



HEC Montréal

École affiliée à l'Université de Montréal

Trois essais sur l'évaluation d'options exotiques :  
options américaines, fonds distincts, et options sur l'électricité

par

Ali Boudhina

Service de l'enseignement des  
méthodes quantitatives de gestion

Thèse présentée à la faculté des études supérieures en vue de l'obtention du  
grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.) en Administration

Juin 2014

Copyright, Ali Boudhina, 2014



HEC Montréal  
École affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :  
Trois essais sur l'évaluation d'options exotiques :  
options américaines, fonds distincts, et options sur l'électricité

présentée par :  
Ali Boudhina

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Geneviève Gauthier  
HEC Montréal  
Présidente-rapporteuse

Michèle Breton  
HEC Montréal  
Directrice de recherche

Komlan T. Sedzro  
Université du Québec à Montréal  
Membre du jury

Olivier Scaillet  
HEC Genève  
Examineur externe

Pascal François  
HEC Montréal  
Représentant du directeur de HEC Montréal



# Résumé

On trouve aujourd'hui sur le marché financier des produits dérivés dont la complexité dépasse de loin les options européennes de vente ou d'achat. Les agents économiques qui transigent ces produits ont besoin de pouvoir les évaluer, les couvrir, et d'en mesurer la sensibilité. Même sous des hypothèses simples sur la dynamique du prix de l'actif sous-jacent au contrat, il est rare que l'on puisse obtenir des solutions analytiques sous forme fermée pour ces produits complexes, et on doit avoir recours à des méthodes numériques. Cette thèse utilise l'une des méthodes d'approximation de la programmation dynamique, c'est-à-dire l'interpolation de la valeur du contrat par des splines cubiques. Cette technique est appliquée à l'évaluation de différents produits dérivés et contrats financiers, sous diverses hypothèses quant à la dynamique du prix de l'actif sous-jacent.

Le chapitre introductif présente brièvement une revue des méthodes numériques de base et donne les détails de l'algorithme d'approximation par splines cubiques pour le cas des options bermudiennes. Les méthodes proposées par la suite sont des généralisations de cet algorithme de base.

Le deuxième chapitre propose une nouvelle méthode d'évaluation des options de vente américaines de longue échéance. Alors que la majorité des approches existantes se basent sur une approximation de la stratégie optimale en temps discret, cette nouvelle approche permet l'exercice en temps continu en optimisant une stratégie représentée par une frontière d'exercice constante entre deux dates de discrétisation du temps. L'optimisation de cette stratégie à barrière couplée à l'approximation par splines cubiques permet d'accélérer la convergence du prix de l'option. Les tests numériques montrent que cette approche est plus efficace que l'approche par les options bermudiennes, notamment dans le cas des options de longue échéance et de haute volatilité.

Le troisième chapitre utilise l'approximation par splines cubiques pour calculer la valeur de contrats de fonds distincts sous l'hypothèse conservatrice d'une stratégie d'exercice optimale du détenteur. L'algorithme d'évaluation permet de tenir compte d'une volatilité stochastique représentée par un modèle log normal avec changements de régime. Des exemples illustratifs montrent que l'algorithme peut être adapté à l'évaluation d'un grand nombre de garanties offertes par les fonds distincts.

Le quatrième chapitre s'intéresse au prix de l'électricité comme sous-jacent de contrats financiers, en supposant que ce prix est représenté par un modèle de retour à la moyenne à deux

facteurs. Après avoir proposé une procédure pour estimer ce modèle, ce chapitre exploite la technique d'approximation par les splines cubiques pour évaluer aussi bien des options vanilles que des options exotiques, telles que les options swing.

L'approche numérique proposée dans cette thèse représente une alternative précise, efficace et simple pour l'évaluation de produits dérivés financiers. Le point fort de la méthode réside dans sa flexibilité, tel qu'on peut le constater par les diverses applications proposées. Cette flexibilité se manifeste aussi bien au niveau de la dynamique du sous-jacent (modèle avec changements de régime) que du nombre de facteurs stochastiques (prix de l'électricité) ou du nombre de variables d'état discrètes (garanties des fonds distincts).

**Mots clés : Évaluation de produits dérivés, programmation dynamique, interpolation, option américaine, fonds distincts, dérivés de l'électricité.**

# Abstract

The financial derivatives market now includes products whose complexity far exceeds European call or put options. Economic agents trading these products need to be able to evaluate and hedge them, as well as to assess their sensitivity to model parameters. Even under simple assumptions about the dynamics of contracts' underlying assets, one can rarely obtain analytical solutions in closed-form for these complex products, and must resort to numerical methods. This technique is applied to the evaluation of various derivatives and financial contracts, under different assumptions about the dynamics of the underlying asset price.

The introductory chapter presents a brief review of basic numerical methods and details the cubic splines approximation algorithm in the case of Bermudan options. The methods proposed in the sequel are generalizations of this basic algorithm.

The second chapter proposes a new evaluation method for long-maturity American put options. While most existing approaches are based on an approximation of the optimal strategy in discrete time, this new approach allows for continuous-time exercise opportunities by optimizing a constant exercise barrier strategy between two discretized dates. The optimization of this barrier strategy, coupled with cubic spline approximation, provides faster convergence of the option price. Numerical tests show that this method is more efficient than the approach using Bermudian options, particularly in the case of long-maturity and high-volatility options.

The third chapter uses cubic spline approximation to evaluate segregated fund contracts under the conservative assumption of an optimal exercise strategy of the holder. The algorithm accounts for stochastic volatility by using a regime-switching log-normal assumption. Illustrative examples show that the algorithm can be adapted to the evaluation of a large number of guarantees offered by segregated funds.

The fourth chapter focuses on electricity prices as the underlying asset of financial contracts, assuming that this price is represented by a two-factor mean reversion model. After proposing a model calibration procedure, this chapter uses the cubic spline approximation approach to evaluate both vanilla and exotic (e.g. swing) options.

The numerical approach proposed in this thesis is an accurate, efficient and simple alternative for the evaluation of financial derivatives products. The strong point of the method lies in its flexibility, as can be seen by the various applications proposed. This flexibility is reflected in terms of the underlying asset price dynamics (regime switching model), the number of

stochastic factors (electricity prices), or the number of discrete state variables (segregated fund guarantees).

**Keywords :** Derivative valuation, dynamic programming, interpolation, American option, segregated funds, electricity derivatives.

# Table des matières

Résumé . . . . .	iii
Abstract . . . . .	v
Table des matières . . . . .	vii
Liste des tableaux . . . . .	x
Liste des figures . . . . .	xii
Liste des symboles . . . . .	xvii
Remerciements . . . . .	xxii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Généralités . . . . .	1
1.2 Le modèle Black-Merton-Scholes . . . . .	2
1.3 Approches numériques classiques . . . . .	4
1.3.1 Arbre binomial . . . . .	4
1.3.2 Méthode des différences finies . . . . .	5
1.3.3 Simulation de Monte-Carlo . . . . .	7
1.4 Programmation dynamique . . . . .	8
1.4.1 Formulation générale . . . . .	8

1.4.2	Évaluation d'une option de vente bermudienne . . . . .	9
1.4.3	Interpolation par splines . . . . .	10
1.4.4	Calcul de la valeur de l'espérance conditionnelle . . . . .	12
1.4.5	Algorithme . . . . .	14
1.5	Conclusion . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Utilisation des options exotiques pour l'évaluation d'options américaines de longue échéance</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Approche par les options bermudiennes . . . . .	20
2.3	Approche par un portefeuille d'options à barrière . . . . .	22
2.3.1	Les options . . . . .	22
2.3.2	Stratégie d'exercice constante . . . . .	23
2.3.3	Stratégie à deux barrières . . . . .	24
2.3.4	Stratégie à $M$ barrières . . . . .	25
2.4	Approche par les options Bermudiennes corrigées . . . . .	28
2.5	Conclusion . . . . .	34
2.6	Annexe : Calcul de la fonction $\Psi$ . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Évaluation des garanties offertes par les fonds distincts</b>	<b>38</b>
3.1	Introduction . . . . .	38
3.2	Modèle lognormal avec changements de régime . . . . .	41
3.2.1	Présentation . . . . .	41

3.2.2	Estimation du modèle . . . . .	43
3.2.3	Évaluation d'une garantie à l'échéance . . . . .	44
3.3	Évaluation d'une garantie au décès et à l'échéance avec possibilité de sortie .	46
3.3.1	Modèle et algorithme . . . . .	46
3.3.2	Technique d'approximation . . . . .	48
3.3.3	Illustration numérique et analyse de sensibilité . . . . .	50
3.4	Évaluation des contrats de garantie comportant des options de revalorisation	54
3.4.1	Rétablissement périodique . . . . .	54
3.4.2	Option verrou . . . . .	58
3.5	Garantie de retrait minimal . . . . .	60
3.5.1	Modèle . . . . .	62
3.5.2	Retrait minimal avec option de revalorisation . . . . .	65
3.5.3	Illustrations numériques . . . . .	65
3.6	Conclusion . . . . .	69
3.7	Annexes : . . . . .	70
3.7.1	Algorithme de calcul de la distribution du temps de séjour $g$ . . . . .	70
3.7.2	Interpolation par spline linéaire/cubique . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Évaluation de dérivés de l'électricité</b>	<b>72</b>
4.1	Modélisation du prix au comptant de l'électricité . . . . .	74
4.1.1	Revue de la littérature . . . . .	74
4.1.2	Modèle à deux facteurs . . . . .	76

4.2	Estimation du modèle . . . . .	77
4.2.1	La fonction de saisonnalité . . . . .	78
4.2.2	Les paramètres des composantes stochastiques . . . . .	78
4.2.3	Filtration des facteurs . . . . .	79
4.2.4	Estimation neutre au risque . . . . .	84
4.3	Algorithme d'évaluation . . . . .	87
4.3.1	Interpolation de la fonction valeur . . . . .	88
4.3.2	Calcul de l'espérance mathématique . . . . .	90
4.3.3	Algorithme . . . . .	91
4.4	Illustrations numériques . . . . .	92
4.4.1	Options européennes . . . . .	92
4.4.2	Options américaines . . . . .	96
4.5	Évaluation de dérivés exotiques . . . . .	97
4.5.1	Approximation par un retour à la moyenne infini . . . . .	101
4.5.2	Le cas des options swing . . . . .	103
4.6	Conclusion . . . . .	104
4.7	Annexe : . . . . .	105
	<b>Conclusion générale</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>

# Liste des tableaux

2.1	Valeur d'une option bermudienne en fonction du nombre d'opportunités d'exercice. Les paramètres sont $K = 100$ , $r = 4\%$ , $\sigma = 20\%$ . . . . .	21
2.2	Valeur d'une option bermudienne en fonction du nombre d'opportunités d'exercice, Les paramètres sont $K = 100$ , $r = 4\%$ , $\sigma = 40\%$ . . . . .	21
2.3	Évaluation d'une option de vente américaine par un portefeuille d'options à barrière, Les paramètres sont $K = 100$ , $r = 4\%$ , $\sigma = 20\%$ . . . . .	29
2.4	Évaluation d'une option de vente américaine par un portefeuille d'options à barrière. Les paramètres sont $K = 100$ , $r = 4\%$ , $\sigma = 40\%$ . . . . .	29
2.5	Évaluation d'une option de vente américaine à partir d'une option bermudienne corrigée. Les paramètres sont $K = 100$ , $r = 4\%$ , $\sigma = 20\%$ . . . . .	32
2.6	Évaluation d'une option de vente américaine par une option bermudienne corrigée. Les paramètres sont $K = 100$ , $r = 4\%$ , $\sigma = 40\%$ . . . . .	33
3.1	Estimation des régimes de volatilité. . . . .	43
3.2	Estimation des probabilités de transition . . . . .	44
3.3	Paramètres du cas de base. . . . .	50
4.1	Description de la série des prix journaliers du <i>Mass Hub</i> . . . . .	82
4.2	Résultats de la première étape d'estimation. . . . .	82
4.3	Application du filtre particulière. . . . .	83

4.4	Estimation de la prime de risque de marché. . . . .	86
4.5	Option de vente européenne, prix d'exercice $K = 36$ . . . . .	93
4.6	Option de vente européenne, prix d'exercice $K = 40$ . . . . .	94
4.7	Option de vente européenne, prix d'exercice $K = 44$ . . . . .	95
4.8	Comparaison entre les prix d'options européennes et américaines, prix d'exercice $K = 36$ . . . . .	98
4.9	Comparaison entre les prix d'options européennes et américaines, prix d'exercice $K = 40$ . . . . .	99
4.10	Comparaison entre les prix d'options européennes et américaines, prix d'exercice $K = 44$ . . . . .	100

# Liste des figures

1.1	Convergence de l'interpolation par splines à la valeur exacte d'une option de vente européenne. Les paramètres sont $\sigma = 20\%$ , $r = 4\%$ , $K = 100$ , $T = 1$ et $M = 2$ . . . . .	15
2.1	Convergence de l'erreur d'approximation selon le nombre de pas de temps, $r = 4\%$ , $K = 100$ . Les valeurs rapportées sont les moyennes des résultats pour $s = 90, 100$ et $110$ . . . . .	33
2.2	Erreur d'approximation en fonction du temps de calcul, $r = 4\%$ , $K = 100$ . Les valeurs rapportées sont les moyennes des résultats pour $s = 90, 100$ et $110$ . . . . .	34
3.1	Estimation des régimes. . . . .	43
3.2	Valeur d'un contrat de garantie à la maturité et au décès selon la valeur relative du fonds pour différents niveaux de frais périodiques, $T = 10$ , $x = F$ . . . . .	51
3.3	Frontière de liquidation du contrat en fonction du temps écoulé pour différentes pénalités, $T = 10$ , $x = F$ . . . . .	51
3.4	Impact de la pénalité sur la valeur du contrat, $T = 10$ , $x = F$ , $q = 2\%$ . . . . .	52
3.5	Taux de frais concurrentiel selon le niveau de la pénalité, $x = L$ , $T = 10$ . . . . .	53
3.6	Sensibilité de la valeur du contrat au régime initial de volatilité et à l'âge du détenteur, $T = 10$ , $q = 2\%$ , $\theta = 5\%$ . . . . .	53
3.7	Impact de la fréquence de revalorisation sur la valeur du contrat, $T = 10$ , $q = 2\%$ , $x = F$ , $\theta = 5\%$ . . . . .	56

3.8	Niveau de frais concurrentiel en fonction du niveau de la garantie pour différents contrats. GM : garantie à l'échéance ; GD : garantie au décès. . . . .	57
3.9	Écarts de taux correspondant à chaque garantie. . . . .	58
3.10	Valeur du contrat en fonction du niveau relatif du fond selon différentes valeurs pour le nombre maximal d'options verrou pour un homme de 60 ans, où $q = 2\%$ , $\theta = 5\%$ et $M = 10$ . . . . .	60
3.11	Valeur des options verrou pour un homme de 60 ans lorsque $q = 2\%$ et $\theta = 5\%$ . . . . .	61
3.12	Valeur du contrat en fonction de la pénalité et du taux de frais en présence des options verrou . . . . .	61
3.13	Comparaison de la valeur des contrats de garantie avec options verrou . . . . .	62
3.14	Valeur du contrat de retrait minimal en fonction de la garantie $K$ et de la valeur $s$ investie dans le fond pour un régime de volatilité $F$ , $q = 2,5\%$ et $v = 5\%$ . . . . .	66
3.15	Evolution de la valeur du contrat de retrait minimal pour 3 niveaux de $K$ en fonction de la valeur $s$ investie dans le fond pour un régime de volatilité $F$ , $q = 2,5\%$ et $v = 5\%$ . . . . .	66
3.16	Évolution du prix du contrat en fonction du niveau de frais $q$ , de la pénalité $v$ et du régime de volatilité. . . . .	68
3.17	Frontière de liquidation pour un régime de volatilité $F$ , $q = 2,5\%$ , $m = 5$ . . . . .	68
4.1	Fonction de saisonnalité. Le prix moyen est plus élevé pour les mois très chauds et les mois très froids. . . . .	78
4.2	Procédure de calibrage du modèle : 1) estimation de la composante déterministe, 2) filtration des sauts en utilisant le séparateur $\kappa$ et estimation des cinq premiers paramètres, 3) optimisation de la fonction de vraisemblance du filtre particulière pour l'estimation de $\beta, x$ et $y$ . . . . .	80

4.3	Performance d'estimation d'un processus simulé avec le filtre particulaire. pour les paramètres suivants $\alpha = 23,362$ , $\sigma_X = 1,473$ , $\beta = 230$ , $\sigma_J = 0,062$ , $\mu_J = 0,280$ , $\vartheta = 0,061$ . . . . .	81
4.4	Distribution de l'erreur d'estimation de $X$ et de $Y$ . . . . .	81
4.5	Fonction de vraisemblance pour différents niveaux de retour à la moyenne $\beta$ et différents seuils $\kappa$ . . . . .	83
4.6	Résultat de la filtration du processus $Z_t$ pour $\kappa=2,32$ . . . . .	84
4.7	Surface de prix d'une option européenne pour $K = 40$ et $T = 40$ jours. . . . .	96
4.8	Prix d'une option de vente américaine pour $T = 40$ jours et $K = 40$ . . . . .	97
4.9	Variation du prix d'un contrat swing de maturité $T = 30$ jours, $\bar{e} = 3$ et de prix d'exercice $K = 40$ en fonction de la pénalité $\theta$ et la valeur de $x$ . . . . .	103
4.10	Variation du prix du contrat swing en fonction du nombre d'exercices résiduels $o$ pour un contrat de maturité $T = 30$ jours, $\bar{e} = 3$ et de prix d'exercice $K = 40$ , lorsque $x = 0$ et $y = 0$ . . . . .	104



# Liste des symboles

## Notation générale

$\max\{x; y\}$ :	la fonction donnant le maximum entre deux réels $x$ et $y$
$(x)^+$ :	la fonction $\max\{x; 0\}$
$\frac{\partial}{\partial x}$ :	première dérivée partielle sur $x$
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ :	deuxième dérivée partielle sur $x$
$V'$ :	dérivée première de la fonction $V$
$V''$ :	dérivée seconde de la fonction $V$
$V(s^+)$ :	limite à droite de $V$ au point $s$
$V(s^-)$ :	limite à gauche de $V$ au point $s$
$\mathbb{E}_x[\cdot]$ :	espérance mathématique, conditionnelle à l'information $x$
$\mathbb{I}_x A$ :	fonction indicatrice de $x \in A$
$\mathbb{I}_K$ :	fonction indicatrice de l'événement $K$
$\mathbb{R}^n$ :	ensemble des vecteurs à variables réelles à $n$ dimensions
$\emptyset$ :	ensemble vide
$\Phi(\cdot)$ :	fonction de distribution normale standard
$\phi(\cdot)$ :	fonction de densité normale standard
$\phi(\cdot; \mu, \sigma)$ :	fonction de densité de la loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart type $\sigma$
$N(0, 1)$ :	loi normale centrée réduite
$\epsilon$ :	variable aléatoire normale centrée et réduite
$P$ :	mesure de probabilité physique
$Q, \tilde{Q}$ :	mesure de probabilité risque neutre
$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ :	filtration
$t$ :	temps
$\tau$ :	temps de premier passage

## Marché

$R_m$ :	rendement entre $t_{m-1}$ et $t_m$ .
$S_t$ :	processus de prix
$W_t, \widetilde{W}_t$ :	mouvement brownien standard
$\mu$ :	moyenne physique des rendements de prix
$\widehat{\mu}$ :	moyenne des rendements de prix en mesure neutre au risque
$\sigma$ :	volatilité
$r$ :	taux sans risque
$\rho$ :	facteur d'actualisation

## Contrats

$\mathcal{T}$ :	ensemble de dates d'exercice
$\Gamma$ :	ensemble des décisions admissibles
$\gamma$ :	décision
$\chi$ :	fonction de paiement
$K$ :	prix d'exercice
$T$ :	échéance
$\zeta(\cdot)$ :	fonction de flux monétaires
$H_t$ :	vecteur des caractéristiques observables du sous-jacent à la date $t$
$o_m$ :	vecteur des caractéristiques observables du contrat à la date $t_m$

## Évaluation

$V_m, V_m^x$ :	fonction valeur de la programmation dynamique à l'étape $m$
$\widehat{V}$ :	interpolation d'une fonction $V$
$\mathcal{G}_n$ :	grille de $n$ points définie sur un espace d'état
$\delta$ :	pas de temps
$c_{ik}^m$ :	coefficients d'une fonction d'interpolation par splines, étape $m$ , intervalle $i$ et degré $k$
$\Omega(\cdot), \Psi(\cdot)$ :	matrices de transition pour l'approximation spline
$s$ :	variable d'état représentant le prix

## Notation spécifique au premier chapitre

- $S_{it_j}$  : prix de l'actif  $i$  à la date  $t_j$   
 $S_{mj}$  : prix de l'actif au noeud  $(j, m)$   
 $V_{mj}$  : valeur de l'option au noeud  $(m, j)$   
 $\delta_t$  : pas de discrétisation du temps  
 $\delta_s$  : pas de discrétisation des prix  
 $u$  : multiplicateur à la hausse de l'arbre binomial  
 $q$  : probabilité de hausse  
 $v(\cdot)$  : fonction de prix d'une option

## Notation spécifique au deuxième chapitre

- $\mathcal{U}(X)$  : ensemble des fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}_+$   
 $\mathcal{V}$  : ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$   
 $B$  : barrière ou frontière d'exercice  
 $C_{BS}(\cdot)$  : prix d'une option d'achat européenne dans le modèle Black et Scholes  
 $D(\cdot)$  : prix d'une option DO  
 $F(\cdot)$  : prix d'une option FT  
 $\bar{P}(\cdot)$  : prix d'une option américaine  
 $P^k(\cdot)$  : prix d'une option de vente par l'approche à  $k$  barrières constantes  
 $A_m(s)$  : fonction valeur par l'approche bermudienne corrigée  
 $s_m^*$  : frontière d'exercice à la date  $t_m$

## Notation spécifique au troisième chapitre

$X \in \{E, F\}$ :	régime de volatilité
$\Delta$ :	pas de discretisation pour l'approximation du changement de régime
$p_{xy}$ :	probabilité de passage du régime $x$ au régime $y$
$\xi(\cdot)$ :	fonction de distribution des rendements sous changement de régime
$f(\cdot)$ :	fonction de transition
$g(\cdot)$ :	fonction de distribution du temps de séjour sous le régime $E$
$\widehat{g}$ :	discrétisation de d'une fonction de distribution $g$
$P_m$ :	probabilité de décès entre les date $t_m$ et $t_{m+1}$
$\theta_m$ :	pénalité de liquidation à la date $t_m$
$q$ :	taux des frais périodiques
$q^*$ :	niveau de frais concurrentiel
$\Lambda$ :	retrait contractuel périodique
$v$ :	taux de pénalité pour un retrait supérieur au retrait contractuel
$U$ :	nombre maximal de rétablissements par année
$u$ :	variable d'état représentant le nombre de rétablissements disponibles

## Notation spécifique au quatrième chapitre

$J_t$ :	saut à la date $t$
$N_t$ :	processus de Poisson représentant le nombre de sauts
$X_t$ :	facteur aléatoire de retour à la moyenne avec innovation gaussienne
$Y_t$ :	facteur aléatoire de retour à la moyenne avec sauts
$f_t$ :	fonction de saisonnalité
$\vartheta$ :	paramètre de la loi de Poisson
$\alpha$ :	constante de retour à la moyenne
$\beta$ :	constante de retour à la moyenne
$\Upsilon$ :	ensemble discret des valeurs possible pour $\beta$
$\kappa$ :	seuil de séparation des sauts
$\lambda$ :	prime de risque
$\sigma_X$ :	volatilité du facteur de retour à la moyenne $X$
$\mu_J$ :	moyenne des sauts
$\sigma_J$ :	volatilité des sauts
$v(\cdot)$ :	prix d'un contrat à terme
$\bar{e}$ :	nombre de droits exercices maximal
$l(\cdot)$ :	fonction de vraisemblance du filtre particulière
$o$ :	variable d'état représentant le nombre d'exercices résiduels

# Remerciements

Je tiens à adresser mes plus grands remerciements et ma plus profonde reconnaissance à l'égard de mon professeur et directrice de recherche Michèle Breton, pour l'encadrement, la patience, la confiance et le soutien qu'elle n'a cessé de m'apporter non seulement pendant les années de thèse, mais aussi depuis mes débuts à HEC Montréal. Merci Michèle!

Je tiens aussi à témoigner ma gratitude à ma mère pour tous ses grands sacrifices qui m'ont permis d'avancer et de continuer mes études.

Je remercie aussi ma conjointe qui a dû supporter mes longues nuits de travail et qui n'a arrêté de m'encourager dans les moments les plus difficiles.

Je remercie également mon frère Adel et mes amis Saad, Faouzi, Marc, Oussama, Mahdi, Kais et pleins d'autres qui m'ont accompagné par leur support et leurs bonnes paroles dans cette traversée solitaire.

Je remercie aussi mes collègues à Deloitte, avec qui le travail m'a été d'une grande inspiration, ainsi que l'IFM2 et le CRSNG pour le financement de cette recherche.

Je dédie finalement ce travail à deux personnes chères et qui ne sont pas de notre monde : Mon père, décédé, qui aimait tant la science, et ma fille Malak qui devrait venir au monde dans quelques mois.

# Chapitre 1

## Introduction

Les besoins de couvertures ou de spéculations amènent les institutions financières à développer et à proposer des produits de plus en plus exotiques. Même sous les hypothèses les plus simples, l'utilisation d'approches analytiques permet rarement d'évaluer de tels produits sous forme fermée et on doit généralement recourir à des approches numériques. On présente ici une brève revue des approches numériques classiques utilisées pour l'évaluation de produits financiers dérivés, et plus particulièrement pour l'évaluation d'options bermudiennes. On y introduit les méthodes de différences finies, l'arbre binomial et l'approche par simulation-régression. On présente ensuite l'approche générale d'approximation de la programmation dynamique qui sera utilisée tout au long de cette thèse.

### 1.1 Généralités

Un produit dérivé est un instrument financier dont la valeur dépend de celle d'un autre actif, appelé actif sous-jacent. Une *option* est un produit dérivé qui donne à son détenteur le droit, et non l'obligation, de toucher un montant fixé par contrat (la *fonction de paiement*) dont la valeur dépend de celle de l'actif sous-jacent. Les options sont caractérisées par leur échéance, leur fonction de paiement, et leurs dates d'exercice.

Ainsi, la fonction de paiement d'une *option de vente* est donnée par

$$\begin{aligned}\chi(s) &= (K - s)^+ \\ &\equiv \max \{K - s, 0\},\end{aligned}$$

alors que la fonction de paiement d'une *option d'achat* est donnée par

$$\chi(s) = (s - K)^+,$$

où  $s$  est le prix de l'actif sous-jacent et  $K$  est appelé le *prix d'exercice*.

Par ailleurs, une option *européenne* peut être exercée seulement à la date d'échéance, une option *bermudienne* peut être exercée à un nombre fini de dates définies dans le contrat, et une option *américaine* peut être exercée à n'importe quel moment jusqu'à la date d'échéance.

L'évaluation d'un titre contingent consiste à déterminer la valeur du contrat décrivant l'instrument financier. Cette valeur dépend évidemment des caractéristiques du contrat, mais aussi de la valeur de l'actif sous-jacent et des anticipations des agents économiques quant à son évolution au cours de la vie du contrat.

## 1.2 Le modèle Black-Merton-Scholes

Sous les hypothèses du modèle de Black et Scholes (1973), la dynamique du prix de l'actif sous-jacent peut être exprimée en temps continu sous la forme d'un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

où  $S_t$  est processus de prix de l'actif sous-jacent,  $\mu$  et  $\sigma$  sont deux constantes, et  $W_t$  est un mouvement brownien standard dont la filtration naturelle augmentée est notée  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ .

On considère une option de vente européenne de prix d'exercice  $K$  et échéance  $T$  écrite sur cet actif sous-jacent. Sous une condition d'absence d'opportunité d'arbitrage, l'application du lemme d'Itô permet de montrer que le prix  $v$  de cette option vérifie l'équation aux dérivés partielles (EDP) suivante :

$$\frac{\partial v(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, s)}{\partial s} r s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v(t, s)}{\partial s^2} \sigma^2 s^2 = r v(t, s) \quad (1.1)$$

avec la condition aux bornes

$$v(T, s) = (K - s)^+,$$

où  $r$  est le taux d'intérêt sans risque. La solution de cette EDP permet de retrouver la formule

analytique de Black et Scholes :

$$v(0, s) = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - s\Phi(-d_1) \quad (1.2)$$

où  $\Phi$  est la distribution cumulative normale centrée et réduite, avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{s}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Le même prix peut être obtenu en utilisant ce qu'on appelle l'approche martingale ; en effet, sous les hypothèses de Black et Scholes, le prix d'un produit dérivé est donné par l'espérance mathématique de ses flux futurs, évaluée sous la mesure de probabilité neutre au risque, c'est-à-dire :

$$v(t, s) = \mathbb{E}^Q [e^{-r(T-t)}v(T, S_T)|S_t = s] \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

La mesure de probabilité neutre au risque  $Q$  est une probabilité équivalente à la probabilité physique  $P$ , sous laquelle la dynamique de  $S$  s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t^Q \quad (1.4)$$

dont la solution donne pour  $t > 0$  :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\epsilon\right) \text{ avec } \epsilon \sim N(0, 1). \quad (1.5)$$

Dans la suite de cet ouvrage, on utilisera la notation

$$\mathbb{E}_{st}[\cdot] = \mathbb{E}^Q[\cdot|\mathcal{F}_t = s]$$

et la constante  $\hat{\mu}$  représentera toujours la quantité

$$\hat{\mu} \equiv r - \frac{\sigma^2}{2}.$$

On a donc en particulier

$$v(0, s) = \mathbb{E}_{s0} [e^{-rT}(K - S_T)^+] \quad (1.6)$$

En injectant l'expression (1.5) dans la forme martingale du prix (1.6), on retrouve le prix de

l'option de vente américaine donnée par (1.2).

## 1.3 Approches numériques classiques

Lorsque le contrat prévoit la possibilité d'un exercice anticipé, il n'existe généralement plus de solution analytique permettant d'obtenir le prix d'une option sous forme fermée. Cette section présente brièvement les approches numériques les plus utilisées pour l'évaluation de produits dérivés financiers. Ces méthodes sont présentées dans le contexte particulier de l'évaluation d'une option de vente américaine ou bermudienne, toutefois il est facile de faire l'adaptation nécessaire pour l'évaluation d'autres types de produits dérivés.

### 1.3.1 Arbre binomial

Cette approche a été proposée par Cox et al. (1979) dans le cadre d'un marché en temps discret, où on suppose que les trajectoires possibles du prix de l'actif sous-jacent sont représentées par un arbre. À chaque pas de temps de longueur  $\delta = \frac{T}{M}$ , le prix de l'actif sous-jacent peut prendre deux valeurs possibles, soit à la hausse par un facteur  $u > 1$  ou à la baisse par un facteur  $1/u$ . La valeur de ce paramètre est obtenue par un ajustement des moments de la distribution du prix de l'actif sous-jacent, soit

$$u = \exp(\sigma\sqrt{\delta}).$$

L'arbre binomial définit le prix de l'actif sous-jacent à chaque noeud  $(j, m)$ , où  $m$  représente le nombre de pas de temps écoulés et  $j$  le nombre de hausses du prix de l'actif, par

$$S_{mj} = su^{2j-m}, \quad 0 \leq j \leq m, \quad 0 \leq m \leq M,$$

où  $s$  est le prix de l'actif sous-jacent à la date d'évaluation. On utilise ensuite un argument d'absence d'opportunité d'arbitrage pour associer une probabilité risque neutre notée  $q$  à l'événement d'une hausse du prix, soit

$$q = \frac{ue^{r\delta} - 1}{u^2 - 1}.$$

La valeur  $V_{mj}$  d'une option américaine au noeud  $(m, j)$  est alors obtenue par récursion arrière par l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned}
V_{Mj} &= (K - S_{Mj})^+ \text{ pour } j = 0, \dots, M \\
V_{mj} &= \max \left\{ (K - S_{mj})^+, qV_{m+1, j+1} + (1 - q)V_{m+1, j} \right\}, \\
&\quad 0 \leq j \leq m, \quad 1 \leq m \leq M \\
V_{00} &= qV_{11} + (1 - q)V_{10}.
\end{aligned}$$

L'arbre binomial a été généralisé de plusieurs façons, dont les modèles d'arbres trinomiaux (Boyle et al. 1989) ou multinomiaux (Kamrad et Ritchken 1991), qui considèrent un plus grand nombre de possibilités de changement dans la valeur du prix à chaque pas de temps, ou les méthodes de treillis (Boyle 1988), qui considèrent plus qu'une valeur possible à l'initialisation du contrat. Il est possible de l'utiliser pour évaluer des produits écrits sur des sous-jacents multidimensionnels, bien qu'on se heurte alors rapidement à la malédiction de la dimension. Cette approche est aussi à la base de nombreuses méthodes d'évaluation dites robustes ou indépendantes des distributions (voir par exemple Bernhard et al. 2010).

### 1.3.2 Méthode des différences finies

De façon analogue à l'option européenne, on peut montrer que le prix  $v(t, s)$  d'une option de vente américaine en  $(t, s)$  obéit à l'EDP suivante :

$$\left( \frac{\partial v(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, s)}{\partial s}rs + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v(t, s)}{\partial s^2} \sigma^2 s^2 - rv(t, s) \right) (v(t, s) - (K - s)^+) = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial v(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, s)}{\partial s}rs + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v(t, s)}{\partial s^2} \sigma^2 s^2 - rv(t, s) \leq 0 \quad (1.8)$$

$$v(t, s) - (K - s)^+ \geq 0 \quad (1.9)$$

avec les conditions aux bornes

$$\begin{aligned} v(T, s) &= (K - s)^+ \\ \lim_{s \rightarrow \infty} v(t, s) &= 0 \\ v(t, 0) &= K \end{aligned}$$

La méthode des différences finies Schwartz (1977) consiste à obtenir une solution numérique de l'EDP (1.7)-(1.9) en discrétisant l'espace des prix et du temps et en écrivant l'EDP sous une forme discrétisée. Plusieurs schémas de discrétisation sont possibles, l'un des plus connus est le schéma implicite d'Euler selon lequel la discrétisation de l'EDP est la suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{V_{mj} - V_{m-1,j}}{\delta_t} + rj\delta_s \frac{V_{m-1,j+1} - V_{m-1,j-1}}{2\delta_s} \\ &+ \frac{V_{m-1,j+1} - 2V_{m-1,j} + V_{m-1,j-1}}{2\delta_s^2} (\sigma j \delta_s)^2 = rV_{m-1,j} \end{aligned}$$

où  $\delta_t$  et  $\delta_s$  représentent les pas de discrétisation respectifs du temps et du prix. Il est facile de voir qu'en posant

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{2}\delta_t(rj - \sigma^2 j^2) \\ B_j &= 1 + \delta_t(r + \sigma^2 j^2) \\ C_j &= -\frac{1}{2}\delta_t(rj + \sigma^2 j^2), \end{aligned}$$

la résolution de l'EDP discrétisée se ramène à la solution de systèmes d'équations linéaires pour  $m = 0, \dots, M$  :

$$V_{mj} = A_j V_{m-1,j-1} + B_j V_{m-1,j} + C_j V_{m-1,j+1}, \quad (1.10)$$

$$\text{pour } j = 1, \dots, n \quad (1.11)$$

D'autres schémas de discrétisation ont été proposés dans la littérature, tels que le schéma d'Euler explicite ou celui de Crank-Nicholson (1947) qui donnent de meilleurs résultats en termes de précision et stabilité numérique. L'avantage de l'approche par différences finies est sa formulation très générale puisque tous les produits dérivés obéissent à la même EDP, et ne sont caractérisés que par leurs conditions aux bornes.

### 1.3.3 Simulation de Monte-Carlo

En évaluation de produits dérivés, la simulation de Monte-Carlo (Boyle 1977) est utilisée comme une technique d'intégration numérique. En effet, selon l'approche martingale, le prix d'un dérivé financier est donné par l'espérance, sous la mesure neutre au risque, des paiements futurs qu'il produira. Ainsi, la valeur d'une option de vente européenne de prix d'exercice  $K$  et d'échéance  $T$  en  $(0, s)$  s'écrit

$$v(0, s) = \mathbb{E}_s [e^{-rT}(K - S_T)^+].$$

L'évaluation d'une telle option par simulation de Monte-Carlo consiste à générer aléatoirement un échantillon de  $n$  réalisations possibles du paiement final à partir de la distribution de la variable aléatoire  $S_T$ . Soit  $S_T^i$  la  $i$ ème réalisation issue de la simulation, la loi des grands nombres est utilisée pour approximer la valeur de l'option par :

$$v(0, s) = e^{-rT} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (K - S_T^i)^+.$$

La simulation de Monte-Carlo permet d'évaluer facilement n'importe quelle option de type européen dès lors que l'on puisse simuler la distribution du prix du sous-jacent à l'échéance et calculer le paiement correspondant. La simulation de Monte-Carlo est particulièrement efficace pour l'évaluation d'options écrites sur plusieurs sous-jacents. Plusieurs techniques permettent d'améliorer la convergence du prix selon la taille  $n$  de l'échantillon simulé, notamment l'utilisation de variables de contrôle, l'échantillonnage stratégique, ou la génération de séries à faible discrédance (Paskov 1994).

Dans le cas des options avec possibilité d'exercice anticipé, la simulation de Monte-Carlo ne peut pas être utilisée à moins de connaître la stratégie d'exercice du détenteur. L'approche de simulation-régression proposée par Longstaff et Schwartz (2001) permet de déterminer la stratégie d'exercice optimale d'options bermudiennes à partir de trajectoires simulées par récursion arrière, comme dans le cas de l'arbre binomial. Ainsi, à chaque pas de temps, on choisit soit d'exercer l'option, soit de la conserver au moins jusqu'à la prochaine date de décision. La valeur de continuation est approximée par une régression des paiements futurs de l'option observés sur les trajectoires simulées.

## 1.4 Programmation dynamique

La représentation de la valeur d'un produit dérivé par un programme dynamique est une approche très générale qui fait intervenir la détermination de la stratégie d'exercice optimale par récursion arrière. Dans cette section, on présente d'abord la formulation générale de la valeur d'un dérivé par programmation dynamique pour ensuite adapter cette formulation au cas d'une option de vente bermudienne. On montre que les méthodes de treillis (arbre binomial et treillis multinomial) ainsi que l'approche par simulation-régression qui ont été présentés plus haut sont en fait des cas particuliers de programmes dynamiques, correspondant à des choix spécifiques d'approches pour l'approximation de ces programmes. Une technique d'approximation par splines est ensuite développée pour l'évaluation d'une option de vente bermudienne.

### 1.4.1 Formulation générale

Soit un produit dérivé d'échéance  $T$  écrit sur un sous-jacent (possiblement multidimensionnel). On note  $H_t \in \mathbb{R}^{I_1}$  le vecteur des caractéristiques observables à la date  $t$ , dont l'évolution est décrite par un processus stochastique connu. Soit  $\{t_m, m = 0, \dots, M\}$  un ensemble de dates d'observation également espacées ;  $\delta \equiv t_m - t_{m-1}$  représente l'intervalle de temps entre deux de ces dates, où  $t_0 = 0$  et  $t_M = T$ . Le facteur d'actualisation correspondant à l'intervalle  $\delta$  au taux sans risque  $r$ , supposé constant, est représenté par  $\rho = \exp(-r\delta)$ .

Le contrat à évaluer est caractérisé par son échéance  $T$ , sa fonction de paiement  $\chi$  et par un ensemble  $\mathcal{T}$  de dates où l'exercice est permis, qu'on suppose inclus dans  $\{t_m, m = 0, \dots, M\}$  sans perte de généralité. Pour tenir compte de la possibilité d'autres clauses optionnelles du contrat, on représente par  $\Gamma_m$  l'ensemble des décisions qui peuvent être prises par le détenteur de l'option à la date  $t_m$ , et par  $\zeta$  la fonction décrivant les flux monétaires occasionnés par de telles décisions.

La fonction de paiement est une fonction de  $m$  et des caractéristiques observées en  $t_m$ . Le paiement peut aussi dépendre d'un vecteur de  $I_2$  autres caractéristiques observables à  $t_m$  qu'on note  $o_m \in \mathbb{R}^{I_2}$  et dont l'évolution est décrite par une fonction déterministe  $f$ . Par exemple, la fonction de paiement à une date d'exercice quelconque  $t_m \in \mathcal{T}$  peut dépendre uniquement des prix des actifs sous-jacents observés à  $t_m$  (options de vente), des trajectoires de ces prix (options barrière ou asiatiques), de réajustements du contrat (options verrou),

ou encore du nombre de droits d'exercice résiduels (options swing). Les autres flux monétaires prévus au contrat et décrits par la fonction  $\zeta$  peuvent également dépendre de  $m$ , des caractéristiques  $h_m$  ou  $o_m$  et des décisions prises par le détenteur de l'option.

La valeur  $V_m(h, o)$  d'un produit dérivé en  $(t_m, h, o)$  correspondant à une stratégie optimale du détenteur est décrite par le programme dynamique suivant :

$$\begin{aligned}
V_M(h, o) &= \chi_M(h, o) \\
V_m(h, o) &= \max \left\{ \begin{array}{c} \chi_m(h, o) \\ \max_{\gamma \in \Gamma_m} \left\{ \begin{array}{c} \zeta_m(h, o, \gamma) \\ + \rho \mathbb{E}_{mhmo} [V_{m+1}(h_{m+1}, f_m(o, \gamma))] \end{array} \right\} \end{array} \right\}, \\
&\text{pour } 1 \leq m < M, t_m \in \mathcal{T} \\
V_m(h, o) &= \max_{\gamma \in \Gamma_m} \{ \zeta_m(h, o, \gamma) + \rho \mathbb{E}_{mhmo} [V_{m+1}(h_{m+1}, f_m(o, \gamma))] \}, \\
&\text{pour } 1 \leq m < M, t_m \notin \mathcal{T} \\
V_0(h, o) &= \rho \mathbb{E}_{0ho} [V_1(h_1, f_0(o, \gamma))]
\end{aligned}$$

## 1.4.2 Évaluation d'une option de vente bermudienne

La formulation générale présentée plus haut englobe un grand ensemble de produits dérivés. On peut se ramener au cas des options de vente bermudiennes portant sur un seul actif sous-jacent en posant  $I_1 = 1, I_2 = 0, H_t = S_t, \mathcal{T} = \{t_m, m = 0, \dots, M\}, \chi_m(s) = (K - s)^+, \Gamma_m = \emptyset$  et  $\zeta_m(\cdot) = 0$ . Dans ce cas l'observation courante du prix de l'actif sous-jacent suffit pour déterminer les flux monétaires de l'option, et le programme dynamique s'écrit :

$$V_M(s) = (K - s)^+ \tag{1.12}$$

$$V_m(s) = \max \{ (K - s)^+, \rho \mathbb{E}_s [V_{m+1}(S_{t_{m+1}})] \}, 1 \leq m < M \tag{1.13}$$

$$V_0(s) = \rho \mathbb{E}_s [V_1(S_{t_1})]. \tag{1.14}$$

De façon générale, la valeur d'une option de vente bermudienne ne peut pas être obtenue sous forme analytique. Comme l'espace d'état est continu, les méthodes numériques consistent généralement à évaluer  $V_m(s)$  sur une grille de valeurs discrètes, et par conséquent l'évaluation de la valeur de continuation  $\rho \mathbb{E}_s [V_m(S_{t_m})]$  est une approximation de l'espérance d'une fonction qui n'est connue que sur une grille de points.

Le schéma binomial décrit à la section 1.3.1 est l'un des plus simple pour résoudre ce pro-

gramme dynamique : la valeur de  $V_m$  n'est calculée que sur les noeuds de l'arbre et l'espérance est obtenue en réduisant les transitions possibles entre  $S_{t_m}$  et  $S_{t_{m+1}}$  à deux possibilités,  $S_{t_m}u$  et  $S_{t_m}/u$ , approximant ainsi la dynamique du prix de l'actif sous-jacent par une distribution binomiale. Cette approximation impose des contraintes de taille sur le pas de temps  $\delta$  qui doit être assez petit pour que la réduction de l'espace des états possibles donne une bonne approximation numérique.

L'approche de simulation-régression décrite à la section 1.3.3 consiste à évaluer  $V_m$  sur les points des trajectoires simulées du prix de l'actif sous-jacent. Les transitions sont réduites à la transition obtenue sur une seule trajectoire simulée, sauf pour l'état de départ où on considère les transitions sur toutes les trajectoires simulées. L'espérance mathématique est approximée par la moyenne des paiements réalisés sur chacune des trajectoires, et cette approximation nécessite un très grand nombre de tirages.

Dans les deux cas, on discrétise à la fois l'espace d'état et la distribution du prix de l'actif sous-jacent, ce qui résulte en une perte d'information. Une approche alternative consiste à interpoler la fonction  $V_m$  par une fonction continue  $\widehat{V}_m$ , sans toutefois approximer la dynamique du prix de l'actif sous-jacent. Dans plusieurs cas, un choix judicieux de la fonction d'interpolation  $\widehat{V}_m$  permet d'obtenir l'espérance  $\mathbb{E}_s [\widehat{V}_m(S_{t_m})]$  analytiquement. C'est le cas par exemple des fonctions d'interpolation polynômiales qui peuvent être intégrées analytiquement sous plusieurs hypothèses quant à la distribution conditionnelle des transitions de prix de l'actif sous-jacent.

### 1.4.3 Interpolation par splines

Cette section présente le détail de l'implantation d'un programme dynamique utilisant une interpolation de la fonction valeur par des splines cubiques pour l'évaluation d'une option de vente bermudienne. L'approche est facilement adaptable au cas général, et sera utilisée pour toutes les applications couvertes dans cette thèse.

Les splines sont des fonctions polynômiales par morceaux qui sont lisses aux points de jonction. Ainsi, une spline d'ordre  $n$  est une fonction dont les  $n - 1$  premières dérivées sont continues. Les splines cubiques (d'ordre 3) sont donc deux fois continûment dérivables.

Soit une grille de  $n$  points  $\mathcal{G}_n \equiv \{s_i\}_{i=1, \dots, n}$  où  $s_0 = 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n < s_{n+1} = \infty$ , et une fonction  $V$  dont la valeur est connue sur  $\mathcal{G}_n$ . L'interpolation de  $V$  par une spline cubique

est donnée par :

$$\widehat{V}(s) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^3 c_{ik} s^k \mathbb{I}_s[s_i, s_{i+1}) \quad (1.15)$$

où  $\mathbb{I}_x A$  est la fonction indicatrice

$$\mathbb{I}_x A = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et où les coefficients  $c_{ik}$  sont déterminés de sorte que la fonction  $\widehat{V}$  soit deux fois continûment dérivables et coïncide avec  $V$  sur  $\mathcal{G}$ . Les conditions suivantes doivent être satisfaites :

1.  $\widehat{V}$  coïncide avec  $V$  sur les points de la grille :

$$\widehat{V}(s_i) = V(s_i) \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (1.16)$$

2.  $\widehat{V}$  est continue :

$$\widehat{V}(s_i^-) = \widehat{V}(s_i^+) \text{ pour } i = 2, \dots, n-1 \quad (1.17)$$

3.  $\widehat{V}$  est 2 fois dérivable

$$V'(s_i^+) = V'(s_i^-) \text{ pour } i = 2, \dots, n-1 \quad (1.18)$$

$$V''(s_i^+) = V''(s_i^-) \text{ pour } i = 2, \dots, n-1 \quad (1.19)$$

4. On ajoute la condition aux limites suivante :

$$V'''(s_1^+) = V'''(s_1^-) \quad (1.20)$$

$$V'''(s_n^+) = V'''(s_n^-) \quad (1.21)$$

Les conditions (1.16)-(1.20) se traduisent par le système linéaire suivant des  $4(n-1)$  coef-

ficients :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^3 c_{ik} s_i^k &= V(s_i), \quad i = 1, \dots, n-1 \\
\sum_{k=0}^3 c_{ik} s_{i+1}^k &= V(s_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1 \\
\sum_{k=1}^3 k c_{ik} s_{i+1}^{k-1} &= \sum_{k=1}^3 k c_{i+1,k} s_{i+1}^{k-1}, \quad i = 1, \dots, n-2 \\
\sum_{k=2}^3 k(k-1) c_{ik} s_{i+1}^{k-2} &= \sum_{k=2}^3 k(k-1) c_{i+1,k} s_{i+1}^{k-2}, \quad i = 1, \dots, n-2 \\
c_{1,3} &= c_{2,3}, \quad \text{et } c_{n-2,3} = c_{n-1,3}.
\end{aligned}$$

Les coefficients peuvent alors être obtenus facilement. La routine *spline* de MATLAB calcule les coefficient de splines écrites sous la forme canonique <sup>1</sup> ; une simple manipulation permet de retrouver les coefficients sous la forme (1.15).

Finalement, la fonction  $\widehat{V}$  est étendue au domaine  $[0, \infty)$  en posant  $c_{0k} = c_{1k}$  et  $c_{nk} = c_{n-1,k}$  pour  $k = 0, \dots, 3$ <sup>2</sup>. On a alors :

$$\widehat{V}(s) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 c_{ik} s^k \mathbb{I}_s[s_i, s_{i+1}). \quad (1.22)$$

#### 1.4.4 Calcul de la valeur de l'espérance conditionnelle

Cette section présente le détail du calcul de l'espérance mathématique d'une fonction  $\widehat{V}$  définie par (1.22) lorsque l'évolution du prix de l'actif sous-jacent sous la mesure neutre au risque est décrite par (1.4), c'est-à-dire que le rendement de l'actif durant un intervalle de temps  $\delta$  est une variable aléatoire  $R_\delta$  telle que :

$$\ln R_\delta = \delta \widehat{\mu} + \sigma \sqrt{\delta} \epsilon$$

---

<sup>1</sup>La représentation canonique de la spline est donnée par :

$$P_i(s) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 c_{ig} (s - s_i)^g \mathbb{I}_s[s_i, s_{i+1})$$

<sup>2</sup>Cette option est dictée par la forme du put américain qui est linéaire au voisinage de zéro et constante à zéro au voisinage de l'infini.

où  $\epsilon \sim N(0, 1)$ . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{st} \left[ \widehat{V}(S_{t+\delta}) \right] = \mathbb{E} \left[ \widehat{V}(sR_\delta) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 \left( c_{ik} (sR_\delta)^k \right) \mathbb{I}_{sR_\delta} [s_i, s_{i+1}] \right] \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 c_{ik} s^k \mathbb{E} \left[ (R_\delta)^k \mathbb{I}_{R_\delta} \left[ \frac{s_i}{s}, \frac{s_{i+1}}{s} \right] \right] \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 c_{ik} s^k \mathbb{E} \left[ \exp \left( k\delta\widehat{\mu} + k\sigma\sqrt{\delta}\epsilon \right) \mathbb{I}_\epsilon [a_i, a_{i+1}] \right] \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 c_{ik} s^k \exp(k\delta\widehat{\mu}) \mathbb{E} \left[ \exp \left( k\sigma\sqrt{\delta}\epsilon \right) \mathbb{I}_\epsilon [a_i, a_{i+1}] \right]
\end{aligned}$$

où

$$a_i = \frac{\log \left( \frac{s_i}{s} \right) - \widehat{\mu}\delta}{\sigma\sqrt{\delta}} \text{ et } \epsilon \sim N(0, 1).$$

Soit

$$\Omega(s, i, k) \equiv \exp(k\delta\widehat{\mu}) \mathbb{E} \left[ \exp \left( k\sigma\sqrt{\delta}\epsilon \right) \mathbb{I}_\epsilon (a_i, a_{i+1}) \right], \quad \epsilon \sim N(0, 1).$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \exp \left( k\sigma\sqrt{\delta}\epsilon \right) \mathbb{I}_\epsilon (a_i, a_{i+1}) \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \exp \left( -\frac{w^2}{2} \right) \exp \left( k\sigma\sqrt{\delta}w \right) dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \exp \left( -\frac{w^2 - 2k\sigma\sqrt{\delta}w}{2} \right) dw \\
&= \frac{\exp \left( \frac{k^2\sigma^2\delta}{2} \right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \exp \left( -\frac{(w - k\sigma\sqrt{\delta})^2}{2} \right) dw \\
&= \frac{\exp \left( \frac{k^2\sigma^2\delta}{2} \right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_i - k\sigma\sqrt{\delta}}^{a_{i+1} - k\sigma\sqrt{\delta}} \exp \left( -\frac{w^2}{2} \right) dw \\
&= \exp \left( \frac{k^2\sigma^2\delta}{2} \right) \left( \Phi \left( a_{i+1} - k\sigma\sqrt{\delta} \right) - \Phi \left( a_i - k\sigma\sqrt{\delta} \right) \right)
\end{aligned}$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition normale centrée et réduite. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}\Omega(s, i, k) &\equiv \exp\left(\frac{1}{2}k\delta(2\hat{\mu} + k\sigma^2)\right) \left(\Phi\left(a_{i+1} - k\sigma\sqrt{\delta}\right) - \Phi\left(a_i - k\sigma\sqrt{\delta}\right)\right) \\ a_i &= \frac{\ln\left(\frac{s_i}{s}\right) - \hat{\mu}\delta}{\sigma\sqrt{\delta}}, i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}_{st} \left[ \widehat{V}(S_{t+\delta}) \right] = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 c_{ik} s^k \Omega(s, i, k). \quad (1.23)$$

### 1.4.5 Algorithme

La solution numérique du programme dynamique (1.12)-(1.14) consiste à calculer  $V_m$  sur une grille discrète  $\mathcal{G}_n$  de  $n$  points en approximant  $\mathbb{E}_s [V_{m+1}(S_{t_{m+1}})]$  par  $\mathbb{E}_s [\widehat{V}_{m+1}(S_{t_{m+1}})]$  où  $\widehat{V}_{m+1}$  est l'interpolation par splines cubiques de  $V_{m+1}$ . La procédure pour l'évaluation d'une option de vente bermudienne est détaillée dans l'algorithme suivant :

#### Algorithme 1

1. Définir les paramètres  $T, M, n, \delta = \frac{T}{M}, s_n, K$ .
2. Discrétiser les espaces du temps :  $t_m = m\frac{T}{M}, m = 0, \dots, M$  et du prix de l'actif sous-jacent :  $s_i = i\frac{s_n}{n}, i = 0, \dots, n$ .
3. Calculer  $\Omega(s_i, j, k)$  pour  $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, 3$ .
4. Calculer les coefficients  $c_{ik}^M$  pour  $i = 0, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, 3$  interpolant  $V_M$  définie par (1.12).
5. Pour  $m = M - 1$  à  $m = 1$ 
  - 5.1 Calculer  $V_m(s_i), i = 0, \dots, n$  à partir de (1.13) et (1.23)
  - 5.2 Calculer les coefficients  $c_{ik}^m$  pour  $i = 0, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, 3$  interpolant  $V_m$ .
6. Calculer  $V_0(s_i), i = 0, \dots, n$  à partir de (1.14) et (1.23) et terminer.

Le choix de la grille  $\mathcal{G}_n$  doit dépendre de la volatilité et de l'échéance du contrat ; en effet, la borne  $s_n$  devrait être choisie de sorte que l'erreur due à l'extrapolation à l'extérieur de la grille d'évaluation soit négligeable. C'est le cas lorsque la probabilité d'atteindre  $s_n$  est très petite, ou lorsque la valeur du contrat est négligeable pour  $s > s_n$  (la valeur d'une

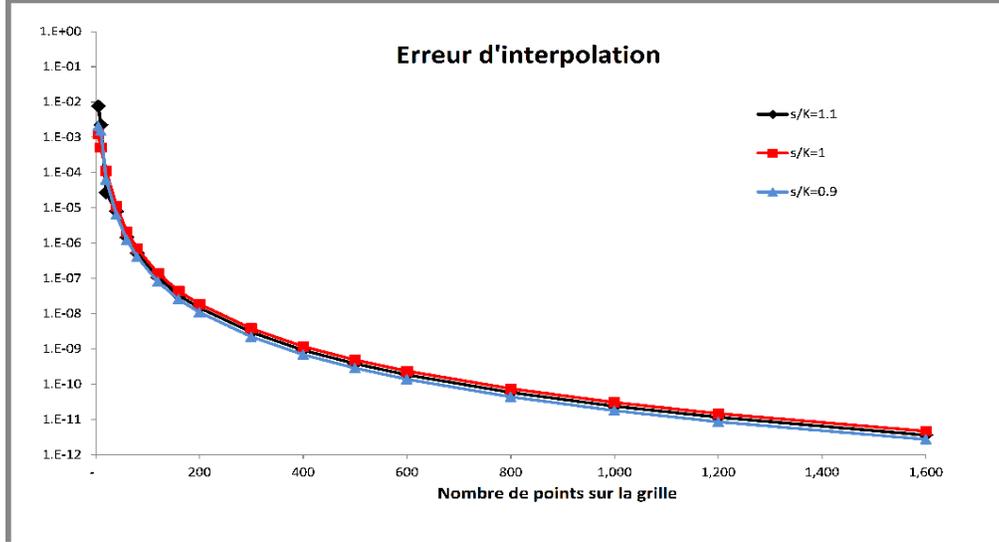


FIG. 1.1 – Convergence de l’interpolation par splines à la valeur exacte d’une option de vente européenne. Les paramètres sont  $\sigma = 20\%$ ,  $r = 4\%$ ,  $K = 100$ ,  $T = 1$  et  $M = 2$ .

option de vente tend vers zéro lorsque le prix de l’actif sous-jacent est très élevé). Par ailleurs, l’intervalle  $[s_1, s_n]$  ne peut pas être choisi arbitrairement grand puisque dans ce cas un très grand nombre de noeuds d’interpolation est nécessaire pour réduire l’erreur d’interpolation. À moins d’indications contraire, on utilise dans cette thèse des grilles de points également espacés et des bornes  $s_n = K \exp(\hat{\mu}T + 4\sigma\sqrt{T})$ . La figure 1.1 représente l’erreur d’interpolation relative en fonction du nombre de points de la grille, pour une option de vente européenne d’échéance un an, évaluée à  $(0, s)$  à l’aide de l’algorithme 1 avec deux pas de temps (sans possibilité d’exercice). Comme on peut le constater, lorsque le nombre de points d’interpolation atteint 200, l’erreur est d’environ  $10^{-8}$ . Davantage de points pourraient être nécessaires pour obtenir une précision semblable dans le cas d’une volatilité ou d’une échéance plus élevée.

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre introductif a permis de parcourir brièvement les méthodes numériques utilisées pour l’évaluations de produits dérivés . On y distingue deux grandes familles : les méthodes d’éléments finis appliquées à la résolution des équations aux dérivées partielles, et l’approximation de la programmation dynamique qui englobe les méthodes de treillis et d’arbres, la simulation de Monte-Carlo, et les méthodes d’interpolation de la fonction valeur. L’approche

utilisée dans cette thèse est une interpolation à partir de fonctions splines cubiques. On a montré dans ce chapitre comment on pouvait calculer à l'aide de cette approche simplement la valeur d'une option de vente bermudienne dans le modèle de Black et Scholes. Les méthodes utilisées dans les chapitres suivants sont des ajustements de cette approche.

# Chapitre 2

## Utilisation des options exotiques pour l'évaluation d'options américaines de longue échéance

On propose ici une nouvelle méthode d'évaluation des options de vente américaines de longue échéance. La majorité des approches existantes s'appuie sur une construction de la stratégie optimale en temps discret, alors que la convergence d'une telle stratégie vers l'exercice en temps continu est très lente. La méthode d'évaluation proposée dans ce chapitre permet au détenteur d'exercer en temps continu en optimisant une stratégie représentée par une frontière d'exercice constante entre deux dates de discrétisation du temps. L'optimisation de cette stratégie à barrière couplée à l'approximation par splines cubiques permet d'accélérer la convergence du prix de l'option, ce qui rend cette méthode particulièrement appropriée aux options de longue échéance.

### 2.1 Introduction

Une option américaine procure à son détenteur le droit d'exercer un contrat (par exemple, acheter ou vendre un actif sous-jacent) à une date antérieure à son échéance. Ce droit d'exercice prématuré pose une difficulté dans l'évaluation de ces options, même dans le cas de l'option de vente la plus simple (le *put américain*). Les approches que propose la littérature supposent que le détenteur de l'option se donne une frontière d'exercice qui définit sa stra-

tégie optimale. En l'absence d'une solution analytique, la littérature propose une multitude d'approches numériques et de formules d'approximation pour la frontière d'exercice et le prix du put américain.

On a présenté dans le chapitre introductif les premières approches numériques proposées pour l'évaluation du put américain, soit l'approximation par différences finies de la solution de l'équation aux dérivées partielles caractérisant l'option introduite par Merton, Brennan et Schwartz (1977) et la méthode de l'arbre binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979). Malgré leur inefficacité relative au point de vue du temps de calcul, ces deux approches demeurent les plus utilisées en pratique du fait de leur simplicité et de leur flexibilité.

Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature s'appliquant spécifiquement à l'évaluation du put américain. Johnson (1983) et Broadie et Detemple (1996) exploitent un encadrement du put américain par deux options de vente européennes. Le prix recherché est alors une moyenne pondérée des bornes de cet encadrement ; les auteurs proposent une procédure d'optimisation des pondérations pour améliorer la précision de la méthode.

Geske et Johnson (1984) considèrent que l'exercice de l'option américaine est possible en un nombre fini de dates, ce qui permet d'assimiler l'option américaine à une option composée. La formule d'évaluation de l'option composée fait intervenir la solution d'une équation implicite et une loi normale multivariée dont la complexité augmente rapidement avec le nombre de dates d'exercice. Bunch et Johnson (1992) proposent des méthodes d'extrapolation et d'optimisation dans le choix des dates pour améliorer la précision de l'approximation par option composée.

Omberg (1987) et Chesney et Lefoll (1996) s'intéressent plutôt à la frontière d'exercice, qu'ils représentent par une fonction exponentielle du temps. L'extraction de la distribution jointe du sous-jacent et du temps de premier passage par la frontière permet alors d'obtenir une forme fermée pour la valeur de l'option. L'approximation du prix du put américain s'obtient alors en optimisant la forme de la frontière d'exercice.

Barone-Adesi et Whaley (1987) proposent une approximation analytique sous forme fermée à partir de l'équation aux dérivées partielles caractérisant une option américaine. L'expression simple qu'ils obtiennent pour le prix du put américain est utile pour les très courtes et les très longues échéances, mais sa précision se détériore pour les échéances moyennes.

Longstaff et Schwartz (2001) proposent une méthode récursive d'évaluation du put américain assimilé à une option bermudienne ; la valeur de détention de l'option est évaluée sur une

grille par simulation de Monte Carlo et interpolée par moindres carrés ordinaires. La méthode présente l'avantage d'être facilement applicable dans le cas où la valeur de l'option dépend de plusieurs facteurs aléatoires ou de plusieurs sous-jacents. Dans la même famille d'approche, Ben Ameer et al. (2009) proposent un programme dynamique utilisant une interpolation polynômiale par morceaux de la valeur de l'option pour l'évaluation d'options bermudiennes sous un processus GARCH et Cosma et al. (2012) une approximation par un programme dynamique à états discrets s'adaptant à un grand nombre de modèles de marché.

Ces trois dernières méthodes, basées sur un modèle de programmation dynamique en temps discret, font l'hypothèse qu'une option américaine est assimilable à une option bermudienne ayant un grand nombre de possibilités d'exercice. Cette équivalence est également utilisée par les approches par option composée, arbre binomial et différences finies. On justifie cette hypothèse par le fait que le détenteur de l'option n'observe pas le sous-jacent en temps continu, mais plutôt de façon discrète. Cependant un nombre grandissant de transactions sont actuellement réalisées par des algorithmes de transaction à haute fréquence. Une étude menée par le groupe Aite et commentée dans *The Economist* (février 2012) montre qu'en 2012, 65% des transactions sur les actions et plus de 30% des transactions sur les options étaient réalisées par des algorithmes de transaction à haute fréquence, et prévoit une forte tendance à la hausse pour les transactions sur les options. Les automates transigeant sur les marchés financiers se rapprochent davantage de l'hypothèse du temps continu que de celle du temps discret. Ce chapitre propose un algorithme d'évaluation par programmation dynamique qui permet d'approcher efficacement le prix des options américaines, tout en faisant l'hypothèse que le sous-jacent est observé en temps continu.

La section 2.2 analyse la convergence du prix des options bermudiennes selon la discrétisation du temps à partir de l'évaluation du put américain par le modèle général présenté au chapitre 1. On constate que la convergence d'une telle méthode quand le nombre de possibilités d'exercice devient infiniment grand est lente, la rendant insatisfaisante pour les options de longue échéance. La section 2.3 introduit une technique basée sur des optimisations successives d'un portefeuille d'options à barrière, qui permet une meilleure convergence en termes de pas de temps, quoique le temps de calcul consacré aux optimisations successives soit important. Une troisième approche est présentée à la section 2.4; cette approche permet de réduire considérablement le temps de calcul et s'avère plus efficace que les précédentes notamment pour l'évaluation d'options de longues échéances. La section 2.5 est une conclusion.

## 2.2 Approche par les options bermudiennes

La plupart des méthodes numériques existantes pour l'évaluation des options américaines sont basées sur une approximation par des options bermudiennes à haute fréquence d'exercice. En effet, le prix d'une option bermudienne converge vers celui d'une option américaine ayant les mêmes caractéristiques lorsque le délai entre deux dates d'exercice tend vers 0. Cette section présente des essais numériques montrant que la convergence de l'approximation bermudienne est relativement lente, ce qui rend de telles approches coûteuses en temps de calcul, surtout pour les options de longue échéance.

On considère une option de vente bermudienne d'échéance  $T$  donnant à son détenteur un droit d'exercice en un nombre fini  $M$  de dates également espacées, appelées *dates d'exercice* et représentées par  $t_m = m\frac{T}{M}$ ,  $m = 1, \dots, M$ , où  $t_0 = 0$ . On note  $\delta = \frac{T}{M}$  l'intervalle de temps entre deux dates d'exercice. À une date d'exercice donnée, lorsque le prix de l'actif sous-jacent est  $s$ , la *valeur d'exercice* de l'option est donnée par  $(K - s)^+$ , où  $K$  est le *prix d'exercice*. À chaque date d'exercice, le détenteur peut choisir d'exercer l'option, ou de la conserver au moins jusqu'à la prochaine date d'exercice. Il s'agit de l'option qui est décrite au chapitre 1, et dont la valeur est définie par le programme dynamique (1.14)-(1.12).

Sous les hypothèses du modèle de Black et Scholes, cette option bermudienne peut être évaluée par l'algorithme 1. Dans nos essais numériques, le nombre de points d'interpolation est choisi de sorte que l'erreur d'interpolation soit plus petite que la précision des résultats, étant donné le nombre de pas de temps au cours desquels cette erreur peut être accumulée. On suppose alors que la différence entre la valeur d'une option américaine et d'une option bermudienne peut être expliquée par le nombre d'opportunités d'exercice.

Les approches d'approximation d'options américaines par des options bermudiennes arrêtent généralement la discrétisation du temps au nombre de jours de l'horizon de l'option ; on suppose dans ce cas que le détenteur n'observe le sous-jacent qu'à des dates discrètes et qu'une observation par jour représente une approximation raisonnable de la stratégie d'exercice du détenteur. On évalue ici la qualité de cette approximation en examinant la convergence de l'option bermudienne lorsqu'on augmente la fréquence des opportunités d'exercice. Des résultats représentatifs sont présentés aux tableaux 2.1 et 2.2.

À l'examen de ces résultats, on constate que la convergence lorsqu'on augmente la fréquence des opportunités d'exercice est lente, notamment dans le cas des options de long terme ou lorsque la volatilité est élevée. Dans ces deux cas il faut multiplier les dates d'exercices pour

$M$	$T = 1 \text{ an}, n = 200$			$T = 5 \text{ an}, n = 300$		
	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$
1	10,8414	6,0040	3,0476	11,4751	8,5766	6,3926
2	11,3951	6,2020	3,1018	13,4674	9,8514	7,1863
4	11,6227	6,2937	3,1457	14,4277	10,4229	7,5420
8	11,7173	6,3464	3,1739	14,8472	10,6843	7,7294
16	11,7614	6,3746	3,1894	15,0285	10,8168	7,8308
32	11,7839	6,3891	3,1977	15,1186	10,8873	7,8843
64	11,7953	6,3966	3,2021	15,1654	10,9221	7,9109
128	11,8009	6,4004	3,2043	15,1901	10,9406	7,9247
512	11,8052	6,4032	3,2060	15,2059	10,9541	7,9353
1024	11,8061	6,4038	3,2063	15,2084	10,9561	7,9370
1500	11,8065	6,4040	3,2064	15,2093	10,9567	7,9375
2000	11,8067	6,4041	3,2065	15,2098	10,9571	7,9378

TAB. 2.1 – Valeur d’une option bermudienne en fonction du nombre d’opportunités d’exercice. Les paramètres sont  $K = 100$ ,  $r = 4\%$ ,  $\sigma = 20\%$ .

$M$	$T = 1 \text{ an}, n = 300$			$T = 5 \text{ an}, n = 500$		
	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$
1	17,9818	13,6572	10,2849	25,7637	23,0630	20,7195
2	18,2946	13,8303	10,3772	27,7787	24,6866	22,0320
4	18,4325	13,9313	10,4523	28,5908	25,3507	22,5907
8	18,5082	13,9915	10,4985	28,9455	25,6678	22,8788
16	18,5479	14,0234	10,5236	29,1390	25,8429	23,0369
32	18,5683	14,0401	10,5369	29,2338	25,9312	23,1187
64	18,5786	14,0486	10,5438	29,2793	25,9731	23,1575
128	18,5837	14,0528	10,5472	29,3033	25,9943	23,1766
512	18,5876	14,0561	10,5499	29,3243	26,0126	23,1929
1024	18,5883	14,0567	10,5504	29,3284	26,0161	23,1960
1500	18,5886	14,0569	10,5505	29,3296	26,0171	23,1968
2000	18,5888	14,0571	10,5507	29,3301	26,0175	23,1971

TAB. 2.2 – Valeur d’une option bermudienne en fonction du nombre d’opportunités d’exercice. Les paramètres sont  $K = 100$ ,  $r = 4\%$ ,  $\sigma = 40\%$ .

se rapprocher du cas continu. Il convient de rappeler que l'algorithme d'évaluation utilise une interpolation de la fonction valeur à chaque date d'exercice, et qu'on risque de voir les erreurs d'interpolation se cumuler lorsque le nombre de pas de temps devient élevé. De plus, le domaine d'évaluation  $[0, s_n]$  s'élargit avec la croissance de l'échéance ou de la volatilité. Pour des options de longue échéance ou à haute volatilité, une discrétisation fine du temps peut donner lieu à des temps de calcul très importants.

## 2.3 Approche par un portefeuille d'options à barrière

La méthode présentée dans cette section s'inspire d'Ingersoll (1998), où l'option américaine est assimilée à un portefeuille comportant une option de vente européenne à barrière désactivante de type "*down-and-out*" (DO) et une option digitale de type "*first-touch*" (FT) où les deux options ont la même barrière. En assimilant l'option américaine à ce portefeuille, l'auteur suppose que le détenteur utilise une stratégie d'exercice à barrière constante. En optimisant la valeur de l'option selon la barrière d'exercice, il détermine alors la meilleure stratégie d'exercice à barrière constante, et montre numériquement que la valeur d'une option américaine peut être approximée par la valeur de ce portefeuille lorsque la barrière d'exercice constante est optimale.

### 2.3.1 Les options

Une option DO est une option qui est désactivée si le prix de l'actif, initialement supérieur, atteint une barrière  $B$  avant l'échéance  $T$ . Soit  $\tau_B$  le temps du premier passage de  $S_t$  sous la barrière  $B$  :

$$\tau_B = \inf [\tau \geq t : S_\tau \leq B].$$

Le prix d'une option DO en  $(s, t)$  est donné par l'espérance risque neutre suivante:

$$D(s; B, \delta) = e^{-r\delta} \mathbb{E}_s [(K - sR_\delta)^+ \mathbb{I}_\tau(\delta, \infty)].$$

En utilisant le principe de réflexion on peut calculer ce prix sous une forme fermée sous les hypothèses de Black et Scholes :

$$D(s; B, \delta) = Ke^{-r\delta} \left( N_2 \left( \frac{s}{K} \right) - N_2 \left( \frac{s}{B} \right) \right) - s \left( N_1 \left( \frac{s}{K} \right) - N_1 \left( \frac{s}{B} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{B}{s}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \left( K e^{-r\delta} \left( N_2 \left( \frac{B^2}{sK} \right) - N_2 \left( \frac{B}{s} \right) \right) \right. \\
& \left. + B^2 \left( N_1 \left( \frac{B^2}{sK} \right) - N_1 \left( \frac{B}{s} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

où les fonctions  $N_1$  et  $N_2$  sont définies par :

$$\begin{aligned}
N_1(x) &= \Phi \left( -\frac{\ln(x) + \mu\delta}{\sigma\sqrt{\delta}} - \sigma\sqrt{\delta} \right) \\
N_2(x) &= \Phi \left( -\frac{\ln(x) + \mu\delta}{\sigma\sqrt{\delta}} \right)
\end{aligned}$$

et où  $\Phi$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée et réduite.

Le détenteur d'une option digitale FT reçoit le prix d'exercice à la date du premier passage du prix de l'actif sous la barrière  $B$ . La valeur de cette option en  $(s, t)$  est donc donnée par l'espérance :

$$F(s; B, \delta) = (K - B) \mathbb{E}_s [e^{-r\tau} \mathbb{I}_\tau [0, \delta]],$$

qui peut aussi être calculée analytiquement dans le modèle de Black et Scholes par :

$$\begin{aligned}
F(s; B, \delta) &= (K - B) \left( \left(\frac{s}{B}\right)^{\frac{\beta-\mu}{\sigma^2}} \Phi(-N^+) - \left(\frac{s}{B}\right)^{\frac{\beta+\mu}{\sigma^2}} \Phi(-N^-) \right) \quad (2.1) \\
\beta &= \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} \\
N^+ &= \frac{\ln\left(\frac{s}{B}\right) + \beta\delta}{\sigma\sqrt{\delta}}; N^- = \frac{\ln\left(\frac{s}{B}\right) - \beta\delta}{\sigma\sqrt{\delta}}.
\end{aligned}$$

### 2.3.2 Stratégie d'exercice constante

Pour une barrière fixée  $B$ , la valeur du portefeuille composé des deux options d'échéance  $T$  est donc en  $(t, s)$  égale à  $D(s; B, T - t) + F(s; B, T - t)$ . L'approximation du put américain proposée par Ingersoll (1998) correspond déterminer la barrière constante maximisant la valeur de ce portefeuille, c'est-à-dire :

$$P_t^1(s) = \max_{0 \leq B \leq s} \{D(s; B, T - t) + F(s; B, T - t)\}. \quad (2.2)$$

En réalité, la valeur exacte de l'option américaine en  $(s, t)$  est la solution du problème

d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \overline{P}(t, s) &= \max_{U \in \mathcal{U}([t, T])} \mathbb{E}_s \left[ e^{-r\tau} (K - S_\tau)^+ \right] \\ &\text{s.à} \\ \tau &= \inf [\tau \geq t : S_\tau \leq U(\tau)], \end{aligned} \tag{2.3}$$

où  $\mathcal{U}(X)$  représente l'ensemble des fonctions  $U : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Ainsi, pour évaluer une option américaine en  $(t, s)$ , il suffit d'identifier la frontière d'exercice optimale parmi les fonctions  $U : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , c'est-à-dire que la frontière optimale est une fonction du temps. Le programme (2.2), qui se restreint aux frontières constantes dans le temps, fournit donc une borne inférieure pour la valeur de l'option américaine. Pour s'approcher davantage de l'optimum, il faut élargir l'espace des solutions considérées.

Une alternative simple consiste à considérer l'ensemble des stratégies à barrière constantes par morceaux. Ainsi, on suppose que le détenteur modifie son portefeuille d'options exotiques à plusieurs moments avant l'échéance, ce qui donne une meilleure approximation du prix de l'option américaine.

### 2.3.3 Stratégie à deux barrières

On suppose d'abord que le détenteur peut modifier son portefeuille à la date  $T/2$ ; le problème d'optimisation des 2 barrières s'écrit alors en  $(0, s)$  :

$$\begin{aligned} P^2(s) &= \max_{B_1, B_2 \in \mathcal{V}} \left\{ e^{-rT} \mathbb{E}_s \left[ (K - R_\delta s) \mathbb{I}_{\tau_2}(T, \infty) \mathbb{I}_{\tau_1} \left( \frac{T}{2}, \infty \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + (K - B_2) \mathbb{E}_s \left[ e^{-r\tau_2} \mathbb{I}_{\tau_2} \left[ \frac{T}{2}, T \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + (K - B_1) \mathbb{E}_s \left[ e^{-r\tau_1} \mathbb{I}_{\tau_1} \left[ 0, \frac{T}{2} \right] \right] \right\} \\ &\text{s.à} \\ \tau_1 &= \inf \{ \tau \geq 0 : S_\tau \leq B_1 \} \\ \tau_2 &= \inf \left\{ \tau \geq \frac{T}{2} : S_\tau \leq B_2 \right\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

où  $\mathcal{V}$  représente l'ensemble des fonctions  $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , c'est-à-dire que les frontières d'exercice  $B_1(\cdot)$  et  $B_2(\cdot)$  ne sont pas des constantes, mais des stratégies en rétroaction. Ainsi, le détenteur choisit la meilleure barrière  $B_2$  à la date  $\frac{T}{2}$  en fonction du prix de l'actif  $S_{\frac{T}{2}}$ . Il maximise alors la valeur de son portefeuille selon l'information qui lui est disponible à cette date. De la même façon, à la date 0, la valeur optimale de  $B_1$  dépend de  $s$ .

Il convient de noter que les second et troisième termes de (2.4) sont égaux à la valeur d'options FT d'échéance  $\frac{T}{2}$ . La formulation récursive équivalente du problème (2.4) est plus utile pour la caractérisation de stratégies en rétroaction et sera généralisée plus tard :

$$P^2(s) = \max_{B_1} \left\{ e^{-r\frac{T}{2}} \mathbb{E}_s \left[ P_{T/2}^1(sR_{T/2}) \mathbb{I}_{\tau_1} \left( \frac{T}{2}, \infty \right) \right] + F \left( s; B_1, \frac{T}{2} \right) \right\} \quad (2.5)$$

s.à

$$\tau_1 = \inf \{ \tau \geq 0 : S_\tau \leq B_1 \},$$

où  $P_{T/2}^1$  satisfait (2.2).

L'implantation de cette méthode révèle effectivement que les barrières optimales  $B_1$  et  $B_2$  dépendent du niveau du sous-jacent. Il s'agit d'une conséquence directe du choix de la forme constante par morceaux pour la barrière. En effet la barrière constante optimale à un niveau donné fait intervenir la probabilité que le sous-jacent touche éventuellement la barrière, qui dépend naturellement de la valeur observée du sous-jacent.

Il convient de remarquer que le problème d'optimisation (2.4) est différent de celui d'une approximation a priori de la frontière d'exercice par une fonction constante par morceaux. En effet, la détermination d'une barrière d'exercice à la date 0 indique des niveaux successifs qui sont indépendants de l'évolution du sous-jacent, alors que la stratégie en rétroaction obtenue par la solution de (2.4) donnera nécessairement une valeur plus élevée à l'option.

### 2.3.4 Stratégie à $M$ barrières

On généralise maintenant l'approche présentée au paragraphe précédent en se basant sur le principe récursif suivant : une stratégie à  $j$  barrières constantes est un sous-ensemble des stratégies à  $j + 1$  barrières constantes. Ainsi, en augmentant le nombre fois où le détenteur peut ajuster son portefeuille en changeant les barrières des deux options, la valeur du portefeuille croît nécessairement, pour atteindre le prix de l'option américaine à la limite lorsque

la frontière d'exercice devient une fonction continue du temps :

$$P_0^1(s) \leq P^2(s) \leq P^j(s) \leq P^\infty(s) = \bar{P}(0, s).$$

On remarque également que lorsque leurs dates de décision  $t_m$ ,  $m = 1, \dots, M$  coïncident, une stratégie d'exercice à  $M$  barrières donne au détenteur les droits de l'option bermudienne en  $t_m$  et lui permet en plus d'exercer à l'intérieur des intervalles  $(t_m, t_{m+1})$  pour  $m = 1, \dots, M-1$ , ce qui permet d'écrire :

$$V_0(s) \leq P^M(s) \leq \bar{P}(0, s).$$

Ces deux relations d'ordre permettent de construire un algorithme d'approximation de l'option américaine. Ainsi, l'introduction de l'option FT permet de tenir compte d'un exercice de l'option américaine en temps continu, ce qui permet une meilleure convergence par rapport au pas de temps que dans le cas de l'approximation par une option bermudienne.

Soit à nouveau un nombre fini  $M$  de dates également espacées notées  $t_m = m\delta$ ,  $m = 1, \dots, M$ ,  $\delta = T/M$ . On note  $P_m(s)$  la valeur d'un portefeuille d'options exotiques en  $(t_m, s)$  quand le détenteur utilise une stratégie d'exercice à  $M - m$  barrières constantes. Le problème d'optimisation du détenteur peut s'écrire sous une forme récursive définissant le programme dynamique :

$$P_M(s) = (K - s)^+ \tag{2.6}$$

$$P_{M-1}(s) = \max_{0 \leq B_M \leq s} \{D(s; B_M, \delta) + F(s; B_M, \delta)\} \tag{2.7}$$

$$P_{m-1}(s) = \max_{B_m; \tau_m = \inf\{\tau \geq 0: S_\tau \leq B_m\}} \{e^{-r\delta} \mathbb{E}_s [P_m(sR_\delta) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty)] + F(s; B_m, \delta)\}, \quad m = 1, \dots, M-1. \tag{2.8}$$

La solution numérique du programme dynamique (2.6)-(2.8) consiste à calculer  $P_m$  sur une grille  $\mathcal{G}_n$ , et à l'interpoler par une spline cubique  $\hat{P}_m$ . En  $t_{M-1}$ , puisque le détenteur utilise une stratégie à barrière constante, la valeur de  $P_{M-1}(s)$  est donnée par Ingersoll (1998), comme dans (2.2).

Pour  $m = 1, \dots, M-1$ , le premier terme de l'expression (2.8) fait intervenir le calcul de

l'espérance mathématique d'une fonction qui n'est connue que sur  $\mathcal{G}_n$ . Selon (1.22),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[P_m(sR_\delta)\mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty)] &\simeq \mathbb{E}\left[\widehat{P}_m(sR_\delta)\mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty)\right] \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 c_{ik}^m \mathbb{E}\left[(sR_\delta)^k \mathbb{I}_{sR_\delta}(s_i, s_{i+1}) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty)\right]\end{aligned}$$

où

$$R_\delta = \exp(\mu\delta + \sigma W_\delta).$$

En appliquant le changement de mesure suivant :

$$\widetilde{W}_t = \frac{\widehat{\mu}}{\sigma}t + W_t,$$

$\widetilde{W}_t$  est aussi un mouvement brownien, et

$$R_\delta = \exp\left(\sigma \widetilde{W}_\delta\right).$$

On obtient en appliquant le théorème de Girsanov :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[(sR_\delta)^k \mathbb{I}_{sR_\delta}(s_i, s_{i+1}) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty)\right] \\ &= \mathbb{E}^{\widetilde{Q}}\left[\left[(sR_\delta)^k \mathbb{I}_{sR_\delta}(s_i, s_{i+1}) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty) \exp\left(-\frac{\left(\frac{\widehat{\mu}}{\sigma}\right)^2}{2}\delta + \frac{\widehat{\mu}}{\sigma}\widetilde{W}_\delta\right)\right]\right] \\ &= s^k \mathbb{E}^{\widetilde{Q}}\left[\exp\left(k\sigma \widetilde{W}_\delta\right) \mathbb{I}_{sR_\delta}(s_i, s_{i+1}) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty) \exp\left(-\frac{\widehat{\mu}^2}{2\sigma^2}\delta + \frac{\widehat{\mu}}{\sigma}\widetilde{W}_\delta\right)\right] \\ &= s^k \exp\left(-\frac{\widehat{\mu}^2}{2\sigma^2}\delta\right) \mathbb{E}^{\widetilde{Q}}\left[\exp\left(\left(k\sigma + \frac{\widehat{\mu}}{\sigma}\right)\widetilde{W}_\delta\right) \mathbb{I}_{\widetilde{W}_\delta}(a_i, a_{i+1}) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty)\right]\end{aligned}$$

où

$$a_i = \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{s_i}{s}\right).$$

On a finalement

$$\mathbb{E}\left[\widehat{P}_m(sR_\delta)\mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 c_{ik}^m s^k \Psi(s, i, k) \quad (2.9)$$

où la fonction  $\Psi$  peut être obtenue analytiquement à partir de la fonction de répartition normale (les détails sont fournis à l'annexe 2.6).

L'approximation de la valeur d'une option américaine peut alors être obtenue en appliquant l'algorithme suivant :

### Algorithme 2

1. Définir les paramètres  $T, M, n, \delta = \frac{T}{M}, s_n, K$ .
2. Discrétiser les espaces du temps :  $t_m = m\frac{T}{M}, m = 0, \dots, M$  et du prix du sous-jacent :  $s_i = i\frac{s_n}{n}, i = 0, \dots, n$ .
3. Calculer  $\Psi(s_i, j, k)$  pour  $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n-1$  et  $k = 0, \dots, 3$ .
4. Calculer  $P_{M-1}(s_i), i = 0, \dots, n$  à partir de (2.7).
5. Pour  $m = M-1$  à  $m = 0$ 
  - 5.1 Calculer les coefficients  $c_{ik}^m$  pour  $i = 0, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, 3$  interpolant  $P_m$
  - 5.2 Calculer  $P_m(s_i), i = 0, \dots, n$  à partir de (2.8) et (2.9).
6. Terminer.

Dans l'implantation utilisée ici, l'optimisation dans (2.7) et (2.8) est réalisée à l'aide d'un algorithme de recherche sans dérivée (la fonction *fminsearch* de MATLAB). Les essais numériques montrent que l'algorithme 2 converge très rapidement avec le paramètre  $M$ . Les tableaux 2.3 et 2.4 présentent une illustration des résultats de l'implantation de l'algorithme 2 en fonction de  $M$ . On y constate qu'avec aussi peu que deux pas de temps, on obtient une valeur très proche de celle de l'option américaine, et qu'une précision de  $10^{-2}$  est atteinte en 16 pas de temps (ce qui correspond à un délai de trois mois) pour les options de longue échéance et volatilité élevée. Cependant, à chaque pas de temps, il faut résoudre  $n$  problèmes d'optimisation, ce qui est très coûteux en temps de calcul. À titre indicatif, l'évaluation d'une option avec 128 pas de temps et 300 points d'interpolation a requis 1200 secondes (20 minutes).

## 2.4 Approche par les options Bermudiennes corrigées

La convergence en pas de temps représente généralement le problème majeur de l'évaluation des options américaines. En effet, il faut une discrétisation fine du temps pour approcher l'exercice continu de l'option américaine, et cette discrétisation devient coûteuse en temps de calcul lorsqu'on considère une option de longue échéance. De plus, pour évaluer une option

$M$	$T = 1 \text{ an}, n = 200$			$T = 5 \text{ an}, n = 200$		
	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$
1	11,7439	6,3542	3,1780	15,1126	10,8789	7,8703
2	11,7848	6,3826	3,1912	15,1841	10,9274	7,9085
4	11,7988	6,3950	3,1994	15,2016	10,9457	7,9256
8	11,8036	6,4003	3,2033	15,2080	10,9530	7,9330
16	11,8054	6,4025	3,2051	15,2107	10,9562	7,9363
32	11,8062	6,4035	3,2059	15,2118	10,9576	7,9377
64	11,8065	6,4039	3,2063	15,2123	10,95826	7,9383
128	11,8066	6,4040	3,2064	15,2125	10,9584	7,9386
256	11,8066	6,4041	3,2065	15,2127	10,9586	7,9388

TAB. 2.3 – Évaluation d’une option de vente américaine par un portefeuille d’options à barrière. Les paramètres sont  $K = 100$ ,  $r = 4\%$ ,  $\sigma = 20\%$ .

$M$	$T = 1 \text{ an}, n = 300$			$T = 5 \text{ an}, n = 500$		
	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$
1	18,4921	13,9781	10,4891	28,8674	25,6526	22,9015
2	18,5490	14,0202	10,5186	29,2470	25,9336	23,1138
4	18,5722	14,0408	10,5358	29,3012	25,9874	23,1661
8	18,5822	14,0503	10,5442	29,3200	26,0070	23,1860
16	18,5862	14,0543	10,5480	29,3270	26,0145	23,1938
32	18,5878	14,0560	10,5496	29,3301	26,0179	23,1973
64	18,5885	14,0567	10,5503	29,3313	26,0193	23,1989
128	18,5887	14,0570	10,5506	29,3320	26,0200	23,1997
256	18,5889	14,0571	10,5507	29,3330	26,0210	23,2007

TAB. 2.4 – Évaluation d’une option de vente américaine par un portefeuille d’options à barrière. Les paramètres sont  $K = 100$ ,  $r = 4\%$ ,  $\sigma = 40\%$ .

de longue échéance, on doit également considérer des grilles d'évaluation relativement plus étendues pour tenir compte d'un spectre plus grand des valeurs que peut prendre le sous-jacent durant cette longue période. Par ailleurs, l'approche par optimisation d'un portefeuille d'options à barrière s'avère également coûteuse en temps de calcul du fait des problèmes d'optimisation qui doivent être résolus sur chacun des points de la grille de discrétisation des valeurs de l'actif sous-jacent.

Cette section présente une méthode alternative efficace pour l'évaluation des options de longue échéance. Cette méthode est une adaptation de l'approche par option bermudienne, où on permet toutefois au détenteur d'exercer l'option en temps continu. Ainsi, on définit encore une discrétisation du temps en dates de décision, et on suppose qu'à chaque date de décision, le détenteur choisit entre exercer l'option ou non, mais choisit également une barrière qui déclenchera l'exercice si elle est atteinte par la valeur du sous-jacent avant la prochaine date de décision.

Il convient de remarquer que la frontière d'exercice de l'option américaine  $U^*(t)$  définie par (2.3) est effectivement indépendante du niveau du sous-jacent, et que la frontière d'exercice  $s_m^b$  de l'option bermudienne correspondante en  $t_m$  satisfait  $s_m^b > U^*(t_m)$ . Par ailleurs, l'approche par portefeuille d'options à barrière consiste à approcher  $U^*(t)$  par une fonction constante sur  $[t_m, t_{m+1})$ ; comme on l'a remarqué dans la section précédente, la meilleure approximation en  $t_m$  dépend du niveau du sous-jacent  $S_{t_m}$ .

Dans l'implantation présentée ici, la barrière optimale choisie par le détenteur à chaque date de décision est indépendante du prix de l'actif sous-jacent. À une date de décision  $t_m$  quelconque, on détermine un point  $s_m^*$  proche de  $U^*(t_m)$  et on procède à une optimisation de la barrière en  $s_m^*$ , ce qui fournit une approximation de  $U^*(t)$  par une fonction constante par morceaux. Cette frontière approchée est utilisée pour évaluer l'option sur tous les points de la grille. Ainsi, par rapport à l'approche implantée dans l'algorithme 2, l'optimisation de la barrière n'est faite qu'en un seul point de la grille, ce qui réduit considérablement le temps de calcul. On note  $A_m(s)$  la valeur de l'option américaine obtenue par cette troisième

approche, définie par le programme dynamique suivant :

$$A_M(s) = (K - s)^+ \quad (2.10)$$

$$B_M = \arg \max_{0 \leq B \leq s_M^*} \{D(s_M^*; B, \delta) + F(s_M^*; B, \delta)\} \quad (2.11)$$

$$A_{M-1}(s) = D(s; B_M, \delta) + F(s; B_M, \delta) \quad (2.12)$$

$$B_m = \arg \max_{0 \leq B \leq s_m^*} \{e^{-r\delta} \mathbb{E}_{s_m^*} [A_m(s_m^* R_\delta) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty)] + F(s_m^*; B, \delta)\} \\ : \tau_m = \inf \{\tau \geq 0 : S_\tau \leq B\}, m = 1, \dots, M - 1 \quad (2.13)$$

$$A_{m-1}(s) = e^{-r\delta} \mathbb{E}_s [A_m(s R_\delta) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty)] + F(s; B_m, \delta), \\ \tau_m = \inf \{\tau \geq 0 : S_\tau \leq B_m\}, m = 1, \dots, M - 1, \quad (2.14)$$

où  $s_m^*$  satisfait

$$e^{-r\delta} \mathbb{E} [A_m(s_m^* R_\delta)] = K - s_m^*. \quad (2.15)$$

Il convient de noter que  $s_m^*$  n'est pas exactement égal à  $U^*(t_{m-1})$  puisque ce point est obtenu à partir de l'approximation  $A_m$  de la valeur de l'option américaine. Pour la même raison,  $s_m^*$  n'est pas non plus sur la frontière de l'option bermudienne; il est facile de montrer que

$$\bar{P}(t_m, s) \geq A_m \geq V_m$$

et que par conséquent

$$U^*(t_m) < s_{m+1}^* < s_m^b.$$

L'interpolation de  $A_m$  par une spline cubique  $\hat{A}_m$  est donné par (4.7), et le calcul des espérances  $\mathbb{E}_s [A_m(s Y_\delta) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty)]$  et  $\mathbb{E} [A_m(s_m^* Y_\delta)]$  est obtenu respectivement par (2.9) et (1.23). L'algorithme 3 décrit l'implantation du programme (2.10)-(2.15).

### Algorithme 3

1. Définir les paramètres  $T, M, n, \delta = \frac{T}{M}, s_n, K$
2. Discrétiser les espaces du temps :  $t_m = m \frac{T}{M}, m = 0, \dots, M$  et du prix de l'actif sous-jacent  $s_i = i \frac{s_n}{n}, i = 0, \dots, n$ .
3. Calculer  $\Omega(s_i, j, k)$  et  $\Psi(s_i, j, k)$  pour  $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n - 1$  et  $k = 0, \dots, 3$ .
4. À  $t_{M-1}$  :

4.1 Trouver  $s_M^*$  solutionnant  $\{(K - s)^+ - e^{-r\delta} \mathbb{E} [(K - s Y_\delta)^+] = 0, s \in \mathbb{R}_+\}$  à partir

$M$	$T = 1 \text{ an}, n = 200$			$T = 5 \text{ an}, n = 300$		
	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$
1	11,6570	6,3495	3,1775	13,3609	9,7986	7,2047
2	11,7789	6,3763	3,1860	14,6321	10,5809	7,6815
4	11,7946	6,3902	3,1956	15,0649	10,8534	7,8611
8	11,8019	6,3983	3,2017	15,1907	10,9403	7,9236
16	11,8048	6,4017	3,2044	15,2096	10,9549	7,9349
32	11,8059	6,4031	3,2056	15,2114	10,9570	7,9371
64	11,8064	6,4037	3,2062	15,2121	10,9579	7,9381
128	11,8066	6,4040	3,2064	15,2125	10,9583	7,9385
512	11,8068	6,4042	3,2066	15,2128	10,9587	7,9388
1024	11,8070	6,4044	3,2066	15,2130	10,9589	7,9390
1500	11,8072	6,4045	3,2067	15,2131	10,9591	7,9391

TAB. 2.5 – Évaluation d’une option de vente américaine à partir d’une option bermudienne corrigée. Les paramètres sont  $K = 100$ ,  $r = 4\%$ ,  $\sigma = 20\%$ .

de la formule de Black-Scholes

4.2 Trouver  $B_M$  à partir de (2.11)

4.3 Calculer  $A_{M-1}(s_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  à partir de (2.12)

5. Pour  $m = M - 1$  à  $m = 1$

5.1 Calculer les coefficients  $c_{ik}^m$  pour  $i = 0, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, 3$  interpolant  $A_m$

5.2 Trouver  $s_m^*$  solutionnant  $\{(K - s)^+ - e^{-r\delta}\mathbb{E}[A_m(sY_\delta)] = 0, s \in \mathbb{R}_+\}$  à partir de (1.23)

5.3 Trouver  $B_m$  à partir de (2.13) et (2.9)

5.4 Calculer  $A_{m-1}(s_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  à partir de (2.14) et (2.9)

6. Terminer.

Les tableaux 2.5 et 2.6 présentent une illustration des résultats obtenus par l’algorithme 3. Les figures 2.1 et 2.2 permettent d’apprécier la performance de cette troisième approche en la comparant aux deux précédentes en termes de précision et de temps de calcul<sup>1</sup>. Le prix de référence  $V_{ref}$  utilisé pour calculer l’erreur d’approximation relative  $|V_{ref} - V|/V_{ref}$  est obtenu en extrapolant, à partir de l’algorithme epsilon (Wynn 1966), la séquence de prix fournie par l’algorithme 3.

<sup>1</sup>Les temps de calcul sont donnée en secondes CPU sur un ordinateur Pentium® Dual-Core de 2,8GHz.

$M$	$T = 1 \text{ an}, n = 300$			$T = 5 \text{ an}, n = 500$		
	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$	$s = 90$	$s = 100$	$s = 110$
1	18,4542	13,9709	10,4888	27,1345	24,2476	21,7532
2	18,5266	14,0027	10,5055	28,5846	25,3840	22,6491
4	18,5653	14,0346	10,5306	29,0746	25,7889	22,9912
8	18,5788	14,0470	10,5412	29,2618	25,9549	23,1392
16	18,5848	14,0529	10,5467	29,3204	26,0081	23,1877
32	18,5873	14,0554	10,5491	29,3291	26,0168	23,1962
64	18,5882	14,0565	10,5501	29,3309	26,0188	23,1983
128	18,5886	14,0569	10,5505	29,3318	26,0198	23,1995
512	18,5889	14,0572	10,5508	29,3351	26,0227	23,2021
1024	18,5891	14,0573	10,5509	29,3370	26,0243	23,2035
1500	18,5892	14,0574	10,5509	29,3374	26,0245	23,2037

TAB. 2.6 – Évaluation d’une option de vente américaine par une option bermudienne corrigée. Les paramètres sont  $K = 100$ ,  $r = 4\%$ ,  $\sigma = 40\%$ .

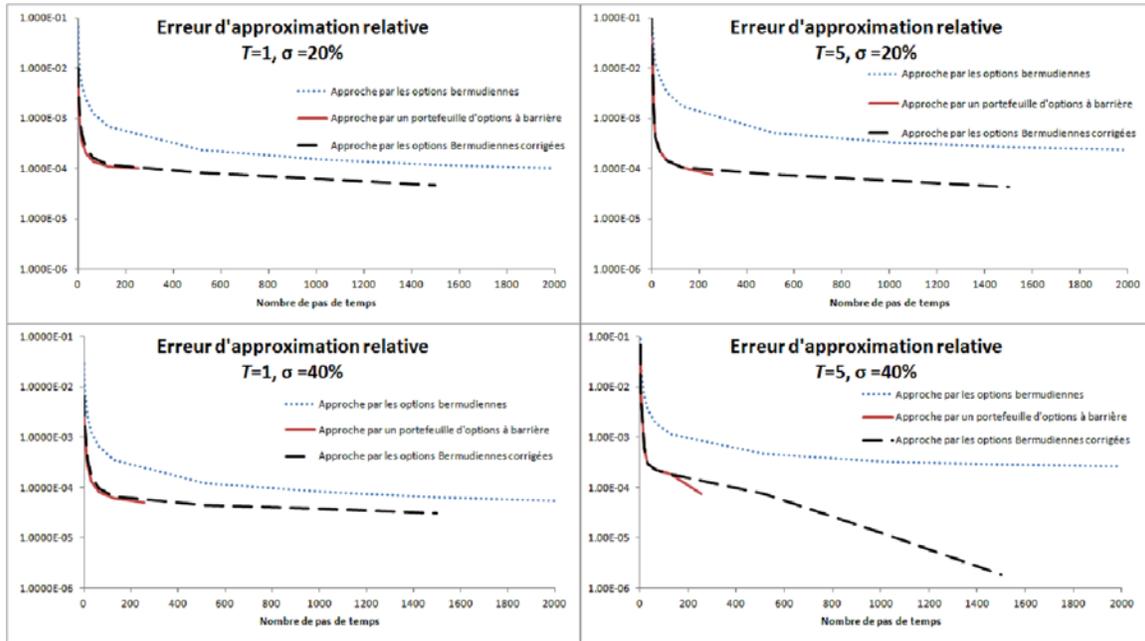


FIG. 2.1 – Convergence de l’erreur d’approximation selon le nombre de pas de temps,  $r = 4\%$ ,  $K = 100$ . Les valeurs rapportées sont les moyennes des résultats pour  $s = 90, 100$  et  $110$ .

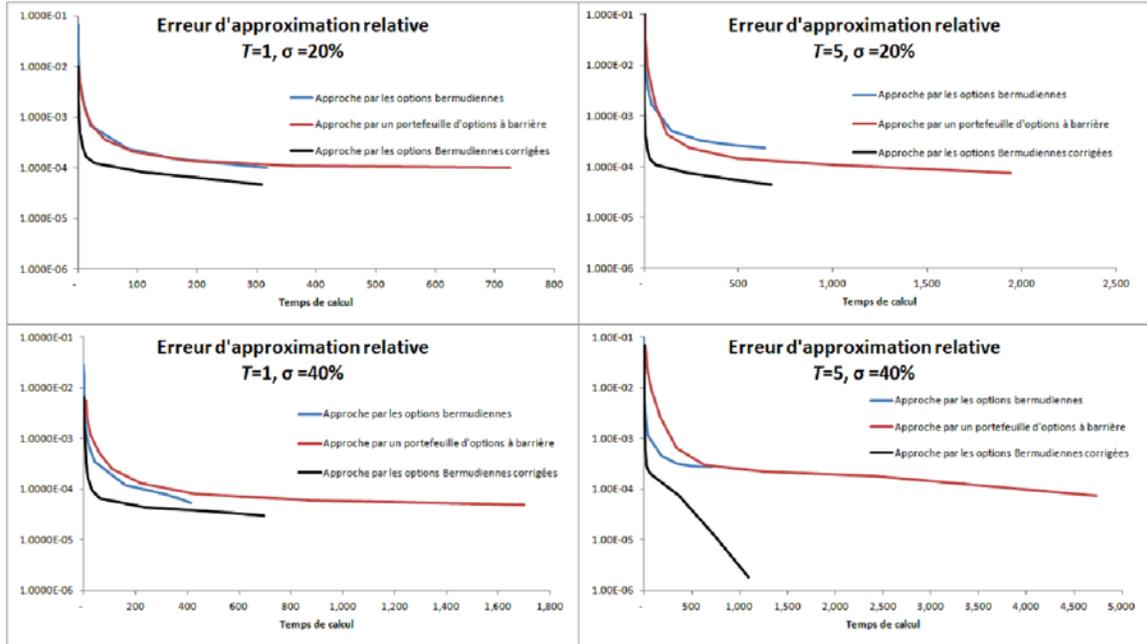


FIG. 2.2 – Erreur d’approximation en fonction du temps de calcul,  $r = 4\%$ ,  $K = 100$ . Les valeurs rapportées sont les moyennes des résultats pour  $s = 90, 100$  et  $110$ .

## 2.5 Conclusion

Cet essai propose deux approches pour l’évaluation d’une option de vente américaine qui sont particulièrement adaptées aux options de longue échéance où le nombre de possibilités d’exercice est important, et où l’approximation par une option bermudienne demande un grand nombre de pas de temps. Les essais numériques montrent que la prise en compte de possibilités d’exercice entre deux pas de temps augmente significativement la convergence vers la valeur de l’option américaine.

Pour les deux approches, la stratégie d’exercice et la valeur de l’option américaine sont caractérisées par programmation dynamique en supposant que le détenteur décide d’une barrière d’exercice à chaque date de décision, et qu’il exerce l’option si la valeur du sous-jacent atteint cette barrière à tout moment dans l’intervalle entre deux dates de décision. La première approche suppose que la barrière d’exercice optimale dépend du niveau de l’actif sous-jacent, et la valeur de l’option est alors assimilée à celle d’un portefeuille d’options à barrière. Cependant, le calcul d’une barrière d’exercice pour chacun des points de la grille de discrétisation de l’actif sous-jacent est coûteux en temps de calcul. La deuxième approche suppose que la barrière d’exercice optimale ne dépend pas du niveau du sous-jacent et corres-

pond à l'approximation de la frontière d'exercice par une fonction constante par morceaux. Cette approche hybride s'interprète en supposant que le détenteur, à chaque date de décision, choisit d'exercer ou non comme dans le cas d'une option bermudienne, puis décide d'une barrière constante et indépendante du niveau du sous-jacent qui sera appliquée sur l'intervalle entre deux dates de décision. Cette deuxième approche est très efficace, donnant une approximation précise et rapide de la valeur d'une option américaine de longue échéance. Dans les deux cas, comme l'évaluation est faite à partir d'un programme dynamique, ces méthodes permettent d'obtenir en une seule opération les prix d'options de différentes échéances et prix d'exercice, ainsi que leur sensibilité aux valeurs des paramètres et les variables de couverture.

Les expériences numériques montrent que l'utilisation d'une barrière entre deux dates de décision permet la convergence rapide vers la valeur d'une option américaine, et que le choix d'une barrière indépendante du niveau du sous-jacent est la méthode la plus efficace pour les options de longue échéance. Les développements sont présentés dans le cadre d'un modèle de marché log-normal. Dans ce cas, l'interpolation de la fonction valeur par une spline cubique permet d'obtenir une expression analytique de son espérance actualisée. Les algorithmes présentés dans cet essai pourraient facilement être adaptés à d'autres modèles de marché ; toutefois, l'implantation numérique pourrait dans ce cas nécessiter une intégration numérique pour le calcul des valeurs espérées.

## 2.6 Annexe : Calcul de la fonction $\Psi$

On définit

$$\begin{aligned}\Psi(s, i, k) &= \exp\left(-\frac{\hat{\mu}^2 \delta}{2\sigma^2}\right) \mathbb{E}^{\tilde{Q}} \left[ \exp\left(\frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma} \tilde{W}_\delta\right) \mathbb{I}_{\tilde{W}_\delta}(a_i, a_{i+1}) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty) \right] \\ a_i &= \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{s_i}{s}\right).\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}^{\tilde{Q}} \left[ \exp\left(\frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma} \tilde{W}_\delta\right) \mathbb{I}_{\tilde{W}_\delta}(a_i, a_{i+1}) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, \infty) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\tilde{Q}} \left[ \exp\left(\frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma} \tilde{W}_\delta\right) \mathbb{I}_{\tilde{W}_\delta}(a_i, a_{i+1}) \right] \\ & \quad - \mathbb{E}^{\tilde{Q}} \left[ \exp\left(\frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma} \tilde{W}_\delta\right) \mathbb{I}_{\tilde{W}_\delta}(a_i, a_{i+1}) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, t_{m+1}) \right].\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}^{\tilde{Q}} \left[ \exp\left(\frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma} \tilde{W}_\delta\right) \mathbb{I}_{\tilde{W}_\delta}(a_i, a_{i+1}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a_i}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a_{i+1}}{\sqrt{\delta}}} \exp\left(\frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma} \sqrt{\delta} w\right) \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw \\ &= \exp\left(\frac{\delta(\hat{\mu} + k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a_i}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a_{i+1}}{\sqrt{\delta}}} \exp\left(-\frac{\left(w - \sqrt{\delta} \frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma}\right)^2}{2}\right) dw \\ &= \exp\left(\frac{\delta(\hat{\mu} + k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \left( \Phi\left(\frac{a_{i+1}}{\sqrt{\delta}} - \sqrt{\delta} \frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_i}{\sqrt{\delta}} - \sqrt{\delta} \frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma}\right) \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}^{\tilde{Q}} \left[ \exp\left(\frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma} \tilde{W}_\delta\right) \mathbb{I}_{\tilde{W}_\delta}(a_i, a_{i+1}) \mathbb{I}_{\tau_m}(t_m, t_{m+1}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a_i}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a_{i+1}}{\sqrt{\delta}}} \exp\left(w \sqrt{\delta} \frac{\hat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{\left(w \sqrt{\delta} - \frac{2}{\sigma} \ln\left(\frac{B_m}{s}\right)\right)^2}{2}\right) dw.\end{aligned}$$

Soit  $L \equiv \frac{1}{\sigma} \ln \left( \frac{B_m}{s} \right)$ ,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a_i}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a_{i+1}}{\sqrt{\delta}}} \exp \left( w\sqrt{\delta} \frac{\widehat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma} \right) \exp \left( -\frac{(w\sqrt{\delta} - 2L)^2}{2} \right) dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a_i}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a_{i+1}}{\sqrt{\delta}}} \exp \left( w\sqrt{\delta} \frac{\widehat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma} - \frac{(w\sqrt{\delta} - 2L)^2}{2} \right) dw \\
&= \exp \left( \frac{(k\sigma^2 + \widehat{\mu})(k\sigma^2 + 4L\sigma + \widehat{\mu})}{2\sigma^2} \right) \\
& \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a_i}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a_{i+1}}{\sqrt{\delta}}} \exp -\frac{1}{2} \left( \left( w\sqrt{\delta} - \left( 2L + k\sigma + \frac{1}{\sigma} \widehat{\mu} \right) \right)^2 \right) dw \\
&= \exp \left( \frac{(k\sigma^2 + \widehat{\mu})(k\sigma^2 + 4L\sigma + \widehat{\mu})}{2\sigma^2} \right) \\
& \quad \left( \Phi \left( a_{i+1} - 2L - k\sigma - \frac{1}{\sigma} \widehat{\mu} \right) - \Phi \left( a_i - 2L - k\sigma - \frac{1}{\sigma} \widehat{\mu} \right) \right)
\end{aligned}$$

Finalemment :

$$\begin{aligned}
\Psi(s, i, k) &= \exp \left( -\frac{\widehat{\mu}^2 \delta}{2\sigma^2} \right) \left( \exp \left( \frac{\delta (\widehat{\mu} + k\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) (\Phi(a'_{i+1}) - \Phi(a'_i)) \right. \\
& \quad \left. - \exp \left( \frac{(k\sigma^2 + \widehat{\mu})(k\sigma^2 + 4L\sigma + \widehat{\mu})}{2\sigma^2} \right) (\Phi(a''_{i+1}) - \Phi(a''_i)) \right)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{1}{\sigma} \ln \left( \frac{s_i}{s} \right) \\
a'_i &= \frac{a_i}{\sqrt{\delta}} - \sqrt{\delta} \frac{\widehat{\mu} + k\sigma^2}{\sigma} \\
a''_i &= a_i - 2L - k\sigma - \frac{1}{\sigma} \widehat{\mu} \\
L &= \frac{1}{\sigma} \ln \left( \frac{B_m}{s} \right).
\end{aligned}$$

# Chapitre 3

## Évaluation des garanties offertes par les fonds distincts

Ce chapitre présente un cadre général pour l'évaluation des garanties offertes par les fonds distincts. On y adapte l'algorithme de programmation dynamique couplée à l'interpolation par des splines cubiques pour évaluer différentes options incluses dans les contrats de garantie, sous l'hypothèse conservatrice d'un comportement optimal du détenteur. L'algorithme d'évaluation utilise un modèle de volatilité avec changements de régime représentatif de la dynamique des fonds indiciels sur le long terme. On montre à travers les différents exemples de contrats que l'approche est générale, et permet à l'assureur d'évaluer, couvrir, et définir le niveau concurrentiel des frais des contrats de garantie.

### 3.1 Introduction

Dans le cas classique, un investisseur qui est en relation directe avec un fond d'investissement est complètement exposé aux fluctuations du marché. Par ailleurs, un investisseur choisissant d'investir dans un fond distinct acquiert chez un assureur un contrat de protection qui lui permet de profiter du rendement boursier d'un fond tout en bénéficiant d'un ensemble de garanties sur le capital investi. Dans une période de grande incertitude économique et de haute volatilité, les fonds distincts représentent ainsi une alternative très intéressante, permettant à la fois de protéger l'épargne et de profiter du rendement boursier. Naturellement, les assureurs prélèvent des frais en contrepartie des garanties offertes. Durant les

années 1990, lorsque les marchés boursiers réalisaient de très bons rendements, les garanties de performance coûtaient très peu aux assureurs ; cependant, après une succession de crises financières, les assureurs et les organismes de réglementation ont remis en cause la procédure d'évaluation et les exigences de capital relatives aux garanties offertes par les fonds distincts.

Les fonds distincts donnent au détenteur différents choix d'investissement (fonds obligataires, indiciels, mixtes, fonds de fonds). Parmi les éléments caractéristiques possibles offerts par les fonds distincts, on compte les suivants :

1. Garantie au décès et (ou) à l'échéance : le détenteur de la police est assuré de récupérer un pourcentage minimum (100% ou 75%) de son investissement initial à son décès ou à l'échéance du contrat.
2. Garantie d'accumulation minimale : le détenteur s'assure d'un niveau de performance minimal durant une période fixe (par exemple, un rendement de 5% tous les ans pendant 5 ans).
3. Garantie de retrait minimal : le détenteur est assuré d'un retrait fixe à chaque période. Tout retrait supérieur au niveau contractuel s'accompagne du paiement d'une pénalité.
4. Garantie de revenu minimal à vie : le détenteur est assuré d'un revenu minimal jusqu'à son décès.
5. Option de revalorisation ou de rétablissement : cette option accompagne souvent les garanties à l'échéance ou la garantie du revenu minimal. Dans le cas où le fond réaliserait une bonne performance, le détenteur pourrait profiter de la hausse et réajuster le niveau de la garantie (au décès ou à l'échéance) au niveau atteint par le fond. La revalorisation peut s'accompagner ou non d'un changement de l'échéance du contrat.

L'évaluation des garanties et des options offertes par les fonds distincts est souvent traitée selon une approche financière. Cette évaluation présente un intérêt pour la finance mathématique du fait de l'aspect très exotique des garanties offertes. Lorsque les contrats impliquent des options de type américain, la simulation de Monte-Carlo, avec ses limites, n'est pas très adaptée à leur évaluation, et c'est pourquoi la méthode des différences finies pour la solution d'équations aux dérivées partielles a été plus souvent préconisée dans la littérature.

Un cadre général pour l'évaluation des garanties offertes par les fonds distincts est proposé dans Bauer et al. (2008). Les auteurs utilisent l'approche récursive combinée aux éléments finis développée par Tanskanen et Lukkarinen (2003) pour évaluer différents contrats dans le cadre des hypothèses du modèle de Black et Scholes. Ce cadre permet d'étudier la sensibilité du prix des garanties aux différents paramètres du marché, mais les auteurs s'accordent

sur l'incapacité du modèle lognormal à reproduire la dynamique des fonds sous-jacents. À l'exception de cet article, les travaux publiés dans la littérature se concentrent sur l'étude et l'évaluation de caractéristiques spécifiques qu'on retrouve dans les fonds distincts. Par exemple, Armstrong (2001) évalue la garantie à l'échéance selon différents types de comportement de l'investisseur. L'auteur analyse l'impact de plusieurs stratégies de sortie du contrat sur le prix de la garantie, sans étudier la stratégie optimale. Boyle et al. (2001) présente une approche de simulation Monte Carlo pour l'évaluation de l'option de revalorisation, qui est très efficace dans le cas de fonds mixtes ou comportant plusieurs actifs sous-jacents. Dai et Kwok (2005) présentent un traitement financier qui sort du cadre des assurances, le prix étant insensible aux caractéristiques (âge et comportement) du détenteur. Windcliff et al. (2001a, 2001b) et Dai et al. (2004) étudient une forme plus complexe de l'option de revalorisation, c'est-à-dire l'option verrou, qui permet un changement d'échéance. Dans les deux cas, les auteurs utilisent une approche par dérivées partielles combinée à une approximation par différences finies pour construire la stratégie d'exercice optimale lorsque le détenteur dispose aussi d'une option de sortie.

Du fait de sa popularité auprès des investisseurs, la garantie de retrait minimal a été étudiée par plusieurs auteurs. On distingue deux façons de considérer le retrait : certains travaux supposent un retrait constant déterministe, alors que d'autres supposent un retrait dynamique optimal. Milevsky et Salisbury (2005) est l'un des premiers articles à traiter la garantie de retrait minimal sous un angle financier. Les auteurs montrent d'abord que, sous une stratégie de retrait statique, la valeur de la garantie est égale à un portefeuille composé d'obligations et d'une option de vente asiatique de type quanto. Ils proposent une équation aux dérivées partielles (EDP) pour évaluer le prix de la garantie sous l'hypothèse d'un comportement optimal du détenteur. Selon eux, le prix de l'assurance peut doubler si on passe d'une hypothèse de retrait statique à une hypothèse de retrait dynamique optimal. Chen et Forsyth (2008) et Chen et al. (2008) utilisent également une méthode d'EDP. L'algorithme qu'ils proposent est compatible avec des retraits continus ou discrets. Cependant la technique de différences finies proposée est à la fois complexe et coûteuse en temps de calcul.

La complexité de la garantie de retrait minimal a empêché beaucoup d'auteurs de sortir du cadre de la dynamique lognormale de Black et Scholes, alors que ce modèle ne peut reproduire la dynamique d'un fond sur le long terme. Peng et al. (2012) propose une évaluation de la garantie dans le cadre d'un modèle avec taux d'intérêt stochastique. Les auteurs développent deux approximations analytiques encadrant le prix du contrat dans le cas d'une stratégie de retrait constante. Cette approche est très utile si on veut étudier l'impact du taux sur la valeur de la garantie. Forsyth et Vetzal (2012) utilisent une EDP pour calculer le prix d'un

contrat de garantie de retrait minimal dans un modèle avec changements de régime. La dimension du problème est réduite en supposant une forme particulière pour le contrat. L'auteur étudie l'impact des différents paramètres sur la valeur du contrat de garantie, et en déduit lui aussi qu'un comportement optimal du détenteur a un impact très important sur cette valeur.

Dans ce travail, on présente un cadre général pour l'évaluation des garanties et des options offertes par les fonds distincts. La formulation proposée est un programme dynamique capable de traiter les différents contrats de garanties sous l'hypothèse d'un comportement optimal du détenteur de la police. Le modèle de marché choisi est le modèle lognormal avec changements de régime, qui est plus représentatif sur le long terme des variations de la valeur d'un fond d'investissement que le modèle de Black et Scholes qui suppose une volatilité constante. L'approche numérique est illustrée pour trois contrats typiques.

Ce chapitre est organisé comme suit. La section 3.2 introduit le modèle lognormal avec changements de régime. On y expose brièvement une méthode d'estimation de ce modèle dans le cas d'un fond indicier ainsi que la méthode correspondante d'approximation de la distribution du rendement. Les résultats de l'estimation pour l'indice S&P500 seront utilisés pour illustrer l'évaluation de divers contrats de garantie de fonds distincts. La section 3.3 aborde l'exemple classique d'un contrat de garantie à l'échéance et au décès, en s'intéressant particulièrement à l'option de sortie du détenteur de la police. Ce premier exemple permet d'exposer la technique d'approximation par spline cubiques dans le cadre du modèle lognormal avec changements de régime. La section 3.4 est consacrée à l'évaluation de contrats comportant des options de revalorisation. La section 3.5 s'attaque finalement à l'évaluation de contrats comportant une clause de retrait minimal garanti. La section 3.6 conclut.

## **3.2 Modèle lognormal avec changements de régime**

### **3.2.1 Présentation**

Les fonds distincts comportent une large gamme de possibilités d'investissement qui se distinguent par leur profil de risque. On s'intéressera ici aux fonds indiciers, qui répliquent la performance d'un indice de marché (par exemple le S&P500 ou TSX 60). Dans ce cas, les options et garanties offertes par les contrats sont contingentes au niveau de l'indice de marché et leur évaluation passe par la modélisation de la dynamique de cet indice.

Le modèle brownien géométrique avec volatilité constante a souvent été utilisé pour décrire l'évolution de la valeur d'un fond du fait de sa simplicité d'utilisation. Cependant, étant donné la longueur de l'horizon des garanties, l'hypothèse d'une volatilité constante est difficile à soutenir. On utilisera ici plutôt un modèle de volatilité stochastique, notamment un processus log normal avec changement de régime (LNCR), qui est une alternative à la fois traitable et réaliste.

Dans les modèles LNCR, l'existence de plusieurs régimes est représentée par une chaîne de Markov à temps et états discrets qui décrit les changements aléatoires de facteurs économiques. Plusieurs travaux (voir par exemple Hardy 2001) concluent que deux régimes sont suffisants pour représenter adéquatement l'évolution de la volatilité des rendements dans le temps. L'estimation des paramètres et des matrices de transition peut se faire sur les observations physiques. Pour faire le passage à la dynamique neutre au risque, on suppose simplement que le risque de volatilité n'est pas coté par le marché ; cette hypothèse a été retenue par de nombreux auteurs (voir par exemple Bollen 1998). La dynamique neutre au risque s'obtient en remplaçant le rendement physique par le taux sans risque. Sous une dynamique à deux régimes on a par exemple :

$$S_{t+\delta} = \begin{cases} S_t \exp \left( \hat{\mu}_E \delta + \sigma_E \sqrt{\delta} \epsilon \right) & \text{si la volatilité est élevée durant } [t, t + \delta), \\ S_t \exp \left( \hat{\mu}_F \delta + \sigma_F \sqrt{\delta} \epsilon \right) & \text{si la volatilité est faible durant } [t, t + \delta), \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$r$  est le taux sans risque,

$S_t$  est le processus de la valeur de l'indice du fond,

$\delta$  est le pas de temps.

$\sigma_x$  est la volatilité du rendement de l'actif sous-jacent en régime  $x$ ,  $x \in \{E, F\}$

$$\hat{\mu}_x = \left( r - \frac{\sigma_x^2}{2} \right)$$

$$\epsilon \sim N(0, 1).$$

Les transitions de régime se déroulent selon une matrice  $[p_{xy}]_{x,y \in \{E,F\}}$  qui définit les probabilités de passage du régime  $x$  au régime  $y$  en un pas de temps  $\delta$ .

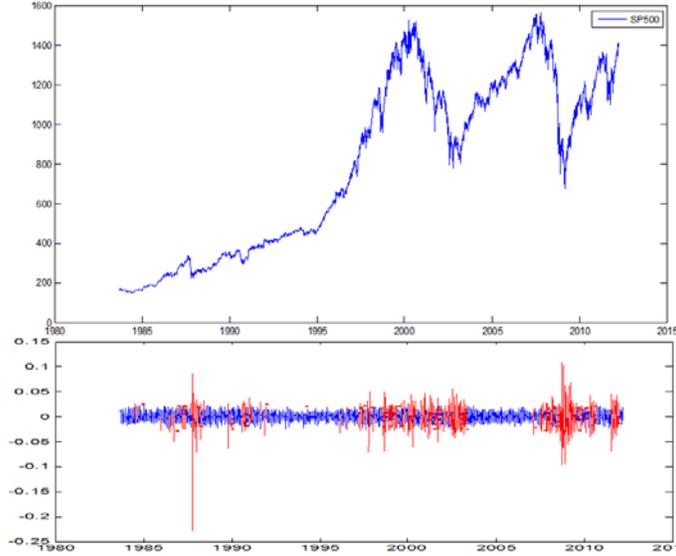


FIG. 3.1 – Estimation des régimes.

$\sigma_E$	37%
$\sigma_F$	14%

TAB. 3.1 – Estimation des régimes de volatilité.

### 3.2.2 Estimation du modèle

Hamilton et Susmel (1994) et Hardy (2001) proposent un algorithme permettant de calculer la fonction de vraisemblance des régimes et des volatilités sous chaque régime. L'estimation des paramètres du modèle est obtenue en maximisant cette fonction. L'algorithme calcule la fonction de vraisemblance de manière itérative, où la vraisemblance de chaque observation est exprimée en fonction des régimes possibles pour l'état précédent et des probabilités de transitions.

L'implantation de cet algorithme sur des observations journalières des prix du S&P500 allant de 1983 jusqu'à 2012 permet d'obtenir les valeurs des paramètres présentées aux tableaux 3.1 et 3.2. Le prix du S&P 500 exhibe deux niveaux de volatilité : le niveau élevé est estimé à  $\sigma_E = 37\%$  et le niveau faible à  $\sigma_F = 14\%$ . La figure 3.1 présente l'évolution du prix et de la volatilité de l'indice, ainsi que le régime le plus probable selon la maximisation de la fonction de vraisemblance. On constate que les périodes de crise comme celle de 2008 et de 2001 sont identifiées à des périodes de haute volatilité.

Prob	$E$	$F$
$E$	96,69%	3,31%
$F$	0,98%	99,02%

TAB. 3.2 – Estimation des probabilités de transition

### 3.2.3 Évaluation d'une garantie à l'échéance

On aborde tout d'abord l'évaluation d'un contrat théorique simple ne comportant qu'une garantie à l'échéance afin d'introduire la méthode d'approximation du rendement dans le modèle LNCR qui sera utilisée ultérieurement pour des contrats plus complexes. Ce contrat assure au détenteur la réception d'un montant minimum à l'échéance, ce qui s'exprime par :

$$V_T = \max \{S_T; K\} = K + [S_T - K]^+$$

où  $S_t$  et  $V_t$  dénotent respectivement la valeur du fond sous-jacent et la valeur du contrat à une date  $t$ ,  $T$  est l'échéance du contrat, et  $K$  est le montant de la garantie. Le contrat est équivalent à une obligation zéro coupon payant  $K$  et à une option d'achat européenne sur la valeur de l'investissement à l'échéance. À la date d'initiation du contrat on a donc :

$$V_0 = K \exp(-rT) + \exp(-rT) \mathbb{E} [(S_T - K)^+].$$

Hardy (2001) montre que la distribution du rendement sous le modèle lognormal avec changements de régime est donnée par une mixture de distributions gaussiennes. En notant par  $\tau$  la variable aléatoire représentant le temps de séjour dans le régime  $E$  durant un intervalle de temps  $T$ , l'expression du rendement  $R_T$  conditionnellement à  $\tau$  est donné par :

$$R_T = \left( r - q - \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right) T + \sigma_\tau \sqrt{T} \epsilon \quad (3.2)$$

où

$\epsilon$  est une innovation gaussienne standard,

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{\tau \sigma_E^2 + (T - \tau) \sigma_F^2}{T}},$$

$q$  représente le taux des frais prélevés continuellement par l'assureur en contrepartie de la garantie offerte.

L'expression (3.2) permet de retrouver la distribution inconditionnelle  $\xi_x$  du rendement du fond sous-jacent entre 0 et  $T$  lorsque le régime observé à  $t = 0$  est  $x$  :

$$\xi_x(R) = \int_0^T \phi \left( R; \left( r - q - \frac{\sigma_\tau^2}{2} \right), \sigma_\tau \right) g_x(\tau) d\tau$$

où

$\phi(\cdot; \mu, \sigma)$  est la densité de probabilité de la loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ ,

$g_x(\cdot)$  est la distribution du temps de séjour sous le régime  $E$  dans l'intervalle de temps  $[0, T]$  lorsque le régime observé à  $t = 0$  est  $x$ .

La distribution  $g_x$  n'étant pas connue sous une forme fermée, on l'approxime en discrétisant l'espace des valeurs possibles pour  $\tau$  avec un pas  $\Delta = \frac{T}{J}$ . Hardy (2001) fournit une procédure récursive permettant de construire la distribution discrète  $\hat{g}_x$  approximant  $g_x$ . Cette procédure utilise les matrices de probabilité de transition pour retrouver la distribution de  $\tau$  sur un horizon  $T$  en partant de sa distribution sur  $\Delta$ . Cette distribution converge vers la distribution à un seul régime lorsque le pas de temps  $\Delta$  tend vers zéro. On obtient ainsi :

$$\xi_x(R) \simeq \sum_{j=0}^J \phi_j(R) \hat{g}_x(j\Delta) \quad (3.3)$$

où

$$\phi_j(R) = \phi \left( R; \left( r - q - \frac{\sigma_{j\Delta}^2}{2} \right), \sigma_{j\Delta} \right).$$

Le prix du contrat est alors donné par :

$$\begin{aligned} V_0 &= K \exp(-rT) + \exp(-rT) \mathbb{E} [(S_T - K)^+] \\ &= K \exp(-rT) + \sum_{j=0}^J C_{BS}(S_0, K, \sigma_{j\Delta}, r, q, T) \hat{g}_x(j\Delta) \end{aligned}$$

où  $C_{BS}(S_0, K, \sigma, r, q, T)$  est le prix, pour un taux sans risque  $r$ , d'une option d'achat européenne d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$  selon la formule de Black et Scholes sur un actif sous-jacent dont le prix au comptant est  $S_0$ , la volatilité est  $\sigma$  et le taux de dividende est  $q$ .

Les sections suivantes exposent l'approche utilisée pour l'évaluation de contrats plus complexes dont la valeur dépend du comportement du détenteur de la police.

### 3.3 Évaluation d'une garantie au décès et à l'échéance avec possibilité de sortie

La garantie à l'échéance traitée dans la section précédente est un cas théorique, où on suppose que le détenteur n'a pas la possibilité d'annuler le contrat. En réalité, à la signature du contrat, le détenteur accepte que l'assureur réalise des prélèvements périodiques dans son fond d'investissement en contrepartie de la garantie. Comme la valeur de la garantie fluctue selon les conditions du marché, il se peut que le contrat à certains moments ne soit plus intéressant pour le détenteur, qui pourrait alors se retirer et réinvestir son capital à des conditions plus avantageuses. L'évaluation du contrat et de la juste prime doit prendre en compte cette possibilité. Dans la suite on suppose que le détenteur agit de façon optimale, c'est-à-dire qu'il maximise, sous la mesure neutre au risque, l'espérance de la valeur actualisée de son investissement. Il s'agit d'une hypothèse conservatrice pour l'assureur, qui bénéficie de toute déviation par le détenteur de sa stratégie optimale. Cependant les détenteurs peuvent également liquider leur investissement pour des raisons exogènes. Pour simplifier l'exposition, cette éventualité ne sera pas considérée ici, mais sa prise en compte ne pose pas de difficulté parce que le grand nombre de clients et la loi des grands nombres rend la proportion de clients qui liquident pour des raisons exogènes prévisible et quasi déterministe.

La garantie la plus commune offerte par un fond distinct est la garantie du minimum à l'échéance, telle que décrite dans la section précédente. Généralement, cette garantie est également accompagnée d'une garantie au décès : le détenteur de la police est ainsi assuré de récupérer une portion ou la totalité de son investissement en cas de décès. En contrepartie des garanties offertes, l'assureur est compensé par des prélèvements périodiques dans le fond d'investissement du client à un taux fixé. Cette section donne les détails de la méthode d'évaluation d'un contrat de base comportant une garantie du minimum à l'échéance et au décès et tenant compte de la possibilité pour le détenteur d'annuler le contrat avant son échéance, moyennant le paiement d'une pénalité.

#### 3.3.1 Modèle et algorithme

La stratégie de sortie du détenteur est construite à partir d'un programme dynamique, qui permet de définir la décision optimale du détenteur à chaque pas de temps et pour tous les états possibles de la nature. Cette stratégie optimale définit par la suite la valeur de la

garantie et celle du contrat à chaque pas de temps, en fonction de l'état de la nature. Pour simplifier la notation, on suppose que les dates de décision et les dates de prélèvement des frais coïncident et sont également espacées, et on les note  $t_m$ ,  $m = 0, \dots, M$ , où  $\delta = t_{m+1} - t_m$ ,  $t_0$  est la date de signature, et  $t_M$  l'échéance du contrat.

Soit  $V_m^x(s)$  la valeur du contrat pour le détenteur à la date  $t_m$  lorsque la valeur du fonds est  $s$  et que le régime de volatilité est  $x \in \{E, F\}$  et soit  $K$  le montant de la garantie. À l'échéance, la valeur du contrat pour le détenteur est donnée par

$$V_M^E(s) = V_M^F(s) = \max\{s; K\}. \quad (3.4)$$

À une date intermédiaire  $t_m$ ,  $m = 1, \dots, M-1$ , la valeur du contrat est définie par l'espérance de la valeur actualisée des paiements futurs sous la mesure neutre au risque :

$$V_m^x(s) = \max_{x \in \{F, E\}, m = 1, \dots, M-1} \left\{ \begin{array}{l} s(1 - \theta_m)(1 - q); \\ \rho((1 - P_m)(\mathbb{E}_x[V_{m+1}^X((1 - q)s \exp(R_{m+1}))]) \\ + P_m \mathbb{E}_x[\max\{(1 - q)s \exp(R_{m+1}); K\}]) \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

où

$q$  représente le taux des frais périodiques dûs à l'assureur en contrepartie de la garantie,

$\theta_m$  est une pénalité payée par le détenteur de la police lorsqu'il décide de se retirer du fond; les contrats proposent généralement des pénalités proportionnelles décroissantes dans le temps,

$P_m$  représente la probabilité que le détenteur décide entre les date  $t_m$  et  $t_{m+1}$ ,

$R_m$  est la variable aléatoire représentant le rendement de l'indice du fond entre  $t_{m-1}$  et  $t_m$ .

$X \in \{F, E\}$  est une variable aléatoire représentant le régime prédominant à une date d'évaluation,

$\rho$  est le facteur d'actualisation, au taux sans risque  $r$ , correspondant à l'intervalle de temps

entre deux dates d'évaluation,

$\mathbb{E}_x[\cdot]$  est l'espérance sous la mesure neutre au risque lorsque le régime est  $x$ .

Finalement, la valeur du contrat à la date de son initiation pour un investissement initial  $s$  et lorsque le régime prédominant est  $x$  est donnée par :

$$\begin{aligned} V_0^x(s) &= -s + \rho(1 - P_1) \mathbb{E}_x [V_1^X(s \exp(R_1))] \\ &\quad + \rho P_1 \mathbb{E}_x [\max \{s \exp(R_1), K\}], \text{ pour } x \text{ dans } \{F, E\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ainsi, le détenteur de la police cède la valeur de son investissement  $s$  à l'assureur en contrepartie des garanties de paiement futur.

### 3.3.2 Technique d'approximation

Le programme dynamique (3.4)-(3.6) définit un algorithme qui peut être utilisé pour calculer récursivement la valeur du contrat à la date  $t_0$ . Cet algorithme fait intervenir le calcul de l'espérance de la fonction valeur, qui ne peut être évaluée numériquement qu'en un nombre fini de points. L'utilisation d'une fonction d'interpolation par splines cubiques de la fonction valeur permet de calculer l'espérance mathématique analytiquement. Pour tenir compte des changements de régime, on conditionne le calcul de l'espérance sur le temps séjour, dont la distribution est calculée d'une manière analogue à celle présentée à la section 3.2. On présente ici le détail de la technique d'approximation permettant d'évaluer l'espérance dans le cadre du modèle log normal avec changements de régime.

On suppose d'abord que  $E$  est le régime prédominant à la date  $t_m$ . Soit  $\mathbb{I}_X(m)$  la fonction indicatrice de l'événement  $x = X$  en date  $t_m$ . On a alors :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_E [V_{m+1}^X((1 - q) s \exp(R_{m+1}))] \\ &= \mathbb{E}_E [V_{m+1}^E((1 - q) s \exp(R_{m+1})) \mathbb{I}_E(m + 1)] \\ &\quad + \mathbb{E}_E [V_{m+1}^F((1 - q) s \exp(R_{m+1})) \mathbb{I}_F(m + 1)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} V_{m+1}^E((1 - q) s \exp(R)) \mathbb{I}_E(m + 1) \xi_E(R) dR \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} V_{m+1}^F((1 - q) s \exp(R)) \mathbb{I}_F(m + 1) \xi_E(R) dR. \end{aligned}$$

En discrétisant l'intervalle  $[t_m, t_{m+1}]$  en  $J$  sous-intervalles de même longueur  $\Delta$  et en utilisant

(3.3) on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_E [V_{m+1}^X((1-q)s \exp(R_{m+1}))] \\
&= \int_{\mathbb{R}} V_{m+1}^E((1-q)s \exp(R)) \mathbb{I}_E(m+1) \sum_{j=0}^J \phi_j(R) \widehat{g}_E(j\Delta) dR \\
&+ \int_{\mathbb{R}} V_{m+1}^F((1-q)s \exp(R)) \mathbb{I}_F(m+1) \sum_{j=0}^J \phi_j(R) \widehat{g}_E(j\Delta) dR.
\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, on remplace  $\mathbb{I}_X(m+1) \widehat{g}_E(j\Delta)$  par la distribution jointe  $\widetilde{g}_{EX}(j\Delta)$  qui représente la probabilité de l'événement :

$\{\tau = j\Delta \text{ et } X \text{ est le régime final à } t_{m+1}\}$  lorsque  $E$  est le régime prédominant à la date  $t_m$ . Le détail du calcul de cette distribution est présenté en annexe 3.7.2. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_E [V_{m+1}^x((1-q)s \exp(R_{m+1}))] \\
&= \sum_{j=0}^J \widetilde{g}_{EE}(j\Delta) \int_{\mathbb{R}} V_{m+1}^E((1-q)s \exp(R)) \phi_j(R) dR \\
&+ \sum_{j=0}^J \widetilde{g}_{EF}(j\Delta) \int_{\mathbb{R}} V_{m+1}^F((1-q)s \exp(R)) \phi_j(R) dR.
\end{aligned}$$

L'expression de l'espérance quand le régime dominant à la date  $t_m$  est  $F$  est obtenue de façon analogue et donnée par :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_F [V_{m+1}^x((1-q)s \exp(R_{m+1}))] \\
&= \sum_{j=0}^J \widetilde{g}_{FE}(j\Delta) \int_{\mathbb{R}} V_{m+1}^E((1-q)s \exp(R)) \phi_j(R) dR \\
&+ \sum_{j=0}^J \widetilde{g}_{FF}(j\Delta) \int_{\mathbb{R}} V_{m+1}^F((1-q)s \exp(R)) \phi_j(R) dR.
\end{aligned}$$

Puisque les fonctions  $V_{m+1}^E$  et  $V_{m+1}^F$  ne sont connues que sur une grille de points  $\mathcal{G}_n = \{s_i, i = 1, \dots, n\}$ , on évaluera plutôt l'espérance de fonctions d'interpolation par splines cubiques, soit :

$$\widehat{V}_m^x(s) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 c_{ik}^{mx} s^k \mathbb{I}[s_i, s_{i+1}).$$

$r$	$\theta$	$q$	$x_0$
3%	5%	2%	$F$

TAB. 3.3 – Paramètres du cas de base.

On réintroduit les fonctions  $\Omega$  construites au chapitre 1 :

$$\Omega(s, i, k, j) \equiv \exp(k\Delta\hat{\mu}_{j\Delta}) \mathbb{E} \left[ \exp\left(k\sigma_{j\Delta}\sqrt{\Delta}\epsilon\right) \mathbb{I}_\epsilon(a_{ij}, a_{i+1,j}) \right], \quad \epsilon \sim N(0, 1)$$

$$a_{ij} = \frac{\log\left(\frac{s_i}{(1-q)s}\right) - \hat{\mu}_{j\Delta}\Delta}{\sigma_{j\Delta}\sqrt{\Delta}}, \quad \hat{\mu}_{j\Delta} = \left(r - \frac{\sigma_{j\Delta}^2}{2}\right).$$

Un simple calcul permet alors de retrouver :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x [V_{m+1}^X((1-q)s \exp(R_{m+1}))] \\ \simeq & \sum_{j=0}^J \tilde{g}_{xE}(j\Delta) \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 c_{ik}^{m+1,E} (1-q)^k s^k \Omega(s, i, k, j) \\ & + \sum_{j=0}^J \tilde{g}_{xF}(j\Delta) \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^3 c_{ik}^{m+1,F} (1-q)^k s^k \Omega(s, i, k, j). \end{aligned}$$

### 3.3.3 Illustration numérique et analyse de sensibilité

À moins d'indication contraire, on considèrera pour les illustrations numériques un détenteur de sexe masculin âgé de 60 ans au moment de la signature du contrat. La valeur des paramètres du marché est celle des tableaux 3.1 et 3.2, et les autres paramètres du cas de base sont indiqués au tableau 3.3. Pour ces illustrations, on choisit  $\delta = 0,25$  (90 jours) et une grille uniforme de  $n = 220$  points avec  $s_n = K \exp(6\sigma_E T)$ . La matrice de transition de régimes est adaptée au pas de temps en l'élevant à la puissance 90. On utilise les probabilités de décès fournies par l'administration de la sécurité sociale américaine (US Social Security Administration) pour 2012.

La figure 3.2 représente, à la date de signature du contrat, la variation de la valeur de la garantie en fonction du prix de l'actif sous-jacent, selon le niveau des frais prélevés. Lorsque la valeur du contrat est positive, les frais ne couvrent pas la garantie ; si par contre la valeur du contrat est négative, les frais sont plus élevés que la valeur de la garantie et l'investisseur n'a pas avantage à signer le contrat. Le comportement de la fonction valeur est similaire au cours de la vie du contrat ; lorsque le prix de l'indice est élevé, la garantie perd de sa valeur,

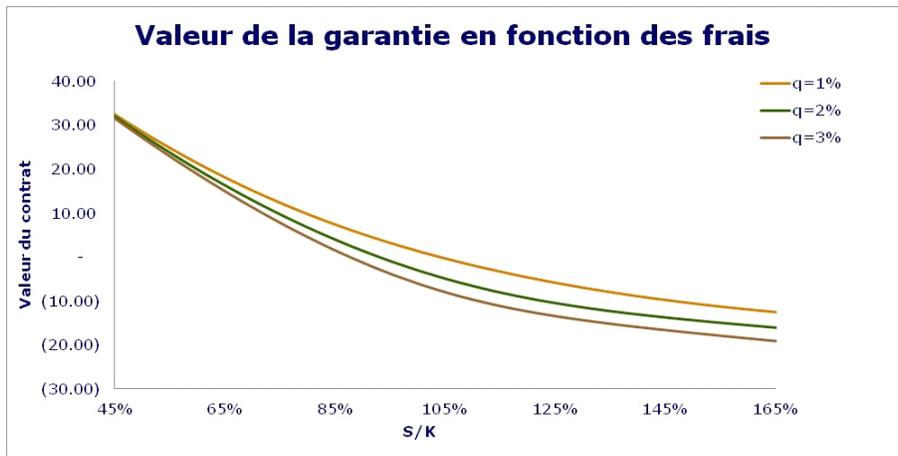


FIG. 3.2 – Valeur d’un contrat de garantie à la maturité et au décès selon la valeur relative du fonds pour différents niveaux de frais périodiques,  $T = 10$ ,  $x = F$ .

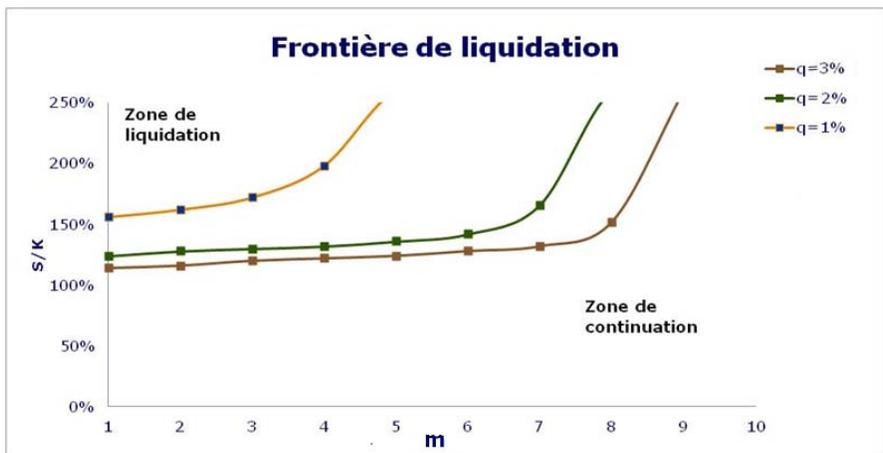


FIG. 3.3 – Frontière de liquidation du contrat en fonction du temps écoulé pour différentes pénalités,  $T = 10$ ,  $x = F$ .

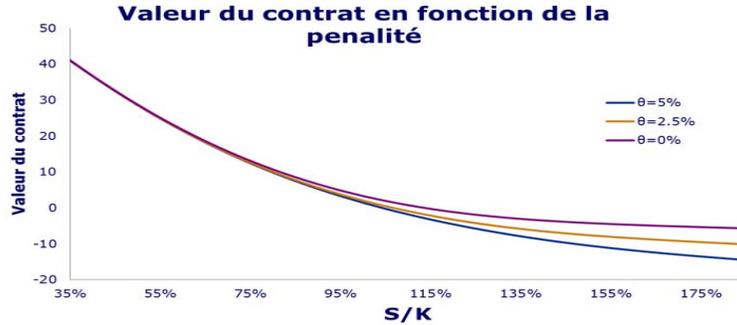


FIG. 3.4 – Impact de la pénalité sur la valeur du contrat,  $T = 10$ ,  $x = F$ ,  $q = 2\%$ .

et le détenteur a avantage à liquider le contrat.

La figure 3.3 présente la frontière de liquidation du contrat à chacune des dates d'évaluation, pour différents niveaux de frais. Cette frontière est croissante dans le temps : plus l'échéance approche, moins le détenteur a intérêt à liquider le contrat (on rappelle que les coûts de liquidation sont supposés constants dans le temps dans ce cas de base). La frontière dépend évidemment aussi du niveau des frais prélevés. Pour  $q = 1\%$  le contrat est optimalement liquidé à  $t_2$  si  $S/K$  dépasse 156%, alors que pour  $q = 3\%$  le contrat est liquidé pour une plus grande région ( $S/K > 116\%$ ).

La figure 3.4 montre l'impact d'une variation de la pénalité de liquidation sur la valeur du contrat. On constate que cet impact est très faible lorsque la garantie est dans la monnaie, mais devient important lorsque la valeur du fonds augmente et rend la garantie moins intéressante. La figure 3.5 présente le niveau de frais  $q^*$  d'un contrat équitable en fonction de la pénalité de liquidation. Le niveau  $q^*$ , ou niveau de frais concurrentiel, est celui qui annule la valeur du contrat à la date de signature lorsque le niveau de l'indice est égal à la garantie. Pour une pénalité nulle, on trouve  $q^*(0) = 2\%$ , alors que les frais concurrentiels sont plus faibles lorsque le niveau de la pénalité est plus important. Lorsque la pénalité est supérieure à 10%, la liquidation du contrat devient très coûteuse : à toutes fins pratiques, le détenteur perd l'option de liquidation et devient insensible à tout accroissement additionnel de la pénalité.

Finalement, la figure 3.6 décrit l'impact du régime de volatilité initial et de l'âge du détenteur sur la valeur du contrat. Comme attendu, l'impact de la volatilité sur la valeur du contrat est positif. Par ailleurs, une augmentation de l'âge du détenteur augmente la probabilité de décès et réduit la durée espérée du contrat ; ainsi, lorsque la garantie est dans la monnaie,

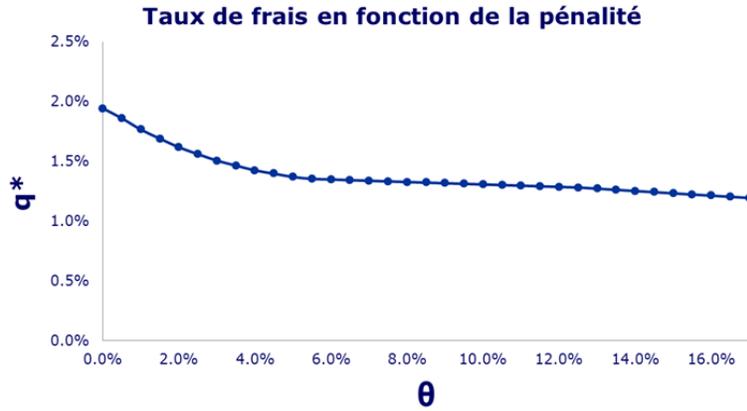


FIG. 3.5 – Taux de frais concurrentiel selon le niveau de la pénalité,  $x = L$ ,  $T = 10$ .

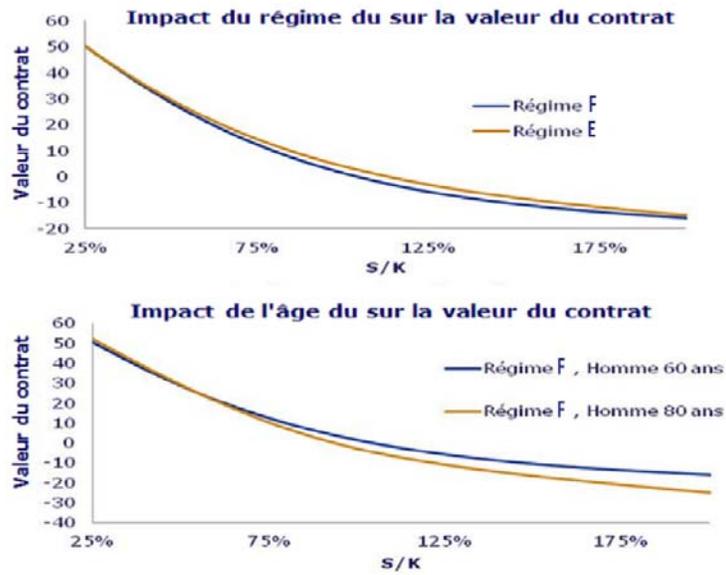


FIG. 3.6 – Sensibilité de la valeur du contrat au régime initial de volatilité et à l'âge du détenteur,  $T = 10$ ,  $q = 2\%$ ,  $\theta = 5\%$ .

une augmentation de l'âge du détenteur augmente la valeur du contrat, alors que l'effet est inversé lorsque la garantie est en dehors de la monnaie.

## 3.4 Évaluation des contrats de garantie comportant des options de revalorisation

Comme on l'a vu dans la section précédente, les conditions du marché peuvent faire en sorte qu'il soit avantageux pour un investisseur d'annuler son investissement dans un fond distinct, lorsque par exemple la garantie est bien en-deçà de la valeur du fond. Comme les contrats d'assurance ne comportent pas de prime initiale, l'investisseur pourrait rompre son contrat pour éventuellement investir son capital dans un contrat similaire dont la garantie serait alors égale à la valeur de l'indice. Pour dissuader leurs clients de liquider un contrat dont la garantie est en dehors de la monnaie, les assureurs proposent des options de rétablissement permettant d'en actualiser le niveau. Le rétablissement consiste à ramener le niveau de la garantie à celui du fond d'investissement. On distingue deux versions de cette option dans les contrats types des fond distincts canadiens :

1. Le rétablissement périodique : à chaque date de rétablissement (par exemple, tous les 3 ans), le détenteur voit sa garantie ajustée au niveau atteint par son fond d'investissement, si c'est avantageux pour lui. Cette version accompagne généralement les contrats de long terme.
2. L'option verrou ("*shout*") : dans ce cas, le réajustement de la garantie est optionnel et s'accompagne d'un changement de l'échéance, qui est repoussée à chaque rétablissement. Le détenteur a la possibilité d'effectuer un réajustement deux à quatre fois par année.

### 3.4.1 Rétablissement périodique

Pour tenir compte de l'option de rétablissement, on modifie le programme dynamique en introduisant une deuxième variable d'état, notée  $K$ , représentant le niveau de la garantie du contrat. Soit  $\mathcal{T}$ , l'ensemble des dates où le rétablissement est possible. On suppose pour simplifier la notation que  $\mathcal{T} \subset \{t_m, m = 1, \dots, M - 1\}$ . Le programme dynamique permettant

d'évaluer le contrat s'écrit, pour  $x \in \{E, F\}$  :

$$V_M^x(K, s) = \max \{s; K\} \quad (3.7)$$

$$V_m^x(K, s) = \max \left\{ \begin{array}{l} s(1 - \theta_m)(1 - q); \\ \rho \left( (1 - P_m) \mathbb{E}_x [V_{m+1}^x(K, (1 - q)s \exp(R_{m+1}))] \right. \\ \quad \left. + P_m \mathbb{E}_x [\max \{(1 - q)s \exp(R_{m+1}); K\}] \right); \\ \rho \left( (1 - P_m) \mathbb{E}_x [V_{m+1}^x(s, (1 - q)s \exp(R_{m+1}))] \right. \\ \quad \left. + P_m \mathbb{E}_x [\max \{(1 - q)s \exp(R_{m+1}); s\}] \right) \mathbb{I}_t \mathcal{T} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

$$V_0^x(K, s) = -s + \rho \left( \begin{array}{l} (1 - P_0) \mathbb{E}_x [V_1^x(K, s \exp(R_1))] \\ + P_0 \mathbb{E}_x [\max \{s \exp(R_1); K\}] \end{array} \right). \quad (3.9)$$

Cependant, l'introduction d'une deuxième variable d'état augmente significativement le temps de calcul. La constatation suivante permet d'obtenir la valeur du contrat en résolvant un programme dynamique comportant une seule variable d'état :

$$V_t^x(K, s) = K V_t^x \left( 1, \frac{s}{K} \right).$$

Il suffit alors de résoudre le programme (3.7)-(3.9) pour  $K = 1$ . La valeur du contrat pour divers niveaux de garantie est obtenue par simple transformation, et cela permet d'écrire le programme dynamique en économisant une variable d'état :

$$V_M^x(s) = \max \{s; 1\}$$

$$V_m^x(s) = \max \left\{ \begin{array}{l} s(1 - \theta_m)(1 - q); \\ \rho \left( (1 - P_m) \mathbb{E}_{xs} [V_{m+1}^x((1 - q)s \exp(R_m))] \right. \\ \quad \left. + P_m \mathbb{E}_{xs} [\max \{(1 - q)s \exp(R_m); 1\}] \right); \\ \rho \left( (1 - P_m) s \mathbb{E}_{xs} \left[ V_{m+1}^x \left( \frac{(1 - q)s \exp(R_m)}{s} \right) \right] \right. \\ \quad \left. + P_m \mathbb{E}_{xs} [\max \{(1 - q)s \exp(R_m); s\}] \right) \mathbb{I}_t \mathcal{T} \end{array} \right\}$$

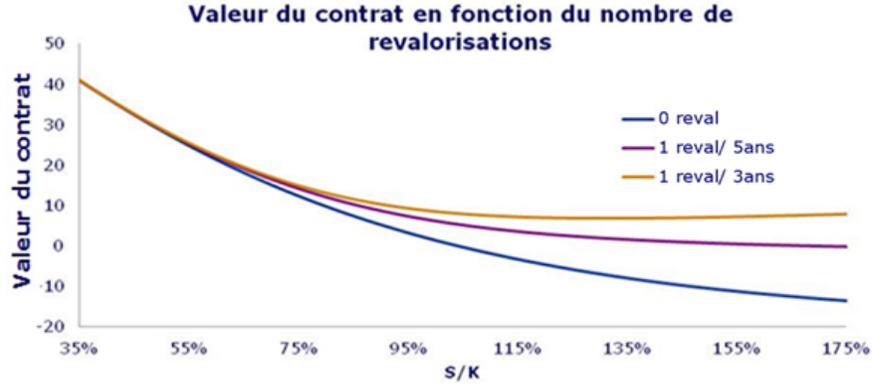


FIG. 3.7 – Impact de la fréquence de revalorisation sur la valeur du contrat,  $T = 10$ ,  $q = 2\%$ ,  $x = F$ ,  $\theta = 5\%$ .

$$V_0^x(s; K) = -s + \rho(1 - P_0) K \mathbb{E}_{xs} \left[ V_1^x \left( \frac{s \exp(R_0)}{K} \right) \right] + \rho P_0 \mathbb{E}_{xs} [\max \{s \exp(R_0); K\}].$$

La figure 3.7 représente la valeur du contrat de garantie en fonction de la valeur du fond et de la fréquence de revalorisation. L’option de revalorisation n’est évidemment utile que lorsque le niveau du fond est supérieur à la garantie, et on constate effectivement que la fréquence de revalorisation a peu d’impact sur la valeur du contrat quand le rapport  $S/K$  est faible.

On a présenté dans la section précédente la notion du taux de frais concurrentiel; ce taux dépend des protections offertes par le contrat et du niveau relatif de la garantie. La figure 3.8 présente une analyse de la variation du taux concurrentiel selon le niveau relatif du fond pour différents contrats. Afin d’analyser l’impact séparé des garanties sur le taux concurrentiel, on suppose l’existence d’un contrats hypothétique offrant uniquement une garantie à l’échéance (GE) et on considère un deuxième contrat offrant une garantie à l’échéance et au décès (GE+GD). On combine ensuite ce dernier avec des possibilité de liquidation (L) et de revalorisation (R). On constate que lorsque la garantie est hors de la monnaie, le taux concurrentiel tend vers 0 s’il n’y a pas d’option de revalorisation. À la monnaie, le taux concurrentiel varie selon le contrat entre 1,5% et 3%. Le taux concurrentiel augmente par

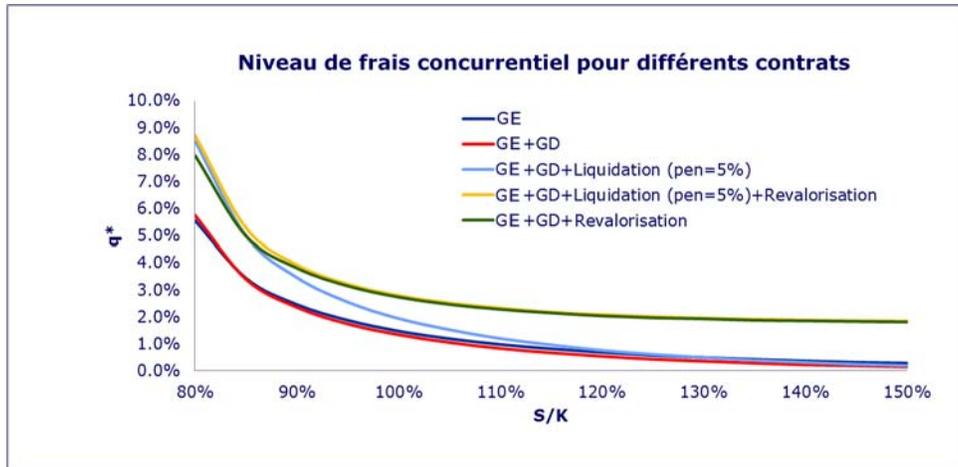


FIG. 3.8 – Niveau de frais concurrentiel en fonction du niveau de la garantie pour différents contrats. GM : garantie à l'échéance ; GD : garantie au décès.

ailleurs rapidement lorsque la garantie est dans la monnaie. La figure 3.8 permet de constater l'intérêt de l'option de revalorisation pour l'assureur, car elle rend le taux concurrentiel moins sensible aux variations de la valeur du fond.

La figure 3.9 représente l'écart de taux relatif à chaque garantie. Les différences entre les taux concurrentiels des différents contrats représentent ce que l'assureur exige en contrepartie des garanties supplémentaires correspondantes : si on prend le contrat hypothétique (GE) comme contrat de base, alors pour calculer l'écart relatif à la garantie au décès (GD), on calcule la différence  $q_{GE+GD}^* - q_{GE}^*$ . On observe sur la même figure que l'ajout d'une garantie au décès se fait avec un écart de taux négatif. En effet, comme on l'a évoqué précédemment, la garantie au décès réduit l'échéance du contrat, et sa valeur est donc négative lorsque  $S > K$ .

Pour retrouver l'écart relatif à l'option de revalorisation on calcule la différence  $q_{GE+GD+R}^* - q_{GE+GD}^*$  ; on constate que cet écart augmente lorsque le contrat est en dehors de la monnaie.

On présente deux écarts de taux pour l'option de liquidation : le premier (liquidation A) est calculé par rapport à un contrat ne comptant pas d'option de revalorisation :  $q_{GE+GD+F}^* - q_{GE+GD}^*$ , alors que le deuxième (liquidation B) est calculé par rapport à un contrat comportant une option de revalorisation  $q_{GE+GD+R+L}^* - q_{GE+GD+R}^*$ . L'écart dans le cas A est important et justifie tout l'intérêt qu'on a accordé à la modélisation du comportement du détenteur. Par ailleurs, l'écart est faible dans le cas B : l'option de liquidation pour un contrat qui permet la revalorisation du niveau de la garantie est sans grand intérêt pour le détenteur.

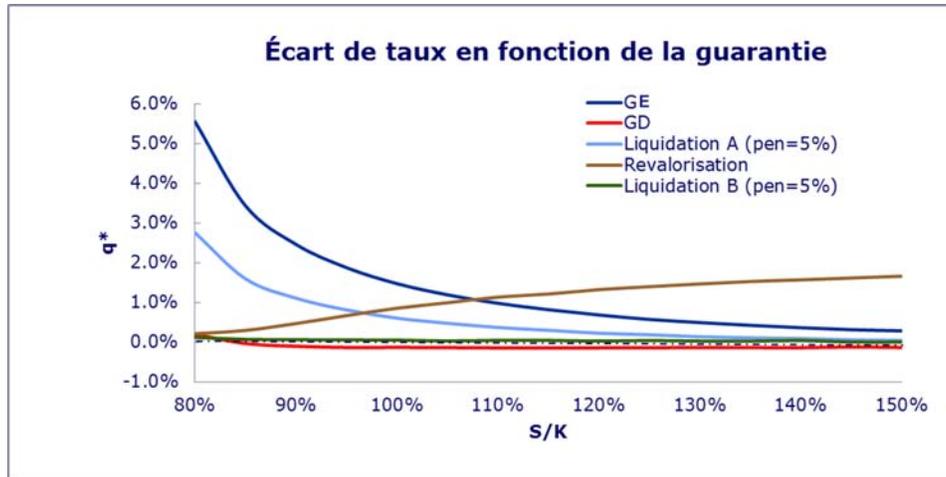


FIG. 3.9 – Écarts de taux correspondant à chaque garantie.

### 3.4.2 Option verrou

On évalue ici la deuxième version de l’option de rétablissement, où on suppose que l’échéance est repoussée de dix ans chaque fois que le détenteur décide de changer le niveau de la garantie. Cette option est généralement offerte au détenteur 2 à 4 fois par année, et le rétablissement n’est plus permis lorsque le détenteur atteint l’âge de 80 ans.

Cette option est difficile à évaluer à cause de son échéance variable. Windcliff et al. (2001b) propose l’utilisation d’un algorithme de différences finies. L’alternative présentée ici repose sur la programmation dynamique et permet l’utilisation du modèle de volatilité stochastique LNCR.

Lorsque l’option verrou est exercée, le détenteur se trouve en possession d’un nouveau contrat de garantie (nouvelle échéance et nouveau prix d’exercice), en perdant un droit d’exercice pour l’année en cours. Comme le rétablissement est interdit au détenteur après l’âge de 80 ans, le dernier contrat qu’il peut posséder est un simple contrat de garantie à l’échéance et au décès initié à l’âge de 80 ans. On procède donc par récursion arrière, à partir de ce dernier contrat hypothétique, pour évaluer les contrats selon toutes les échéances possibles depuis l’échéance initiale. Ainsi, en supposant que l’option verrou peut être exercée à des dates également espacées de  $\delta$ , si  $t_A$  est la date anniversaire de 80 ans du détenteur,  $t_0$  la date de signature et  $t_M$  l’échéance du contrat initial, les dates d’échéance possibles vont de  $t_M$  à  $t_{A+M}$ .

Soit :

$u$  : nombre de rétablissements encore disponibles pour l'année en cours,

$U$  : nombre maximal de rétablissements par année.

On note  $V_m^x(s, u, o)$  la valeur à la date  $t_m$  d'un contrat d'échéance  $t_o$  dont la garantie à l'échéance est égale à 1 lorsque la valeur du fond d'investissement est  $s$ , le régime est  $x$ , et que le nombre de rétablissements disponibles est  $u$ . Le programme dynamique s'écrit :

$$V_o^x(s, u, o) = \max \{s; 1\}, o = M, \dots, A + M$$

$$V_m^x(s, u, o) = \max \left\{ \begin{array}{l} s(1 - \theta_m)(1 - q) \\ \rho \left( (1 - P_m) \mathbb{E}_x \left[ V_{m+1}^X \left( (1 - q)s \exp(R_{m+1}), u, o \right) \right] \right. \\ \quad \left. + P_m \mathbb{E}_x \left[ \max \{ (1 - q)s \exp(R_{m+1}); 1 \} \right] \right) \\ \rho \left( (1 - P_m) s \mathbb{E}_x \left[ V_{m+1}^X \left( \frac{(1 - q)s \exp(R_{m+1})}{s}, f_m(u), m + M \right) \right] \right. \\ \quad \left. + P_m \mathbb{E}_x \left[ \max \{ ((1 - q)s \exp(R_m); s) \} \right] \mathbb{I}_u \mathbb{R}^+ \mathbb{I}_m [0, A] \right) \end{array} \right\},$$

pour  $m = 1, \dots, A + M - 1, m \neq o$

$$V_0^x(s, u, M; K) = -s + \rho(1 - P_0) K \mathbb{E}_x \left[ V_1 \left( \frac{(1 - q)s \exp(R_0)}{K}, u, M \right) \right] \\ + P_0 \mathbb{E}_x \left[ \max \{ s \exp(R_0); K \} \right].$$

où

$$f_m(u) = \begin{cases} U & \text{à une date anniversaire du contrat} \\ u - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction  $f_m(u)$  permet de tenir compte des possibilités de rétablissement : le nombre de rétablissements possibles est réduit de un chaque fois que l'option est exercée, et est renouvelé à la valeur maximale à chaque date anniversaire de l'initialisation du contrat.

À moins d'indication contraire, les illustrations graphiques présentent un contrat de garantie à l'échéance et au décès d'une durée  $M = 10$ . Chaque année, le détenteur peut rétablir son option jusqu'à 2 fois, et les dates d'exercice sont trimestrielles. L'assureur prélève des frais annuels au taux de  $q = 2\%$  et une pénalité  $\theta = 5\%$  si le contrat est liquidé. On suppose que le régime de volatilité prédominant à la date d'évaluation est le régime  $F$ .

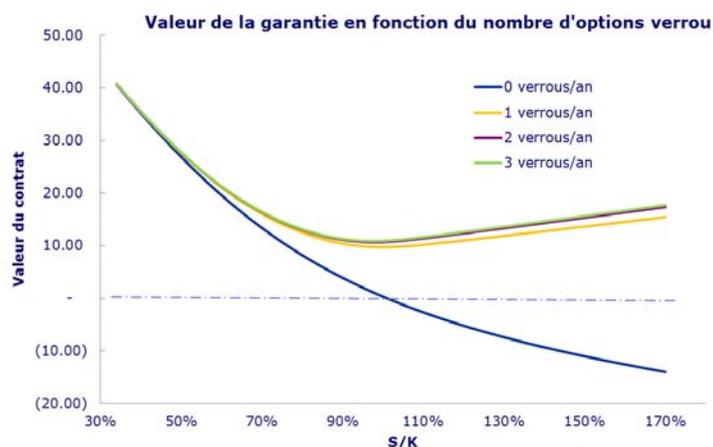


FIG. 3.10 – Valeur du contrat en fonction du niveau relatif du fond selon différentes valeurs pour le nombre maximal d’options verrou pour un homme de 60 ans, où  $q = 2\%$ ,  $\theta = 5\%$  et  $M = 10$ .

Les figures 3.10 et 3.11 montrent l’impact de la disponibilité des options verrou sur le prix du contrat. On constate que les premières options ont beaucoup plus de valeur pour le détenteur que les suivantes. La figure 3.12 présente la sensibilité de la valeur du contrat de garantie aux frais et à la pénalité de liquidation en présence d’options verrou. Finalement, la figure 3.13 présente une comparaison de la valeur de contrats de garantie selon la présence de diverses clauses de garantie, de pénalité et de revalorisation.

### 3.5 Garantie de retrait minimal

La garantie de retrait minimal ou de revenu minimal est une autre forme de garantie offerte par les fonds distincts. Elle permet au détenteur de s’assurer un retrait périodique minimal pendant la durée du contrat, protégeant ainsi son revenu tout en profitant éventuellement de la performance du marché. L’évaluation de cette garantie nécessite qu’on fasse des hypothèses sur les retraits effectués par le détenteur.

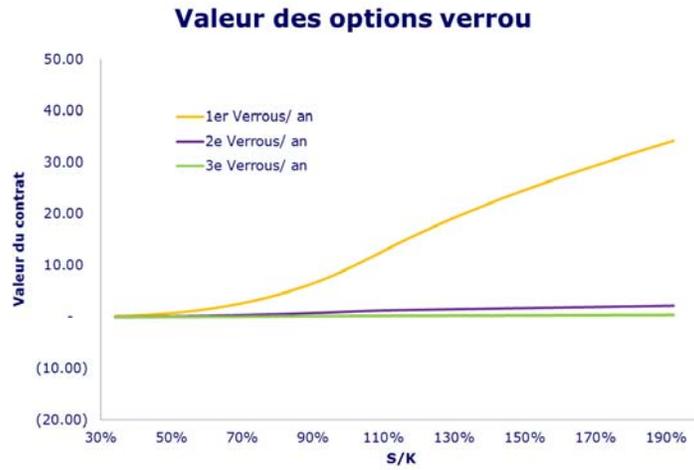


FIG. 3.11 – Valeur des options verrou pour un homme de 60 ans lorsque  $q = 2\%$  et  $\theta = 5\%$ .

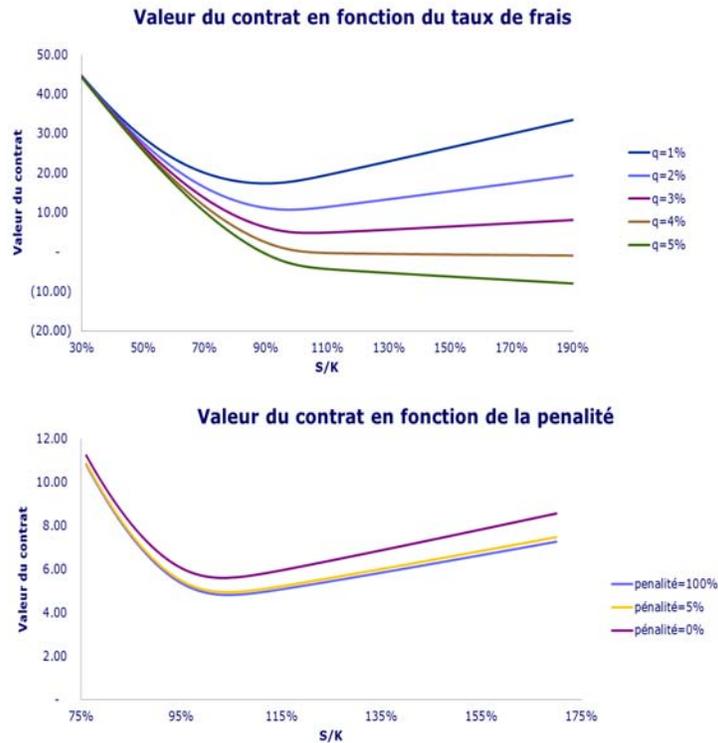


FIG. 3.12 – Valeur du contrat en fonction de la pénalité et du taux de frais en présence des options verrou

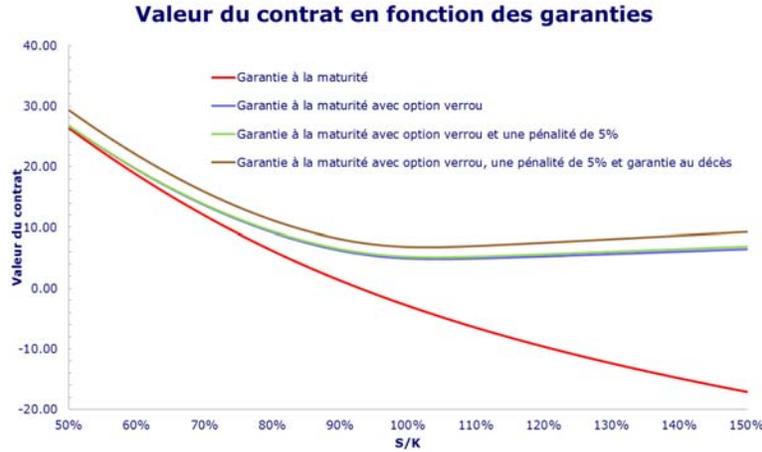


FIG. 3.13 – Comparaison de la valeur des contrats de garantie avec options verrou

### 3.5.1 Modèle

Selon un contrat avec garantie de retrait minimal, le détenteur de la police est assuré d’une valeur minimale pour le montant total de ses retraits au cours de la durée du contrat (généralement égale à son investissement initial). À chacune des dates  $t_m$  prévues au contrat (qu’on suppose également espacées de  $\delta$ ), le détenteur est libre de choisir le montant de son retrait, qui est toutefois accompagné du paiement d’une pénalité s’il excède le retrait contractuel.

Soit :

$R_m$  : rendement de l’indice répliqué par le fond durant la période  $[t_{m-1}, t_m]$

$S_m$  : valeur du fond d’investissement à la date  $t_m$ ,

$K_m$  : valeur de la garantie à la date  $t_m$ ,

$\Lambda$  : retrait contractuel périodique

$v$  : taux de pénalité pour un retrait supérieur au retrait contractuel.

À chacune des dates  $t_m$ , le détenteur paie une pénalité proportionnelle si son retrait du fond dépasse soit le retrait périodique  $\Lambda$ , soit le montant résiduel de sa garantie. Cette pénalité étant retirée du fond d’investissement, on définit la fonction

$$\zeta(\gamma, K) \equiv v(\gamma - \min\{\Lambda, K\})^+$$

représentant le prélèvement correspondant à un retrait  $\gamma$  du détenteur lorsque le niveau de la garantie est  $K$ . Un retrait  $\gamma$  à la date  $t_m$  affecte donc la valeur de l'investissement et la valeur de la garantie de la manière suivante :

$$S_{m+1} = (1 - q)(S_m - \gamma - \zeta(\gamma, K_m)) \exp(R_{m+1})$$

$$K_{m+1} = f(\gamma, K_m, S_m)$$

où

$$f(\gamma, K, s) = \begin{cases} (K - \gamma) & \text{si } \gamma \leq \min \{\Lambda, K\} \\ \min \{(K - \gamma)^+; (1 - q)(s - \gamma - \zeta(\gamma, K)) \exp(R_{m+1})\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, à chaque date contractuelle, le compte d'investissement est réduit par les retraits du détenteur et les prélèvements (pénalités et frais périodiques) de l'assureur jusqu'à l'échéance du contrat ou l'épuisement du compte. Le compte de garantie est isolé de la performance du marché et n'est affecté que par les retraits de l'investisseur ; cependant, si les retraits dépassent le niveau contractuel, alors le niveau de la garantie est fixé au minimum entre la valeur du fond et la valeur de la garantie résiduelle. D'après Milevsky et Salisbury (2005), cette dernière règle dissuade le détenteur de la police de retirer plus que le montant contractuel, et assure que la garantie est réduite à zéro si le détenteur de la police décide de vider le compte d'investissement. Lorsque le contrat est accompagné d'une garantie au décès, comme c'est souvent le cas, le détenteur récupère à la date du décès (ou à l'échéance) le maximum entre le montant de la garantie résiduelle et le montant investi dans le fond.

En pratique, on modélise les retraits par une fonction déterministe du temps et du rapport  $\frac{S_m}{K_m}$ , estimée à partir de données historiques. On constate que lorsque le rapport  $\frac{S_m}{K_m}$  est faible, le détenteur retire généralement le montant contractuel périodique afin de continuer de profiter de la garantie. Si le rapport est grand, alors il devient avantageux pour le détenteur de quitter le contrat et d'ainsi éviter les frais.

Comme dans les sections précédentes, on prendra plutôt une approche conservatrice et on supposera que le détenteur agit de façon optimale afin de maximiser la valeur de son contrat, et n'effectue pas de retrait pour des raisons exogènes. Reprenant les hypothèses de Milevsky et Salisbury (2005), on suppose que le détenteur choisit, à chaque pas de temps, entre effectuer le retrait contractuel,  $\gamma = \min \{\Lambda, K\}$ , ou liquider son contrat,  $\gamma = s - \zeta(\gamma, K)$ , en retirant la totalité du montant investi après paiement de la pénalité. Soit  $\bar{\gamma} = \min \{\Lambda, K\}$ , l'ensemble des décisions admissibles en  $(s, K)$  est donc  $\Gamma(s, K) = \{\bar{\gamma}, \frac{s+v\bar{\gamma}}{1+v}\}$  et la fonction de transition

de la garantie peut alors se simplifier à :

$$f(\gamma, K) = \begin{cases} K - \Lambda & \text{si } \gamma = \bar{\gamma} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La stratégie optimale du détenteur est obtenue par programmation dynamique.

On note  $V_m^x(s, K)$  la valeur du contrat à la date  $t_m$  lorsque le régime de volatilité prédominant est  $x$ , la valeur du fond d'investissement est  $s$  et le niveau de la garantie est  $K$ . On a alors :

$$V_M^x(s, K) = \max\{K; s\} \quad (3.10)$$

$$V_m^x(s, K) = \max_{m=1, \dots, M-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{s+v\bar{\gamma}}{1+v}, \\ \bar{\gamma} + \rho((1-P_m) \\ \mathbb{E}_x[V_{m+1}^X((1-q)(s-\bar{\gamma})^+ \exp(R_{m+1}), K-\Lambda)]) \\ + \rho P_m \mathbb{E}_x[\max\{(1-q)(s-\bar{\gamma})^+ \exp(R_{m+1}); K-\Lambda\}] \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

$$V_0^x(s, K) = -s + \rho((1-P_0)\mathbb{E}_x[V_1^X((1-q)s \exp(R_1), K)]) \\ + P_0 \mathbb{E}_x[\max((1-q)s \exp(R_1); K)]. \quad (3.12)$$

Ne pouvant obtenir la fonction valeur  $V_m^x$  sous forme analytique, on procède à une interpolation par splines linéaires pour la dimension  $K$  et par splines cubiques pour la dimension  $s$  :

$$\widehat{V}_m^x(s, K) = \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_K} \sum_{k=0}^3 (b_{ijk}^{mx} K + c_{ijk}^{mx}) s^k \mathbb{I}_s[s_i, s_{i+1}] \mathbb{I}_K[K_j, K_{j+1}]$$

où  $\{s_i\}_{i=1, \dots, n_s}$  et  $\{K_j\}_{j=1, \dots, n_K}$  sont les points d'évaluation de la grille  $\mathcal{G}_{n_K; n_s}$  discrétisant l'espace d'état. Le calcul des coefficients de la fonction  $\widehat{V}_m^x(s, K)$  est explicité à l'annexe 3.7.2. Le calcul de l'espérance mathématique s'obtient à l'aide de fonctions  $\Omega(\cdot)$  de façon semblable à ce qui a été présenté à la section 3.3.

### 3.5.2 Retrait minimal avec option de revalorisation

On a vu dans la section précédente qu'il peut être avantageux pour l'investisseur de liquider sa participation dans un fond avec garantie de retrait minimal. Pour éviter cette éventualité, les assureurs peuvent offrir une option de revalorisation dans de tels contrats. La revalorisation permet d'ajuster le niveau de la garantie à celui de la valeur du fond d'investissement lorsqu'il est plus élevé, ce qui dissuade le détenteur de payer une pénalité pour résilier son contrat et investir son capital dans un fond équivalent. L'option de revalorisation est en général offerte au détenteur tous les 3 ans. Soit  $\mathcal{T}$ , l'ensemble des dates où une revalorisation est possible, qu'on suppose un sous-ensemble de  $\{t_m, m = 1, \dots, M\}$ . Le programme dynamique permettant de tenir compte de l'option de revalorisation s'écrit exactement comme en (3.10)-(3.12), en définissant toutefois la fonction de transition  $f$  par :

$$f_m(K, s) = \begin{cases} K - \Lambda & \text{si } t_m \notin \mathcal{T} \\ \max \{K - \Lambda; (1 - q)(s - \bar{\gamma})\} & \text{si } t_m \in \mathcal{T}. \end{cases}$$

On obtient donc :

$$V_M^x(s, K) = \max \{K; s\} \quad (3.13)$$

$$V_m^x(s, K) = \max_{m = 1, \dots, M-1} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\gamma} + \rho \left( (1 - P_m) \beta \mathbb{E}_x \left[ V_{m+1}^X \left( (1 - q)(s - \bar{\gamma}) \exp(R_{m+1}), f_m(K, s) \right) \right] \right. \\ \left. + P_m \mathbb{E}_x [\max \{(1 - q)(s - \bar{\gamma}) \exp(R_{m+1}); f_m(K, s)\}] \right) \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

$$V_0^x(s, K) = -s + \rho \left( (1 - P_0) \beta \mathbb{E}_x \left[ V_1^X \left( (1 - q)s \exp(R_1), K \right) \right] \right. \\ \left. + P_0 \mathbb{E}_x [\max \{(1 - q)s \exp(R_1); K\}] \right). \quad (3.15)$$

### 3.5.3 Illustrations numériques

Pour simplifier l'analyse du comportement du détenteur, on pose dans les illustrations qui suivent la probabilité de décès à zéro pour toutes les dates du contrat. Les paramètres du contrat de base sont  $r = 3\%$ ,  $\Lambda = 10$ , et  $M = 10$ .

La figure 3.14 présente la surface de prix du contrat en fonction du niveau de la garantie et de la valeur du fond d'investissement. La valeur du contrat est maximale lorsque la valeur du

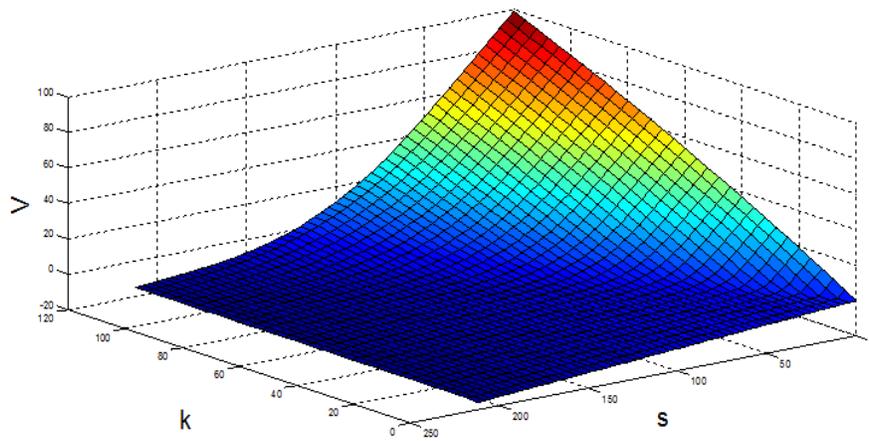


FIG. 3.14 – Valeur du contrat de retrait minimal en fonction de la garantie  $K$  et de la valeur  $s$  investie dans le fond pour un régime de volatilité  $F$ ,  $q = 2,5\%$  et  $v = 5\%$ .

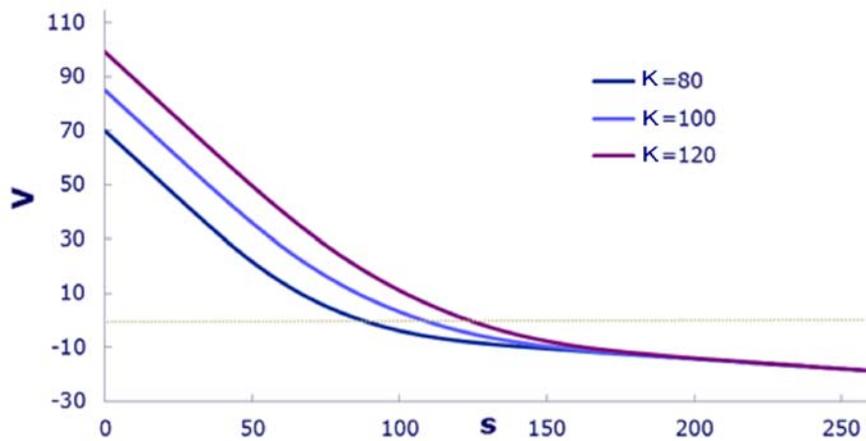


FIG. 3.15 – Evolution de la valeur du contrat de retrait minimal pour 3 niveaux de  $K$  en fonction de la valeur  $s$  investie dans le fond pour un régime de volatilité  $F$ ,  $q = 2,5\%$  et  $v = 5\%$ .

fond est faible, et devient négative lorsque le niveau du fond est important (du fait des frais périodiques et pénalités prélevés par l'assureur en contrepartie de la garantie). On constate que l'allure de la surface s'apparente à celle d'une option de vente; il s'agit ici de l'option de protection détenue par l'investisseur. La figure 3.15 représente le prix du contrat pour différentes garanties  $K$  en fonction du niveau du fond  $s$ . On reconnaît encore ici l'allure d'une option de vente; la partie négative des courbes se justifie par la présence de frais dans une zone où la garantie est en dehors de la monnaie.

La méthode numérique permet non seulement d'évaluer un contrat de garantie de retrait minimal, mais peut également aider l'assureur à déterminer un niveau de frais concurrentiel. Ainsi, la figure 3.16 permet de localiser les frais périodiques concurrentiels pour le contrat, selon la valeur de la pénalité et le niveau de la volatilité, pour une garantie  $K = 100$ : il s'agit du taux qui annule la valeur du contrat lorsque le niveau du fond est égal à celui de la garantie. On observe que la valeur du contrat pour le détenteur décroît avec le niveau des frais  $q$ .

Pour une pénalité de 10% le taux concurrentiel en régime de haute volatilité est de l'ordre de 2,5%, alors qu'il est de l'ordre de 1,1% en régime de faible volatilité. Pour une pénalité de 5%, le taux concurrentiel passe à  $q = 4,3\%$  ( $E$ ) et  $q = 2,5\%$  ( $F$ ). Dans les deux cas, le taux  $q^*$  augmente en période de haute volatilité. Cette sensibilité à la volatilité découle de la longue échéance du contrat de garantie; la volatilité représente un risque élevé pour l'assureur, qui est pénalisé dans les deux sens du mouvement de la valeur du fond: une hausse importante pousse le détenteur à quitter le fond, alors qu'une baisse importante oblige l'assureur à compenser le détenteur jusqu'à l'épuisement de la garantie.

La figure 3.17 donne une représentation de la stratégie de retrait optimal pour le détenteur de la police sous différentes conditions du contrat et pour différents niveaux de la garantie. On constate que la zone de continuation (zone du retrait contractuel) s'élargit avec la croissance de  $K$ ; lorsque  $K$  est élevé, le contrat est profitable pour le détenteur qui n'a plus intérêt à le liquider. Pour  $K = 100$ , le contrat avec  $v = 5\%$  est liquidé si  $s \geq 126,54$ , alors que pour  $v = 10\%$  le contrat est liquidé si  $s \geq 149,6$ . Dans le cas où le contrat de garantie est accompagné d'une option de revalorisation, la frontière de liquidation est repoussée à  $s \geq 356$ ,

Dans certains contrats, l'assureur encourage le détenteur à ne pas effectuer de retrait en contrepartie de "bonus" qui viennent accroître le niveau de la garantie d'un pourcentage contractuel (par exemple 5% si le détenteur n'effectue pas de retrait pendant 3 ans). La

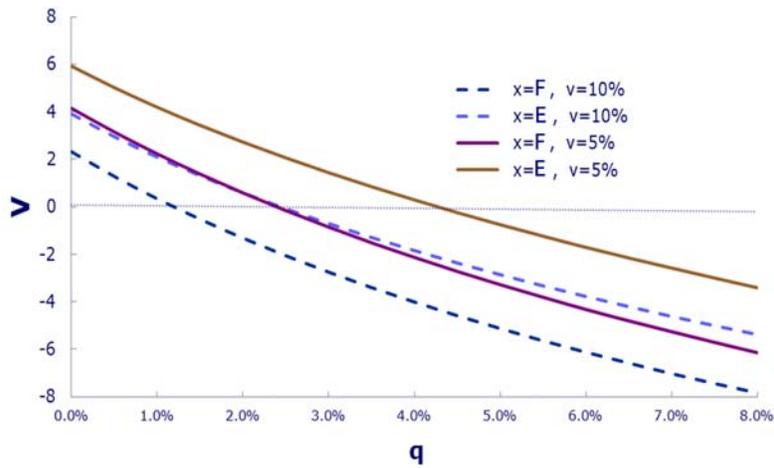


FIG. 3.16 – Évolution du prix du contrat en fonction du niveau de frais  $q$ , de la pénalité  $v$  et du régime de volatilité.

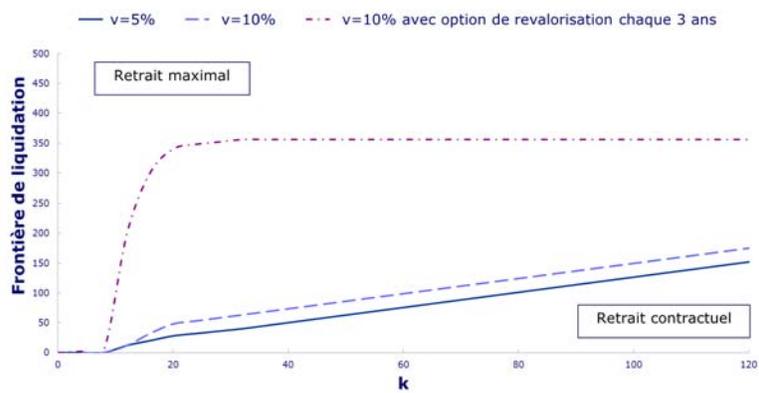


FIG. 3.17 – Frontière de liquidation pour un régime de volatilité  $F$ ,  $q = 2,5\%$ ,  $m = 5$ .

garantie de retrait minimal est aussi offerte dans une version de retrait à vie, où le détenteur est assuré de recevoir un revenu périodique jusqu'à son décès. On trouve aussi sur le marché des contrats qui permettent à un couple de joindre leurs protections en un seul contrat de "revenu minimal à deux vies", pour lequel le décès de l'un des conjoints ne réduit pas le revenu du conjoint survivant. Toutes ces variantes peuvent facilement être modélisées en adaptant le programme dynamique (3.13)-(3.15).

## 3.6 Conclusion

On utilise dans ce chapitre un modèle de programmation dynamique couplé à l'approximation par splines cubiques pour calculer la valeur de contrats de fonds distincts et définir la stratégie d'exercice optimal du détenteur. On montre que cet algorithme d'évaluation permet de tenir compte d'une volatilité stochastique représentée par le modèle lognormal avec changements de régime. Des exemples illustratifs sont fournis pour montrer comment cette approche peut être adaptée à l'évaluation d'un grand nombre de garanties offertes par les fonds distincts. Le cadre présenté permet de traiter les contrats portant sur des fonds individuels. Un travail supplémentaire est requis pour traiter les contrats de garantie portant sur les plusieurs fonds ou sur des fonds obligataires. Dans ce cas, on doit non seulement tenir compte de la variation du taux d'intérêt pour représenter la dynamique des fonds obligataires mais aussi du comportement du détenteur qui peut changer la répartition de son investissement entre les différents fonds sous-jacents au contrat.

## 3.7 Annexes :

### 3.7.1 Algorithme de calcul de la distribution du temps de séjour $\mathbf{g}$

On expose ici l'algorithme récursif permettant d'approximer la distribution  $\tilde{g}_{xy}(\tau)$ .

1. Initialisation des distributions pour  $\Delta$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{EE}^1(0) &= 0; & \tilde{g}_{EE}^1(\Delta) &= p_{EE}; & \tilde{g}_{EF}^1(0) &= p_{EF}; & \tilde{g}_{EF}^1(\Delta) &= 0; \\ \tilde{g}_{FE}^1(0) &= 0; & \tilde{g}_{FE}^1(\Delta) &= p_{FE}; & \tilde{g}_{FF}^1(0) &= p_{FF}; & \tilde{g}_{FF}^1(\Delta) &= 0;\end{aligned}$$

2. Pour  $j = 2$  jusqu'à  $J$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{EE}^j(j\Delta) &= p_{EE}\tilde{g}_{EE}^{j-1}((j-1)\Delta) + p_{EF}\tilde{g}_{FE}^{j-1}(j\Delta) \\ \tilde{g}_{EF}^j(j\Delta) &= p_{EE}\tilde{g}_{EF}^{j-1}((j-1)\Delta) + p_{EF}\tilde{g}_{FF}^{j-1}(j\Delta) \\ \tilde{g}_{FE}^j(j\Delta) &= p_{FE}\tilde{g}_{EE}^{j-1}((j-1)\Delta) + p_{FF}\tilde{g}_{FE}^{j-1}(j\Delta) \\ \tilde{g}_{FF}^j(j\Delta) &= p_{FE}\tilde{g}_{EF}^{j-1}((j-1)\Delta) + p_{FF}\tilde{g}_{FF}^{j-1}(j\Delta)\end{aligned}$$

On a finalement  $\tilde{g}_{xy} \simeq \tilde{g}_{xy}^J$ .

### 3.7.2 Interpolation par spline linéaire/cubique

On donne ici les détails de l'interpolation d'une fonction de deux variables  $V(s, K)$  par une spline cubique sur la dimension  $s$  et une spline linéaire sur la dimension  $K$ . On définit une grille bidimensionnelle  $\mathcal{G}_s \times \mathcal{G}_K$  sur l'espace des états

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{n_s} &= \{s_i : i = 1, \dots, n_s\} \\ \mathcal{G}_{n_K} &= \{K_j : j = 1, \dots, n_K\}\end{aligned}$$

et la fonction d'interpolation

$$\widehat{V}(s, K) = \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{j=0}^{n_K} \sum_{k=0}^3 (b_{ijk}K + c_{ijk}) s^k \mathbb{I}_s[s_i, s_{i+1}) \mathbb{I}_K[K_j, K_{j+1}) \quad (3.16)$$

où  $s_0 = K_0 = 0$  et  $s_{n_s+1} = K_{n_s+1} = \infty$  délimitent l'espace d'état.

Le calcul des coefficients  $b_{ijk}$  et  $c_{ijk}$  se fait en deux étapes :

1. Pour chaque  $K_j$  les coefficients d'interpolation de la fonction  $V(s, K_j)$  sont obtenus comme au chapitre 1 de sorte à satisfaire les conditions (1.16)-(1.20) et (1.22). On a donc, pour  $j = 1, \dots, n_K$  :

$$\widehat{V}(s, K_j) = \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{k=0}^3 \bar{c}_{ijk} s^k \mathbb{I}_s[s_i, s_{i+1}).$$

2. On utilise une spline linéaire sur la dimension  $K$  de sorte que, pour  $K_j \leq K < K_{j+1}$  et  $s_i \leq s < s_{i+1}$  :

$$\widehat{V}(s, K) = \frac{K_{j+1} - K}{K_{j+1} - K_j} \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{k=0}^3 \bar{c}_{ijk} s^k + \frac{K - K_j}{K_{j+1} - K_j} \sum_{i=0}^{n_s} \sum_{k=0}^3 \bar{c}_{i,j+1,k} s^k.$$

3. En regroupant les termes, on obtient finalement (3.16), avec

$$\begin{aligned}b_{ijk} &= \frac{\bar{c}_{i,j+1,k} - \bar{c}_{ijk}}{K_{j+1} - K_j} \\ c_{ijk} &= -\frac{K_j \bar{c}_{i,j+1,k} - K_{j+1} \bar{c}_{ijk}}{K_{j+1} - K_j}.\end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Évaluation de dérivés de l'électricité

Dans ce chapitre on présente un cadre général pour l'évaluation des produits dérivés écrits sur le prix au comptant de l'électricité lorsque celui-ci est représenté par un modèle à deux facteurs avec sauts. Dans un premier volet, on présente une procédure d'estimation du modèle retenu. On propose ensuite une technique générale d'évaluation de produits dérivés basée sur la programmation dynamique et l'interpolation par splines cubiques. Des illustrations sont fournies pour l'évaluation d'options de vente européennes, américaines et pour l'évaluation d'options *swing*.

### Introduction

La déréglementation du marché de l'électricité a suscité la création de plusieurs produits financiers dérivés ayant comme sous-jacent le prix de l'électricité. Ces dérivés permettent aux consommateurs et aux producteurs d'électricité d'assurer la sécurité de l'approvisionnement et de couvrir les risques liés aux fluctuations du prix. Celles-ci sont souvent liées à la variation de la demande et du coût de production. Dans ce contexte, le prix du gaz, du pétrole où même les conditions météorologiques influencent le prix de l'électricité. Non stockable, l'électricité devient ainsi l'une des denrées les plus volatiles. Comme pour d'autres denrées transigées sur les marchés, on trouve pour l'électricité des contrats à terme, des options de vente ou d'achat américaines, asiatiques ou européennes. Par ailleurs, le marché des dérivés de l'électricité se distingue par l'existence d'autres types de dérivés plus complexes, telles que les options *swing* ou les options sur denrées croisées. L'évaluation et la gestion du risque de tels contrats

passent nécessairement tout d'abord par la compréhension et la bonne modélisation du cours au comptant de l'électricité.

Ce qu'on appelle le prix au comptant est en réalité le prix fixé par le marché DAM (day-ahead-market), avant même la production de l'électricité. Ainsi, un jour à l'avance, les producteurs et les consommateurs proposent des offres de prix (de vente et d'achat) de l'électricité, pour chaque heure ou période de la journée. De cette confrontation résulte un prix d'équilibre, qui détermine le prix au comptant. En cours de production, l'offre ou la demande peuvent varier, comme c'est le cas lors d'un changement soudain de la température ou d'une panne d'un générateur. Les intervenants se dirigent alors sur un marché d'ajustement où le prix de l'électricité est fixé en temps réel.

L'une des principales particularités de l'électricité est le fait qu'on ne peut pas facilement la stocker (sauf dans le cas particulier des centrales hydroélectriques où l'énergie est indirectement stockée à travers les réservoirs d'eau). La génération de l'électricité alimente directement la consommation, ce qui fait qu'une augmentation brutale de la consommation génère instantanément une augmentation du prix. Cet effet est observable sur la dynamique du prix de l'électricité à travers l'existence de sauts. Le prix peut ainsi se multiplier par un facteur de 20 en une seule journée.

En plus de sa grande volatilité, le prix de l'électricité se caractérise par un effet de retour à la moyenne et une forte saisonnalité. Le prix, lié à la demande, exhibe trois niveaux de saisonnalité : une saisonnalité mensuelle, où le prix croît durant les mois très froids et les mois très chauds ; une saisonnalité journalière qui résulte de la différence entre la demande en semaine et en fin de semaine et en jours de travail ; et enfin une saisonnalité intra journalière, où le prix chute entre 23h et 6h avec la baisse de l'activité durant la nuit.

C'est du fait de la saisonnalité intra journalière que le prix au comptant diffère selon la période de la journée. On trouve ainsi un prix au comptant pour la période de 7h-23h, un prix au comptant pour la période de 23h-7h, et un prix au comptant pour la journée entière (0h-24h).

Dans ce chapitre, on développe une technique heuristique permettant d'estimer un modèle à deux facteurs capable de répliquer la dynamique du prix de l'électricité. Comme la distribution exacte du prix de l'électricité sous la dynamique estimée ne peut être calculée sous forme fermée, on développe également une technique récursive couplée à une approximation par élément finis permettant d'évaluer des options vanilles. Cette même technique est reprise sous la forme d'un programme dynamique pour l'évaluation d'options de type américain et

d'options swings. Finalement, on propose une simplification du modèle permettant de réduire la complexité de l'évaluation d'options swing et on valide l'efficacité de cette simplification à partir d'options américaines et européennes.

Le chapitre est organisé comme suit : la section 4.1 présente une revue des modèles utilisés pour représenter la dynamique du prix de l'électricité. La section 4.2 traite de l'estimation d'un modèle à deux facteurs ; on y décrit une procédure à deux étapes utilisant à la fois les données historiques pour estimer les deux processus de retour à la moyenne, et la courbe des prix des contrats à terme pour estimer la prime de risque. La technique est appliquée à la série de prix sur la zone "Mass Hub". La technique d'interpolation par splines cubiques et l'algorithme récursif d'évaluation est détaillé dans la section 4.3, et des illustrations numériques pour des options de vente sont fournies à la section 4.4. La section 4.5 montre comment on peut étendre la méthode à l'évaluation d'options exotiques, telles que les options swing. La section 4.6 conclut.

## 4.1 Modélisation du prix au comptant de l'électricité

### 4.1.1 Revue de la littérature

On retient de l'introduction trois caractéristiques du prix au comptant de l'électricité : la saisonnalité, la présence de sauts, et le retour à la moyenne. Devant l'incapacité du modèle lognormal à reproduire ces effets, la littérature propose différentes alternatives qui dérivent dans leur majorité du modèle de retour à la moyenne de Ornstein-Uhlenbeck (OU). Lucia et Schwartz (2002) proposent un modèle où le logarithme du prix est la somme d'un retour à la moyenne et d'une fonction déterministe représentant la saisonnalité :

$$\begin{aligned} dX_t &= -\alpha X_t dt + \sigma_X dW_t \\ S_t &= \exp(f_t + X_t), \end{aligned}$$

où  $\alpha$  représente la force de retour à la moyenne,  $\sigma_X$  la volatilité de  $X$ ,  $W_t$  est un mouvement brownien,  $f_t$  est la fonction de saisonnalité, et  $S_t$  est le prix au comptant de l'électricité. Lucia et Schwartz (2002) proposent également d'introduire un deuxième facteur  $Y_t$  ajoutant

un aléa à la fonction de saisonnalité. Le modèle s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned}dX_t &= -\alpha X_t dt + \sigma_X dW_t^1 \\dY_t &= \mu dt + \sigma_Y dW_t^2 \\S_t &= \exp(f_t + X_t + Y_t),\end{aligned}$$

où  $W_t^1$  et  $W_t^2$  sont des mouvements browniens indépendants. Le défaut majeur de ce modèle est son incapacité à reproduire les sauts.

Clew et Strickland (2000), Deng (2000), Duffie et al. (2000) et Cartea et Figuera (2005) optent pour une modélisation alternative comportant un seul facteur :

$$\begin{aligned}dX_t &= -\alpha X_t dt + \sigma_X dW_t + J_t dN_t \\S_t &= \exp(f_t + X_t).\end{aligned}$$

Dans ce modèle, le logarithme du prix est représenté par un retour à la moyenne avec deux innovations : une innovation gaussienne de volatilité  $\sigma_X$  représentant la variation journalière “normale” du prix de l'électricité, et une innovation  $J_t$  représentant les sauts du prix, où la variable aléatoire  $N_t$  est un processus de Poisson qui représente le nombre de sauts survenus jusqu'à la date  $t$ . Après un saut, le prix retrouve son niveau moyen grâce à la présence du paramètre  $\alpha$ . Cartea et Figuera (2005) estiment ce modèle et trouvent une valeur très élevée pour le paramètre de retour à la moyenne. En effet, il faut que la force de retour soit très importante pour que le prix retrouve rapidement un niveau moyen après un saut. Cependant, lorsque le paramètre  $\alpha$  est élevé, le processus de prix devient “à faible mémoire”, c'est-à-dire que le prix au comptant n'a que peu d'impact sur la distribution du prix futur, même pour un court délai. Ainsi, l'expression du prix à la date  $t$  en fonction de l'information disponible à la date courante  $X_0 = x$  s'écrit selon ce modèle :

$$\begin{aligned}S_t &= \exp(f_t + X_t) \\X_t &= x \exp(-\alpha t) + \exp(-\alpha t) \int_0^t \sigma_X \exp(\alpha \tau) dW_\tau + \sum_{i=1}^{N_t} \exp(-\alpha T_i) J_i\end{aligned}$$

où la suite  $\{T_i\}_{i=1, \dots, N_t}$  représente les dates des sauts survenus entre 0 et  $t$ . On constate que lorsque  $\alpha$  est important, le terme  $\exp(-\alpha t)$  tend rapidement vers zéro, éliminant l'impact de l'information  $x$  sur la distribution du prix futur. En conséquence le prix d'un dérivé obtenu à partir de ce modèle est insensible au prix au comptant (son “Delta” est nul).

Une alternative à ce modèle a été proposée par Benth et al. (2005) ; elle consiste à représenter le prix de l'électricité par la somme de processus à sauts et d'une fonction de saisonnalité :

$$S_t = f_t + \sum_{i=1}^N \omega_i Y_t^i$$

$$dY_t^i = -\alpha_i dt + \sigma_i dL_t^i$$

où  $L_t^i$  est un processus à saut pur. En séparant ainsi les facteurs, on peut utiliser une série de processus OU représentant les variations journalières, et une autre série de même type représentant le retour à la moyenne après les sauts. À partir de simulations, l'auteur montre que le modèle est capable de répliquer la dynamique du prix au comptant de l'électricité, et dérive ensuite une forme fermée pour le prix des options et des contrats à terme. Cependant, ce modèle fait intervenir des processus de Markov cachés non gaussiens, et est difficile à estimer.

Afin de séparer le processus à saut du processus de retour à la moyenne principal, De Jong et Huismann (2002) utilisent un modèle avec changements de régime. Les sauts résultent ainsi d'un passage du régime principal à un régime de sauts dont la durée est faible, permettant un retour rapide au régime principal.

### 4.1.2 Modèle à deux facteurs

Il existe une autre façon de généraliser le modèle de base à un facteur : elle consiste à utiliser deux processus de retour à la moyenne, un premier pour le facteur principal représentant la variation journalière, et un deuxième pour le retour à la moyenne avec sauts. Le modèle s'écrit alors :

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma_X dW_t \tag{4.1}$$

$$dY_t = -\beta Y_t dt + J_t dN_t \tag{4.2}$$

$$S_t = \exp(f_t + X_t + Y_t) \tag{4.3}$$

où  $J_t$  représente le saut "normal" de moyenne  $\mu_J$  et de volatilité  $\sigma_J$  et  $N_t$  est un processus de Poisson de paramètre  $\vartheta$ . Cette séparation permet d'obtenir un fort retour à la moyenne pour les sauts, et un retour plus lent pour la variation du facteur  $X$ . Ce modèle a été introduit par Kluge (2009), qui l'a utilisé pour évaluer le prix d'options vanilles et de contrats à terme sous une approximation asymptotique de la distribution du processus à saut  $Y_t$ , ainsi que pour

l'évaluation d'options swing. L'auteur propose une méthode heuristique pour l'estimation des paramètres, sans spécifier la façon d'obtenir les valeurs initiales  $X_0$  et  $Y_0$  nécessaires pour l'évaluation de produits dérivés.

Le modèle (4.1)-(4.3) à deux facteurs est celui qui sera utilisé dans cet essai ; on propose d'abord une technique d'estimation rigoureuse du modèle, permettant d'obtenir la valeur des paramètres ainsi que des variables d'état dans le but d'évaluer des produits dérivés du prix de l'électricité.

## 4.2 Estimation du modèle

Le modèle (4.1)-(4.3) appartient à la classe des modèles de Markov cachés : en effet les deux facteurs  $X$  et  $Y$  dont l'évolution est décrite par un processus de Markov ne sont pas observables. Par ailleurs, la variable  $Y$  n'est pas un processus à innovation gaussienne simple, ce qui fait qu'on ne peut pas utiliser un filtre de Kalman. La méthode heuristique proposée dans Kluge (2009) ne peut identifier la valeur des facteurs à la date d'évaluation d'un produit dérivé, ce qui fait qu'il est impossible à partir de telles techniques d'évaluer un produit dérivé sans faire des hypothèses exogènes sur ces valeurs. Quant à Cartea et Figuera (2005), ils estiment leur modèle de retour à la moyenne avec sauts (à un seul facteur) en combinant les informations contenues à la fois dans les données historiques et les prix observés des contrats à terme.

Cette section propose une technique d'estimation plus complète, qui s'inspire du travail présenté par Cartea et Figuera (2005), en l'adaptant au modèle (4.1)-(4.3) à deux facteurs. Ainsi, il s'agit de combiner l'information du marché des contrats à terme à l'information sur l'évolution du prix au comptant. Pour pouvoir utiliser les prix de marché des contrats à terme, il faudra estimer la valeur des variables latentes  $X$  et  $Y$  à la date d'évaluation ; la technique proposée ici utilise un algorithme de filtre particulière. Dans cette section, on considère une série d'observations (journalières) historiques des prix de l'électricité et des contrats à terme à partir desquelles on effectue le calibrage du modèle.

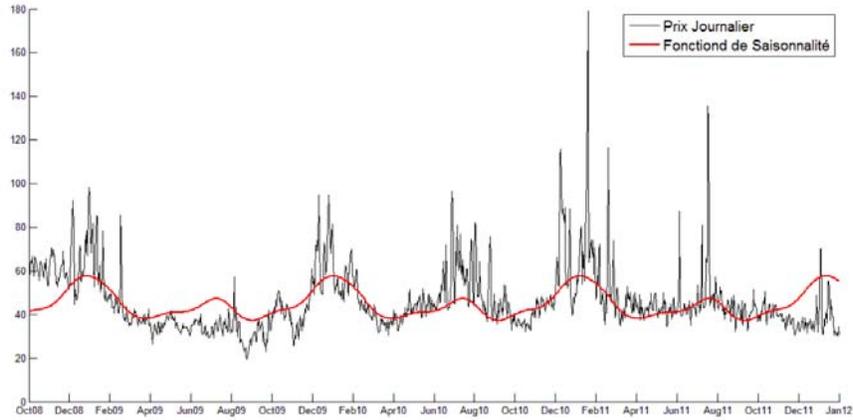


FIG. 4.1 – Fonction de saisonnalité. Le prix moyen est plus élevé pour les mois très chauds et les mois très froids.

### 4.2.1 La fonction de saisonnalité

On rappelle que le prix de l'électricité se distingue par une saisonnalité à trois niveaux. Comme l'objectif est ici d'évaluer des options portant sur le prix au comptant journalier à moyen terme, on ne considérera dans ce chapitre que la saisonnalité mensuelle. Cependant, la démarche proposée ici peut facilement être généralisée par un simple ajustement de la fonction de saisonnalité.

Pour extraire la fonction  $f_t$ , où  $t = 1, \dots, H$ , on calcule la série de Fourier correspondant au vecteur des moyennes mensuelles de l'échantillon historique du logarithme des prix journaliers considéré. L'algorithme TFR (transformation de Fourier rapide) permet d'obtenir le résultat sous la forme :

$$f_t = a_0 + \sum_{i=1}^{12} a(i) \cos(2\pi t) + b(i) \sin(2\pi t).$$

### 4.2.2 Les paramètres des composantes stochastiques

Soit  $Z_t \equiv X_t + Y_t$ ; les réalisations de cette série pour  $t = 1, \dots, H$  sont obtenues par la soustraction de la composante déterministe de la série des logarithmes du prix. Ainsi, le modèle à estimer appartient à la classe des processus de Markov cachés : on n'observe pas directement les réalisations des processus markoviens  $X_t$  et  $Y_t$ , mais on en observe la somme

$Z_t = X_t + Y_t$ . On cherche à estimer le vecteur de paramètres physiques  $(\alpha, \sigma_X, \beta, \mu_J, \sigma_J, \vartheta)$  de dimension six, ainsi qu'une prime de risque  $\lambda$  qui sera définie de façon plus précise par la suite.

Pour estimer  $(\alpha, \sigma_X)$ , on isole les valeurs du premier facteur  $X_t$  en utilisant la méthode proposée dans Cartea et Figuera (2005) : toute valeur de  $Z_t$  qui s'écarte de  $\kappa\sigma_X$  du rendement moyen est considéré comme saut ( $\kappa$  est choisi arbitrairement). Un premier filtre élimine de la série les rendements positifs ainsi identifiés à des sauts. Sous l'hypothèse qu'un saut ne peut durer plus de 5 jours, on écarte également de la série journalière les quatre observations suivantes. La série obtenue est alors uniquement composée des observations du facteur  $X_t$ . Une régression linéaire permet alors de déterminer le retour à la moyenne  $\alpha$  et la volatilité  $\sigma_X$ .

La série  $r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_h}$  représente les observations positives identifiées à des sauts. Cette série permet d'estimer la probabilité de saut  $\vartheta$ , le niveau moyen des sauts  $\mu_J$  et leur volatilité  $\sigma_d^2$ . Ces rendements sont composés à la fois des sauts et du rendement du facteur  $X$ , donc pour estimer  $\mu_J$  et  $\sigma_J$  on utilise les ajustements suivants :

$$\mu_J = \sum_{i=1}^h \frac{(r_{t_i} + \alpha X_{t_i})}{h}$$

$$\sigma_J = \sqrt{\sigma_d^2 - \frac{\sigma_X^2}{2\alpha} (1 - e^{2\alpha})}.$$

### 4.2.3 Filtration des facteurs

#### Présentation de la technique

Le filtre particulière est une technique d'estimation bayésienne de l'évolution de l'état d'un système. Cette technique emploie la simulation de Monte-Carlo pour estimer récursivement la distribution de variables d'état latentes, conditionnellement à l'information apportée par l'observation à chaque pas de temps. Une version simple de cet algorithme est donnée dans Arulampalam et al. (2002). L'algorithme utilise comme intrants les paramètres du modèle, et fournit une estimation  $\hat{x}_{t=1, \dots, H}$  et  $\hat{y}_{t=1, \dots, H}$  des réalisations des états cachés pour toutes les dates historiques. Le filtre permet aussi de calculer une approximation  $\hat{l}$ , par simulation de Monte Carlo, de la fonction de vraisemblance  $l(Z_{t=1, \dots, H} \mid \hat{x}_{t=1, \dots, H}, \hat{y}_{t=1, \dots, H})$  des réalisations.

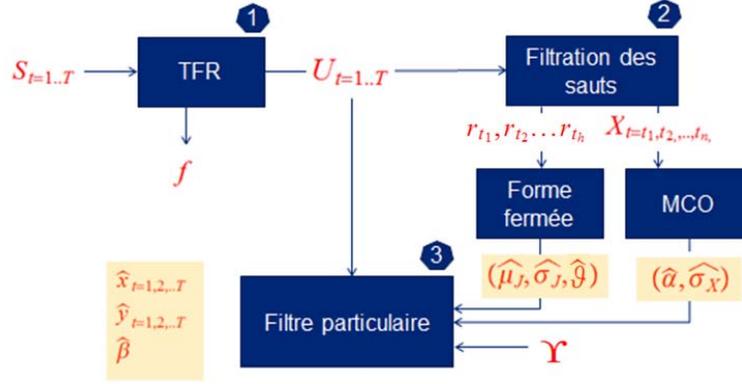


FIG. 4.2 – Procédure de calibrage du modèle : 1) estimation de la composante déterministe, 2) filtration des sauts en utilisant le séparateur  $\kappa$  et estimation des cinq premiers paramètres, 3) optimisation de la fonction de vraisemblance du filtre particulaire pour l'estimation de  $\beta$ ,  $x$  et  $y$ .

Le paragraphe précédent proposait une façon d'estimer les cinq paramètres  $\alpha$ ,  $\sigma_X$ ,  $\mu_J$ ,  $\sigma_J$  et  $\vartheta$ . On peut intégrer le filtre particulaire dans une routine d'optimisation de la fonction de vraisemblance de sorte à déterminer l'estimé de  $\beta$  qui maximise  $\widehat{l}_\beta(Z | \widehat{x}, \widehat{y})$  en même temps que les estimés  $\widehat{x}$  et  $\widehat{y}$ . Comme la fonction de vraisemblance est calculée par simulation, il est difficile d'utiliser des techniques de l'optimisation qui nécessitent une expression analytique de la fonction. Une solution simple est de considérer un ensemble discret  $\Upsilon$  de valeurs possible pour  $\beta$ .  $\widehat{\beta}$  est alors donné par :

$$\widehat{\beta} = \arg \max_{\beta \in \Upsilon} \left[ \widehat{l}_\beta(Z_{t=1, \dots, H} | \widehat{x}_{t=1, \dots, H}, \widehat{y}_{t=1, \dots, H}) \right]$$

### Validation de l'algorithme du filtre particulaire

Pour s'assurer du bon fonctionnement du filtre particulaire dans ce modèle, on procède à un test par simulation. On simule sur 1000 jours les deux facteurs  $X$  et  $Y$  à partir du modèle (4.1)-(4.2). Les facteurs cachés sont ensuite retrouvés à partir de la série  $Z_t$ . Les figures 4.3 et 4.4 montrent que le filtre particulaire utilisé estime bien  $X_t$  et  $Y_t$ ; on constate que le filtre détecte les sauts, mais qu'il en sous-estime l'amplitude.

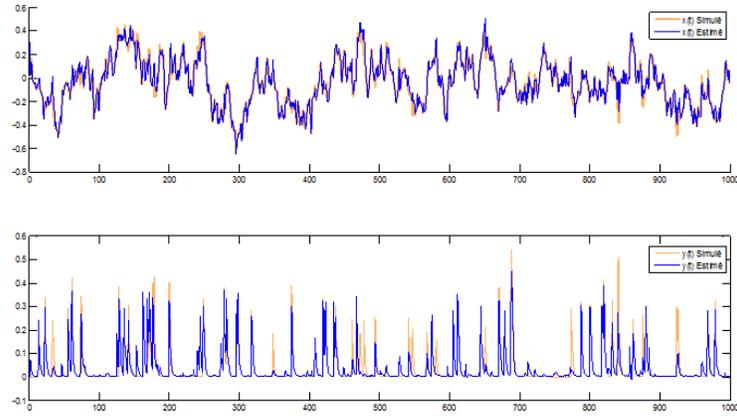


FIG. 4.3 – Performance d’estimation d’un processus simulé avec le filtre particulaire. pour les paramètres suivants  $\alpha = 23,362$ ,  $\sigma_X = 1,473$ ,  $\beta = 230$ ,  $\sigma_J = 0,062$ ,  $\mu_J = 0,280$ ,  $\vartheta = 0,061$ .

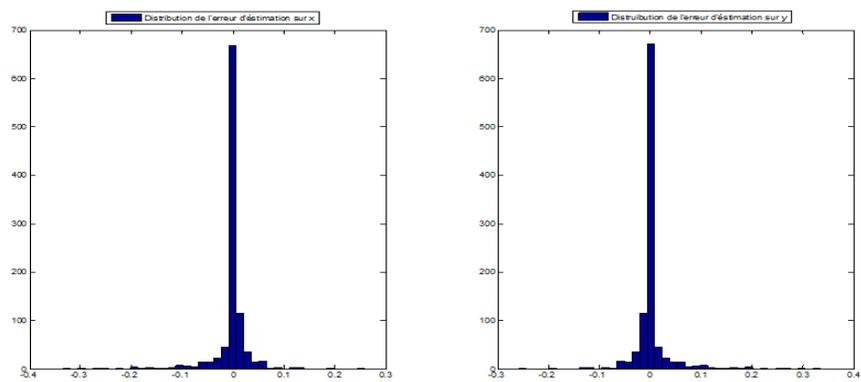


FIG. 4.4 – Distribution de l’erreur d’estimation de  $X$  et de  $Y$ .

Nombre d'observations	1188
Moyenne	46,24
Variance	219,07
Écart-type	14,8
Minimum	19,45
Maximum	179,25
Asymétrie	2,36
Kurtose	0,38
1er quartile	37,03
Médiane	42,53
3ième quartile	50,36
Mode	44,46

TAB. 4.1 – Description de la série des prix journaliers du *Mass Hub*.

Paramètres	$\kappa = 1,92$	$\kappa = 2,12$	$\kappa = 2,32$
$\alpha$	6,787	13,613	23,362
$\sigma_X$	0,894	1,236	1,473
$\vartheta$	0,187	0,095	0,061
$\mu_J$	0,176	0,238	0,280
$\sigma_J$	0,082	0,073	0,062

TAB. 4.2 – Résultats de la première étape d'estimation.

### Estimation de la série de prix “Mass-HUB”

À titre d'illustration, on se propose d'utiliser la procédure de calibrage présentée dans la section précédente à partir des prix au comptant historiques de la zone *Mass-Hub* qui couvre les états suivants aux U.S.A. : le Connecticut, le Maine, le Massachusetts, le nouveau Hampshire, l'île du Rhode et le Vermont. La série des prix commence le 31 octobre 2008 et finit le 31 janvier 2012. Le tableau 4.1 en donne une description sommaire :

La série des observations du prix au comptant est caractérisée par une grande asymétrie (2,36) due à la présence de sauts. Le niveau du prix varie d'un minimum de 19,45 atteint le 9 juin 2009, à un maximum de 179,25 atteint le 24 janvier 2011. Le tableau 4.2 présente les résultats (valeur annuelle) de l'estimation selon différentes hypothèses sur la filtration des sauts (différentes valeurs de  $\kappa$ ).

On rappelle en effet que le niveau  $\kappa$  identifie la provenance du rendement, soit  $Z_t = X_t$  (pas de saut) ou  $Z_t \neq X_t$  (existence d'un saut). En choisissant un niveau faible pour  $\kappa$  (par exemple,  $\kappa = 1,92$ ), la probabilité de saut est de 18,7%. Une partie importante de la variance du rendement est alors expliquée par les sauts, et par conséquent la volatilité

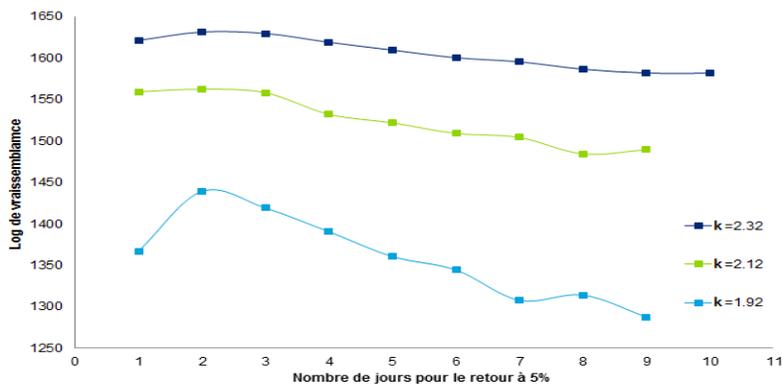


FIG. 4.5 – Fonction de vraisemblance pour différents niveaux de retour à la moyenne  $\beta$  et différents seuils  $\kappa$ .

Paramètres	$\kappa = 1,92$	$\kappa = 2,12$	$\kappa = 2,32$
$\beta$	234,185	234,185	234,185
$x_T$	-0,593	-0,501	-0,484
$y_T$	0,114	0,022	0,005

TAB. 4.3 – Application du filtre particulière.

de  $X$  est dans ce cas plus faible ( $\sigma_X = 0,89$ ). Par contre, en choisissant un niveau plus important pour  $\kappa$ , la fréquence  $\vartheta$  devient plus faible, mais la variance allouée à  $X$  est alors plus importante. La réduction de l'estimation de la fréquence des sauts correspond à un accroissement de l'estimation de leur amplitude moyenne. Cet effet de compensation réduit l'impact de hypothèse faite sur la valeur de  $\kappa$ .

Arbitrairement, on définit le “temps de retour à 5%”, noté  $\tau$ , comme une mesure de la vitesse de retour à la moyenne; ainsi, cette valeur est la solution de  $\exp(-\beta\tau) = 0,05$ . Un  $\tau$  faible correspond donc à un  $\beta$  important et à un retour à la moyenne rapide. La figure 4.5 présente le résultat du calcul de la vraisemblance selon diverses valeurs de  $\tau$  et de  $\kappa$ . La fonction de vraisemblance atteint son maximum lorsqu'on suppose que le retour à la moyenne se fait après 2 jours pour les trois niveaux de  $\kappa$ , donc le meilleur estimé de  $\beta$  est  $\hat{\beta} = 234,185$ .

La figure 4.6 présente le résultat de l'estimation des deux processus de retour à la moyennes; les valeurs terminales des deux processus sont données au tableau 4.3.

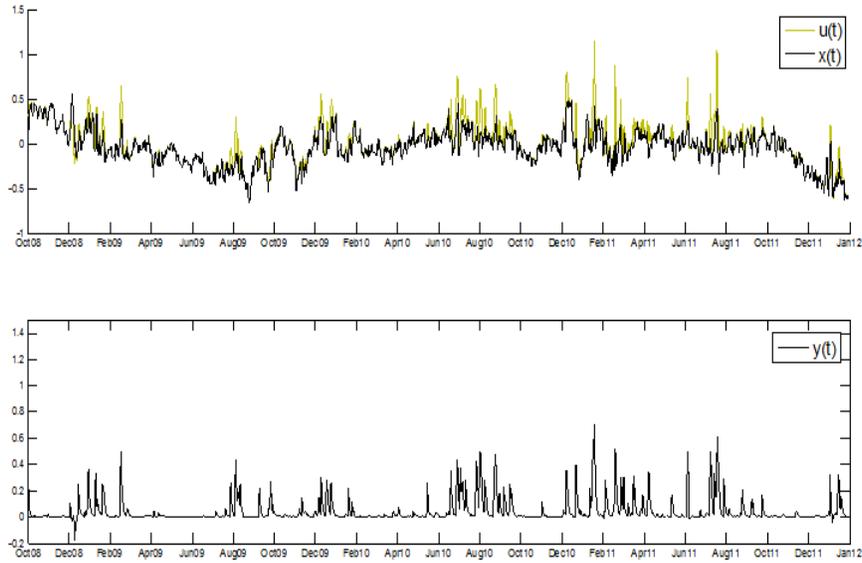


FIG. 4.6 – Résultat de la filtration du processus  $Z_t$  pour  $\kappa=2,32$ .

#### 4.2.4 Estimation neutre au risque

L'estimation des paramètres du modèle a été faite à partir de la dynamique “physique” du prix au comptant journalier. Cette dynamique peut être utilisée dans un modèle de simulation du prix journalier de l'électricité sous sa distribution réelle, et peut être très utile pour la gestion du risque et le calcul de la valeur à risque (VaR). Par ailleurs, dans un objectif d'évaluation de produits dérivés, on doit également déterminer la prime de risque du marché. Les prix de contrats à terme sur l'électricité peuvent donner des indications sur la valeur de ce paramètre. En effet, lorsqu'un agent s'engage dans un contrat à terme, il élimine l'incertitude sur le prix d'achat de l'électricité à la date d'exercice, et est ainsi prêt à payer une prime en contrepartie de cette couverture. Pour d'autres denrées, telles que le pétrole ou le gaz, le prix du contrat à terme est plutôt défini par le coût du stockage de la denrée, à partir d'une stratégie de réplcation, ce qui est impossible avec l'électricité.

Pour estimer la prime de risque du marché, on calcule le prix du contrat à terme sous la dynamique à deux facteurs (4.1)-(4.2). Pour ce faire, on procède par les mêmes étapes de calcul que dans Cartea et Figuera (2005). Ensuite, disposant d'une formule fermée pour le prix d'un contrat à terme et de tous les paramètres de la dynamique physique, ainsi que de la valeur des facteurs  $X$  et  $Y$  à la date d'évaluation, on estime la prime de risque  $\lambda$  par la méthode des moindres carrés ordinaire.

## Dérivation du prix à terme

Soit  $M$  l'échéance du contrat à terme, calculée en jours. Sous la dynamique (4.1)-(4.2), la distribution de  $(X_M, Y_M)$  conditionnelle à l'information disponible à la date  $t$  est donnée par :

$$\begin{aligned} X_M &= X_t \exp(-\alpha(M-t)) + \exp(-\alpha M) \int_t^M \sigma_X \exp(\alpha\tau) dW_\tau \\ Y_M &= Y_t \exp(-\beta(M-t)) + \exp(-\beta M) \int_t^M \exp(\beta\tau) J_\tau dN_\tau. \end{aligned}$$

On note

$$U_t \equiv \log(S_t) = f_t + X_t + Y_t$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} U_M &= f_M + X_M + Y_M \\ &= f_M + X_t \exp(-\alpha(M-t)) + Y_t \exp(-\beta(M-t)) \\ &\quad + \exp(-\alpha M) \int_t^M \sigma_X \exp(\alpha\tau) dW_\tau + \exp(-\beta M) \int_t^M \exp(\beta\tau) J_\tau dN_\tau. \end{aligned}$$

Sous la mesure neutre au risque,

$$\begin{aligned} X_M &= X_t \exp(-\alpha(M-t)) - \lambda \int_t^M \sigma_X \exp(-\alpha(M-\tau)) d\tau \\ &\quad + \int_t^M \sigma_X \exp(-\alpha(M-\tau)) dW_\tau \end{aligned}$$

$$Y_M = Y_t \exp(-\beta(M-t)) + \int_t^M \exp(-\beta(M-\tau)) J_\tau dN_\tau$$

où  $\lambda$  est la prime de risque. On a alors :

$$\mathbb{E}[U_M] = \mathbb{E} \left[ \begin{array}{l} \exp f_t + X_t \exp(-\alpha(M-t)) - \lambda \int_t^M \sigma_X \exp(-\alpha(M-\tau)) d\tau \\ + \int_t^M \sigma_X \exp(-\alpha(M-\tau)) dW_\tau + Y_t \exp(-\beta(M-t)) \\ + \int_t^M \exp(-\beta(M-\tau)) J_\tau dN_\tau \end{array} \right]$$

où  $\mathbb{E}[\cdot]$  représente l'espérance sous la mesure neutre au risque, conditionnelle à l'information

$\kappa$	1, 92	2, 12	2, 32
$\lambda$	1, 810	2, 505	3, 518

TAB. 4.4 – Estimation de la prime de risque de marché.

disponible en  $t$ .

D'après Cartea et Figuera (2005), on a terme par terme :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \int_t^M \exp(-\beta(M-\tau)) J_\tau dN_\tau \right] \\ = & \exp \left( \int_t^M \exp \left( \mu_J e^{-\alpha(M-\tau)} + \frac{\sigma_J^2}{2} e^{-2\alpha(M-\tau)} \right) \vartheta d\tau - (M-t)\vartheta \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \int_t^M \sigma_X \exp(-\alpha(M-\tau)) dW_\tau \right] \\ = & \exp \left( \frac{1}{2} \int_t^M \sigma_X^2 e^{-2\alpha(M-\tau)} d\tau \right). \end{aligned}$$

On peut alors calculer le prix  $v(t, M)$  en  $t$  d'un contrat à terme d'échéance  $M$  :

$$\begin{aligned} v(t, M) &= \mathbb{E}[S_M] \\ &= \widehat{\lambda}_t^M \exp(f_M + X_t \exp(-\alpha(M-t)) + Y_t \exp(-\beta(M-t))) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_t^M \sigma_X^2 e^{-2\alpha(M-\tau)} d\tau \\ &\quad + \int_t^M \exp \left( \left( \mu_J - \frac{\sigma_J^2}{2} \right) e^{-\beta(M-\tau)} + \frac{\sigma_J^2}{2} e^{-2\beta(M-\tau)} \right) \vartheta d\tau - (M-t)\vartheta \end{aligned}$$

où

$$\widehat{\lambda}_t^M = \exp \left( -\lambda \int_t^M \sigma_X e^{-\alpha(M-\tau)} d\tau \right).$$

### Estimation

Il suffit d'intégrer la formule du prix à terme dans une routine de minimisation de l'écart entre le prix observé et le prix théorique, et d'ainsi estimer le paramètre  $\lambda$ . Le tableau 4.4 présente les résultats obtenus sous trois hypothèses pour le seuil de filtration.

### 4.3 Algorithme d'évaluation

L'évaluation analytique des dérivés sur le prix au comptant de l'électricité est souvent impossible : d'un côté les modèles simples ne sont pas très représentatifs de la dynamique du prix de l'électricité (ex : plusieurs facteurs, présence de sauts, etc.), d'un autre côté les dérivés sur l'électricité se distinguent, à l'image des options swing, par un niveau de complexité élevé. Pour pallier ce problème, nombre d'auteurs ont proposé des méthodes numériques pour l'évaluation de tels dérivés. La simulation de Monte Carlo a été utilisée par Burger et al. (2004) pour un modèle à deux facteurs ; la technique est précise pour l'évaluation d'options vanilles, mais ce n'est pas le cas pour les options swing qui présentent des opportunités d'exercice anticipé. Les auteurs proposent l'utilisation de stratégies d'exercice heuristiques et obtiennent donc une évaluation systématiquement biaisée. Kiesel et al. (2010) utilisent la technique de simulation/régression (*Least-square Monte-Carlo*) pour identifier la stratégie d'exercice optimale d'une option swing avec délai de couverture (ce type d'option interdit à son détenteur d'exercer à nouveau durant un délai déterminé suivant chaque exercice). Les auteurs supposent un modèle de retour à la moyenne à un seul facteur, mieux adapté à la modélisation du prix du pétrole que de l'électricité. Plusieurs auteurs ont utilisé des formulations en programmation dynamique pour l'évaluation des dérivés sur l'électricité. Jaillot et al. (2004) utilisent des arbres trinomiaux parallèles pour évaluer des options swing, où chaque arbre correspond à une valeur de la variable d'état comptabilisant le nombre de droits d'exercice résiduels ; à chaque nœud, la valeur de continuation est obtenue sur le même arbre et la valeur d'exercice sur l'arbre voisin. Albanese et al. (2008) utilisent un treillis pour un modèle à un seul facteur avec saut. La technique recourt à l'approximation d'un générateur de chaîne de Markov pour retrouver la discrétisation de l'espace des états.

On développe dans cette section une méthode générale pour l'évaluation de produits dérivés écrits sur le prix journalier au comptant de l'électricité. Il s'agit d'une adaptation du modèle général présenté au chapitre 1.

On considère tout d'abord le cas d'une option de type européen d'échéance  $T$  dont la fonction de paiement  $\chi(S_T)$  ne dépend que du prix de l'électricité à la date  $T$ . En l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur de l'option est donc donnée par l'espérance mathématique sous la mesure neutre au risque des flux futurs  $\chi(S_T)$ , actualisée au taux sans risque  $r$ . Selon le modèle (4.1)-(4.3), la valeur de l'option s'écrit par conséquent en  $t = 0$  :

$$V_0(x, y) = e^{-rT} \mathbb{E}_{xy}[\chi(\exp(f_T + X_T + Y_T))].$$

Sous la mesure neutre au risque, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
X_T &= x \exp(-\alpha T) - \frac{\lambda \sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) + \int_0^T \sigma_X \exp(-\alpha(T - \tau)) dW_\tau \\
Y_T &= y \exp(-\beta T) + \int_0^T \exp(-\beta(T - \tau)) J_\tau dN_\tau \\
&= y \exp(-\beta T) + \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{N_T} \exp(-\beta(T - \tau_i)) J_i \right].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Le deuxième terme de (4.4) représente la somme des  $N_T$  sauts aléatoires survenant entre les dates 0 et  $T$ , le saut survenu à la date  $\tau_i$  étant pondéré par un facteur de retour  $\exp(-\beta(T - \tau_i))$ .

Il est difficile de définir la fonction de distribution de  $Y_T$  conditionnellement à  $y$ . En effet le passage par la distribution conditionnelle du nombre de sauts ne résout pas le problème à cause de la présence du facteur aléatoire  $\exp(-\beta(T - \tau_i))$ . Pour  $\beta = 0$ , la distribution de  $\sum_{i=1}^{N_T} J_i$  conditionnellement à  $N_T$  est gaussienne, ce qui n'est pas le cas pour le cas général où  $\tau_i$  est aussi une variable aléatoire. Dans Hambly et al. (2009), on utilise une approximation asymptotique de la distribution de  $Y_T$ . L'intuition derrière cette approximation est que, lorsque  $\beta$  est élevé, seul le dernier saut influence la distribution de  $Y_T$ . La validité de l'approximation est testée avec une simulation de Monte Carlo.

Abandonnant la piste d'un calcul analytique du prix de l'option européenne sous une distribution approchée de  $Y_T$ , on recourt plutôt à un algorithme numérique permettant d'approximer le prix de l'option sous la distribution exacte de  $Y_T$ .

### 4.3.1 Interpolation de la fonction valeur

Le prix au comptant (DAM) de l'électricité n'est pas un processus en temps continu comme peut l'être le prix d'une action ou d'une obligation transigé continuellement. Le prix journalier de l'électricité n'est disponible qu'une fois par jour, il s'agit donc d'un processus discret avec un pas de temps journalier. On définit alors l'unité de temps de telle sorte que l'ensemble des dates  $\{t_m, m = 0, \dots, M\}$  corresponde à des observations journalières, avec  $t_0 = 0$ ,  $t_M = T$ ,  $\delta = 1$  et  $\rho = e^{-r}$ . On note  $V_m(x, y)$  la valeur à la date  $t_m$  d'un dérivé financier du prix de l'électricité lorsque l'information disponible est décrite par le niveau des deux

facteurs  $(x, y)$ . La propriété de martingale du prix d'un dérivé implique que :

$$V_{m_1}(x, y) = e^{-r(t_{m_2}-t_{m_1})} \mathbb{E}_{xy}[V_{m_2}(X_{m_2}, Y_{m_2})] \text{ pour tout } m_1 \leq m_2.$$

Si on se situe sur un horizon d'un seul jour, on ne peut observer qu'un maximum d'un saut, et on a donc  $N_1 \in \{0, 1\}$ . Sous ces conditions, on peut écrire :

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= X_t \exp(-\alpha) - \frac{\lambda \sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma \epsilon \\ Y_{t+1} &= Y_t \exp(-\beta) + N_1 \sigma_J \left( \eta + \frac{\mu_J}{\sigma_J} \right) \\ \Sigma &= \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{2\alpha} (1 - e^{2\alpha})} \end{aligned}$$

où  $\eta$  et  $\epsilon$  sont deux variables normales centrées et réduites. On note  $p \equiv \mathbb{P}(N_1 = 1)$ . On a alors en tout  $t_m$  :

$$\begin{aligned} &V_m(x, y) \\ &= e^{-r} p \mathbb{E}_{mxy}[V_{m+1}(X_{m+1}, Y_{m+1}) | N_1 = 1] + (1 - p) e^{-r} \mathbb{E}_{mxy}[V_{m+1}(X_{m+1}, Y_{m+1}) | N_1 = 0] \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &V_m(x, y) \\ &= p e^{-r} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} V_{m+1} \left( \begin{array}{c} x \exp(-\alpha) - \frac{\lambda \sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma \epsilon, \\ y \exp(-\beta) + \sigma_J \left( \eta + \frac{\mu_J}{\sigma_J} \right) \end{array} \right) \phi(\epsilon) \phi(\eta) d\epsilon d\eta \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &+ (1 - p) e^{-r} \int_{\mathbb{R}} V_{m+1} \left( \begin{array}{c} x \exp(-\alpha) - \frac{\lambda \sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma \epsilon, \\ y \exp(-\beta) \end{array} \right) \phi(\epsilon) d\epsilon \end{aligned} \tag{4.6}$$

où  $\phi$  est la fonction de densité d'une variable aléatoire normale centrée et réduite. Ce calcul fait intervenir deux intégrations (4.5) et (4.6), alors que la fonction  $V_{m+1}$  n'est pas connue sous forme analytique. On suppose que la fonction  $V_{m+1}$  est connue en un nombre fini de

points d'une grille bidimensionnelle  $\mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_y$  sur l'espace des états

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{n_x} &= \{x_i : i = 1, \dots, n_x\} \\ \mathcal{G}_{n_y} &= \{y_j : j = 1, \dots, n_y\}.\end{aligned}$$

Pour évaluer les intégrales (4.5) et (4.6), on procède à une interpolation par spline cubique sur la dimension  $x$  et par spline linéaire sur la dimension  $y$ . On privilégie une précision supplémentaire sur  $x$ , les tests numériques ayant révélé que les variations de ce premier facteur ont un plus grand impact sur le prix de l'option que celles de  $y$ . On définit donc la fonction d'interpolation

$$\widehat{V}_m(x, y) = \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} \sum_{k=0}^3 (b_{ijk}^m y + c_{ijk}^m) x^k \mathbb{I}_x[x_i, x_{i+1}] \mathbb{I}_y[y_j, y_{j+1}] \quad (4.7)$$

où  $x_0 = y_0 = 0$  et  $x_{n_x+1} = y_{n_y+1} = \infty$  délimitent l'espace d'état. Les coefficients d'interpolation sont obtenus comme dans l'annexe 3.7.2.

### 4.3.2 Calcul de l'espérance mathématique

Pour calculer les expressions (4.5) et (4.6), il suffit de remplacer  $V_{m+1}$  par la fonction d'interpolation polynômiale par morceaux  $\widehat{V}_{m+1}$ . L'intégration de  $\widehat{V}_{m+1}$  est alors possible analytiquement. Pour l'expression (4.5), il vient :

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{V}_{m+1} \left( \begin{array}{c} x \exp(-\alpha) - \frac{\lambda \sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma \epsilon, \\ y \exp(-\beta) + \sigma_J \left( \eta + \frac{\mu_J}{\sigma_J} \right) \end{array} \right) \phi(\epsilon) \phi(\eta) d\epsilon d\eta \\ &= \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} \sum_{k=0}^3 \\ & \int_{\epsilon_i}^{\epsilon_{i+1}} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \left( b_{ijk}^{m+1} \left( x \exp(-\alpha) - \frac{\lambda \sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma \epsilon \right)^k \left( y \exp(-\beta) + \sigma_J \left( \eta + \frac{\mu_J}{\sigma_J} \right) \right) \right. \\ & \left. + c_{ijk}^{m+1} \left( x \exp(-\alpha) - \frac{\lambda \sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma \epsilon \right)^k \right) \phi(\epsilon) \phi(\eta) d\epsilon d\eta \\ &\equiv \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} \sum_{k=0}^3 A_{ijk}^{m+1}(x, y) \quad (4.8)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\epsilon_i &= \frac{x_i - xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha}(1 - e^{-\alpha})}{\Sigma} \\ \eta_j &= \frac{y_j - ye^{-\beta} - \mu_J}{\sigma_J}.\end{aligned}$$

En développant l'intégrant, le calcul de  $A_{ijk}^{m+1}$  fait intervenir des termes d'intégration sur  $\epsilon$  et  $\eta$  notés respectivement  $D_{ik}^{m+1}(x)$ ,  $B_j^{m+1}(y)$  et  $C_j^{m+1}(y)$ , tel que

$$A_{ijk}^{m+1}(x, y) = b_{ijk}^{m+1}D_{ik}^{m+1}(x)B_j^{m+1}(y) + c_{ijk}^{m+1}D_{ik}^{m+1}(x)C_j^{m+1}(y). \quad (4.9)$$

Le calcul de ces termes est donné à l'annexe 4.7.

Pour calculer (4.6) il faut évaluer un intégrale unidimensionnelle sur  $\epsilon$ ; pour ce faire, on trouve la spline d'approximation de  $x \rightarrow V(x, y \exp(-\beta))$  dont les coefficients sont donnés pour chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  par

$$\sum_{k=0}^3 \left( b_{i, J(y \exp(-\beta)), k}^{m+1} y \exp(-\beta) + c_{i, J(y \exp(-\beta)), k}^{m+1} \right) x^k$$

où  $J(y)$  est l'indice  $j$  tel que  $y \in [y_j, y_{j+1})$ . On obtient par conséquent :

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}} V_{m+1} \left( x \exp(-\alpha) - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha}(1 - e^{-\alpha}) + \Sigma\epsilon, y \exp(-\beta) \right) \phi(\epsilon) d\epsilon \\ &= \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{k=0}^3 D_{ik}^{m+1}(x) \left( b_{i, J(y \exp(-\beta)), k}^{m+1} y \exp(-\beta) + c_{i, J(y \exp(-\beta)), k}^{m+1} \right).\end{aligned} \quad (4.10)$$

### 4.3.3 Algorithme

Soit un dérivé financier d'échéance  $T = t_M$  dont la fonction de paiement dépend du prix observé au comptant de l'électricité, et un ensemble  $\mathcal{T}$  de dates où l'exercice est permis, où  $\mathcal{T} \subseteq \{t_m, m = 0, \dots, M\}$ . La valeur du dérivé est obtenue en résolvant un programme dynamique par récursion arrière. L'algorithme s'écrit :

$$\begin{aligned}V_M(x, y) &= \chi(\exp(f_T + x + y)) \\ V_m(x, y) &= \max \left\{ \chi(\exp(f_T + x + y)) \mathbb{1}_{t_m} \mathcal{T}; e^{-r} \mathbb{E}_{xy}[V_{m+1}(X_{m+1}, Y_{m+1})], \right\} \\ & \quad m = 0, \dots, M - 1,\end{aligned}$$

où l'espérance est calculée selon (4.5)-(4.6) et (4.8)-(4.10).

**Remarque :** Dans la plupart des cas, la fonction de paiement a déjà une forme polynômiale par morceaux qui peut être intégrée analytiquement. Dans ce cas, on peut utiliser l'expression analytique de l'espérance pour déterminer la fonction  $V_{T-1}(x, y)$  précisément, sans recourir à l'interpolation. Par exemple, pour une option de vente dont la fonction de paiement est donnée par  $\chi_M(x, y) = (K - \exp(f_T + x + y))^+$ , on obtient :

$$V_{M-1}(x, y) = p \left( \rho K \Phi(x_1) - e^{-r + \frac{\sigma_1^2}{2}} \tilde{S}_1 \Phi(x_1 - \sigma_1) \right) \\ + (1 - p) \left[ \rho K \Phi(x_2) - e^{-r + \frac{\sigma_2^2}{2}} \tilde{S}_2 \Phi(x_2 - \sigma_2) \right]$$

où  $\Phi$  est la distribution cumulative d'une loi normale centrée et réduite, et

$$\tilde{S}_1 = \exp(f_T + xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + ye^{-\beta} + \mu_J) \\ \tilde{S}_2 = \exp(f_T + xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + ye^{-\beta}) \\ x_1 = \frac{\ln(\frac{K}{\tilde{S}_1})}{\sqrt{\Sigma^2 + \sigma_J^2}}; \sigma_1 = \sqrt{\Sigma^2 + \sigma_J^2} \\ x_2 = \frac{\ln(\frac{K}{\tilde{S}_2})}{\Sigma}; \sigma_2 = \Sigma.$$

## 4.4 Illustrations numériques

Cette section présente les résultats d'essais numériques pour des options de vente européennes et américaines. Pour tous les essais, on suppose que la fonction déterministe de saisonnalité est constante à  $f_m = \ln(40)$ . Les valeurs des autres paramètres sont celles obtenue pour  $\kappa = 2, 12$  présentées au tableaux 4.4 et 4.2 avec  $\beta = 234, 185$ .

### 4.4.1 Options européennes

Les tableaux 4.5 à 4.7 présentent une comparaison des résultats obtenus en utilisant l'algorithme présenté à la section 4.3, identifié par PD, et la simulation de Monte Carlo, pour différentes valeurs du prix d'exercice, de l'échéance, et des valeurs initiales des facteurs. Notre schéma numérique utilise une grille de 150 points sur la variable d'état  $x$  avec  $x_{\min} = -5$ , et

$x = 0, y = 0, s = 40$

$M$ (jours)	PD	Simulation	Intervalle 95%	
5	0,66016	0,66074	0,65150	0,66998
10	1,51758	1,51097	1,49495	1,52700
15	2,15536	2,14101	2,12103	2,16100
20	2,64553	2,64531	2,62251	2,66810
30	3,33911	3,33020	3,30427	3,35613
60	4,28881	4,28996	4,26065	4,31926
90	4,57741	4,56953	4,53961	4,59945

$x = -0,3, y = 0, s = 29,63$

$M$ (jours)	PD	Simulation	Intervalle 95%	
5	5,89398	5,89929	5,87826	5,92032
10	5,67548	5,68371	5,65763	5,70980
15	5,53771	5,53189	5,50355	5,56023
20	5,42366	5,42345	5,39397	5,45292
30	5,23558	5,22205	5,19167	5,25243
60	4,90360	4,90727	4,87661	4,93793
90	4,77606	4,79104	4,76060	4,82149

$x = 0, y = -0,3, s = 29,63$

$M$ (jours)	PD	Simulation	Intervalle 95%	
5	0,97051	0,88340	0,87269	0,89410
10	1,53156	1,54052	1,52436	1,55668
15	2,15594	2,17656	2,15642	2,19670
20	2,64556	2,67589	2,65304	2,69874
30	3,33911	3,35665	3,33053	3,38277
60	4,28881	4,32168	4,29229	4,35108
90	4,57741	4,57952	4,54952	4,60951

TAB. 4.5 – Option de vente européenne, prix d'exercice  $K = 36$ .

$x_{\max} = 5$ , et une grille de 20 points sur  $y$  avec  $y_{\min} = -2,5$  et  $y_{\max} = 2,5$ . On observe tout d'abord que dans tous les cas, le prix obtenu par programmation dynamique est dans l'intervalle de confiance à 95% obtenu par la simulation d'un échantillon de taille 100 000. Les tests numériques montrent la qualité et la précision de la technique numérique proposée. En termes de temps de calcul et de simplicité d'implémentation cependant, la programmation dynamique est largement surpassée par la simulation de Monte Carlo. Le calcul du prix d'une option européenne d'une échéance de 90 jours est obtenu en moins de 2 secondes en utilisant la méthode de simulation, l'utilisation de l'algorithme de programmation dynamique pour la même option prend 3 minutes. Il faut cependant noter que, contrairement à la simulation qui ne fournit qu'un seul prix à la date initiale et pour une seule valeur des facteurs initiaux, la programmation dynamique fournit toute la surface des prix, ce qui est très utile dans un

$x = 0, y = 0, s = 40$

$M$ (jours)	PD	Simulation	Intervalle 95%	
5	2,37365	2,38814	2,37031	2,40597
10	3,59544	3,62235	3,59759	3,64712
15	4,43167	4,45523	4,42660	4,48385
20	5,05900	5,06738	5,03628	5,09848
30	5,93721	5,95152	5,91760	5,98544
60	7,13712	7,12514	7,08848	7,16179
90	7,50182	7,50032	7,46333	7,53732

$x = -0, 3, y = 0, s = 29, 63$

$M$ (jours)	PD	Simulation	Intervalle 95%	
5	9,77401	9,76595	9,74341	9,78849
10	9,29346	9,29452	9,26474	9,32431
15	8,98029	9,00054	8,96741	9,03367
20	8,74910	8,77064	8,73577	8,80551
30	8,41894	8,41910	8,38269	8,45551
60	7,92830	7,97229	7,93492	8,00966
90	7,75632	7,74921	7,71187	7,78655

$x = 0, y = -0, 3, s = 29, 63$

$M$ (jours)	PD	Simulation	Intervalle 95%	
5	2,90766	2,86658		2,84744 3,06971
10	3,61579	3,59938	3,43926	3,57476
15	4,43246	4,42345	4,30574	4,39489
20	5,05903	5,06454	4,97658	5,03352
30	5,93721	5,94366	5,89967	5,90971
60	7,13712	7,14724	7,11067	7,16183
90	7,50182	7,50981	7,47278	7,53853

TAB. 4.6 – Option de vente européenne, prix d'exercice  $K = 40$ .

$x = 0, y = 0, s = 40$

$M$ (jours)	PD	Simulation	Intervalle 95%	
5	5,30894	5,30627	5,28165	5,33089
10	6,55362	6,56232	6,53074	6,59390
15	7,45308	7,46434	7,42905	7,49963
20	8,14222	8,16436	8,12684	8,20188
30	9,12203	9,13971	9,09962	9,17979
60	10,48134	10,49372	10,45171	10,53573
90	10,89601	10,88783	10,84568	10,92998

$x = -0,3, y = 0, s = 29,63$

$M$ (jours)	PD	Simulation	Intervalle 95%	
5	13,75919	13,75716	13,73439	13,77994
10	13,17862	13,20078	13,16940	13,23215
15	12,76098	12,79602	12,76027	12,83177
20	12,44818	12,47943	12,44125	12,51762
30	12,01060	12,03997	11,99945	12,08049
60	11,39609	11,37825	11,33617	11,42034
90	11,18944	11,19064	11,14861	11,23267

$x = 0, y = -0,3, S = 29,63$

$M$ (jours)	PD	Simulation	Intervalle 95%	
5	6,05374	6,02557	6,00037	6,05078
10	6,58026	6,57557	6,54396	6,60717
15	7,45407	7,45779	7,42248	7,49309
20	8,14226	8,15603	8,11843	8,19363
30	9,12203	9,14013	9,10006	9,18019
60	10,48134	10,51679	10,47477	10,55881
90	10,89601	10,88204	10,83981	10,92428

TAB. 4.7 – Option de vente européenne, prix d'exercice  $K = 44$ .

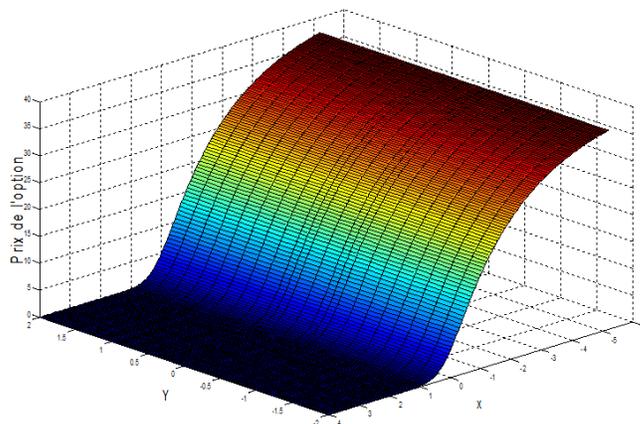


FIG. 4.7 – Surface de prix d’une option européenne pour  $K = 40$  et  $T = 40$  jours.

contexte de gestion de risque et de calcul des sensibilités.

À l’examen des résultats, on constate que le prix de l’option dépend de la valeur initiale des facteurs ; cependant, cette valeur initiale a moins d’impact lorsque l’échéance est longue. Par exemple, pour un prix d’exercice de 40 (tableau 4.6), la variation du prix de l’option selon les valeurs initiales est d’au plus 7,4 pour une échéance de 5 jours, alors qu’elle ne dépasse pas 0,25 pour une échéance de 90 jours. Ce phénomène peut s’expliquer par le comportement de retour à la moyenne des processus. On rappelle que, selon les processus  $X_t$  et  $Y_t$ , les valeurs initiales sont multipliées après chaque pas de temps par  $\exp(-\alpha)$  et  $\exp(-\beta)$  respectivement. La force de retour du facteur des sauts ( $\beta$ ) est très supérieure à celle du facteur principal ( $\alpha$ ). Ce phénomène se traduit par une plus grande sensibilité du prix de l’option à la valeur initiale de  $X_0$ , alors que l’impact de  $Y_0$  n’est observable que sur le très court terme.

La figure 4.7 présente une illustration représentative de la surface de prix d’une option de vente européenne, 40 jours avant l’échéance. On constate que la valeur initiale du deuxième facteur ( $y$ ) a beaucoup moins d’impact sur le prix que celle du premier ( $x$ ).

#### 4.4.2 Options américaines

Les tableaux 4.8 à 4.10 présentent une comparaison des prix d’options américaines et européennes de même caractéristiques. Les prix calculés par l’algorithme présenté en 4.3 sont identifiés par PD1, et correspondent pour les options européennes aux résultats présentés

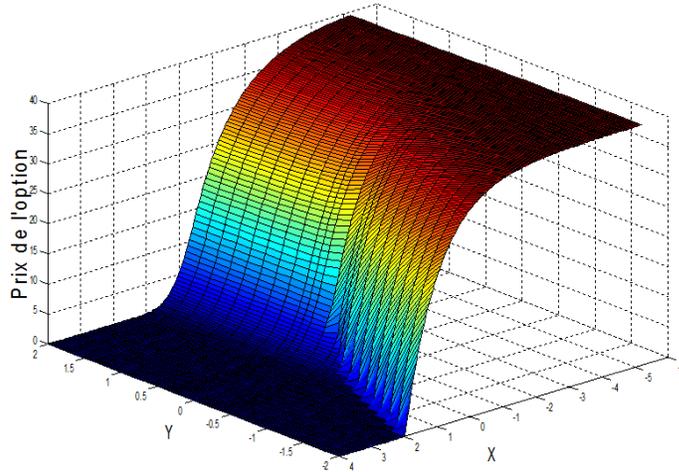


FIG. 4.8 – Prix d’une option de vente américaine pour  $T = 40$  jours et  $K = 40$ .

aux tableaux 4.5 à 4.7. Il convient de remarquer qu’il n’est pas possible d’obtenir le prix d’une option américaine par simulation de Monte Carlo. Contrairement au cas des options européennes, on constate que le prix d’une option américaine est sensible à la valeur initiale des deux facteurs, même pour les options de long terme. La figure 4.8 présente une illustration représentative de la surface du prix d’une option américaine, 40 jours avant l’échéance ; on y remarque que dans la zone d’exercice, le prix dépend de la valeur de  $y$ , alors qu’il est peu sensible à cette valeur dans la zone de continuation. La surface de prix fait ressortir le fait qu’il est optimal pour le détenteur d’exercer l’option de vente pour des valeurs faibles de  $x$  et  $y$ . Dans le cas de modèles à un seul facteur, seul le niveau  $x$  définit la stratégie du détenteur, mais dans un modèle à deux facteurs, le détenteur peut également profiter d’une baisse de la valeur de  $y$  pour exercer l’option.

## 4.5 Évaluation de dérivés exotiques

Le marché de l’électricité est très riche en produits dérivés exotiques. Par exemple, le prix d’exercice peut dépendre, en plus du prix au comptant, de la différence entre le prix de l’électricité et le prix du gaz (*spark-spread* option), ou être lié à la température ou à la pluviométrie. Un autre cas typique d’option exotique sur l’électricité est celui des options swing où le détenteur possède un nombre limité de possibilités d’exercice. La programmation dynamique est une approche naturelle à l’évaluation de tels contrats ; cependant, l’évaluation

$x = 0, y = 0, s = 40$

$M$ (jours)	Option européenne		Option américaine	
	DP 1	DP 2	DP 1	DP 2
5	0,660161	0,660460	0,859131	0,859500
10	1,517579	1,518202	1,726928	1,727405
15	2,155362	2,156132	2,443006	2,443457
20	2,645535	2,646396	3,059038	3,059451
30	3,339106	3,340079	4,094752	4,095114
60	4,288810	4,289923	6,325857	6,326139
90	4,577407	4,578561	7,845680	7,845927

$x = -0,3, y = 0, s = 29,63$

$M$ (jours)	Option européenne		Option américaine	
	DP1 1	DP 2	DP 1	DP 2
5	5,893982	5,895514	6,367271	6,367271
10	5,675482	5,677024	6,523172	6,523480
15	5,537708	5,539143	6,749906	6,750139
20	5,423664	5,425030	6,979631	6,979894
30	5,235580	5,236869	7,406846	7,407071
60	4,903601	4,904807	8,518595	8,518819
90	4,776061	4,777244	9,429061	9,429262

$x = 0,3, y = 0, s = 53,99$

$M$ (jours)	Option européenne		Option américaine	
	DP 1	DP 2	DP 1	DP 2
5	0,003646	0,003648	0,012820	0,012827
10	0,145625	0,145700	0,204945	0,205041
15	0,503045	0,503270	0,607745	0,607953
20	0,963590	0,963971	1,118926	1,119211
30	1,901992	1,902632	2,222043	2,222390
60	3,714254	3,715268	5,027219	5,027536
90	4,382683	4,383807	6,941380	6,941648

TAB. 4.8 – Comparaison entre les prix d'options européennes et américaines, prix d'exercice  $K = 36$ .

$x = 0, y = 0, s = 40$

$M$ (jours)	Option européenne		Option américaine	
	PD 1	PD 2	PD 1	PD 2
5	2,373647	2,374626	2,680366	2,681319
10	3,595444	3,596741	3,883521	3,884408
15	4,431674	4,433050	4,812079	4,812826
20	5,059001	5,060424	5,589450	5,590102
30	5,937214	5,938699	6,869060	6,869595
60	7,137116	7,138687	9,533451	9,533834
90	7,501821	7,503419	11,278918	11,279231

$x = -0,3, y = 0, s = 29,63$

$M$ (jours)	Option européenne		Option américaine	
	PD 1	PD 2	PD 1	PD 2
5	9,774007	9,775800	10,367271	10,367271
10	9,293460	9,295401	10,367271	10,367271
15	8,980288	8,982141	10,445955	10,446206
20	8,749095	8,750884	10,621504	10,621749
30	8,418942	8,420655	10,991068	10,991346
60	7,928304	7,929940	12,115163	12,115421
90	7,756317	7,757935	13,082372	13,082623

$x = 0,3, y = 0, S = 53,99$

$M$ (jours)	Option européenne		Option américaine	
	PD 1	PD 2	PD 1	PD 2
5	0,052718	0,052750	0,118096	0,118158
10	0,596619	0,596934	0,754581	0,754903
15	1,425726	1,426335	1,626433	1,626942
20	2,288393	2,289233	2,537366	2,537960
30	3,806960	3,808107	4,238020	4,238631
60	6,372097	6,373590	7,943679	7,944137
90	7,249716	7,251291	10,231533	10,231886

TAB. 4.9 – Comparaison entre les prix d'options européennes et américaines, prix d'exercice  $K = 40$ .

$x = 0, y = 0, s = 40$

$M$ (jours)	Option européenne		Option américaine	
	PD 1	PD 2	PD 1	PD 2
5	5,308939	5,310571	5,611325	5,612957
10	6,553622	6,555456	6,865032	6,866407
15	7,453076	7,454911	7,871867	7,872991
20	8,142220	8,144058	8,727748	8,728707
30	9,122028	9,123879	10,143711	10,144477
60	10,481345	10,483228	13,070876	13,071385
90	10,896007	10,897901	14,953399	14,953795

$x = -0,3, y = 0, s = 29,63$

$M$ (jours)	Option européenne		Option américaine	
	PD 1	PD 2	PD 1	PD 2
5	13,759190	13,761053	14,367271	14,367271
10	13,178620	13,180737	14,367271	14,367271
15	12,760980	12,763053	14,367271	14,367271
20	12,448181	12,450210	14,469157	14,469438
30	12,010600	12,012573	14,785593	14,785897
60	11,396089	11,398007	15,893098	15,893419
90	11,189443	11,191347	16,886613	16,886913

$x = 0,3, y = 0, s = 53,99$

$M$ (jours)	Option européenne		Option américaine	
	PD 1	PD 2	PD 1	PD 2
5	0,345780	0,345946	0,572181	0,572459
10	1,664510	1,665206	1,955801	1,956558
15	3,076360	3,077419	3,374637	3,375619
20	4,355617	4,356915	4,681993	4,683037
30	6,405880	6,407456	6,905392	6,906371
60	9,575016	9,576850	11,284893	11,285539
90	10,603145	10,605027	13,816035	13,816498

TAB. 4.10 – Comparaison entre les prix d’options européennes et américaines, prix d’exercice  $K = 44$ .

d'options exotiques nécessite le plus souvent l'intégration de variables d'état supplémentaire, ce qui augmente exponentiellement le temps de calcul et la mémoire requise (malédiction de la dimension). Pour cette raison, on propose tout d'abord une simplification du modèle de base qui permet de réduire le temps de calcul sans altérer significativement la précision du prix obtenu.

### 4.5.1 Approximation par un retour à la moyenne infini

La simplification proposée consiste à supposer que le retour à la moyenne  $\beta$  est infiniment grand. Sous cette hypothèse, la durée d'un saut ne dépasse pas un jour et le processus  $Y_m$  devient sans mémoire. Ainsi, pour  $\beta = +\infty$  on a :

$$\begin{aligned} X_{m+1} &= X_m \exp(-\alpha) - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma\epsilon, \\ Y_{m+1} &= \underbrace{Y_m \exp(-\beta)}_0 + N_1\sigma_J \left( \eta + \frac{\mu_J}{\sigma_J} \right) \\ &= N_1\sigma_J \left( \eta + \frac{\mu_J}{\sigma_J} \right). \end{aligned}$$

Dans le cas d'une option de vente européenne, le prix est alors analytique et donné par :

$$\begin{aligned} V_0(x) &= e^{-rT} \mathbb{E}_x[(K - S_T)^+] \\ &= p \left( e^{-rT} K \Phi(x_1) - e^{-rT + \frac{\sigma_1^2}{2}} \tilde{S}_1 \Phi(x_1 - \sigma_1) \right) \\ &\quad + (1 - p) \left( e^{-rT} K \Phi(x_2) - e^{-rT + \frac{\sigma_2^2}{2}} \tilde{S}_2 \Phi(x_2 - \sigma_2) \right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_1 &= \exp(f_T + x_1 e^{-\alpha T} - \frac{\lambda \sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) + \mu_J) \\
\tilde{S}_2 &= \exp(f_T + x_2 e^{-\alpha T} - \frac{\lambda \sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T})) \\
x_1 &= \frac{\ln(\frac{K}{\tilde{S}_1})}{\sqrt{\Sigma_T^2 + \sigma_J^2}}; \sigma_1 = \sqrt{\Sigma_T^2 + \sigma_J^2} \\
x_2 &= \frac{\ln(\frac{K}{\tilde{S}_2})}{\Sigma_T}; \sigma_2 = \Sigma_T \\
\Sigma_T &= \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{2\alpha} (1 - e^{2\alpha T})}.
\end{aligned}$$

Dans le cas des options américaines, la valeur de continuation  $\rho \mathbb{E}_x[V_{m+1}(X_{m+1}, Y_{m+1})]$  ne dépend plus de la valeur observée du deuxième facteur, mais uniquement de celle du premier facteur. Du fait de cette simplification, le calcul de la valeur de continuation, qui est la partie la plus lourde de l'algorithme, est réalisé sur une seule dimension, et le temps de calcul total est divisé par  $n_y$ .

Afin de mesurer l'impact de cette simplification, les tableaux 4.8 à 4.10 indiquent le prix des options de vente européennes et américaines obtenues en supposant que  $\beta = \infty$  (identifiés par PD2) en comparaison avec les prix obtenus à partir du modèle général (identifiés par PD1). Les différences de prix sont faibles (de l'ordre de  $10^{-3}$ ) pour les deux types d'options. En effet, dans cet exemple, le retour à la moyenne estimé  $\hat{\beta} = 234,185$  est relativement élevé, de sorte que seul un saut survenant juste avant la date d'échéance peut influencer le prix d'exercice de l'option européenne, et cette situation est très proche de l'hypothèse d'un  $\beta$  infini. Dans le cas des options américaines, la différence principale entre les deux modèles provient du fait que les sauts peuvent se superposer dans le cas général (un saut peut survenir alors que  $y$  est positif), repoussant ainsi les ailes de la distribution de  $Y_{m+1}$ . En imposant un retour à la moyenne instantané, la superposition des sauts devient impossible. Les exemples traités montrent, en plus d'un  $\beta$  élevé, une faible fréquence de saut, rendant ainsi la superposition des sauts improbable et faisant du modèle avec retour à la moyenne infini une bonne approximation.

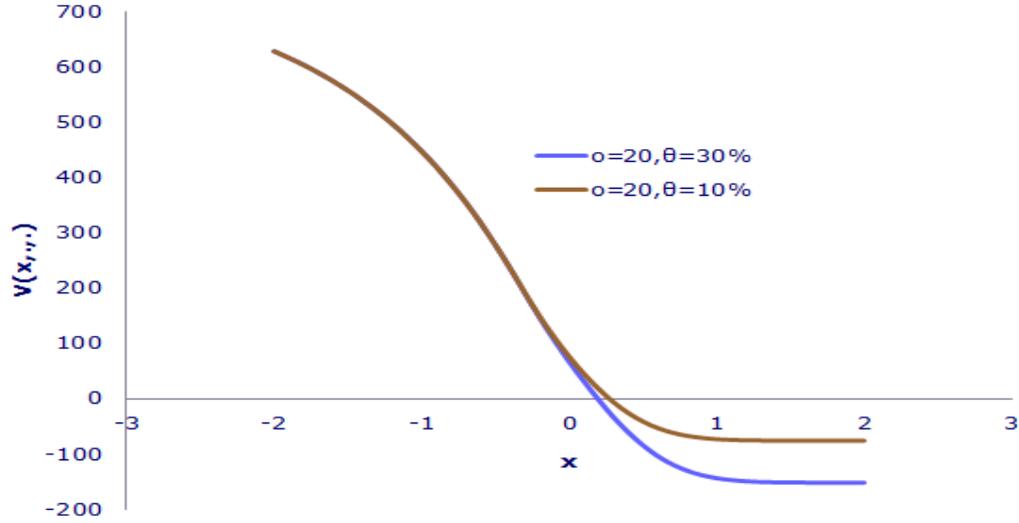


FIG. 4.9 – Variation du prix d'un contrat swing de maturité  $T = 30$  jours,  $\bar{e} = 3$  et de prix d'exercice  $K = 40$  en fonction de la pénalité  $\theta$  et la valeur de  $x$ .

#### 4.5.2 Le cas des options swing

Les options swing donnent au détenteur le droit d'exercer une série d'options d'achat et de vente, avec des restrictions sur la quantité maximale achetée ou vendue à chaque date d'exercice et/ou sur la quantité totale transigée. À titre illustratif, on considère un contrat swing selon lequel le détenteur peut vendre une quantité totale  $E$  d'électricité à un prix  $K$  entre les dates  $t_0 = 0$  et  $T = t_M$ . À chaque date d'exercice, la quantité vendue ne peut dépasser un seuil  $\bar{e}$ , et le détenteur doit payer une pénalité proportionnelle au taux  $\theta$  à l'échéance s'il n'a pas totalement vendu la quantité  $E$ . L'évaluation de ce contrat par programmation dynamique nécessite l'usage d'une variable d'état additionnelle, notée  $o$ , représentant la quantité d'électricité résiduelle que le détenteur peut encore vendre, où la valeur initiale de  $o = E$ . L'algorithme d'évaluation est alors :

$$\begin{aligned}
 V_M(x, y, o) &= \max_{\gamma \leq \min\{o, \bar{e}\}} \{ \gamma (K - \exp(f_T + x + y)) - \theta (o - \gamma)^+ \} \\
 V_m(x, y, o) &= \max_{\gamma \leq \min\{o, \bar{e}\}} \{ \gamma (K - \exp(f_m + x + y)) + \rho \mathbb{E}_x [V_{m+1}(X_{m+1}, Y_{m+1}, o - \gamma)] \}, \\
 \text{pour } m &= 0, \dots, T - 1.
 \end{aligned}$$

Les deux figures 4.9 et 4.10 donnent une représentation de la valeur d'un tel contrat en fonction du niveau du facteur  $x$  et du nombre d'options de vente disponibles.

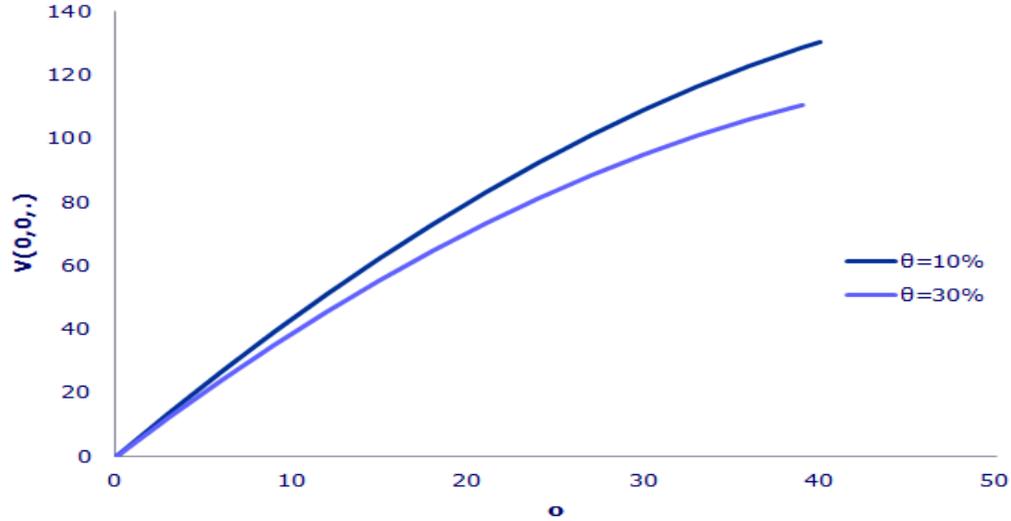


FIG. 4.10 – Variation du prix du contrat swing en fonction du nombre d’exercices résiduels  $o$  pour un contrat de maturité  $T = 30$  jours,  $\bar{e} = 3$  et de prix d’exercice  $K = 40$ , lorsque  $x = 0$  et  $y = 0$ .

## 4.6 Conclusion

On utilise dans ce chapitre un cadre général pour évaluer les dérivés sur l’électricité. Pour représenter la dynamique du prix au comptant de l’électricité, on décrit une méthode pour estimer les deux processus de retour à la moyenne composant le prix au comptant. L’estimation est réalisée à la fois sur les données historiques et sur les prix des contrats à terme sur l’électricité. On utilise les données historiques pour construire des estimés des paramètres physiques du processus de prix, et on utilise les prix à termes pour retrouver la prime de risque. On propose ensuite une méthode d’approximation par spline et un algorithme de programmation dynamique permettant d’évaluer aussi bien les options vanilles que les options exotiques, telles que les options swing dont on donne un exemple illustratif. Le temps de calcul peut être significativement réduit lorsque la durée des sauts est faible par une simplification du modèle dont on vérifie la pertinence à partir de tests numériques.

## 4.7 Annexe :

On présente ici le développement des termes de l'expression (4.9) :

$$A_{ijk}(x, y) = b_{ijk}D_{ik}(x)B_j(y) + c_{ijk}D_{ik}(x)C_j(y).$$

$$\begin{aligned} D_{i3}(x) &= \int_{\epsilon_i}^{\epsilon_{i+1}} \left( xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma\epsilon \right)^3 \phi(\epsilon) d\epsilon \\ &= \Sigma^3 (G_3(\epsilon_{i+1}) - G_3(\epsilon_i)) + 3\Sigma^2 \left( xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) \right) (G_2(\epsilon_{i+1}) - G_2(\epsilon_i)) \\ &\quad + 3\Sigma \left( xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) \right)^2 (G_1(\epsilon_{i+1}) - G_1(\epsilon_i)) \\ &\quad + \left( xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) \right)^3 (G_0(\epsilon_{i+1}) - G_0(\epsilon_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i2}(x) &= \int_{\epsilon_i}^{\epsilon_{i+1}} \left( xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma\epsilon \right)^2 \phi(\epsilon) d\epsilon \\ &= \Sigma^2 (G_2(\epsilon_{i+1}) - G_2(\epsilon_i)) + 2\Sigma \left( xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) \right) (G_1(\epsilon_{i+1}) - G_1(\epsilon_i)) \\ &\quad + \left( xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) \right)^2 (G_0(\epsilon_{i+1}) - G_0(\epsilon_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i1}(x) &= \int_{\epsilon_i}^{\epsilon_{i+1}} \left( xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma\epsilon \right) \phi(\epsilon) d\epsilon \\ &= \left( xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) \right) (G_0(\epsilon_{i+1}) - G_0(\epsilon_i)) + \Sigma (G_1(\epsilon_{i+1}) - G_1(\epsilon_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{0i}(x) &= \int_{\epsilon_i}^{\epsilon_{i+1}} \left( xe^{-\alpha} - \frac{\lambda\sigma_X}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) + \Sigma\epsilon \right)^0 \phi(\epsilon) d\epsilon \\ &= G_0(\epsilon_{i+1}) - G_0(\epsilon_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_j(y) &= \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} (ye^{-\beta} + \mu_J + \sigma_J\eta) \phi(\eta) d\eta \\ &= (ye^{-\beta} + \mu_J) (\Phi(\eta_{j+1}) - \Phi(\eta_j)) - \sigma_J (\phi(\eta_{j+1}) - \phi(\eta_j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_j(y) &= \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \phi(\eta) d\eta \\
&= \Phi(\eta_{j+1}) - \Phi(\eta_j)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
G_3(\epsilon) &= -\epsilon^2 e^{-\frac{\epsilon^2}{2}} - 2\phi(\epsilon) \\
G_2(\epsilon) &= -\epsilon e^{-\frac{\epsilon^2}{2}} + \Phi(\epsilon) \\
G_1(\epsilon) &= -\phi(\epsilon) \\
G_0(\epsilon) &= \Phi(\epsilon)
\end{aligned}$$

et  $\phi$  et  $\Phi$  sont respectivement la densité et la fonction de distribution cumulative normale centrée et réduite.

# Conclusion générale

On distingue deux grandes familles de méthodes numériques pour l'évaluation des produits dérivés avec possibilité d'exercice anticipé : la résolution numérique d'équations aux dérivés partielles caractérisant le comportement de la valeur du produit dérivé, et l'évaluation par programmation dynamique de l'espérance des flux futurs du produit dérivé. L'approche développée dans cette thèse appartient à la deuxième famille et fait intervenir l'interpolation de la fonction valeur par des splines cubiques.

L'approche consistant à interpoler la fonction valeur d'un produit dérivé est possible du moment qu'on connaît sous forme explicite la distribution du sous-jacent, conditionnelle aux valeurs observées de ses caractéristiques pertinentes. Cette approche n'est nullement limitée par le nombre de clauses optionnelles, la forme de la fonction de paiement, l'existence de flux intermédiaires, ou par la régularité de la fonction valeur. L'utilisation de la programmation dynamique permet d'identifier la valeur d'un produit dérivé à tout instant et pour tous les états du monde possibles, mais permet en outre de construire et d'analyser la stratégie optimale du détenteur.

Les trois applications traitées dans cette thèse illustrent la flexibilité, la robustesse et l'efficacité de l'approche. Ainsi, on a considéré différentes hypothèses sur la dynamique du sous-jacent (modèle lognormal, modèle avec changements de régime, modèles de retour à la moyenne) et sur la forme du vecteur d'état (composantes discrètes pour les options verrous et les options swing, sous-jacent multidimensionnel avec composante déterministe pour la garantie de retrait minimal ou comportant deux facteurs stochastiques pour les dérivés sur l'électricité).

Le deuxième chapitre, qui traite de l'évaluation des options américaines, apporte une correction à l'hypothèse d'une stratégie d'exercice en temps discret en proposant une stratégie à barrières constantes. Cette approche permet d'économiser l'effort computationnel, notamment pour les hautes volatilités ou les longues échéances.

Le troisième chapitre, qui traite des garanties offertes par les fonds distincts, met en relief l'intérêt de l'analyse du comportement du détenteur. Cette analyse a permis, non seulement d'évaluer le contrat de garantie, mais aussi de comprendre comment le détenteur, par son comportement, affecte le niveau de frais du contrat.

Le quatrième chapitre propose une dynamique plus simple et computationnellement plus économique pour la tarification des dérivés sur le prix de l'électricité, particulièrement pour l'évaluation d'options exotiques ; une illustration est fournie pour les options swing.

Dans chacun des cas, nous présentons un cadre complet d'évaluation des produits dérivés, intégrant à la fois le modèle, la méthode d'estimation, et enfin l'algorithme d'évaluation du produit et de la stratégie d'exercice.

Nous envisageons à la fin de cette thèse deux pistes de développement : en premier lieu on peut exploiter le fait que le modèle général de l'évaluation par programmation dynamique de produits dérivés ne dépend ni de la technique d'approximation ni de la distribution du sous-jacent. Cette indépendance permettrait de comparer l'efficacité d'autres méthodes d'interpolation, tel que les méthodes spectrales par exemple, ou aussi de considérer d'autres hypothèses de base sur la dynamique du sous-jacent, tel que les processus de prix à rendement non gaussien.

En deuxième lieu, rappelons que l'algorithme de la programmation dynamique permet d'évaluer des dérivés exotiques sous forme quasi analytique, tout en fournissant les paramètres de couverture (Delta et Gamma) de ces contrats. Cet outil puissant pourrait efficacement remplacer la simulation Monte-Carlo ou les approximations analytiques imprécises dans l'élaboration et le test de stratégies de couverture, notamment pour le cas des garanties des fonds distincts.

# Bibliographie

- [1] Albanese, C., H. Lo et S. Tompaidis (2008). "A numerical method for pricing electricity derivatives for Jump-Diffusion processes based on continuous time lattices", document de travail *SSRN 1018493*.
- [2] Armstrong, M. J. (2001). "The reset decision for segregated fund maturity guarantees", *Insurance : Mathematics and Economics* vol. 29 no. 2, p. 257-269.
- [3] Arulampalam, M. S., S. Maskell, N. Gordon et T. Clapp (2002). "A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking", *IEEE Transactions on Signal Processing* vol.50 no. 2, p. 174-188.
- [4] Barone-Adesi, G. et R.E. Whaley (1987). "Efficient analytic approximation of American option values" *The Journal of Finance* vol. 42 no. 2, p. 301-320.
- [5] Bauer, D. K., A. Kling et J. Russ (2008). "A universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities", *ASTIN Bulletin-Actuarial Studies in Non Life Insurance* vol. 38 no. 2, p. 621.
- [6] Ben-Ameur, H., M. Breton et J.M. Martinez (2009). "Dynamic programming approach for valuing options in the GARCH model", *Management Science* vol. 55 no. 2, p. 252-266.
- [7] Benth, F. E., J. Kallsen et T. Meyer-Brandis (2007). "A Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck Process for electricity spot price modeling and derivatives pricing", *Applied Mathematical Finance* vol. 14 no. 2, p. 153-169.
- [8] Bernhard, P., J.C. Engwerda, B. Roorda, J.M. Schumacher, V. Kolokoltsov, P. Saint-Pierre et J.P. Aubin (2010). "The interval market model in mathematical finance", dans *Static & Dynamic Game Theory : Foundations & Applications*, Springer.
- [9] Black, F., et M. Scholes (1973). "The pricing of options and corporate liabilities", *The journal of political economy* p. 637-654.
- [10] Bollen, N. P. (1998). "A note on the impact of options on stock return volatility", *Journal of banking et Finance* vol. 22 no. 9, p. 1181-1191.
- [11] Boyle, P. P. (1977). "Options : A Monte Carlo approach", *Journal of Financial Economics* vol. 4 no. 3, p. 323-338.
- [12] Boyle, P. P. (1988). "A lattice framework for option pricing with two state variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* vol. 23 no. 1, p. 1-12.
- [13] Boyle, P. P., J. Evnine et S. Gibbs (1989). "Valuation of options on several underlying assets", *The Review of Financial Studies* vol. 2, p. 241-250.

- [14] Boyle, P. P., A.W. Kolkiewicz et K.S. Tan (2001). "Valuation of the reset options embedded in some equity-linked insurance products", *North American Actuarial Journal* vol. 5 no. 3, p. 1-18.
- [15] Broadie, M., et J. Detemple (1996). "American option valuation : new bounds, approximations, and a comparison of existing methods", *Review of Financial Studies* vol. 9 no. 4, p. 1211-1250.
- [16] Bunch, D. S., et H. Johnson (1992). "A simple and numerically efficient valuation method for American puts using a modified Geske-Johnson approach", *The Journal of Finance* vol. 47 no. 2, p. 809-816.
- [17] Burger, M., B. Klar, A. Müller et G. Schindlmayr (2004). "A spot market model for pricing derivatives in electricity markets", *Quantitative Finance* vol. 4 no. 1, p. 109-122.
- [18] Cartea, A., et M.G. Figueroa (2005). "Pricing in electricity markets : a mean reverting jump diffusion model with seasonality", *Applied Mathematical Finance* vol. 12 no. 4, p. 313-335.
- [19] Chen, Z., et P.A. Forsyth (2008). "A numerical scheme for the impulse control formulation for pricing variable annuities with a guaranteed minimum withdrawal benefit (GMWB).", *Numerische Mathematik* vol. 109 no. 4, p. 535-569.
- [20] Chen, Z., K. Vetzal et P.A. Forsyth (2008). "The effect of modelling parameters on the value of GMWB guarantees", *Insurance : Mathematics and Economics* vol. 43 no. 1, p. 165-173.
- [21] Chesney, M. et J. Lefoll (1996). "Predicting premature exercise of an American put on stocks : theory and empirical evidence", *The European Journal of Finance* vol. 2 no. 1, p. 21-39.
- [22] Clewlow, L. et C. Strickland (2000). *Energy derivatives : pricing and risk management* vol. 124. London : Lacima publications.
- [23] Cosma, A., S. Galluccio et O. Scaillet (2012). "Valuing American options using fast recursive projections" *Swiss Finance Institute Research Paper 12-26*.
- [24] Cox, J. C., S.A. Ross et M. Rubinstein (1979). "Option pricing : A simplified approach", *Journal of financial Economics* vol 7 no. 3, p. 229-263.
- [25] Crank, J., et P. Nicolson (1947). "A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type" *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* vol. 43 no. 1, p. 50-67. Cambridge University Press.
- [26] Dai, M. et Y.K. Kwok (2005). "Options with combined reset rights on strike and maturity", *Journal of Economic Dynamics and Control* vol. 29 no. 9, p. 1495-1515.
- [27] Dai, M., Y.K. Kwok et L. Wu (2004). "Optimal shouting policies of options with strike reset right", *Mathematical Finance* vol. 14 no. 3, p. 383-401.
- [28] De Jong, C. et R. Huisman (2002). "Option formulas for mean-reverting power prices with spikes", *Energy Global Research Paper*.
- [29] Deng, S. (2000). *Stochastic models of energy commodity prices and their applications : Mean-reversion with jumps and spikes*. University of California Energy Institute.

- [30] Duffie, D., J. Pan et K. Singleton (2000). "Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions", *Econometrica* vol. 68 no. 6, p. 1343-1376.
- [31] Forsyth, P. A. et K. Vetzal (2012). "A methodology for the valuation of guaranteed lifelong withdrawal benefits", *Working paper, University of Waterloo*.
- [32] Geske, R. et H.E. Johnson (1984). "The American put option valued analytically", *The Journal of Finance* vol. 39 no. 5, p. 1511-1524.
- [33] Hambly, B., S. Howison et T. Kluge (2009). "Modelling spikes and pricing swing options in electricity markets", *Quantitative Finance* vol. 9 no. 8, p. 937-949.
- [34] Hamilton, J. D. et R. Susmel (1994). "Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime", *Journal of Econometrics* vol. 64 no. 1, p. 307-333.
- [35] Hardy, M. R. (2001). "A regime-switching model of long-term stock returns", *North American Actuarial Journal* vol. 5 no. 2, p. 41-53.
- [36] Ingersoll, J. (1998). "Approximating American options and other financial contracts using barrier derivatives", *Journal of Computational Finance* vol. 2 no. 1, p. 85-112.
- [37] Jaillet, P., E.I. Ronn et S. Tompaidis (2004). "Valuation of commodity-based swing options", *Management Science* vol. 50 no. 7, p. 909-921.
- [38] Johnson, H. (1983). "An analytic approximation for the American put price", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* vol. 18 no. 1, p. 141-148.
- [39] Kamrad, B. et P. Ritchken (1991). "Multinomial approximating models for options with k state variables", *Management Science* vol. 37 no. 12, p. 1640-1652.
- [40] Kiesel, R., J. Gernhard et S.O. Stoll (2010). "Valuation of commodity-based swing options", *Journal of Energy Markets* vol. 3 no. 3, p. 91-112.
- [41] Longstaff, F. A. et E.S. Schwartz (2001). "Valuing American options by simulation : A simple least-squares approach", *Review of Financial studies* vol. 14 no. 1, p. 113-147.
- [42] Lucia, J. J. et E.S. Schwartz (2002). "Electricity prices and power derivatives : Evidence from the nordic power exchange", *Review of Derivatives Research* vol. 5 no. 1, p. 5-50.
- [43] Merton, R. C., M.J. Brennan et E.S. Schwartz (1977). "The valuation of American put options", *The Journal of Finance* vol. 32 no. 2, p. 449-462.
- [44] Milevsky, M. A. et T.S. Salisbury (2006). "Financial valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits", *Insurance : Mathematics and Economics* vol. 38 no. 1, p. 21-38.
- [45] Omberg, E. (1987). "The valuation of American put options with exponential exercise policies", *Advances in Futures and Options Research* vol. 2, p. 117-142.
- [46] Paskov, S. H. (1994). *Computing high dimensional integrals with applications to finance*. Columbia University, Department of Computer Sciences.
- [47] Peng, J., K.S. Leung et Y.K. Kwok (2012). "Pricing guaranteed minimum withdrawal benefits under stochastic interest rates", *Quantitative Finance* vol. 12 no. 6, p. 933-941.
- [48] Schwartz, E. S. (1977). "The valuation of warrants : implementing a new approach", *Journal of Financial Economics* vol. 4 no. 1, p. 79-93.
- [49] Tanskanen, A. J. et J. Lukkarinen (2003). "Fair valuation of path-dependent participating life insurance contracts", *Insurance : Mathematics and Economics* vol. 33 no. 3, p. 595-609.

- [50] Windcliff, H., P.A. Forsyth et K.R. Vetzal (2001a). "Shout options : a framework for pricing contracts which can be modified by the investor", *Journal of Computational and Applied Mathematics* vol. 134 no. 1, p. 213-241.
- [51] Windcliff, H., P.A. Forsyth et K.R. Vetzal (2001b). "Valuation of segregated funds : shout options with maturity extensions", *Insurance : Mathematics and Economics* vol. 29 no. 1, p. 1-21.
- [52] Wynn, P. (1966). "On the convergence and stability of the epsilon algorithm", *SIAM Journal on Numerical Analysis* vol. 3 no. 1, p. 91–122.
- [53] — The fast and the furious, special report on financial innovation, *The Economist* 25th February 2012.

