le modèle SABR au temps 0. Ainsi, il est possible d'évaluer les paramètres en minimisant la somme des erreurs au carré, tel que :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \sigma_i(0) - \hat{g}(T_i) \right]^2, \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.22)$$

$$\text{où} \quad \hat{g}(T_i) = \sqrt{\frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} [(a + b\tau_i)e^{-c\tau_i} + d]^2 d\tau_i}. \quad (3.23)$$

Les valeurs de  $\hat{g}(T_i)$  obtenues ne correspondent généralement pas parfaitement aux volatilités  $\sigma_i(0)$ . Rebonato, McKay et White (2009) proposent de trouver une quantité  $k_i(0)$  telle que :

$$k_i(0) = \frac{\sigma_i(0)}{\hat{g}(T_i)}. \quad (3.24)$$

Ils s'assurent donc d'une concordance entre les volatilités de départ du modèle SABR et celles de leur modèle.

Ensuite, pour déterminer les valeurs des paramètres de la fonction  $h_i(t)$ , Rebonato, McKay et White (2009) démontrent que la condition suivante doit être respectée afin que les prix des caplets du modèle SABR et du modèle SABR/LMM concordent :

$$\begin{aligned} & \text{SABR} \quad \& \quad \text{SABR/LMM} \\ & \int_0^{T_i} \mathbb{E}[\sigma_i(t)^2] dt = \int_0^{T_i} g_i(t)^2 \mathbb{E}[k_i(t)^2] dt \Rightarrow \\ & \left( \frac{\sigma_i(0)}{\nu_i} \right)^2 \left( e^{\nu_i^2 T} - 1 \right) = k_i(0)^2 \int_0^{T_i} g_i(t)^2 e^{t\hat{h}(t)^2} dt, \quad (3.25) \\ & \text{où} \quad \hat{h}(t) = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t h(s)^2 ds}. \end{aligned}$$

À l'aide d'une expansion de Taylor de chaque côté de l'équation (3.25), Rebonato, McKay et White (2009) trouvent que l'égalité entre les premiers termes respectifs de l'expansion est :

$$\sigma_i(0)^2 T = k_i(0)^2 \int_0^{T_i} g_i(t)^2 dt, \quad (3.26)$$

ce qui correspond exactement à la relation mise de l'avant précédemment par l'équation (3.24). En posant la même égalité entre les seconds termes de l'expansion, ils trouvent la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_i(0)\nu_i^{SABR})^2 T^2}{2} &= k_i(0)^2 \int_0^{T_i} g_i(t)^2 \hat{h}(t)^2 t dt, \Rightarrow \\ \nu_i^{SABR} &= \frac{k_i(0)}{\sigma_i(0)T} \left( 2 \int_0^{T_i} g_i(t)^2 \hat{h}(t)^2 t dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

L'équation (3.27) permet donc d'établir la relation entre la volatilité de la volatilité du modèle SABR et celle du modèle SABR/LMM. Ainsi, il est possible de trouver la valeur des paramètres de la fonction  $\hat{h}(T_i)$  en minimisant la somme des erreurs au carré, tel que :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \nu_i^{SABR} - \frac{k_i(0)}{\sigma_i(0)T} \left( 2 \int_0^{T_i} g_i(t)^2 \hat{h}(t)^2 t dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.28)$$

Finalement, Rebonato, McKay et White, proposent d'utiliser directement les paramètres du modèle SABR pour les coefficients  $\rho$  et  $\beta$ , ainsi :

$$\rho_{SABR} = \rho_{SABR/LMM}, \quad (3.29)$$

$$\beta_{SABR} = \beta_{SABR/LMM}. \quad (3.30)$$

# Chapitre 4

## Données

### 4.1 Données brutes

Pour nous permettre de calibrer nos modèles d'évaluation de produits dérivés de titres à revenu fixe, il est nécessaire de trouver les prix de ceux-ci. Pour ce faire, nous utiliserons les cotes journalières sur le marché américain fournies par Bloomberg<sup>1</sup>. Cependant, les cotes offertes sont celles de la volatilité pour les caps pour un ensemble d'échéance et de taux d'exercice donnés. Ainsi, pour trouver les prix historiques des caplets, il sera nécessaire d'extraire les volatilités des caplets de celles des caps, pour ensuite les introduire dans la formule de Black. Pour y parvenir, nous aurons également besoin de la courbe des taux *forward* journalière que nous construirons à partir des taux LIBOR et swap disponibles sur Bloomberg.

#### Taux LIBOR et swaps

Pour construire la structure par terme des taux, nous utilisons les taux LIBOR pour la partie court terme de la courbe – dont les échéances vont de un jour à un an – et les taux swaps pour la partie plus long terme de la courbe – dont les échéances sont

---

1. Bloomberg est un système informatique qui contient, en outre, des bases de données historiques sur différents produits financiers dont les taux d'intérêt et les volatilités des caps et des swaptions.

de un an et plus. Nous utilisons, dans les deux cas, les prix milieux (*mid*) de fin de journée, c'est-à-dire le prix médian entre le prix offert (*bid*) et le prix demandé (*ask*). Afin d'inclure la crise financière de 2008, nous avons décidé de faire notre évaluation comparative du 1<sup>er</sup> janvier 2007 au 27 octobre 2010. Ainsi, nous utiliserons toutes les données disponibles sur les taux LIBOR et swaps entre ces dates.

### Volatilités des caps

Les volatilités des caplets n'étant pas directement disponibles, nous utilisons les volatilités des caps pour ensuite en extraire celles des caplets. Nous utiliserons, à l'instar des taux LIBOR et swaps, les volatilités milieux de fin de journée sur la même période. Notons que les volatilités des caps disponibles sur Bloomberg sont pour les taux d'exercices suivants : 1, 1.5, 2, 3, 3.5, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (en pourcentage) et ATM. Cependant, les taux d'exercices 1.5 et 3.5 ont été ajoutés tardivement et par conséquent, les volatilités ne sont pas disponibles sur toute la période de l'étude. De plus, les données offertes sur le marché indiquent toujours la volatilité d'un nouveau cap, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de faire le suivi d'un cap dans le temps.

## 4.2 Construction de la structure par terme

Pour construire la courbe de la structure par terme, nous utilisons le modèle de Svensson (1994) qui propose d'exprimer le taux *spot* comme une fonction de quatre facteurs admettant deux bosses. Ainsi, à l'aide des taux LIBOR et swap, nous calibrons de manière journalière les paramètres  $\beta$  de la fonction suivante :

$$y(t, T) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} - e^{-\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{4t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau} \right), \quad (4.1)$$

où

$$\lambda_{1t} = 0,609,$$

$$\lambda_{2t} = 0.3,$$

$$\tau = T - t.$$

Les valeurs de  $\lambda_{1t}$  et  $\lambda_{2t}$  que nous utilisons ont été proposées par Diebold et Li (2006) pour paramétriser la fonction afin de maximiser la convexité à trois ans et d'obtenir une seconde bosse qui correspond bien à la réalité. Une fois calibré, le modèle de Svensson (1994) nous permet de trouver les taux *spot* journaliers à tous les trois mois pour une période de dix ans.

Pour faire la valorisation des caplets, nous avons principalement besoins des prix des obligations zéro-coupons,  $P(t, T)$  et des taux *forward*,  $F(t, T_i, T_{i+1})$ , dont la relation avec les taux *spot* est la suivante :

$$P(t, T) = e^{-y(t, T)\tau}, \quad \text{où } \tau = T - t \quad (4.2)$$

$$F(t, T_i, T_{i+1}) = \frac{1}{\tau_i} \left( \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} - 1 \right), \quad \text{où } \tau_i = T_{i+1} - T_i. \quad (4.3)$$

Ainsi, nous sommes en mesure de trouver tous les éléments relatifs aux taux qui sont nécessaires à la valorisation des produits dérivés de taux d'intérêt.

### 4.3 Extraction du prix des caplets

Pour trouver les prix des caplets, il faut d'abord extraire leur volatilité de celles des caps et pour ce faire, nous utilisons une procédure en quatre étapes développée par Létourneau (2012). Premièrement, nous voulons lisser la surface de volatilité des caps en tenant compte des volatilités ATM. Pour y parvenir, Létourneau (2012) propose de faire une régression polynomiale localement pondérée avec un polynôme d'ordre deux et avec des pondérations basées sur la distance entre le taux d'exercice et le

taux *forward* ATM.

Deuxièmement, nous procédons à une interpolation des volatilités des caps manquants pour différentes maturités. Ainsi, nous cherchons à obtenir des volatilités pour tous les caps avec un intervalle de trois mois sur dix ans. Cependant, puisque la première maturité est à un an, nous devons faire une extrapolation des volatilités pour les maturités inférieures à cela. Suivant les interpolations dans la dimension des maturités, nous procédons à la même méthode pour la dimension du taux d'exercice, afin d'obtenir un plus grand nombre de strike. Cependant, si le prix d'exercice du cap ATM est inférieur à 1%, nous ne faisons pas d'extrapolation au delà de celui-ci.

Troisièmement, nous procédons à la tarification de tous les caps à l'aide de la formule de Black (1976), ce qui nous permet d'obtenir directement les prix des caps pour différentes échéances et d'en déduire les *forward* caps pour chaque année, tel que :

$$ForwardCap(F_i, K, S, T) = Cap(F_i, K, t, T) - Cap(F_i, K, t, S) \quad (4.4)$$

et sachant que

$$ForwardCap(F_i, K, S, T) = \sum_{i=S}^T Caplet(F_i, K, i) \quad (4.5)$$

il nous est possible d'utiliser un algorithme de résolution standard, tel que proposé par Létourneau (2012), qui permet de trouver une volatilité propre à chaque caplet.

# Chapitre 5

## Résultats et Analyses

Dans le cadre de notre analyse empirique et comparative du modèle SABR de Hagan et al. (2002) et du modèle SABR/LMM de Rebonato, McKay et White (2009), nous avons repris la méthodologie de Gupta et Subrahmanyam (2005) et l'avons adapté aux modèles testés. L'étude de ces derniers portait sur la performance de tarification et de couverture des modèles de tarification des options sur taux d'intérêt, et plus particulièrement sur les modèles unifactoriels et multifactoriels modélisant la structure par terme des taux d'intérêt.

À l'instar de ceux-ci, nous avons divisé notre étude en trois thèmes, soit une analyse sommaire de la stabilité des paramètres, une évaluation comparative détaillée de la performance des modèles à valoriser les caplets, que nous avons accompagnée d'une analyse des composantes influençant la dite performance, et finalement, nous avons évalué la qualité du paramètre grec delta de chaque modèle. Il est toutefois à noter que le dernier thème s'éloigne davantage de la méthodologie de Gupta et Subrahmanyam (2005), puisque contrairement à eux, nous avons choisi de limiter notre étude à l'évaluation de la qualité du paramètre grec delta sans le soumettre directement à une stratégie de couverture.

## 5.1 Stabilité des paramètres dans le temps

La stabilité des paramètres d'un modèle de produits dérivés de taux d'intérêt dans le temps est généralement un indicateur de la capacité de celui-ci à produire un *smile* et un *backbone* dont l'évolution temporelle est cohérente avec les paramètres de marché. Par cohérente nous entendons que le *smile* de volatilité et le *backbone* seront fonction des intrants de marché et non directement des paramètres des modèles. En vérifiant la stabilité de la valeur des paramètres des modèles dans le temps, nous sommes à même de quantifier les variations et de déterminer l'existence d'instabilité d'un modèle ou potentiellement des problèmes dans la calibration de nos paramètres. Pour examiner la stabilité des paramètres des modèles calibrés, nous présentons un sommaire statistique de chaque paramètre calibré pour chacun des modèles dans le tableau 1.

**Tableau 1: Sommaire statistique des paramètres calibrés des modèles**

Modèle	Paramètre	Moyenne	Minimum	Maximum	Mediane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR	$\alpha$	0.0637	0.0000	0.1418	0.0684	0.0243	0.3816
	$\nu$	0.3849	0.0000	1.9008	0.3385	0.1834	0.4766
	$\rho$	-0.0488	-1.0000	1.0000	-0.2239	0.5840	-11.9733
SABR/LMM	$g_i$	-0.0207	-0.0677	0.0413	-0.0227	0.0190	-0.9170
	(g) a	-0.1477	-0.3449	-0.0582	-0.1290	0.0552	-0.3739
	(g) b	0.1536	0.0356	0.6829	0.1285	0.0892	0.5809
	(g) c	0.9554	0.3066	2.0473	0.9554	0.3590	0.3758
	(g) d	0.0639	0.0258	0.1006	0.0646	0.0117	0.1826
	$h_i$	0.5488	-0.0782	1.6693	0.5123	0.3924	0.7150
	(h) $\alpha$	0.5171	-1.0000	2.0000	0.2976	0.7338	1.4190
	(h) $\beta$	0.7051	0.0000	1.0000	1.0000	0.3995	0.5666
	(h) $\gamma$	1.4031	0.0000	10.0000	0.7309	1.2722	0.9067
	(h) $\delta$	0.1617	0.0000	0.7598	0.2134	0.1550	0.9582
	$\kappa$	0.9975	0.0000	1.3308	1.0019	0.0528	0.0529
	$\rho$	-0.0488	-1.0000	1.0000	-0.2239	0.5840	-11.9733

Il est important de noter que les paramètres estimés ne sont pas directement

comparables entre eux. Afin de contrer cette limite, nous utilisons le coefficient de variation qui est un rapport de l'écart-type sur la moyenne pour valider la stabilité d'un paramètre pour la période de notre étude. Ce paramètre statistique n'est cependant pas une mesure parfaite, puisque par stabilité nous ne voulons pas dire constance. Un paramètre peut aisément évoluer au travers du temps, ce qui lui donnerait un coefficient de variation supérieur à un paramètre quasi-constant. Or, cela n'en ferait pas nécessairement un paramètre moins stable. De plus, la période d'étude est suffisamment longue pour nous permettre de penser qu'une évolution temporelle dans la valeur de nos paramètres n'est pas à exclure.

C'est pourquoi nous avons complété notre analyse statistique en construisant un écart-type basé sur une moyenne mobile trente jours. Pour ce faire, nous avons calculé l'écart au carré entre le paramètre pour une journée donnée  $t$  et la moyenne de celui-ci au cours des 5, 20 et 60 jours ouvrables précédents celui-ci. Nous avons ensuite divisé la somme des écarts obtenus et avons finalement appliqué la racine carré au résultat tel que :

$$\sigma_{mod} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( x(F_i, t) - \left( \frac{\sum_{t=1}^{t+j} x(F_i, t)}{j} \right) \right)^2} \quad (5.1)$$

où  $x$  est la valeur du paramètre pour un taux *forward* donné au temps  $t$  et  $j$  le nombre de jours de notre moyenne mobile. Ce faisant, nous avons obtenu un écart-type modifié, présenté dans le tableau 2, basé sur une moyenne mobile correspondant respectivement à environ une semaine, un mois et un trimestre.

Tableau 2: Écart-type avec moyenne mobile

Modèle	Paramètre	Moyenne mobile		
		5 jours	20 jours	60 jours
SABR	$\alpha$	0.0194	0.0325	0.0472
	$\nu$	0.3144	0.4230	0.5534
	$\rho$	0.7277	0.9207	1.2162
SABR/LMM	$g_i$	0.0140	0.0143	0.0152
	(g) a	0.0151	0.0223	0.0310
	(g) b	0.0260	0.0424	0.0605
	(g) c	0.0799	0.1274	0.1786
	(g) d	0.0023	0.0039	0.0055
	$h_i$	0.3355	0.3388	0.3530
	(h) $\alpha$	0.2898	0.4372	0.5884
	(h) $\beta$	0.2463	0.3015	0.3691
	(h) $\gamma$	0.6902	0.9313	1.0965
	(h) $\delta$	0.0985	0.1179	0.1319
	$\kappa$	0.1706	0.2074	0.2364
	$\rho$	0.7277	0.9207	1.2162

En regardant de près les représentations graphiques des paramètres calibrés (figures A1 à A14, présentées à l'annexe A) au cours des différentes journées de l'échantillon et en les mettant en relation avec les coefficients de variations et les écarts-types modifiés en fonction d'une moyenne mobile, nous sommes à même de constater la stabilité des paramètres dans le temps n'est pas uniforme d'un paramètre à l'autre et d'un modèle à l'autre. Considérant que Gupta et Subrahmanyam (2005) dans leur étude des modèles avaient fixé un seuil d'acceptabilité du coefficient de variation à 0,5 pour considérer les paramètres comme étant relativement stable dans le temps, nous pouvons observer que seulement 6 paramètres sur les 14 calibrés présentent une certaine stabilité temporelle. Cependant, en observant les résultats de nos écarts-types en fonction de moyenne mobile, on remarque que plus le nombre de jours est grand dans le calcul de la moyenne mobile, plus l'écart-type du paramètre est élevé. De plus, ce constat est valide pour l'ensemble des paramètres calibrés. C'est donc dire que les paramètres des modèles SABR et SABR/LMM ont une variance plus faible et donc davantage stable sur de courte période que sur des périodes plus grandes.

## 5.2 Évaluation empirique des erreurs de tarifications

L'évaluation empirique des prix est le critère prédominant de notre étude et plus spécifiquement, la minimisation de l'erreur de tarification avec les données de marché. En effet, l'appréciation d'un modèle d'évaluation financière se base essentiellement sur sa capacité à capturer l'information courante sur les marchés et de la transposer de tel sorte que le prix de l'option soit le plus près possible de la réalité.

Nous présenterons d'abord nos résultats dans le cadre d'une analyse générale des erreurs de tarifications de caplets pour les modèles SABR et SABR/LMM en comparant les prix des caplets obtenus à ceux disponibles sur le marché. Suivant cela, nous présenterons une analyse des mêmes erreurs de tarifications, mais suivant une segmentation de ces derniers en fonction de trois critères pertinents et pouvant potentiellement avoir un impact sur les erreurs de tarifications : la *moneyness* des options, le niveau des taux d'intérêt sur les marchés et la maturité des options. Nous poursuivrons notre analyse en présentant nos résultats des erreurs de tarifications découlant d'une calibration des modèles étudiés basée uniquement sur les prix des options à la monnaie. Finalement, nous prendrons le temps d'étudier dans cette section les biais systématiques potentielles des modèles à l'aide d'une régression économétrique sur la coupe transversale de notre échantillon.

### 5.2.1 Résultats et analyses

Tel que discuté plus haut, la mesure de la performance de la tarification est au cœur de notre objectif de faire une évaluation comparative des différents modèles de valorisation des produits dérivés de titres à revenu fixe. Pour y parvenir, nous avons vérifié la capacité de chaque modèle à prédire le prix d'un caplet conditionnellement à l'information courante. Nous avons donc calibré les paramètres de nos modèles à

partir des prix de marché des caplets. Par la suite, nous utilisons les paramètres calibrés pour recalculer les prix des caplets. Nous sommes donc en mesure de mesurer la qualité de la calibration de chacun des modèles de manière directe en les comparant au prix de marché disponible. L'examen des erreurs de tarification produites se fera principalement sur la base de l'erreur absolue et relative pour chacun des modèles de notre étude.

Avant d'aller plus loin, nous présentons ici la méthodologie employée dans le calcul des erreurs de tarifications de nos modèles. Celle-ci est applicable à la fois pour les prix obtenus suivant la calibration des modèles sur l'ensemble des prix de marché disponibles et pour ceux suivant la calibration sur les prix des options à la monnaie uniquement. De plus, il est à noter que nous utilisons les valeurs des paramètres obtenus pour la date  $t$  et la structure par terme à la date  $t$ , afin de trouver le prix d'un caplet à la date  $t$ . De cette façon, nous sommes en mesure de trouver pour chaque jour de l'échantillon un prix de caplet calculé sur une base comparable au prix de caplet observé sur les marchés. Ainsi, une fois les prix des caplets obtenus, l'erreur de tarification absolue et relative pour chaque caplet se calculent telles que :

$$\varepsilon_{abs}(F_i, K, t) = Cpl_{cal}(F_i, K, t, \tau_i, \sigma_i) - Cpl_{obs}(F_i, K, t, \tau_i, \sigma_i), \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_{rel}(F_i, K, t) = \frac{\varepsilon_{abs}(F_i, K, t)}{Cpl_{obs}(F_i, K, t, \tau_i, \sigma_i)}. \quad (5.3)$$

Nous sommes donc à même de produire des statistiques descriptives facilitant l'analyse des résultats et offrant une base de comparabilité entre les modèles, tels que la moyenne, l'écart-type, l'erreur minimum et maximum de l'échantillon, la médiane et le coefficient de variation qui est un rapport de l'écart-type sur la moyenne. Le tableau 3 présente les statistiques générales des erreurs de tarification absolues et relatives des caplets pour le modèle SABR et le modèle SABR/LMM.

Tableau 3: Comparaison de la performance de tarifications des différents modèles

Modèle	Erreur	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR	<i>absolue</i>	-2.34	7.02	-411.34	63824.99	-0.19	86.05	-36.7569
	<i>relative</i>	-1.17E+75	1.17E+75	-6.49E+80	3.52E+35	-5.05E-03	8.55E+77	-7.31E+02
SABR/LMM	<i>absolue</i>	92.72	96.17	-2894.40	64472.14	71.21	122.25	1.3185
	<i>relative</i>	-1.77E+13	1.77E+13	-3.43E+18	1.00E+00	1.00E+00	5.70E+15	-3.21E+02

Au vue de ces résultats, on remarque rapidement que les statistiques descriptives des erreurs de tarification relatives sont particulièrement élevées. Mathématiquement, cela s'explique par le fait que le numérateur est largement plus faible que le dénominateur. Dans le cas présent, cela indique que les modèles ont produit des erreurs de tarifications très faible pour des prix élevé. À toute fin pratique, cela rend les erreurs de tarifications relatives inutilisables pour l'analyse de la performance des modèles. Conséquemment, nous présenterons l'ensemble de nos résultats sur la base des erreurs de tarifications absolues.

Incidemment, la moyenne et la médiane des écarts de prix en absolus du modèle SABR sont négatives, c'est-à-dire que le modèle a tendance à surévaluer le prix des options, et au contraire, le modèle SABR/LMM sous-évalue vraisemblablement les options puisqu'il a une moyenne et une médiane positives. Cette différence de résultats est d'autant plus surprenante que la calibration des paramètres du modèle SABR/LMM est faite sur ceux du modèle SABR. Nous étions en mesure de nous attendre que les erreurs induites par les paramètres du modèle SABR auraient un impact similaire sur ceux du modèle SABR/LMM. Ainsi, l'instrumentalisation des paramètres du modèle SABR n'entraîne pas le biais systématique attendu.

De plus, l'analyse des résultats du modèle SABR/LMM nous permet de remarquer que non seulement la moyenne et la médiane sont supérieures, mais également les autres statistiques de dispersion. Le minimum et le maximum sont plus élevés quoique

que dans tous les cas, autant pour le modèle SABR que pour le modèle SABR/LMM, ces erreurs semblent être les résultantes de mauvais prix qui sont eux le résultat d'un problème de calibration du *smile*. En effet, nous ne pouvons passer sous silence le fait que pour certaines journées de l'échantillon la matrice source des volatilités présentait des distorsions dans le *smile*. Nous avons observé ces distorsions, principalement pour des options très hors de la monnaie et leur utilisation pour la valorisation directe des caplets dans le modèle de Black (1979), ne causaient pas trop problème. Cependant, dans le cadre d'une calibration où l'on tente de minimiser les erreurs, la cohérence entre les éléments revêt une importance plus grande. Nous sommes en mesure de constater que cela a produit, dans de rares cas seulement, des paramètres aberrants qui ont à leur tour produit des prix erronés. C'est d'ailleurs pour cette raison que nous avons décidé de procéder à une calibration des modèles basée uniquement sur les prix de caplets de marché à la monnaie. Nous serons donc à même d'analyser l'impact de ce problème un peu plus loin. Notons également que le logarithme naturel de la *moneyness*, c'est-à-dire le ratio du taux *forward* sur le taux d'exercice du caplet est l'une des variables explicatives de notre régression linéaire pour l'étude des biais systématiques.

### 5.2.2 Décompositions des erreurs de tarifications par facteur

Pour l'analyse comparative de nos résultats, nous avons décidé de les décomposer en fonction de trois grands éléments susceptibles d'avoir un impact sur la qualité des prix obtenus. La première décomposition est fonction de la *moneyness* des options, à savoir si l'option est dans la monnaie (ITM), à la monnaie (ATM) ou hors de la monnaie (OTM). La seconde est fonction de l'évolution des taux d'intérêt (le taux LIBOR américain 3 mois) sur le marché. Nous avons défini trois grandes périodes d'observation dans notre échantillon : la première est au début de l'échantillon et correspond à des niveaux de taux d'intérêts historiquement standards entre 4,5% et 5%, la seconde est la période de décroissance des taux d'intérêt qui passe de 4,5%

à 1%, et la dernière qui est une période de taux d'intérêt très faible allant de 1% à 0.25%. Finalement, notre troisième et dernière décomposition est celle qui est relative à la maturité des caplets.

Cette décomposition des résultats nous permet de mieux comprendre l'impact de ces trois facteurs sur les modèles et d'être en mesure d'observer les distorsions qu'ils sont susceptibles d'introduire. De plus, ces segmentations des erreurs de tarifications nous donnent un premier aperçu de l'influence que peut avoir un intrant de marché sur la performance des modèles, puisque les facteurs choisis seront repris pour notre étude des biais systématiques.

### **Évaluation comparative en fonction de la *moneyness***

L'intérêt que nous portons à l'impact de la *moneyness* sur les écarts de prix s'est développé en visualisant graphiquement les prix modélisés. Tel que présentés dans les graphiques en annexe (figures A15 à A23), nous observons la difficulté que semble avoir les modèles en général à modéliser le prix d'une option très hors de la monnaie. Le modèle SABR a plus de difficultés à faire converger les prix vers zéro, alors qu'à l'inverse, le modèle SABR/LMM converge très rapidement vers zéro. À l'instar de ce constat, nous avons décidé de décomposer nos résultats sur les écarts de prix entre ceux modélisés et ceux observés sur les marchés.

Tableau 4: Comparaison de la performance de tarifications en fonction de la *moneyness*

Modèle	Critère	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR		-2.34	7.02	-411.34	63824.99	-0.19	86.05	-36.7569
	<i>ATM</i>	-4.43	6.74	-113.44	54.88	-3.30	8.12	-1.8303
	<i>ITM</i>	-2.12	11.18	-312.14	986.82	2.36	28.49	-13.4670
	<i>OTM</i>	-2.03	5.06	-411.34	63824.99	-0.33	109.51	-53.8669
SABR/LMM		92.72	96.17	-2894.40	64472.14	71.21	122.25	1.3185
	<i>ATM</i>	214.07	216.75	-2637.04	417.38	229.56	81.11	0.3789
	<i>ITM</i>	101.41	111.22	-2460.33	397.79	93.93	83.07	0.8192
	<i>OTM</i>	64.52	65.26	-2894.40	64472.14	41.21	129.32	2.0043

Avant de poursuivre dans l'analyse de la décomposition, il est nécessaire de préciser que les résultats de chacune des tranches de la décomposition n'a pas la même importance. En effet, les modèles devraient être beaucoup plus performants pour les options à la monnaie ou autour de la monnaie, puis dans la monnaie et finalement, la qualité de la valorisation du prix des options hors de la monnaie (surtout pour celles très hors de monnaie) a une importance moindre. En se basant sur ces critères et en observant les résultats présentés dans le tableau 4, la moyenne de l'erreur de tarification absolue du modèle SABR est nettement inférieure à celle du modèle SABR/LMM, et ce, pour l'ensemble des cas de figures. Cependant, notre hypothèse selon laquelle les modèles devraient être plus performants pour les options à la monnaie ne s'est pas révélée juste. En effet, la moyenne des écarts en valeurs absolues pour les prix de caplets à la monnaie des modèles sont plus élevées que pour celles dans la monnaie et hors de la monnaie. Par contre, les écarts-types sont inférieurs pour les caplets à la monnaie comparativement à ceux obtenus pour les options à l'intérieur de la monnaie et à l'extérieur de la monnaie. En somme, les statistiques descriptives nous indiquent que les modèles produisent des erreurs de tarifications généralement plus élevés pour les options à la monnaie, mais que l'amplitude des erreurs est moins grande que pour les caplets dans la monnaie et hors de la monnaie.

### Évaluation comparative en fonction de l'évolution des taux d'intérêt

Les taux d'intérêt et, par le fait même, la structure par terme ont évolué et changé au cours de la période d'étude et nous sommes intéressés à analyser le comportement des modèles selon que les taux sont à des niveaux relativement normaux ou historiquement faibles. Nous allons également étudier la période de mouvance, quoique nous n'avons qu'une période de décroissance des taux et aucun comparable pour une remontée de ceux-ci.

**Tableau 5: Comparaison de la performance de tarifications en fonction de l'évolution des taux**

Modèle	Critère	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR		-2.34	7.02	-411.34	63824.99	-0.19	86.05	-36.7569
	<i>élevé</i>	-3.51	10.32	-411.34	63824.99	0.00	189.11	-53.8229
	<i>diminution</i>	-1.23	6.52	-384.12	82.22	0.00	13.86	-11.2236
	<i>bas</i>	-2.76	5.87	-125.66	31.62	-1.12	7.54	-2.7359
SABR/LMM		92.72	96.17	-2894.40	64472.14	71.21	122.25	1.3185
	<i>élevé</i>	63.62	73.76	-1033.81	64472.14	42.98	203.33	3.1961
	<i>diminution</i>	89.39	92.96	-2894.40	417.38	65.16	89.43	1.0004
	<i>bas</i>	109.76	109.89	-71.60	366.48	90.92	87.21	0.7944

Le tableau 5 présente nos résultats en fonction de l'évolution du taux LIBOR trois mois, et les résultats des erreurs de tarifications absolues ne nous permettent pas de tirer de conclusion particulière, sinon que le modèle SABR/LMM a moins bien performé lorsque les taux sont plus faibles, puisqu'il y a eu un accroissement de ces erreurs de tarification au fur et à mesure que les taux ont diminué. Cela dit, nous serons davantage en mesure de conclure une fois que nous aurons présenté l'étude sur les biais systématiques potentiels des modèles, sachant qu'il y a deux variables traitant de la surface des taux d'intérêt, soit le taux LIBOR 3 mois et la pente de structure par terme.

### Évaluation comparative en fonction de la maturité

Considérant le fait que la maturité de l'option est un intrant important dans les modèles de valorisation des produits dérivés, nous avons cherché à savoir si celle-ci avait un impact sur la performance de nos modèles à reproduire les prix de marchés. Sachant que nous avons utilisé des caps ayant une maturité de 10 ans et que chaque caplet a une durée de trois mois, nous avons donc obtenu une coupe transversale pour 39 maturités différentes (le premier caplet étant déterministe). Pour des fins de présentation, le tableau 6 présente les résultats obtenus pour certaines maturités seulement <sup>1</sup>.

**Tableau 6: Comparaison de la performance de tarifications en fonction de la maturité**

Modèle	Caplet	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR	01	-20.96	23.35	-312.14	2246.65	0.00	74.62	-3.5601
	04	-7.12	8.12	-75.42	27.13	-1.64	14.33	-2.0124
	08	-3.05	5.57	-41.00	32.79	-2.00	7.20	-2.3599
	12	-0.92	4.56	-31.18	26.68	-0.40	6.21	-5.7597
	16	-0.56	4.24	-20.88	27.32	0.01	5.78	-10.3862
	20	-0.71	4.91	-23.49	26.79	0.17	6.55	-9.2572
	24	-0.70	5.63	-26.11	25.85	0.20	7.25	-10.3943
	28	-0.62	6.14	-28.29	27.90	0.32	7.82	-12.6651
	32	-0.72	6.86	-57.02	60.82	0.41	8.84	-12.3655
	36	-1.04	7.81	-83.72	55.40	0.39	10.55	-10.1082
	39	2.14	13.65	-411.34	63624.99	0.15	524.81	245.0612
SABR/LMM	01	-33.32	36.36	-2894.40	103.27	0.00	129.88	-3.8979
	04	20.61	29.62	-75.42	273.52	5.77	43.35	2.1038
	08	64.18	64.26	-22.41	301.48	38.65	63.92	0.9959
	12	79.96	79.96	-3.24	312.50	52.54	72.47	0.9064
	16	91.31	91.31	1.86	323.35	65.04	75.97	0.8320
	20	103.93	103.93	1.58	340.34	79.65	79.82	0.7680
	24	114.32	114.32	2.10	360.42	92.71	82.46	0.7215
	28	123.19	123.19	3.11	363.93	104.34	83.52	0.6760
	32	130.59	130.59	-10.55	368.92	114.63	83.45	0.6390
	36	135.44	135.46	-24.29	391.56	121.54	82.39	0.6083
39	142.45	142.59	-45.08	64472.14	125.06	535.00	3.7556	

En représentant les erreurs de tarifications de la coupe transversale en fonction de la maturité, nous sommes à même de constater que l'amplitude de ceux-ci croît avec le passage du temps pour le modèle SABR/LMM. Cette tendance peut probablement

1. L'ensemble des résultats est présenté dans le tableau B1 de l'annexe B

s'expliquer par une caractéristique intrinsèque du modèle qui est de modéliser l'évolution conjointe des taux. Or, cela fait en sorte que les prix que nous avons obtenus pour ce modèle divergent davantage de ceux observés sur les marchés et le rend moins performant que le modèle SABR qui lui n'est pas impacté par la maturité des options. Cependant, on remarque qu'il a produit des écarts de prix plus important pour les caplets en début de période.

Finalement, la segmentation des erreurs de tarifications en fonction des trois facteurs que sont la *moneyness*, le niveau des taux et la maturité, nous permet de conclure que la performance du modèle SABR est vraisemblablement moins influencée par ses trois composantes que le modèle SABR/LMM, et ce, principalement pour ce qui a trait à la maturité des caplets.

### 5.2.3 Résultats et analyse d'une calibration sur les options ATM

Ensuite, et dans la même lignée que Gupta et Subrahmanyam (2005), nous cherchons à mesurer l'erreur de tarification de la coupe transversale. Pour y parvenir, nous avons calibré les paramètres de nos modèles en utilisant uniquement les prix des caplets à la monnaie, et allons tarifier à nouveau les caplets à l'aide des paramètres obtenus, et ce, pour l'ensemble de notre échantillon y compris pour les options dans la monnaie et hors de la monnaie. L'utilisation d'une méthode alternative pour évaluer les options sur taux d'intérêt nous permet de tester la robustesse et l'ampleur de nos erreurs de tarifications dans le cadre d'une méthodologie estimative. Tout comme fait précédemment, nous avons calculé et présenté dans le tableau 7 les statistiques descriptives des erreurs de tarifications de chacun des modèles afin d'en faire l'analyse. De plus, nous avons reproduit les tableaux sur la stabilité des paramètres et sur la décomposition des erreurs en fonction de certains facteurs que nous présentons dans l'annexe B.(tableaux B2 à B7).

Tableau 7: Comparaison de la performance de tarifications des différents modèles

Modèle	Erreur	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR	<i>absolue</i>	8.62	19.23	-312.14	64453.72	4.20	97.71	11.3360
	<i>relative</i>	5.82E+113	5.82E+113	-5.55E+10	3.64E+119	4.12E-02	4.60E+116	7.91E+02
SABR/LMM	<i>absolue</i>	92.39	96.13	-2077.96	64472.14	68.74	131.33	1.4215
	<i>relative</i>	4.19E+32	4.19E+32	-2.97E+17	2.46E+38	1.00E+00	3.11E+35	7.42E+02

Globalement, l'amplitude des erreurs de tarifications basée sur ce test en coupe transversale renforce nos conclusions précédentes qui démontraient que le modèle SABR surperforme le modèle SABR/LMM dans sa capacité à valoriser le prix des caplets. En effet, bien que le modèle SABR dans le présent cadre d'analyse avec calibration sur les options à la monnaie ait fait dévier davantage les prix calculés en comparaison des prix de marché que le modèle SABR/LMM, l'erreur moyenne absolue et médiane du modèle SABR/LMM s'est avérée largement supérieure. Ce constat est à la fois valide pour les erreurs de tarification obtenues sur la base de la calibration sur les options ATM, mais également pour les prix d'options calibrés sur l'ensemble des prix disponibles avec différents taux d'exercice.

L'étude des présents résultats nous démontre ainsi l'importance pour le modèle SABR d'être calibré sur un ensemble complet de prix d'options disponibles au temps  $t$  avec différents taux d'exercice lui assurant de capter le *smile* de volatilité. De son côté, le modèle SABR/LMM démontre beaucoup moins de sensibilité à cette caractéristique, et ce, malgré le fait qu'il se calibre sur les paramètres du modèle SABR. De ce fait, nous remettons en doute la pertinence d'utiliser un modèle qui capte mal les propriétés d'ajustement du *smile* de volatilité dans la modélisation des prix de caplets. Finalement, les résultats de cette étude de la coupe transversale en fonction de modèles calibrés strictement sur les prix de marché à la monnaie des caplets sont venus renforcer le fait que les résultats des erreurs de tarifications présentées précédemment pour le modèle SABR étaient robustes.

### 5.2.4 Étude du biais systématique des erreurs de tarifications

Dans le cadre de notre étude sur l'évaluation comparative des modèles SABR et SABR/LMM, nous avons fait jusqu'à présent une revue détaillée des erreurs de tarifications, et avons été en mesure de relever différents intrants susceptibles d'avoir une influence sur la qualité des prix produits par les modèles. Conséquemment, et tout comme Gupta et Subrahmanyam (2005) l'ont fait, nous étudierons dans la section qui suit les biais systématiques des modèles à l'aide d'une régression linéaire sur la coupe transversale, c'est-à-dire que nous procéderons à une régression sur l'ensemble de l'échantillon. L'objectif de cette analyse est d'être en mesure d'identifier les biais potentiels dans les erreurs de tarifications et ainsi, d'identifier lequel des modèles est le plus consistant avec les données. Pour ce faire, nous représenterons les erreurs de modélisation à l'aide de la volatilité de Black, ce qui permet d'éliminer l'effet que pourraient avoir les autres intrants dans le prix des options. Nous faisons donc la régression linéaire suivante :

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{mkt} - \sigma_{modele})_t = & \beta_0 + \beta_1 LRM_t + \beta_2 MAT_t + \beta_3 ATMVol_t \\
 & + \beta_4 r_t + \beta_5 Pente_t + \epsilon_t.
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

où les variables explicatives sont respectivement :

- $LRM$  : le logarithme naturel du ratio de la *moneyness*, c'est-à-dire le ratio du taux *forward* sur le taux d'exercice du caplet ;
- $MAT$  : la maturité du caplet ;
- $ATMVol$  : la volatilité à la monnaie pour un caplet de même maturité ;
- $r$  : le taux LIBOR 3 mois ; et
- $Pente$  : la pente de la structure par terme, mesurée par la différence entre le taux 5 ans et le taux 3 mois .

Premièrement, nous serons à même de capturer la dépendance des erreurs de tarifications au *smile* de volatilité à l'aide du LRM. Deuxièmement, nous serons en mesure de vérifier l'impact de la maturité du caplet avec la variable MAT. Troisièmement, l'inclusion de la volatilité à la monnaie nous permettra d'examiner le comportement du *smile* lorsqu'il y a une incertitude plus grande sur les marchés, c'est-à-dire une volatilité à la monnaie plus élevée que la normale. Quatrièmement, le niveau auquel se situe le taux LIBOR trois mois est un indicateur économique permettant de situer l'état général de celle-ci et d'influencer le marché de la demande des options sur taux d'intérêt. Ainsi, l'accroissement de la demande pour des options dans la monnaie ou hors de la monnaie en prévision respectivement d'une baisse ou d'une hausse des taux d'intérêt peut probablement influencer le prix des options et possiblement modifier la forme du *smile* de volatilité. Cinquièmement, la pente de la structure par terme est intimement liée aux conditions économiques et est un bon indicateur des prévisions actuelles du marché sur l'évolution des taux d'intérêt et de l'économie en générale. Ainsi, cela peut également avoir une influence sur la demande des options et conséquemment, sur leur prix.

Nous présentons tout d'abord dans le tableau 8 les statistiques descriptives des volatilités de Black ainsi que celles des variables explicatives utilisées dans le cadre de la régression linéaire ordinaire. Ensuite, le tableau 9 présente la valeur obtenue pour chaque coefficient de chaque variable explicative et les erreurs estimées standards (EES) associées à chacun. Nous présentons également la moyenne des erreurs au carré pour chaque modèle (MSE). Notons également que pour chaque modèle, nous avons rejeté l'hypothèse nulle selon laquelle tous les coefficients sont conjointement égale à zéro.

Tableau 8: Sommaire statistique des volatilités

DV01	Moyenne	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
<b>marché</b>	0.3842	-0.1071	4.2490	0.3486	0.1634	0.4252
<b>SABR</b>	0.3889	-0.0038	1.5701	0.3524	0.1647	0.4235
<b>SABR/LMM</b>	0.0830	-0.0001	23.8119	0.0539	0.2497	3.0087

Tableau 9: Résultats de la régression linéaire ordinaire

Modèle		$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	MSE
<b>SABR</b>	Valeur	0.00878	-0.00521	0.00071	-0.05050	0.30752	-0.55924	0.00121
	EES	0.00046	0.00006	0.00002	0.00056	0.00824	0.01128	
<b>SABR/LMM</b>	Valeur	-0.08877	0.07967	0.00856	1.01485	0.14138	-0.00149	0.06218
	EES	0.00327	0.00042	0.00016	0.00399	0.05895	0.08070	

Le modèle SABR et le modèle SABR/LMM sont exposés à des biais systématiques, mais nous sommes en mesure de constater, par la valeur des coefficients, que les modèles sont affectés de manières différentes. Tout d'abord, les erreurs de tarifications exprimées en terme de volatilité pour le modèle SABR sont faiblement influencées par la *moneyness* des options et par la maturité. Quant-à lui, l'impact de la volatilité à la monnaie se révèle également plutôt faible. Or, les coefficients pour le taux LIBOR trois mois et la pente de la structure par terme induisent un biais. Alors que le niveau du taux LIBOR trois mois influence positivement l'erreur de tarification, la pente de la structure par terme induit de manière inverse le terme d'erreur. C'est donc dire que plus le niveau des taux est élevé, plus le modèle SABR est susceptible de produire des prix qui divergent des prix de marché, et plus la pente de la structure par terme s'accroît plus le terme d'erreur va croître, mais de manière inversement proportionnelle à celle-ci. Pour ce qui est du modèle SABR/LMM, le niveau de *moneyness* des caplets, la maturité et la pente de la structure par terme ont peu d'impact sur l'erreur de tarification. La faiblesse de la valeur des coefficients de la maturité et de la pente s'est révélée surprenante. Dans le cas de la maturité, nous nous attendions à ce qu'elle introduise un biais, sachant que notre décomposi-

tion des erreurs de tarifications du modèle SABR/LMM en fonction de la maturité s'était montrée révélatrice d'une tendance. De plus, le paramètre de la pente de la structure par terme s'était montré suffisamment important dans le cadre du modèle SABR pour nous permettre de supposer une influence sur l'erreur de tarification pour le modèle SABR/LMM également. Finalement, nos résultats nous montrent que les deux principales variables explicatives des erreurs de tarifications en terme de volatilité pour le modèle SABR/LMM est le niveau de la volatilité à la monnaie et, dans une moindre mesure, le taux LIBOR trois mois.

Nous remarquons également que les erreurs standards estimées par coefficient sont systématiquement plus élevées pour le modèle SABR/LMM que pour le modèle SABR. Dans la même lignée, la moyenne des erreurs au carré se révèle être plus élevé pour le modèle SABR/LMM. C'est donc dire que le modèle de régression linéaire du modèle SABR/LMM nous permettant de déterminer les biais et les variables explicatives des erreurs de tarifications est moins performant que celui du modèle SABR. Cela est en ligne avec les résultats des sections précédentes, puisque le modèle SABR/LMM a moins bien performé que le modèle SABR dans l'ensemble de notre étude empirique et comparative.

### 5.3 Résultats empiriques du DV01

La qualité d'un modèle ne se limite pas à sa performance tarifaire, et cela explique notre intérêt à l'égard des paramètres de risque, également appelés paramètres de couverture ou paramètres grecs, dont l'acuité est clairement devenue un standard sur les marchés financiers. De plus, l'étude des paramètres de couverture permet de prévoir l'évolution des prix des options en fonction des changements dans les intrants de marchés, tels que les taux d'intérêt et la volatilité. De ce fait, nous serons à même

de faire une comparaison empirique des paramètres grecs issus des modèles SABR et SABR/LMM.

Dans le cadre de notre étude empirique des paramètres de risque, nous avons décidé de prendre en considération uniquement le paramètre delta qui mesure l'impact d'une variation du prix du sous-jacent sur le prix de l'option. Notre choix a été largement influencé par sa simplicité de calcul et par son utilisation dans la mise en place d'une stratégie delta-neutre, c'est-à-dire localement insensible au changement dans les taux *forward*. Plus spécifiquement, nous avons décidé d'utiliser un delta modifié de tel sorte qu'il représente l'impact d'un choc de 1 point de base (0,01%) sur le prix de l'option en dollar. Cette façon de faire est relativement standard sur les marchés financiers pour tous les produits de taux d'intérêt et la valeur résultante du choc sur le prix est généralement nommé DV01 pour *dollar value of a basis point*. Pour y arriver, nous modélisons le DV01 en appliquant systématiquement un choc d'un point de base sur les taux *forward* dont la maturité s'harmonise avec l'échéance d'un caplet particulier et nous recalculons la valeur des options selon chaque modèle. Suivant cela, nous calculons la différence entre le prix modélisé précédemment et le prix obtenu suivant l'application du choc. Nous présentons dans le tableau 10 les résultats de manière sommaire à l'aide des mêmes statistiques descriptives que nous avons détaillées dans la section précédente sur l'évaluation empirique des prix. Cependant, il est important de noter que n'ayant pas de delta de marché comme cela est le cas pour les prix, nous présentons nos résultats bruts et non en terme d'erreur.

Tableau 10: Sommaire statistique du DV01 des modèles

DV01	Choc	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR	+1 bps	0.9371	0.9371	0.0000	2.4829	0.8618	0.6743	0.7195
	-1 bps	-0.9348	0.9348	-2.4827	0.0000	-0.8563	0.6742	-0.7212
SABR/LMM	+1 bps	1.5237	1.5720	-604.1078	1094.4038	1.7718	3.7995	2.4936
	-1 bps	-1.5026	1.5614	-767.6661	610.8635	-1.7702	3.6396	-2.4223

Les résultats obtenus pour le calcul du DV01 sont généralement cohérents avec la théorie selon laquelle la volatilité et le prix devraient varier dans le même sens que le prix du sous-jacent. Ainsi, le DV01 obtenu pour le modèle SABR varie toujours dans le même sens que le choc et cela se confirme par le minimum et le maximum qui sont respectivement nuls lorsque le choc est positif et négatif. De plus, la moyenne et la médiane sont toujours du même signe que le choc sur taux d'intérêt que nous avons appliqué. L'hypothèse se confirme également pour le modèle SABR/LMM, mais cela ne semble pas toujours systématique. Ainsi, en moyenne le DV01 varie dans le même sens que le sous-jacent, mais en regardant de plus près le minimum et le maximum, on constate que pour un choc positif, il est arrivé que le prix diminue et inversement, pour un choc négatif, le prix a parfois augmenté. Cependant l'étude de la fréquence de ce genre d'événement, nous a permis de déterminer qu'il s'agissait de cas d'exception puisque nous sommes en deça de 1%.

# Chapitre 6

## Conclusion

En apportant une évaluation empirique et comparative des différents modèles, nous avons été à même de tester le modèle SABR de Hagan et al. (2002) et le modèle SABR/LMM de Rebonato, McKay et White (2009). En intégrant une longue période d'étude, avec différents événements de marché, dont une faiblesse inégalée dans le niveau des taux d'intérêt, nous avons mesuré la qualité des modèles dans leur capacité à modéliser les prix en reproduisant le plus fidèlement possible l'évolution de la surface du *smile* de volatilité, ainsi que l'évolution des prix suivants un choc du sous-jacent.

Les résultats obtenus nous permettent de conclure que le modèle SABR de Hagan et al. (2002) surperforme le modèle SABR/LMM de Rebonato, McKay et White (2009) dans le cadre d'une valorisation des caplets. De ce fait, nous invalidons l'hypothèse de départ qui était que le modèle SABR/LMM est en mesure de surperformer le modèle SABR en permettant d'obtenir des prix très proches de ceux du marché, tout en fournissant une évolution future raisonnable de la surface du *smile*, ce qui assure une bonne qualité de la couverture. En fait, le modèle SABR nous a démontré empiriquement sa capacité à bien reproduire les prix de marchés et une mesure de risque en ligne avec celles du marché après une calibration relativement aisée, alors que le modèle SABR/LMM a connu plus de difficultés. Nos résultats globaux dé-

montrent bien sa capacité à valoriser des caplets et à produire une mesure de risque, mais il ne parvient pas à minimiser les erreurs autant que le SABR. En ce sens, il est difficile de démontrer la qualité d'un modèle ou du moins sa supériorité alors qu'il se calibre directement sur les paramètres d'un autre modèle. Par contre, nous reconnaissons qu'il n'a pas été développé uniquement pour faire la valorisation des caplets, mais pour un éventail beaucoup plus large de produits dérivés de taux d'intérêt.

Finalement, nos résultats corroborent certains avancements plus récents de la littérature financière relative à l'évaluation des produits dérivés de taux d'intérêt et explique en partie le foisonnement des modèles de type SABR/LMM. En effet, et tel que discuté dans la revue de littérature, il existe une certaine diversité de modèles portant le nom de SABR/LMM, mais nous avons choisi de nous concentrer sur un modèle particulier, celui de Rebonato McKay et White (2009). Quoique que fort intéressant, nos résultats ne nous démontrent pas la supériorité du modèle SABR/LMM sur son ascendant le modèle SABR dans le cadre de l'évaluation des caplets. Or, nous sommes conscients que l'objectif ultime de cette nouvelle classe de modèles n'est pas l'évaluation de produits dérivés classiques, mais plutôt l'évaluation de produits plus exotiques qui nécessitent de tenir compte de la dynamique conjointe des taux d'intérêt. Pour des recherches futures, il pourrait être utile de faire une évaluation comparative des divers modèles SABR/LMM.

# Bibliographie

- Ahn, D.-H., Dittmar, R. and Gallant, A. (2002) : "Quadratic Term Structure Models : Theory and Evidence", *Review of Financial Studies*, **15**, 243-288.
- Beaglehole, D. and Tenney, M. (1991) : "General Solution of Some Interest Rate-Contingent Claim Pricing Equations", *Journal of Fixed Income*, **1**, 69-83.
- Beaglehole, D. and Tenney, M. (1992) : "A Nonlinear Equilibrium Model of Term Structures of Interest Rates : Correlations and Additions", *Journal of Financial Economics*, **32**, 345-454.
- Black, F. (1976) : "The pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, **3**, 167-179.
- Brace, A., Gatarek, D. and Musiela, M. (1997) : "The Market Model of Interest Rate Dynamics", *Mathematical Finance*, **7**(2), 127-155.
- Chen, L., Filipovic, D. and Poor, H. (2004) : "Quadratic Term Structure Models for Risk-Free and Defaultable Rates", *Mathematical Finance*, **14**(4), 515-536.
- Constantinides, G. (1992) : "A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates", *Review of Financial Studies*, **5**, 531-552.
- Cox, J., Ingersoll, J. and Ross, S. (1985) : "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, **53**(2), 363-384.
- Diebold, F. and Li, C. (2006) : "Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields", *Journal of Econometrics*, **130**, 337-364.
- Duffie, D., Pan, J. and Singleton, K. (2000) : "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusion", *Econometrica*, **68**, 1343-1376.

- Dupire, B. (1994) : "Pricing with a smile", *RISK*, **7**, 18-20.
- Fouque, J.P., Papanicolaou, G. and Sirclair, K.R. (2000) : "*Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*", Cambridge University Press, Cambridge.
- Gupta, A. and Subrahmanyam, M. (2005) : "Pricing and Hedging Interest Rate Options : Evidence from cap-floor markets", *Journal of Banking and Finance*, **29**, 701-733.
- Hagan, P., Kumar, D., Lesniewski, A. and Woodward, D. (2002) : "Managing smile risk", *Willmott Magazine*, March, 38-44.
- Hagan, P. and Lesniewski, A. (2008) : "LIBOR market model with SABR style stochastic volatility", Available online at : <http://www.lesniewski.us/papers/working/SABRLMM.pdf>.
- Henry-Labordere, P. (2007) : "Combining the SABR and LMM Models", *RISK*, October, 102-107.
- Heston, S. (1993) : "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *The Review of Financial Studies*, **6**(2), 327-343.
- Ho, T. and Lee, S.B. (1986), "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, **41**(5), 1011-1029.
- Hull, J. and White, A. (1993) : "One factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities", *Journal of Financial and Quatitative Analysis*, **28**(2), 235-254.
- Hull, J. and White, A. (1996) : "Using Hull-White Interest Rate Trees", *Journal of Derivatives*, **3**(3), 26-36.
- Hull, J. and White, A. (2000) : "Forward rate volatilities, swap rate volatilities, and the implementation of the LIBOR market model", *Journal of Fixed Income*, September, **68**(2), 46-62.
- Jagannathan, R., Kaplin, A. and Sun, G. (2003) : "An Evaluation of Multi-Factor CIR models using LIBOR, swap rates, and cap and swaption prices", *Journal of Eco-*

*nometrics*, **116**, 113-146.

- Karoui, N. El, Myneni, R. and Viswanathan, R. (1992) : "Arbitrage Pricing and Hedging of Interest Rate Claims With State variables : I theory", working paper, University of Paris.
- Letourneau, P. (2012) : "Trois essais sur les produits dérivés en finance", Proposition de thèse (non publié), HEC Montreal.
- Lewis, A. (2000) : "*Option Valuation Under Stochastic Volatility*", Finance Press.
- Longstaff, F. and Schwartz, E. (1992) : "A Two-Factor Interest Rate Model and Contingent Claims Valuation", *The Journal of Fixed Income*, **2**(3), 16-23.
- Mercurio, F. and Morini M. (2009) : "Joining the SABR and LIBOR models together", *RISK*, March, 80-85.
- Merton, R. (1973) : "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*, **41**(5), 867-887.
- Nawalkha, S., Beliaeva, N. and Soto, G. (2007) : "*Dynamic Term Structure Modeling : The Fixed Income Valuation Course*", John Wiley and Sons, Chichester.
- Nawalkha, S., Beliaeva, N. and Soto, G. (2009) : "A New Taxonomy of Dynamic Term Structure Models", Working paper, University of Massachusetts, Amherst.
- Nawalkha, S. (2009) : "The LIBOR/SABR Market Models : A Critical Review", Available online at : <http://ssrn.com/abstract=1527246>.
- Rebonato, R. (2007) : "A time Homogeneous, SABR-Consistent Extension of the LMM", *RISK*, November, 92-97.
- Rebonato, R. and White, R. (2009) : "Linking caplets and swaptions prices in the LMM-SABR model", *The Journal of Computational Finance*, **12**(2), 19-45.
- Rebonato, R., McKay, K. and White, R. (2009) : "*The SABR/LIBOR Market Model : Pricing, Calibration and Hedging for complex Interest-Rate Derivatives*", John Wiley and Sons, Chichester.
- Svensson, L. (1994) : "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates : Sweden 1992-1994", Working paper, International Monetary Fund.

- Vasicek, O. (1977) : "An Equilibrium Characterization of the Term Structure",  
*Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188.

# Annexe A

## Graphiques

Nous présentons les différents graphiques utilisés dans le cadre de notre analyse comparative des modèles de valorisation de produits dérivés de taux d'intérêts.

FIGURE A.1 –  
Surface du alpha (SABR)

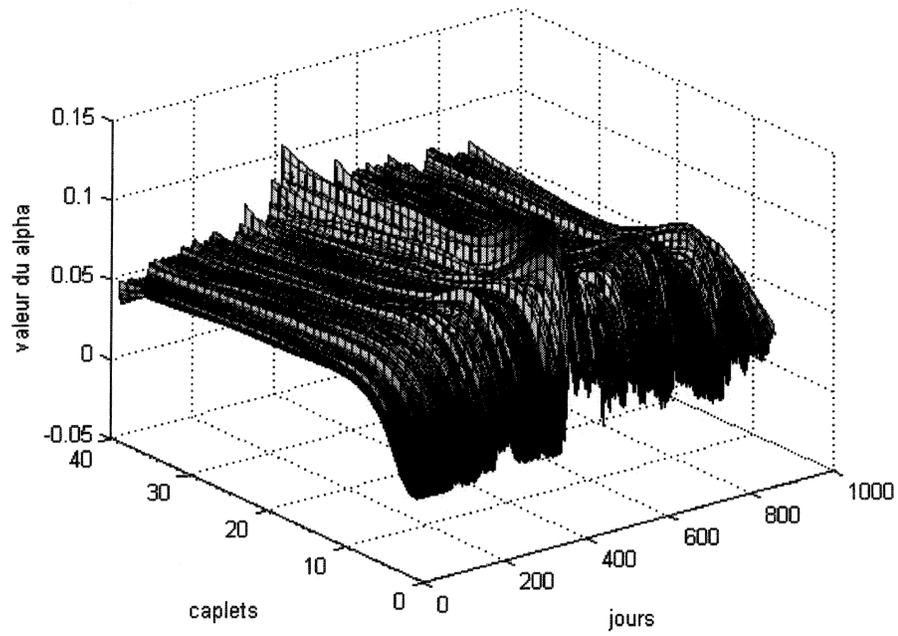


FIGURE A.2 –  
Surface du vega (SABR)

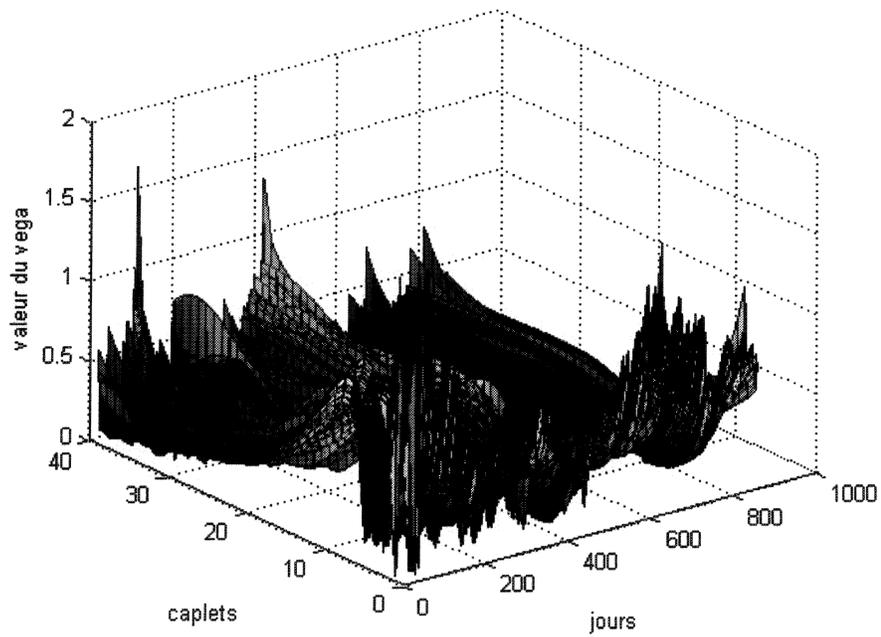


FIGURE A.3 –  
Surface du rho (SABR)

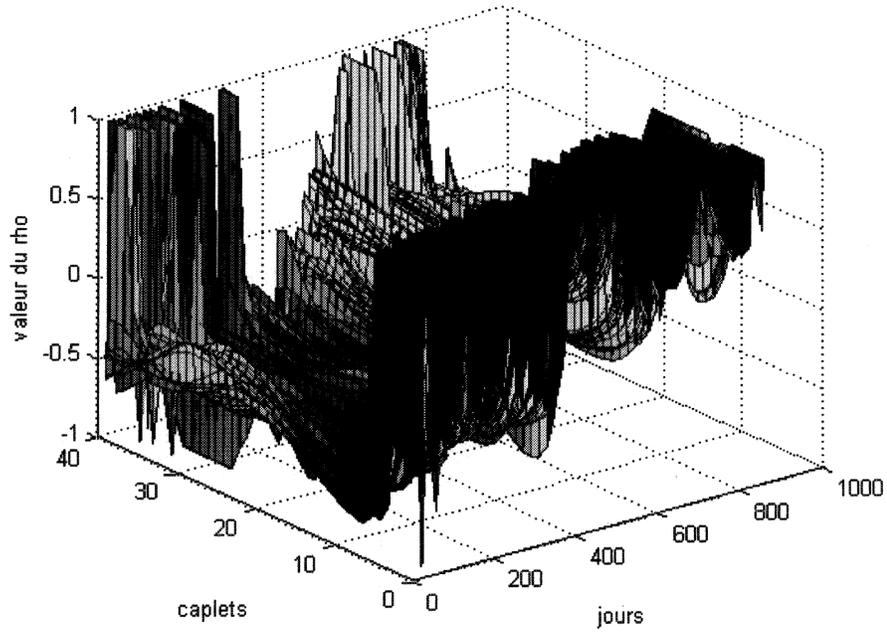


FIGURE A.4 –  
Courbe de la fct g(.) (SABR/LMM)

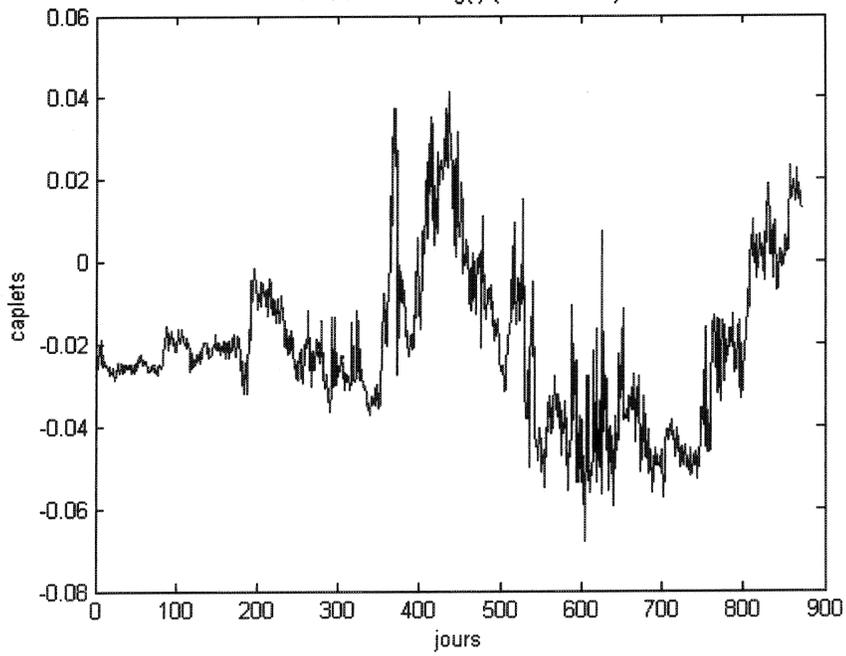


FIGURE A.5 -

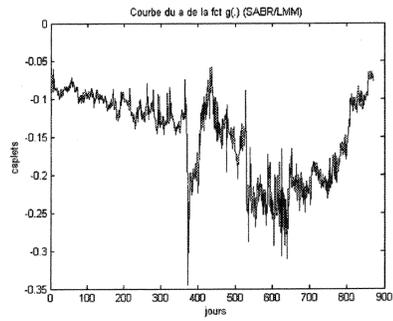


FIGURE A.6 -

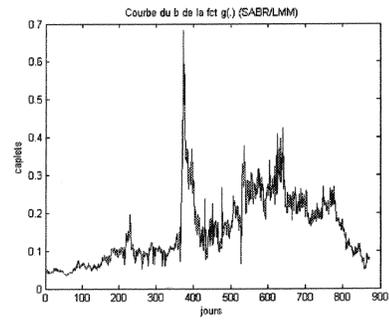


FIGURE A.7 -

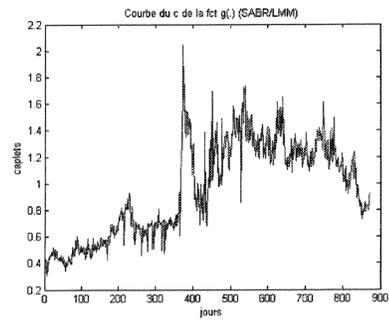


FIGURE A.8 -

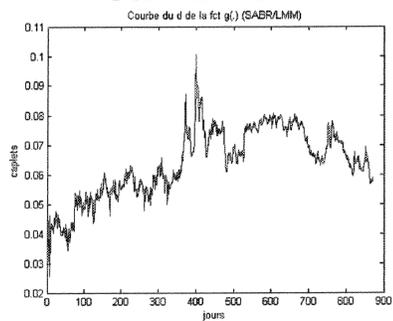


FIGURE A.9 –  
Courbe de la fct h(.) (SABR/LMM)

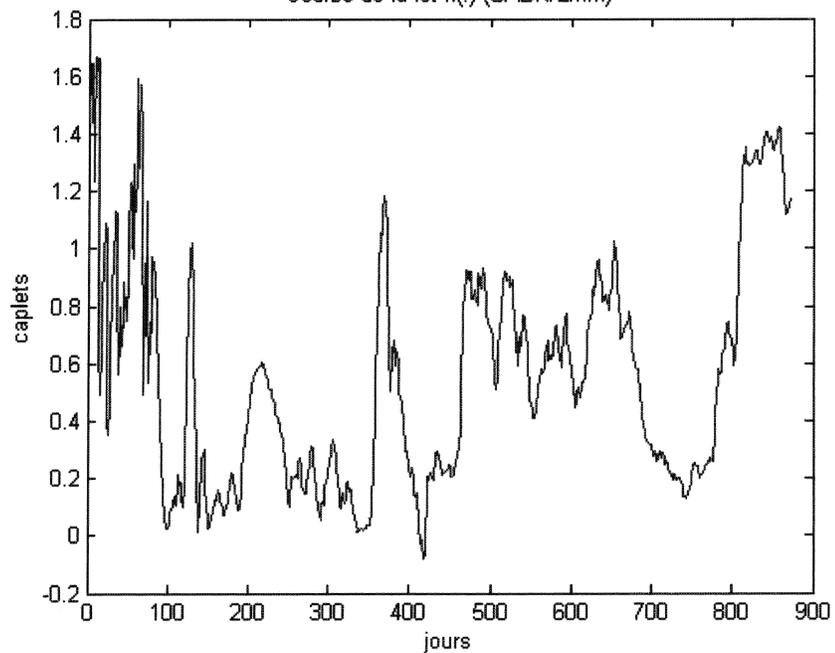


FIGURE A.10 –  
Surface du kappa (SABR/LMM)

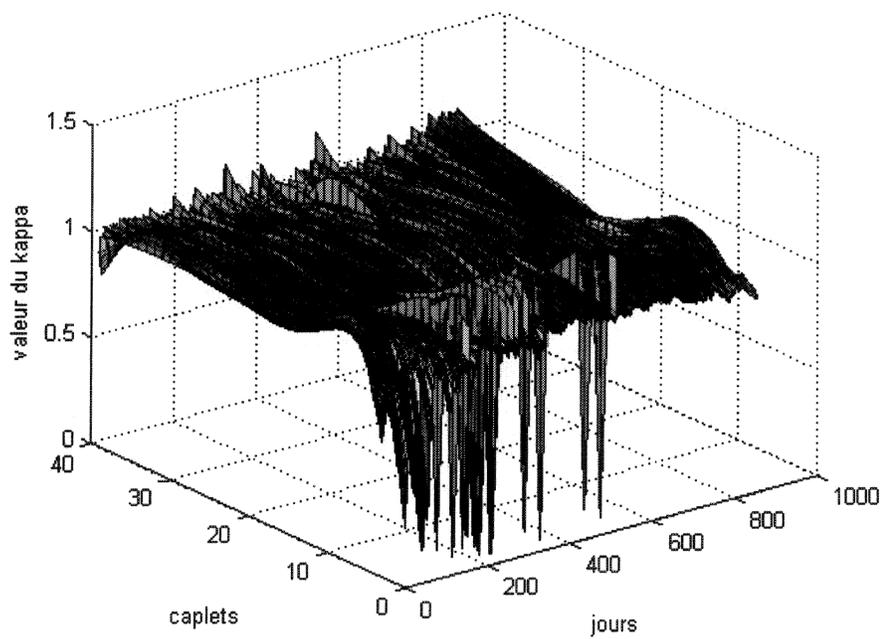


FIGURE A.11 -

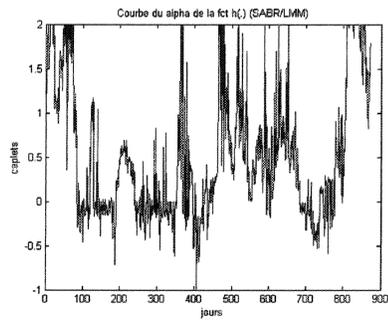


FIGURE A.12 -

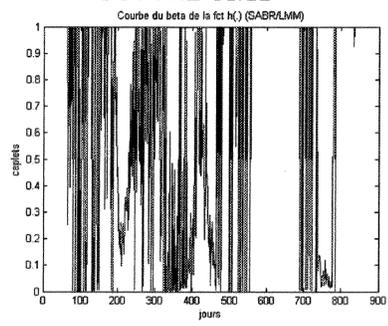


FIGURE A.13 -

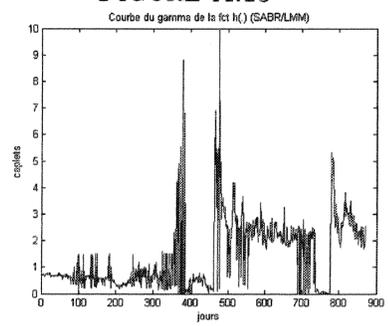


FIGURE A.14 -

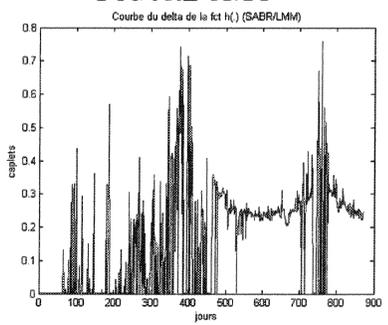


FIGURE A.15 –

Prix des caplets au 2 janvier 2007

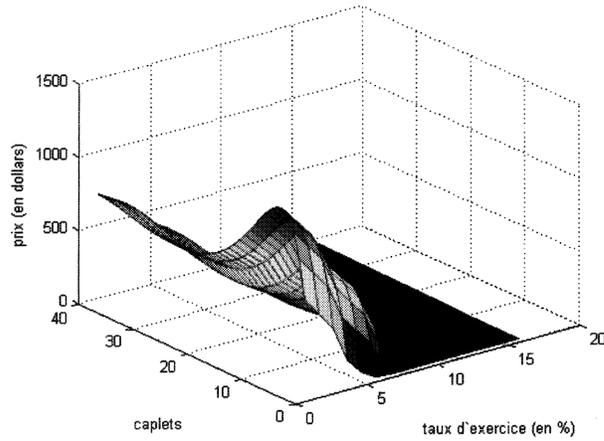


FIGURE A.16 –

Prix des caplets au 2 décembre 2008

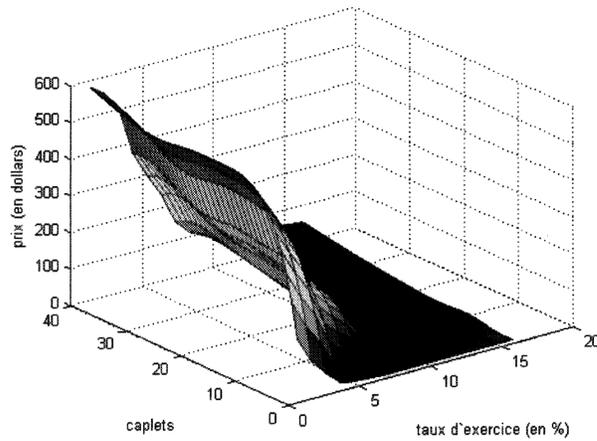


FIGURE A.17 –

Prix des caplets au 11 octobre 2010

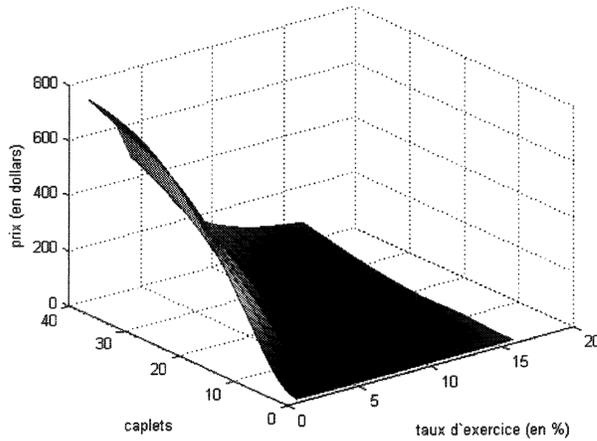


FIGURE A.18 –

Prix des caplets SABR au 2 janvier 2007

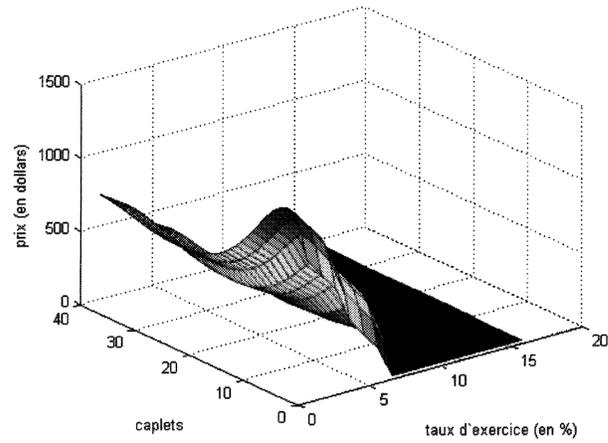


FIGURE A.19 –

Prix des caplets SABR au 2 décembre 2008

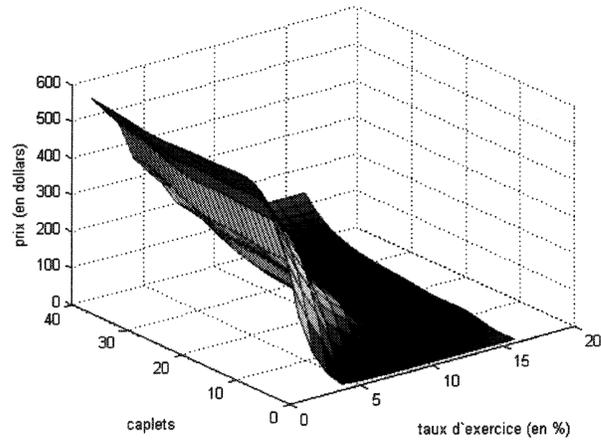


FIGURE A.20 –

Prix des caplets SABR au 11 octobre 2010

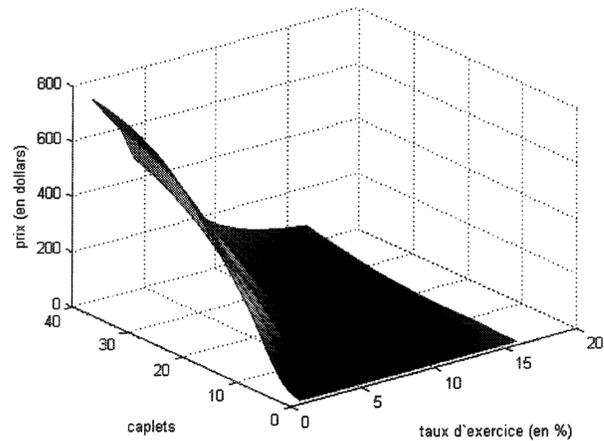


FIGURE A.21 –

Prix des caplets SABR/LMM au 2 janvier 2007

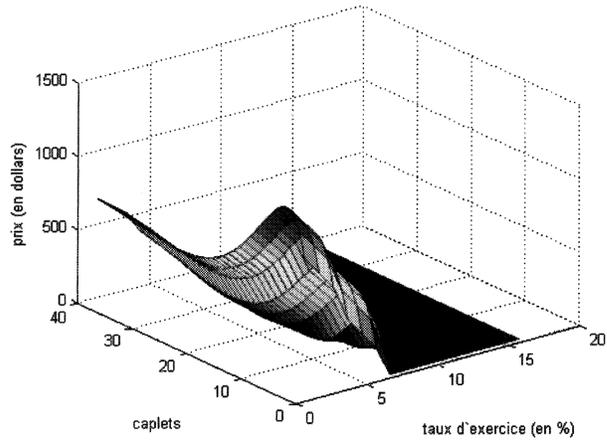


FIGURE A.22 –

Prix des caplets SABR/LMM au 2 décembre 2008

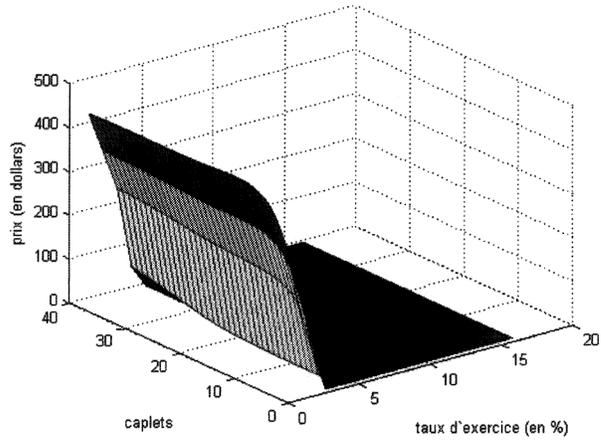
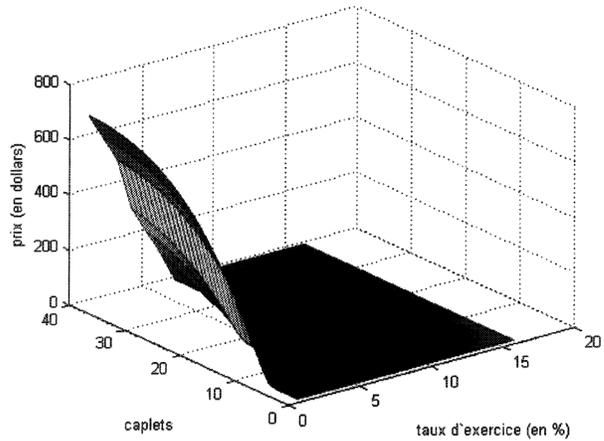


FIGURE A.23 –

Prix des caplets SABR/LMM au 11 octobre 2010



# Annexe B

## Tableaux

Présentation des tableaux :

FIGURE B.1 –

Tableau B1: Comparaison de la performance de tarifications en fonction de la maturité

Modèle	Caplet	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR	01	-20.96	23.35	-312.14	2246.65	0.00	74.62	-3.5601
	02	-14.42	18.48	-208.31	1951.19	-0.01	63.31	-4.3903
	03	-11.34	11.80	-129.90	12.47	-0.43	27.33	-2.4105
	04	-7.12	8.12	-75.42	27.13	-1.64	14.33	-2.0124
	05	-4.16	7.11	-43.78	39.79	-2.56	9.92	-2.3837
	06	-2.95	6.38	-50.36	47.05	-2.13	9.09	-3.0804
	07	-3.04	5.75	-40.84	41.72	-2.09	7.61	-2.5042
	08	-3.05	5.57	-41.00	32.79	-2.00	7.20	-2.3599
	09	-2.63	5.41	-41.44	34.62	-1.65	7.14	-2.7154
	10	-2.08	5.21	-37.31	33.46	-1.14	7.10	-3.4115
	11	-1.42	4.82	-30.94	30.77	-0.63	6.57	-4.6189
	12	-0.92	4.56	-31.18	26.68	-0.40	6.21	-6.7597
	13	-0.60	4.32	-19.84	23.21	-0.27	5.83	-9.7354
	14	-0.54	4.23	-18.39	24.14	-0.18	5.71	-10.5447
	15	-0.53	4.19	-19.42	26.02	-0.10	5.69	-10.6465
	16	-0.56	4.24	-20.88	27.32	0.01	5.78	-10.3862
	17	-0.60	4.35	-23.66	28.04	0.08	5.94	-9.9540
	18	-0.64	4.52	-25.82	28.15	0.10	6.14	-9.6045
	19	-0.68	4.71	-25.77	27.59	0.15	6.35	-9.3542
	20	-0.71	4.91	-23.49	26.79	0.17	6.55	-9.2572
	21	-0.73	5.11	-26.45	26.82	0.18	6.75	-9.3086
	22	-0.73	5.29	-28.07	26.57	0.19	6.93	-9.4926
	23	-0.72	5.47	-27.95	26.31	0.20	7.10	-9.6366
	24	-0.70	5.63	-26.11	25.85	0.20	7.25	-10.3943
	25	-0.67	5.76	-26.48	25.24	0.22	7.39	-10.9744
	26	-0.64	5.89	-26.99	26.65	0.24	7.53	-11.7259
	27	-0.62	6.01	-27.70	27.63	0.29	7.67	-12.2843
	28	-0.62	6.14	-28.29	27.90	0.32	7.82	-12.6651
	29	-0.62	6.28	-28.53	32.42	0.36	7.99	-12.9094
	30	-0.63	6.43	-31.72	34.02	0.38	8.19	-12.9813
	31	-0.66	6.63	-53.65	43.93	0.40	8.49	-12.7774
	32	-0.72	6.86	-57.02	60.82	0.41	8.84	-12.3655
	33	-0.78	7.06	-59.88	44.69	0.42	9.12	-11.7337
	34	-0.81	7.35	-64.46	46.80	0.40	9.62	-11.9509
	35	-0.89	7.61	-71.57	54.02	0.40	10.14	-11.3893
	36	-1.04	7.81	-83.72	55.40	0.39	10.55	-10.1082
	37	-1.29	8.22	-106.42	66.47	0.33	11.56	-8.9454
	38	-1.63	8.71	-151.77	171.37	0.31	13.17	-8.0864
	39	2.14	13.65	-411.34	63824.99	0.15	524.81	245.0612

FIGURE B.2 –

Tableau B1 (suite): Comparaison de la performance de tarifications en fonction de la maturité

Modèle	Caplet	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR/LMM	01	-33.32	36.36	-2894.40	103.27	0.00	129.88	-3.8979
	02	-9.88	23.05	-208.30	186.86	0.12	50.39	-5.1016
	03	5.08	24.70	-129.89	241.14	1.44	42.57	8.3765
	04	20.61	29.62	-75.42	273.52	5.77	43.35	2.1038
	05	34.85	37.37	-42.19	288.56	12.90	48.31	1.3861
	06	46.97	47.32	-32.71	293.51	21.95	54.20	1.1538
	07	56.71	56.83	-26.51	292.77	31.10	59.56	1.0501
	08	64.18	64.26	-22.41	301.48	38.65	63.92	0.9959
	09	69.75	69.80	-17.99	307.31	43.93	67.21	0.9636
	10	73.92	73.94	-13.08	311.52	47.32	69.59	0.9415
	11	77.17	77.19	-8.26	312.98	50.13	71.28	0.9236
	12	79.96	79.96	-3.24	312.50	52.54	72.47	0.9064
	13	82.60	82.60	0.84	314.11	55.14	73.40	0.8886
	14	85.32	85.32	2.09	316.25	58.39	74.23	0.8700
	15	88.22	88.22	1.97	319.54	61.50	75.07	0.8509
	16	91.31	91.31	1.88	323.35	65.04	75.97	0.8320
	17	94.52	94.52	1.84	327.44	68.90	76.94	0.8140
	18	97.76	97.76	1.69	331.27	72.70	77.94	0.7972
	19	100.92	100.92	1.60	334.73	76.07	78.91	0.7819
	20	103.93	103.93	1.58	340.34	79.65	79.82	0.7680
	21	106.76	106.76	1.63	346.83	83.10	80.64	0.7554
	22	109.42	109.42	1.72	352.56	85.21	81.37	0.7436
	23	111.93	111.93	1.90	357.17	89.42	81.98	0.7325
	24	114.32	114.32	2.10	360.42	92.71	82.48	0.7215
	25	116.62	116.62	2.24	362.17	95.73	82.88	0.7107
	26	118.87	118.87	2.45	363.09	98.64	83.16	0.6996
	27	121.06	121.06	2.73	363.19	101.48	83.38	0.6887
	28	123.19	123.19	3.11	363.93	104.34	83.52	0.6780
	29	125.24	125.24	3.59	365.88	106.79	83.60	0.6675
	30	127.17	127.17	2.84	367.28	109.51	83.61	0.6575
	31	128.97	128.97	-3.91	368.01	112.19	83.57	0.6480
	32	130.59	130.59	-10.55	368.92	114.63	83.45	0.6390
	33	132.05	132.05	-16.43	372.90	116.77	83.28	0.6307
	34	133.33	133.34	-20.93	378.17	118.54	83.03	0.6228
	35	134.46	134.47	-23.66	384.57	120.32	82.73	0.6153
	36	135.44	135.46	-24.29	391.56	121.54	82.39	0.6083
	37	136.35	136.37	-22.53	399.60	122.29	82.04	0.6017
	38	137.21	137.27	-28.20	407.80	123.61	81.74	0.5957
	39	142.45	142.59	-45.08	64472.14	125.08	535.00	3.7556

FIGURE B.3 –

Tableau B2: Sommaire statistique des paramètres calibrés des modèles

Modèle	Paramètre	Moyenne	Minimum	Maximum	Mediane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR	$\alpha$	0.0637	0.0000	0.1418	0.0684	0.0243	0.3816
	$\nu$	0.0021	-0.5986	0.2806	-0.0034	0.0441	20.7797
	$\rho$	0.3190	0.1433	69.4079	0.3013	0.6621	2.0760
SABR/LMM	$g_i$	-0.0213	-0.0677	0.0412	-0.0243	0.0182	-0.8552
	(g) a	-0.1442	-0.3459	-0.0584	-0.1261	0.0551	-0.3821
	(g) b	0.1466	0.0356	0.6846	0.1152	0.0900	0.6141
	(g) c	0.9230	0.3068	2.0486	0.8836	0.3687	0.3995
	(g) d	0.0625	0.0258	0.1006	0.0634	0.0124	0.1990
	$h_i$	0.0258	-0.0489	0.1507	0.0136	0.0344	1.3341
	(h) $\alpha$	0.0364	-1.0000	2.0000	-0.0014	0.3342	9.1694
	(h) $\beta$	0.1793	0.0000	1.0000	0.0115	0.3383	1.8862
	(h) $\gamma$	5.7792	0.3450	10.0000	5.2979	3.6299	0.6281
	(h) $\delta$	0.0082	0.0000	0.1000	0.0000	0.0271	3.3021
	$\kappa$	0.9969	0.0000	1.1960	1.0019	0.0518	0.0519
	$\rho$	0.3190	0.1433	69.4079	0.3013	0.6621	2.0760

FIGURE B.4 –

Tableau B3: Écart-type avec moyenne mobile

Modèle	Paramètre	Moyenne mobile		
		5 jours	20 jours	60 jours
SABR	$\alpha$	0.0637	0.0743	0.0788
	$\nu$	0.2238	0.2435	0.2431
	$\rho$	3.6503	3.9525	3.9022
SABR/LMM	$g_i$	0.0142	0.0142	0.0152
	(g) a	0.0137	0.0206	0.0292
	(g) b	0.0240	0.0399	0.0574
	(g) c	0.0720	0.1183	0.1687
	(g) d	0.0022	0.0037	0.0052
	$h_i$	0.0221	0.0256	0.0259
	(h) $\alpha$	0.3007	0.3229	0.3369
	(h) $\beta$	0.2984	0.3240	0.3324
	(h) $\gamma$	3.1733	3.4595	3.4912
	(h) $\delta$	0.0189	0.0209	0.0190
	$\kappa$	0.1612	0.1979	0.2272
	$\rho$	3.6503	3.9525	3.9022

FIGURE B.5 –

Tableau B4: Comparaison de la performance de tarifications en fonction de la *moneyness*

Modèle	Critère	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR		8.62	19.23	-312.14	64453.72	4.20	97.71	11.3360
	ATM	-0.33	2.58	-108.83	85.62	-0.01	5.69	-17.2056
	ITM	18.01	29.93	-312.14	986.82	22.40	41.28	2.2918
	OTM	5.71	17.16	-209.75	64453.72	1.65	123.38	21.5960
SABR/LMM		92.39	96.13	-2077.96	64472.14	68.74	131.33	1.4215
	ATM	211.15	212.29	-1517.34	416.95	225.20	78.45	0.3715
	ITM	96.66	108.21	-1681.98	397.78	89.80	83.56	0.8646
	OTM	66.66	66.92	-2077.96	64472.14	39.60	145.07	2.1795

FIGURE B.6 –

Tableau B5: Comparaison de la performance de tarifications en fonction de l'évolution des taux

Modèle	Critère	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR		8.62	19.23	-312.14	64453.72	4.20	97.71	11.3360
	élevé	7.72	25.77	-312.14	64453.72	0.59	187.60	24.3022
	diminution	3.11	17.83	-256.82	128.84	0.50	25.51	8.1887
	bas	14.11	16.10	-80.43	118.26	11.30	17.27	1.2236
SABR/LMM		92.39	96.13	-2077.96	64472.14	68.74	131.33	1.4215
	élevé	87.23	77.54	-450.51	64472.14	42.40	198.58	2.9535
	diminution	91.25	94.13	-2077.96	2820.25	65.54	99.73	1.0929
	bas	110.18	110.29	-71.56	3292.89	91.03	90.63	0.8226

FIGURE B.7 –

Tableau B6: Comparaison de la performance de tarifications en fonction de la maturité

Modèle	Caplet	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR	01	36.51	77.55	-312.14	2272.68	0.00	287.38	7.8718
	02	-11.58	28.76	-209.75	2006.12	0.02	106.16	-9.1655
	03	-10.91	15.92	-132.01	34.39	0.17	32.63	-2.9909
	04	-3.67	10.59	-75.43	33.18	0.55	18.44	-5.0233
	05	1.52	7.81	-58.86	32.94	1.52	11.37	7.4897
	06	4.77	9.10	-50.20	47.47	2.98	11.88	2.4918
	07	6.57	11.49	-44.43	58.08	3.46	14.76	2.2473
	08	7.36	13.02	-40.62	64.88	3.41	17.06	2.3168
	09	7.57	13.86	-41.83	68.44	3.18	18.47	2.4382
	10	7.52	14.27	-45.67	69.07	2.99	19.17	2.5502
	11	7.35	14.46	-48.79	66.34	2.99	19.43	2.6412
	12	7.26	14.59	-51.78	64.34	3.19	19.42	2.6745
	13	7.27	14.70	-54.06	67.97	3.56	19.28	2.6500
	14	7.43	14.90	-55.53	70.00	4.17	19.14	2.5764
	15	7.65	15.15	-56.69	72.82	4.89	19.04	2.4905
	16	7.91	15.46	-57.42	74.40	5.65	19.03	2.4067
	17	8.19	15.81	-58.70	75.57	6.37	19.14	2.3378
	18	8.42	16.18	-59.80	75.65	6.98	19.36	2.2980
	19	8.60	16.55	-60.28	75.43	7.40	19.64	2.2823
	20	8.74	16.91	-61.00	74.87	7.75	19.99	2.2872
	21	8.84	17.29	-61.11	73.87	8.07	20.40	2.3072
	22	8.92	17.65	-60.78	71.75	8.23	20.81	2.3331
	23	9.02	18.04	-60.47	71.35	8.26	21.24	2.3562
	24	9.14	18.42	-61.16	74.21	8.27	21.67	2.3712
	25	9.32	18.82	-61.83	75.22	8.30	22.10	2.3719
	26	9.53	19.24	-61.81	76.71	8.59	22.53	2.3635
	27	9.79	19.64	-62.57	78.57	8.74	22.95	2.3437
	28	10.08	20.02	-63.16	78.99	8.97	23.34	2.3147
	29	10.38	20.38	-62.72	80.55	9.15	23.71	2.2832
	30	10.69	20.71	-62.28	82.00	9.31	24.04	2.2475
	31	11.03	21.01	-60.45	85.23	9.48	24.32	2.2056
	32	11.35	21.27	-57.80	86.87	9.64	24.56	2.1646
	33	11.66	21.49	-64.11	92.25	9.83	24.75	2.1224
	34	12.00	21.68	-71.39	96.87	10.12	24.91	2.0763
	35	12.35	21.86	-76.96	100.10	10.36	25.06	2.0294
	36	12.75	22.11	-81.48	101.30	10.75	25.28	1.9824
	37	13.15	22.46	-83.99	105.45	11.05	25.65	1.9506
	38	13.58	22.94	-90.64	197.82	11.37	26.33	1.9385
	39	18.07	27.68	-96.94	64453.72	11.47	509.71	26.2033

FIGURE B.8 –

Tableau B6 (suite): Comparaison de la performance de tarifications en fonction de la maturité

Modèle	Caplet	Moyenne	Moyenne (en absolue)	Minimum	Maximum	Médiane	Écart-type	Coefficient de variation
SABR/LMM	01	24.44	89.56	-2077.96	3292.89	0.00	329.10	13.4633
	02	4.94	45.63	-209.75	2237.39	0.10	175.25	35.4443
	03	11.07	35.60	-132.01	1944.20	1.16	118.45	10.7023
	04	17.97	29.36	-75.42	273.07	4.63	43.68	2.4307
	05	32.90	35.92	-42.19	287.99	11.25	47.70	1.4500
	06	45.53	45.86	-32.55	293.73	20.78	53.32	1.1711
	07	55.61	55.72	-26.48	292.92	30.76	58.62	1.0542
	08	63.29	63.36	-22.62	301.30	38.84	63.00	0.9954
	09	68.97	69.02	-18.11	307.32	44.45	66.32	0.9615
	10	73.17	73.20	-13.23	311.45	47.64	68.71	0.9390
	11	76.39	76.40	-8.18	312.91	50.44	70.40	0.9216
	12	79.09	79.09	-3.27	312.44	52.48	71.63	0.9056
	13	81.61	81.61	0.88	313.96	54.60	72.59	0.8895
	14	84.15	84.15	2.09	316.17	57.45	73.42	0.8725
	15	86.84	86.84	1.97	319.30	60.22	74.27	0.8553
	16	89.70	89.70	1.88	323.27	63.47	75.19	0.8382
	17	92.69	92.69	1.84	327.38	67.34	76.18	0.8219
	18	95.71	95.71	1.69	331.15	70.67	77.22	0.8068
	19	98.68	98.68	1.60	334.62	74.14	78.23	0.7928
	20	101.51	101.51	1.58	339.98	77.39	79.19	0.7801
	21	104.18	104.18	1.63	346.64	80.46	80.05	0.7684
	22	106.69	106.69	1.72	352.51	83.75	80.81	0.7574
	23	109.07	109.07	1.90	356.99	87.02	81.47	0.7470
	24	111.34	111.34	2.10	360.27	89.72	82.02	0.7367
	25	113.53	113.53	2.24	362.16	92.33	82.46	0.7283
	26	115.66	115.66	2.45	362.99	95.48	82.80	0.7158
	27	117.76	117.76	2.73	363.00	98.44	83.06	0.7054
	28	119.79	119.79	3.11	364.16	101.03	83.27	0.6951
	29	121.77	121.77	3.59	366.12	103.48	83.41	0.6850
	30	123.63	123.63	2.84	367.48	106.12	83.49	0.6753
	31	125.34	125.34	-3.93	368.04	108.49	83.49	0.6661
	32	126.89	126.89	-10.55	368.71	110.62	83.43	0.6575
	33	128.27	128.27	-16.40	372.76	112.26	83.26	0.6493
	34	129.48	129.49	-20.94	378.17	114.10	83.07	0.6416
	35	130.55	130.56	-23.69	384.14	115.53	82.80	0.6342
	36	131.49	131.51	-24.27	391.30	116.32	82.50	0.6274
	37	132.37	132.39	-22.53	399.50	117.86	82.16	0.6207
	38	133.21	133.26	-26.17	407.96	118.94	81.86	0.6145
	39	138.11	138.24	-45.10	64472.14	120.54	514.71	3.7269