

A078/W9, 1046

HEC Montréal

Affiliée à l'Université de Montréal

**TROIS ESSAIS SUR L'ALLOCATION D'ACTIF STRATEGIQUE et
TACTIQUE**

par

Tammam Mouakhar

Département de Méthodes Quantitatives de Gestion

**Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)
en Administration**

Mars, 2007

Copyright, Tammam Mouakhar, 2007

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée:

**TROIS ESSAIS SUR L'ALLOCATION D'ACTIF STRATEGIQUE et
TACTIQUE**

présentée par :

Tammam Mouakhar

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Chantal Labbé

Président-rapporteur

Michèle Breton

Directrice de recherche

Jan Ericsson

Membre du jury

Javier de Frutos

Examineur externe

Michel Normandin

Représentant du doyen de la FES

Résumé

Notre travail se concentre sur deux aspects de l'allocation d'actif : l'allocation stratégique et l'allocation tactique. Sur le premier aspect, nous discutons l'allocation stratégique d'une caisse de retraite. Sur le second aspect, nous proposons une allocation tactique par l'anticipation (Timing) de l'effet taille.

Dans le premier essai, nous présentons le modèle pour l'allocation d'actif basé sur la programmation dynamique stochastique (PDS) et suggérons un modèle de génération des scénarios basé sur la simulation de Monte-Carlo. L'analyse de la sensibilité du portefeuille montre que, plus l'aversion au risque de déficit de l'investisseur, les flux monétaires de la caisse de retraite et le ratio de surplus sont élevés, et plus le portefeuille est conservateur. Par ailleurs, nous observons de meilleures performances du modèle PDS comparativement aux approches traditionnelles.

Dans le second essai, nous suggérons d'utiliser l'approche *minimax* afin de trouver la solution robuste du modèle PDS lorsque la distribution des probabilités des scénarios est incertaine. Nous montrons que l'approche *worst-case* est un cas particulier de l'approche *minimax*. L'illustration numérique confirme que moins l'information est révélée, et plus le portefeuille est conservateur.

Le troisième essai concerne l'allocation tactique d'actif où le gestionnaire de portefeuille altère son exposition à l'effet Taille des firmes au moyen d'un portefeuille non-capitalisé superposé à un indice. Nous proposons de prédire la position de ce portefeuille en recourant à des variables macro-économiques selon quatre approches (le Partitionnement Récursif, le Réseau de Neurones, le modèle Logit et la Machine à Vecteurs de Support). Les tests empiriques montrent que ces méthodes dominent généralement la stratégie achat-détention d'un portefeuille long actions de petites firmes et court actions de grandes firmes à long terme. De plus, les performances du Consensus (la décision majoritaire des quatre approches) sont meilleures. Les tests d'anticipation du marché confirment la capacité de prédiction de ces approches.

Mots clés: Allocation Stratégique, Appariement Actif/Passif, Programmation Dynamique Stochastique, Approche *Minimax*, Solution Robuste, Allocation Tactique, Effet Taille, Intelligence Artificielle.

Abstract

In this thesis, we focus on two aspects of the asset allocation: The Strategic Asset Allocation, and the Tactical Asset Allocation. At first, we discuss the Strategic Asset Allocation for a pension fund. Secondly, we propose to time the Size effect.

In the first essay, we present an asset allocation model based on stochastic dynamic programming (*SDP*). We generate a scenario tree and apply it to a pension fund portfolio. We specifically take into account the Asset/Liability ratio, market constraints (costs of transactions and lack of liquidity of non-traditional asset classes) and Net Cash Flows. The higher the Net Cash Flows, the lower the initial deficit, and the higher the deficit penalty function, the lesser the plan sponsor invests in risky assets. Furthermore, the *SDP* investment outperforms mean-variance, buy-and-hold and constant-mix strategies.

In the second essay, we suggest to use the *minimax* approach in order to find the *SDP* robust solution when the scenario probability distribution is partial. We show that the worst-case method is a specific case of the *minimax* approach. Moreover, we show that the less information is revealed, the more conservative is the portfolio.

The last essay examines Timing strategies to identify when small stocks dominate large stocks. We use four artificial intelligence approaches (Recursive Partitioning, Neural Networks, Logistic Model and Support Vectors Machine) to decide when to be long or short with respect to the U.S. Fama-French Small minus Big portfolio (*SMB*). We test their predictive power and resulting investment performances over the out-sample period. On average, most strategies outperform the passive *SMB* strategy. Moreover, a strategy based on the majority improves the performances. Market Timing tests confirm the prediction capacity of the models.

Keywords: Strategic Asset Allocation, Asset/Liability Management, Dynamic Stochastic Programming, *Minimax* Approach, Robust Solution, Tactical Asset Allocation, Size Timing, Artificial Intelligence.

Table des matières

RÉSUMÉ.....	I
ABSTRACT	II
TABLE DES MATIÈRES	III
LISTE DES TABLEAUX	V
LISTE DES FIGURES.....	VII
LISTE DES SYMBOLES	VIII
DÉDICACE.....	X
REMERCIEMENTS.....	XI
1 INTRODUCTION	1
2 PRÉSENTATION DU MODÈLE	4
2.1 INTRODUCTION	4
2.2 ÉVOLUTION DES MODÈLES D'ALLOCATION D'ACTIF	6
2.3 MODÈLE PDS	8
2.3.1 <i>Arbre des scénarios</i>	9
2.3.2 <i>Liste des variables</i>	10
2.3.3 <i>Fonction objectif</i>	11
2.3.4 <i>Contraintes</i>	11
3 GÉNÉRATION DES SCÉNARIOS, RÉOLUTION ET ILLUSTRATION	
NUMÉRIQUE.....	15
3.1 INTRODUCTION	15
3.2 GÉNÉRATION DES SCÉNARIOS	15
3.3 MÉTHODOLOGIE DE RÉOLUTION	18
3.4 ILLUSTRATION NUMÉRIQUE	19
3.4.1 <i>Modèle de prévision</i>	20
3.4.2 <i>Analyse et comparaison</i>	23
3.5 CONCLUSION	41
4 APPROCHE MINIMAX POUR UNE SOLUTION ROBUSTE.....	43
4.1 INTRODUCTION	43

4.2	APPROCHE ROBUSTE POUR L'ALLOCATION D'ACTIF	44
4.3	APPROCHE <i>MINIMAX</i> POUR LA FORMULATION ROBUSTE DE <i>PDS</i>	48
4.4	APPLICATION NUMÉRIQUE	55
4.5	CONCLUSION	64
5	ÉTUDE DE L'ANTICIPATION DE L'EFFET TAILLE PAR DIFFÉRENTES	
	MÉTHODES DE L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE	65
5.1	INTRODUCTION	65
5.2	VARIABLES PRÉDICTIVES	66
5.3	MÉTHODES DE PRÉVISION DE LA PRIME	70
5.3.1	<i>Partitionnement Récursif</i>	70
5.3.2	<i>Réseau de Neurones</i>	71
5.3.3	<i>Modèle Logit</i>	73
5.3.4	<i>Machine à Vecteurs de Support</i>	75
5.3.5	<i>Avantages et inconvénients des approches</i>	76
5.4	PERFORMANCES DES QUATRE APPROCHES	77
5.4.1	<i>Approche statique</i>	77
5.4.2	<i>Approche dynamique</i>	79
5.5	ANALYSE DES VARIABLES DES MODÈLES	80
5.6	TESTS D'ANTICIPATION DU MARCHÉ	84
5.6.1	<i>Test non paramétrique de Henriksson-Merton</i>	84
5.6.2	<i>Test paramétrique de Henriksson-Merton</i>	85
5.7	ANALYSE DE SENSIBILITÉ	87
5.7.1	<i>Sous-périodes</i>	88
5.7.2	<i>Année 2000</i>	91
5.7.3	<i>Coûts de transaction</i>	93
5.7.4	<i>Approche par échantillonnage</i>	95
5.8	APPLICATION EMPIRIQUE	95
5.9	CONCLUSION	97
	BIBLIOGRAPHIE	98

Liste des tableaux

Tableau 3-2: Pondération optimale ex-ante du portefeuille pour différentes fonctions de pénalités φ	26
Tableau 3-3: Pondération optimale ex-ante du portefeuille pour la fonction de pénalité φ_3 , et différents vecteurs FMN	29
Tableau 3-4: Pondération optimale ex-ante du portefeuille pour la fonction de pénalité φ_5 et différents vecteurs FMN	30
Tableau 3-5: Pondération optimale ex-ante du portefeuille pour la fonction de pénalité φ_7 et différents vecteurs FMN	31
Tableau 3-6: Pondération optimale ex-ante du portefeuille pour différents passifs initiaux L^{ini}	34
Tableau 3-7: Comparaison de la richesse finale du PDS au Moyenne-Variance	37
Tableau 3-8: Comparaison de la richesse finale des méthodes traditionnelles au PDS	40
Tableau 4-1: Portefeuille optimal pour différentes probabilités cumulative du dernier quartile des scénarios	60
Tableau 4-2: Portefeuille optimal pour différentes probabilités cumulative du premier quartile des scénarios	61
Tableau 4-3: Portefeuille optimal supposant différentes probabilités cumulative sur le dernier décile, le troisième et quatrième quartile	62
Tableau 4-4: Portefeuille optimal supposant différentes probabilités cumulative sur le premier décile, le premier quartile	63
Tableau 5-1: Variables macro-économiques prédictives	69
Tableau 5-2: Comparaison des méthodes sous l'approche statique	79
Tableau 5-3: Comparaison des méthodes sous l'approche dynamique	80
Tableau 5-4: Variables de la régression Logit	83
Tableau 5-5: Test non paramétrique de Henriksson-Merton	84
Tableau 5-6: Test paramétrique de Henriksson-Merton sous l'approche statique	86
Tableau 5-7: Test paramétrique de Henriksson-Merton sous l'approche dynamique	86
Tableau 5-8: Test paramétrique de Henriksson-Merton sous l'approche statique sans les valeurs extrêmes	87

Tableau 5-9: Test paramétrique de Henriksson-Merton sous l'approche dynamique sans les valeurs extrêmes	87
Tableau 5-10: Comparaison statique des sous-périodes	90
Tableau 5-11: Comparaison dynamique des sous-périodes	91
Tableau 5-12: Comparaison statique des méthodes sans l'année 2000	92
Tableau 5-13: Comparaison dynamique des méthodes sans l'année 2000	92
Tableau 5-14: Comparaison statique des méthodes avec les rendements plafonnés	93
Tableau 5-15: Comparaison dynamique des méthodes avec les rendements plafonnés	93
Tableau 5-16: Coûts de transactions	94
Tableau 5-17: Moyenne des performances par échantillonnage	95
Tableau 5-18: Comparaison statique des méthodes avec Russell 2000-Russell 1000	96
Tableau 5-19: Comparaison dynamique des méthodes avec Russell 2000-Russell 1000	96

Liste des figures

Figure 2-1: Arbre des scénarios	9
Figure 2-2: Fonction de pénalité	13
Figure 3-1: Arbre des scénarios	17
Figure 3-2: Méthodologie de résolution	18
Figure 3-3: Détermination de la valeur du portefeuille à $t+1$	19
Tableau 3-1: Estimation des rendements	23
Figure 3-4: Différents cas de fonction de pénalité ϕ	24
Figure 3-5: Composition du portefeuille optimal en 1991 pour différentes fonctions de pénalité ϕ	25
Figure 3-6: Vecteurs Flux Monétaires Nets FMN	27
Figure 3-7: Composition du portefeuille optimal pour différents Flux Monétaire Nets	28
Figure 3-8: Composition du portefeuille optimal en 1987 pour différents déficits initial actif/passif	32
Figure 3-9: Frais de transaction	37
Figure 3-10: Comparaison des frais de transaction cumulatif	38
Figure 4-1: Différents modèles selon la distribution de probabilités	52
Figure 4-2: Composition du portefeuille optimal en 2000 pour différentes contrainte sur la distribution ..	57
Figure 4-3: Composition du portefeuille optimal en 2000 pour différentes contrainte sur la distribution ...	58
Figure 4-4: Composition du portefeuille optimal en 1994 pour différentes contrainte sur la distribution ...	59
Figure 5-1: Architecture d'un Réseau de Neurones	73
Figure 5-2: Fonction de transfert linéaire $a=f(n)$	73
Figure 5-3: Fonction de transfert tan-sigmoïde $a=f(n)$	73
Figure 5-4: Exemple de MVS à 2 dimensions	76
Figure 5-5: Arbre du Partitionnement Récursif	81

Liste des symboles

T : Horizon,

w : Scénario, $w \in \Omega$,

N : Nombre d'actifs.

Variables de décision

X_{it}^w : Montant de l'actif détenu après rééquilibrage à la date t de la catégorie d'actif i pour le scénario w , $i=1,...,N$; $t=0,...,T$; $w \in \Omega$,

A_{it}^w : Montant acheté de l'actif i à la date t pour le scénario w , $i=1,...,N$; $t=0,...,T-1$; $w \in \Omega$,

V_{it}^w : Montant vendu de l'actif i à la date t pour le scénario w , $i=1,...,N$; $t=0,...,T-1$; $w \in \Omega$,

Z_t^w : Montant de déficit de l'actif par rapport au passif avant rééquilibrage à la date t pour le scénario w , $t=0,...,T$; $w \in \Omega$.

Paramètres déterministes

p^w : Probabilité de réalisation du scénario w , $w \in \Omega$,

x_{i0} : Montant initial détenu dans le portefeuille pour l'actif i , $i=1,...,N$,

b_i : Coût de transaction d'achat de l'actif i , $i=1,...,N$,

s_i : Coût de transaction de vente de l'actif i , $i=1,...,N$,

m_t : Cotisations reçues à la date t , $t=0,...,T-1$,

q_t : Prestations versées à la date t , $t=0,...,T-1$,

$\bar{v}_i$: Montant maximum de vente de l'actif i , $i=1, \dots, N$,

l_0 : Montant initial du passif.

μ_i : Rendement espéré de l'actif i ,

σ_i : Volatilité de l'actif i ,

ρ_{ij} : Corrélacion entre les actifs i et j .

Paramètres incertains

S_t^w : Prix de l'actif i à la date t du scénario w ,

W_t^w : Processus de Wiener de l'actif i à la date t du scénario w , d'espérance nulle et de variance 1,

r_t^w : Taux de rendement de l'actif i à la date t pour le scénario w , $i=1, \dots, n$;
 $t=1, \dots, T$; $w \in \Omega$,

l_t^w : Montant du passif à la date t pour le scénario w , $t=1, \dots, T$; $w \in \Omega$.

Dédicace

À mes grands-parents

À mes parents

À mes sœurs

À ma Sarra.

Remerciements

Et oui, c'est la fin d'une expérience ou d'une aventure. La thèse est, au-delà du travail accompli, un exercice sur soi-même. Il est vrai que la thèse reste un travail «individuel», mais plusieurs personnes ont collaboré de près ou de loin à cette thèse et que j'aimerais remercier.

Je tiens tout d'abord à remercier Dr Michèle Breton qui fut ma directrice de thèse, mais qui fit beaucoup plus que son rôle de directeur ne lui exigeait, toujours disponible, me soutenant dans les moments difficiles et me corrigeant, ô combien de fois, ma thèse pour la modéliser et la polir sous sa forme finale. Elle a énormément contribué à l'aboutissement de ce long processus. Merci Michèle!

Mes remerciement vont aussi à Dr Jean-François L'Her pour nos interminables discussions, ses commentaires forts judicieux et pleins d'expériences tout au long de mon parcours, et qui m'ont beaucoup aidé à orienter et améliorer ce travail. Il m'a soutenu, encouragé et m'a laissé la flexibilité la plus totale pour finaliser ma thèse.

Je remercie Dr Javier de Frutos qui s'est déplacé de si loin afin d'être présent dans mon jury et pour ses commentaires judicieuses, ainsi que Dr Jan Ericsson pour avoir été présent au cours de la proposition de thèse et la soutenance, et pour ses suggestions. Mes remerciements vont aussi à Dr Chantal Labbé qui s'est chargée de la difficile tâche d'organiser la soutenance. Je tiens à remercier Dr Pierre Hansen qui fut présent lors de la proposition de thèse et qui me fit des commentaires forts intéressants.

Je remercie Lise Cloutier Delage et Renée Bouchard, pour leur gentillesse et pour m'avoir aidé à trouver mon chemin dans les méandres administratifs.

Je tiens enfin à remercier la Tunisie et l'IFM2 pour leurs aides financières.

1 Introduction

Le processus de gestion de portefeuille se décompose en quatre grandes étapes: la détermination de la politique d'investissement, le développement de la stratégie d'investissement, l'allocation du portefeuille, et la mise à jour du portefeuille. La première étape consiste à déterminer les objectifs (rendement et risque) de l'investisseur, ainsi que ses contraintes (horizon d'investissement, liquidité, taxation et aspect légal). Le développement de la stratégie d'investissement doit satisfaire cette politique en se basant sur l'analyse des conditions économiques et financières, suivi de l'allocation du portefeuille correspondant à la construction du portefeuille. Enfin, le portefeuille doit être mis à jour selon les conditions du marché.

L'étape d'allocation d'actif prend une place prépondérante dans le processus de gestion de portefeuille. L'allocation stratégique d'actif correspond à la politique d'investissement à long terme. Elle dépend à la fois des caractéristiques de l'investisseur, des prévisions économiques et du modèle utilisé pour optimiser. Ce dernier doit donc prendre en considération le mieux possible les exigences de l'investisseur et la réalité des marchés financiers (rééquilibrage du portefeuille, coûts de transactions, problème de liquidité,...).

Un autre point fondamental dans le processus concerne la méthode choisie pour gérer le portefeuille. La gestion du portefeuille peut varier d'une gestion passive à une gestion plus active où le gestionnaire de portefeuille essaye d'anticiper le marché et de créer de la valeur ajoutée au portefeuille. Ainsi, l'investisseur peut dévier de l'allocation stratégique à court terme afin de prendre avantage des opportunités à court terme.

L'allocation tactique d'actif est le résultat d'une gestion du portefeuille déviant de l'allocation stratégique. Le gestionnaire peut modifier les poids de l'indice selon ses prévisions. À cette fin, il peut superposer à l'indice un portefeuille non-capitalisé en prenant une position longue dans l'actif à surpondérer et une position courte dans l'actif à sous-pondérer.

Notre travail se concentre sur ces deux aspects de l'allocation d'actif: l'allocation stratégique et l'allocation tactique. Sur le premier aspect, nous proposons le cas d'une caisse de retraite à prestations déterminées (prise en charge par la caisse de retraite du risque d'investissement, où les employés sont assurés de recevoir des prestations déterminées selon leurs nombre d'années de service et leurs salaires versés). L'allocation stratégique de cet investisseur institutionnel se caractérise par une gestion de l'actif relativement passive. Sur le second aspect, nous proposons une allocation tactique par l'anticipation (Timing) de l'effet taille.

Dans le chapitre 2, nous présentons le modèle pour l'allocation d'actif basé sur la programmation dynamique stochastique (*PDS*). Le modèle optimise la richesse finale tout en pénalisant les risques de déficit de l'actif relativement au passif.

Dans le chapitre 3, nous suggérons un modèle de génération des scénarios utilisés dans le modèle dynamique stochastique. À cette fin nous proposons une approche basée sur la simulation de Monte-Carlo. Nous illustrons numériquement l'allocation d'actif du modèle *PDS* et comparons les performances avec des approches plus classiques. Par ailleurs, nous analysons la sensibilité du portefeuille optimal selon l'aversion au risque de déficit de l'investisseur, les frictions du marché, les flux monétaires de la caisse de retraite (les cotisations et les prestations), le ratio de surplus ou de déficit initial.

Le chapitre 4 considère le cas où la connaissance de la distribution de probabilités des scénarios est partielle. Nous suggérons d'utiliser l'approche *minimax* afin de trouver la solution robuste conditionnellement à l'information partielle sur la distribution. En outre, nous montrons que l'approche *worst-case* (le pire cas) est un cas particulier de l'approche *minimax*. Nous illustrons numériquement la résolution du modèle *PDS* par l'approche *minimax* conditionnellement à l'information disponible sur la distribution.

Le chapitre 5 concerne l'allocation tactique d'actif où le gestionnaire de portefeuille altère son exposition à l'effet taille par une surpondération (ou une sous-pondération) des actions de grandes firmes relativement aux petites firmes. Le changement de poids de l'indice est appliqué au moyen d'un portefeuille non-capitalisé superposé à l'indice. L'investisseur surpondère (sous-pondère) dans les actions de firmes de grande taille et sous-pondère (surpondère) dans les actions de firmes de petite taille afin que le portefeuille reste non-capitalisé. Nous proposons de prédire la position de ce portefeuille-ci en recourant à des variables macro-économiques. À cette fin, nous appliquons quatre méthodes que sont le Partitionnement Récursif, le Réseau de Neurones, le modèle Logit et la Machine à Vecteurs de Support. Nous testons empiriquement les résultats obtenus par ces quatre approches de 1990 à 2004.

2 Présentation du modèle

2.1 Introduction

Étant donné le contexte économique actuel, les investissements traditionnels paraissent de moins en moins intéressants: d'une part, les taux obligataires sont à des niveaux historiquement très bas, d'autre part, la prime de risque prospective de rendement des actions par rapport aux obligations est très faible. Cette mauvaise conjoncture a un impact sur l'actif des caisses de retraite qui subissent de plein fouet la faiblesse des rendements des actifs traditionnels, mais aussi sur leur passif dont la valeur marchande s'est considérablement accrue suite à la baisse des taux obligataires. Les caisses de retraite se trouvent donc confrontées à un risque de déficit de leur actif par rapport à leur passif. Par ailleurs, l'augmentation de la longévité de la population, l'entrée de plus en plus tardive des jeunes dans le monde professionnel et les mécanismes d'incitation au départ à la retraite anticipée dans les pays occidentaux, ne font qu'accentuer le déficit actif/passif. En effet, d'une part, la durée de cotisation des travailleurs se rétrécit, et d'autre part, celle de prestation des retraités s'allonge. Toutes ces raisons conduisent les comités des caisses de retraite à revoir leurs méthodes actuelles d'allocation stratégique de l'actif, de façon à gérer l'actif en tenant compte du passif.

De plus, afin de remédier à la contre-performance des actifs traditionnels, les caisses de retraite se tournent de plus en plus vers les investissements alternatifs, tels que l'immobilier, les placements privés, les fonds de couverture ou les produits de base, afin d'améliorer le rendement de leurs portefeuilles. Contrairement aux actifs traditionnels, les investissements alternatifs se négocient sur des marchés souvent inefficaces, peu liquides et nécessitant plus de capital humain, exigeant donc des frais plus élevés.

Afin d'incorporer ces caractéristiques (la gestion actif/passif et la liquidité des investissements alternatifs), nous présentons un modèle d'allocation multi-périodes basé sur la programmation dynamique stochastique. Cette approche permet de prendre en compte l'effet des décisions actuelles sur les situations futures dans un contexte d'incertitude. Par ailleurs, ce modèle considère les frictions du marché telles que les coûts de transactions et le degré de liquidité, les flux monétaires et le déficit actif/passif.

D'autres modèles inspirés de la programmation dynamique stochastique ont déjà été proposés pour différentes catégories d'institutions prenant en compte le ratio actif/passif. Néanmoins, les méthodes de génération de scénarios présentées dans ces articles sont souvent peu documentées et complexes à mettre en œuvre. Nous proposons une méthode explicite pour construire l'arbre des scénarios aux fins de la résolution du modèle. De plus, nous considérons le problème de liquidité. Nous analysons ex-ante la sensibilité de la pondération du modèle selon le niveau d'aversion au risque de déficit, les flux de cotisation et de prestation et le déficit initial, puis comparons les performances du modèle à des méthodes d'allocation plus traditionnelles (Moyenne-Variance, «Achat-Détention» et «Constant-Mix»).

L'analyse de sensibilité montre que lorsque le flux financier de cotisation par rapport aux prestations est faible et/ou le déficit initial est élevé, le modèle suggère de pondérer davantage les actifs risqués afin d'augmenter le rendement espéré et de subvenir aux futures dépenses.

Ex post, nous constatons que les performances obtenues en utilisant ce modèle sont meilleures que celles des approches alternatives testées, car celui-ci prend en considération l'ensemble du contexte de l'investissement pour déterminer le portefeuille optimal. Par ailleurs, contrairement au modèle Moyenne-Variance, le modèle *PDS* respecte la contrainte de liquidité et affiche des frais de transaction plus faibles.

Le chapitre 2 s'articule en deux parties. Dans la première partie, nous discutons de l'évolution des modèles d'allocation d'actif. Par la suite, nous présentons le modèle dans la seconde partie.

2.2 Évolution des modèles d'allocation d'actif

L'allocation d'actif est un thème récurrent dans la littérature financière. Un des premiers modèles, proposé par Markowitz (1952), se base sur les deux premiers moments de la distribution des rendements (la moyenne et la variance) pour déterminer le portefeuille optimal d'un investisseur dans un cadre statique. L'utilisation de la variance comme seule mesure de risque est valide si les rendements ont une distribution normale (tous les moments sont décrits par la moyenne et la variance de la distribution), ou si la fonction d'utilité de l'investisseur est quadratique (les dérivées supérieures au deuxième ordre sont nulles). Cependant, ces hypothèses ne sont pas toujours vérifiées. En effet, une fonction d'utilité quadratique stipule une aversion au risque absolue croissante avec l'augmentation de la richesse. Or, cette condition contredit le comportement observé chez plusieurs investisseurs, qui sont au contraire plus enclins à prendre des positions risquées à mesure que leur richesse augmente. Par ailleurs, la distribution des rendements observés en pratique est rarement normale: elle est souvent asymétrique à gauche et a un coefficient d'aplatissement élevé (Miller et Scholes (1972), King (1973)).

D'autres modèles statiques ultérieurs proposent une mesure différente du risque. Ainsi, Konno, Shirakawa et Yamazaki (1993) et Konno et Yamamoto (2005) développent un modèle de Moyenne-Variance-asymétrie: il s'agit de maximiser le coefficient d'asymétrie du portefeuille pour un rendement et une variance donnés. Markowitz (1991) et Markowitz *et al.* (1993) proposent de mesurer le risque à l'aide de la semi-variance à gauche. Cette approche permet de pallier le fait que la variance ne différencie pas entre les écarts à la moyenne positifs (gains relatifs) et négatifs (pertes relatives). Il s'agit donc de minimiser la contribution des pertes à la variance sans contraindre la contribution des gains, et donc de mieux s'aligner à la perception du risque qu'à l'investisseur. Dans le même esprit, Harlow (1991) suggère un modèle plus général consistant à minimiser un des semi-moments de la distribution par rapport à un seuil donné, correspondant au risque baissier. La semi-variance serait donc un cas particulier où le seuil est égal à la moyenne et le moment est du second ordre. Toutefois, ces modèles statiques présentent l'inconvénient de ne pas tenir compte de l'impact des décisions courantes sur les

situations futures et sont insatisfaisants lorsqu'on désire tenir compte de l'adéquation actif/passif, des frais de transactions et de la liquidité (Mulvey *et al.* (2003)).

L'approche dynamique stochastique permet aux modèles d'allocation stratégique d'actifs d'évoluer de l'approche statique à l'approche multi-périodes. Par ailleurs, elle permet de tenir compte de l'incertitude et de la révélation progressive de l'information, ajustant ainsi les décisions aux données disponibles (Kall et Wallace (1994)). Ziemba (2003) montre que les résultats obtenus à partir d'une modélisation dynamique sont meilleurs que ceux obtenus à partir de l'approche Moyenne-Variance.

Déjà en 1971, Eppen et Fama proposent un modèle d'allocation dynamique entre trois actifs dans le cas d'une trésorerie d'une firme, tout en pénalisant les coûts de détention d'espèces. De même, Bradley et Crane (1973) appliquent un modèle stochastique pour la gestion d'un portefeuille d'obligations en utilisant un arbre de décision. Dans le domaine bancaire, Brodt (1984) propose un modèle dynamique stochastique minimisant la différence entre l'actif et le passif. Dans le même esprit, Kusy et Ziemba (1986) proposent un modèle de programmation linéaire prenant en considération le passif et les réserves d'une institution bancaire; le gestionnaire de la banque corrige sa position en considérant l'incertitude vis-à-vis des dépôts et des retraits. Le modèle a pour objectif la minimisation des coûts futurs encourus par les actions correctives. Jusqu'à la fin des années 80, ces modèles étaient présentés dans le cas de problèmes de petite taille. En effet, l'approche dynamique stochastique souffre de la «malédiction de la dimension»: la dimension des modèles explose avec le nombre de scénarios incertains envisagés et la fréquence des décisions de rééquilibrage. Étant donné les performances encore limitées de l'outil informatique à cette époque, cette approche est restée dans les bacs du milieu académique et peu appliquée dans le monde professionnel. Mais depuis les années 90, l'approche dynamique stochastique connaît un regain d'intérêt non seulement chez les chercheurs, mais aussi chez les praticiens, du fait de la performance toujours croissante de l'outil informatique. Des modèles plus élaborés reflétant mieux la réalité sont apparus et ont été commercialisés.

Ainsi, le modèle «Russell-Yasuda Kasai» fut développé pour la firme «Yasuda Fire and Marine Insurance and Co.» (Carino *et al.* (1994)). Les auteurs proposent un

modèle linéaire dynamique suggérant de mesurer le risque de déficit budgétaire induit par des gains inférieurs aux paiements du passif. Leur modèle a donc pour objectif de maximiser la richesse finale tout en pénalisant les découverts financiers. La fonction de pénalité est représentée par une fonction convexe linéaire par morceaux. Carino, Myers et Ziemba (1998) rapportent que ce modèle de gestion de l'actif et du passif a permis d'économiser 79 millions de dollars, relativement à une stratégie «Constant-Mix». De même, Zenios *et al.* (1998) proposent un modèle dynamique stochastique dans le cas d'un portefeuille de titres à revenu fixe et montrent que ses performances sont meilleures que celles d'un modèle Moyenne-Variance.

Dans le cas des caisses de retraite, Mulvey et Vladimirov (1992) suggèrent un modèle de gestion actif/passif multipériode non-linéaire maximisant l'espérance de l'utilité du surplus à la fin de l'horizon, où la fonction d'utilité est isoélastique plutôt que quadratique. Ils montrent que les résultats obtenus sont meilleurs que ceux obtenus par une approche myope. Mulvey (1994) reprend le modèle de Mulvey et Vladimirov (1992) et l'implémente pour la firme «Pacific Financial Asset Management». Plutôt que de minimiser le risque de déficit actif/passif, Holmer (1994) suggère de minimiser les cotisations reçues par la firme Fannie Mae. Dans le même esprit, Dert (1995) propose de minimiser les coûts espérés d'une caisse de retraite tout en considérant sa solvabilité et la stabilité des contributions. Consigli et Dempster (1998) proposent un modèle basé sur la programmation dynamique pour une caisse de retraite ayant pour objectif de maximiser la richesse finale. Gondzio et Kouwenberg (2004) développent un modèle linéaire dynamique stochastique en deux étapes pour une caisse de retraite hollandaise. Le modèle minimise la somme des coûts de la politique (première étape) et les actions correctives espérées (seconde étape). Geyer *et al.* (2003) développent un modèle linéaire de gestion actif/passif pour une caisse de retraite autrichienne afin de maximiser le rendement tout en considérant le risque de déficit actif/passif.

2.3 Modèle PDS

Le modèle que nous utilisons est un programme linéaire dynamique stochastique. L'objectif est la maximisation de la richesse finale, tout en considérant le risque de déficit actif/passif d'une caisse de retraite sous forme de pénalités. L'approche est multi-

périodes et considère les coûts de transaction et de liquidité. Nous supposons les cotisations et les prestations déterministes. Cette hypothèse se justifie par le fait que les facteurs influençant ces flux monétaires (la croissance démographique, l'espérance de vie,...) sont prévisibles sur des court et moyen horizons dans le cas d'une caisse de retraite d'une certaine taille.

2.3.1 Arbre des scénarios

Le modèle doit prendre en considération l'incertitude des variables incertaines correspondant aux rendements futurs des classes d'actifs. Cette incertitude est représentée par un ensemble de scénarios Ω . Chaque scénario w correspond à une suite de vecteurs de rendements sur un horizon T . L'ensemble des scénarios concurrents représente donc les différents rendements futurs possibles des actifs. Ainsi, c'est par construction que l'ensemble des scénarios forme un arbre des scénarios (figure 2-1). Cette construction se justifie par la révélation progressive de la réalisation des variables incertaines. En effet, à l'initiation de l'arbre, les rendements sur la première période ne sont pas encore observables. Or, une fois la première période écoulée, ces rendements deviennent observables. Conditionnellement à cette nouvelle information disponible, les rendements sur la prochaine période sont estimés, et ainsi de suite. La construction de l'arbre des scénarios permet de modéliser la révélation progressive de l'information.

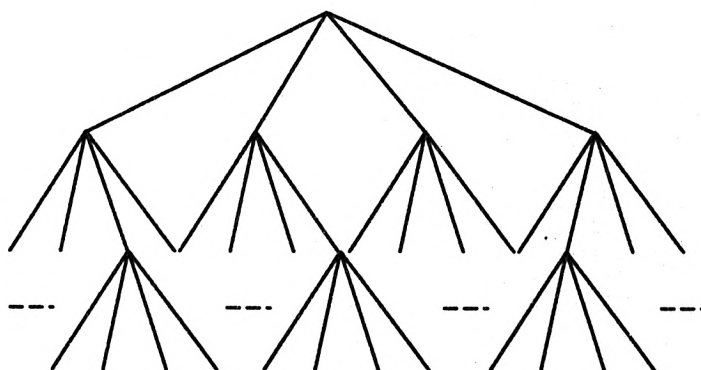


Figure 2-1: Arbre des scénarios

2.3.2 Liste des variables

Afin d'optimiser l'allocation d'actif du portefeuille, l'investisseur décide du rééquilibrage de son portefeuille périodiquement, c'est-à-dire du montant alloué dans chaque catégorie d'actif, en prenant en considération les paramètres déterministes et incertains du modèle.

Variables de décision

X_{it}^w : Montant de l'actif détenu après rééquilibrage à la date t de la catégorie d'actif i pour le scénario w , $i=1,...,N$; $t=0,...,T-1$; $w \in \Omega$,

A_{it}^w : Montant acheté de l'actif i à la date t pour le scénario w , $i=1,...,N$; $t=0,...,T-1$; $w \in \Omega$,

V_{it}^w : Montant vendu de l'actif i à la date t pour le scénario w , $i=1,...,N$; $t=0,...,T-1$; $w \in \Omega$,

Z_t^w : Montant de déficit de l'actif par rapport au passif avant rééquilibrage à la date t pour le scénario w , $t=0,...,T$; $w \in \Omega$.

Paramètres déterministes

p^w : Probabilité de réalisation du scénario w , $w \in \Omega$,

x_{i0} : Montant initial détenu dans le portefeuille pour l'actif i , $i=1,...,N$,

b_i : Coût de transaction d'achat de l'actif i , $i=1,...,N$,

s_i : Coût de transaction de vente de l'actif i , $i=1,...,N$,

m_t : Cotisations reçues à la date t , $t=0,...,T-1$,

q_t : Prestations versées à la date t , $t=0,...,T-1$,

$\bar{v}_i$: Montant maximum de vente de l'actif i , $i=1,...,N$,

l_0 : Montant initial du passif.

Paramètres incertains

r_{it}^w : Taux de rendement de l'actif i à la date t pour le scénario w , $i=1,...,N$;
 $t=1,...,T$; $w \in \Omega$,

l_t^w : Montant du passif à la date t pour le scénario w , $t=1,...,T$; $w \in \Omega$.

2.3.3 Fonction objectif

La fonction objectif à maximiser correspond à l'espérance de la richesse totale finale à terme moins la somme des coûts de pénalités dus au déficit de l'actif par rapport au passif à chaque date de pondération, c'est-à-dire:

$$E_{w \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{t=1}^T \varphi(Z_t^w) \right] = \sum_{w \in \Omega} \left[p^w \left(\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{t=1}^T \varphi(Z_t^w) \right) \right] \quad (2.0)$$

où la fonction φ est explicitée plus bas.

2.3.4 Contraintes

Contraintes d'inventaire

La richesse disponible après rééquilibrage d'un actif i à la date t pour le scénario w doit être égale à la richesse disponible avant le rééquilibrage en ajoutant le montant acheté et retranchant le montant vendu de cet actif.

La contrainte d'inventaire à $t=0$:

$$X_{i0}^w = x_{i0} + A_{i0}^w - V_{i0}^w \quad i = 1,...,N \quad w \in \Omega \quad (2.1)$$

Les contraintes d'inventaire de $t=1$ à $T-1$:

$$X_{it}^w = (1 + r_{it}^w) X_{i,t-1}^w + A_{it}^w - V_{it}^w \quad i = 1,...,N \quad w \in \Omega \quad (2.2)$$

La contrainte d'inventaire à l'échéance T où il n'y a pas de rééquilibrage:

$$X_{iT}^w = (1 + r_{iT}^w) X_{iT-1}^w \quad i = 1, \dots, N \quad w \in \Omega \quad (2.3)$$

Contraintes de budget

L'investisseur est limité aux montants disponibles pour l'achat. Ainsi, le montant total disponible à la date t pour le scénario w par la vente des actifs et les cotisations doit être égal au montant total ayant permis l'achat des actifs et le versement des prestations à la date t pour le scénario w .

Les contraintes de budget de $t=0$ à $T-1$:

$$\sum_{i=1}^N A_{it}^w (1 + b_i) + q_t = \sum_{i=1}^N V_{it}^w (1 - s_i) + m_t \quad w \in \Omega \quad (2.4)$$

Contraintes du marché

Les contraintes de non-vente à découvert:

$$V_{i0}^w \leq x_{i0} \quad i = 1, \dots, N \quad w \in \Omega \quad (2.5)$$

$$V_{it}^w \leq (1 + r_{it}^w) X_{it-1}^w \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad w \in \Omega \quad (2.6)$$

La contrainte de liquidité:

$$V_{it}^w \leq \bar{v}_i \quad i = 1, \dots, N \quad t = 0, \dots, T-1 \quad w \in \Omega \quad (2.7)$$

La contrainte de liquidité d'un actif est représentée dans le modèle par une borne supérieure sur la vente de cet actif, $\bar{v}_i$ à une date donnée. Cette borne peut être variable dans le temps. Cette contrainte peut être modifiée en limitant la vente à un certain pourcentage du montant détenu par un actif donné. Par ailleurs, le problème de liquidité peut se traduire également par des coûts de transaction plus élevés pour les actifs peu liquides.

Fonction de pénalité

La fonction de pénalité $\varphi(Z_t^w)$ permet de tenir compte du déficit entre l'actif et le passif avant rééquilibrage, défini par:

$$Z_t^w = \text{Max} \left[l_t^w - \sum_{i=1}^N (X_{it}^w - A_{it}^w + V_{it}^w); 0 \right]$$

Z_t^w peut de façon équivalente être défini par les contraintes linéaires suivantes:

$$\sum_{i=1}^N (X_{it}^w - A_{it}^w + V_{it}^w) + Z_t^w \geq l_t^w \quad t = 1, \dots, T \quad w \in \Omega \quad (2.8)$$

$$Z_t^w \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \quad w \in \Omega \quad (2.9)$$

La fonction de pénalité φ est linéaire par morceaux, croissante et convexe et comporte K segments (figure 2-2):

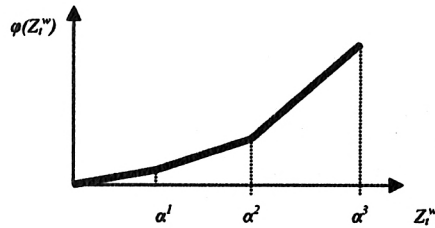


Figure 2-2: Fonction de pénalité

Une fonction de pénalité de K segments est déterminée par K+1 bornes, notées α^k , $k=1, \dots, K$. La pente du $k^{\text{ème}}$ segment est notée β^k , avec $\beta^k > \beta^{k-1}$.

Le montant Z_t^w est réparti cumulativement sur chacun des segments de la fonction φ en k valeurs notées Z_t^{wk} satisfaisant:

$$Z_t^w = \sum_{k=1}^K Z_t^{wk} \quad t = 0, \dots, T \quad w \in \Omega \quad (2.10)$$

$$Z_t^{wk} \leq \alpha^{k+1} - \alpha^k \quad t = 1, \dots, T \quad k = 1, \dots, K \quad w \in \Omega \quad (2.11)$$

La fonction de pénalité est alors décrite par:

$$\varphi(Z_t^w) = \sum_{k=1}^K Z_t^{wk} \beta^k \quad t = 0, \dots, T \quad w \in \Omega \quad (2.12)$$

Contraintes de non-anticipation

L'information révélée pour un sous-ensemble de scénarios entre le nœud initial et un nœud donné à la date t est la même. L'investisseur est donc incapable de différencier les scénarios qui se confondent jusqu'à la date t . La pondération à ce nœud pour chacun des scénarios de ce sous-ensemble doit donc être la même. Autrement, ceci signifierait que l'investisseur est capable d'anticiper le futur en pondérant différemment deux scénarios ayant eu le même historique. Nous devons donc ajouter au modèle des contraintes de non-anticipation à chacun des nœuds de l'arbre:

$$X_{it}^w = X_{it}^{w'} \quad i = 1, \dots, N \quad \forall w, w' \in \Omega^n \quad (2.13)$$

$$\text{Avec } \Omega^n = \{w, w' / r_{iu}^w = r_{iu}^{w'} \forall i = 1, \dots, N; \forall u = 0, \dots, t\}$$

3 Génération des scénarios, résolution et illustration numérique

3.1 Introduction

Avant d'optimiser le programme dynamique stochastique, il est nécessaire de construire l'arbre des scénarios. Dans la première partie, nous suggérons une approche pour générer ces scénarios. Puis, dans la seconde partie, nous testons et analysons la sensibilité du portefeuille aux paramètres du modèle (aversion au risque, Flux Monétaires Nets, frictions du marché et déficit initial). Enfin, nous comparons les performances du portefeuille obtenu à celles de portefeuilles obtenus selon des méthodes d'allocation plus traditionnelles (Moyenne-Variance, « Achat-Détention » et « Constant-mix »).

3.2 Génération des scénarios

L'incertitude est représentée dans ce modèle par un ensemble de scénarios, correspondant aux différents états de la nature pouvant se réaliser sur un horizon T . Chaque scénario w correspond à une réalisation possible des variables incertaines discrétisées à chaque date $t=1, \dots, T$ et dont la probabilité de réalisation est p^w . L'ensemble des scénarios, formant l'arbre des scénarios, représente donc l'aléa des rendements des actifs sur un horizon T . Le nœud initial de l'arbre des scénarios correspond à l'évènement à $t=0$, et les nœuds liés au nœud précédent représentent les évènements conditionnels au cours des prochaines étapes. Les arcs reliant les nœuds représentent les différentes réalisations des variables incertaines.

Les scénarios à venir peuvent être générés selon un modèle, l'opinion d'un expert, ou une combinaison des deux (Koskosidis et Duarte (1997)). Dans notre cas, nous proposons de générer les scénarios à l'aide de la simulation de Monte-Carlo en stipulant les processus de diffusion et leurs paramètres pour chaque actif. Ainsi, pour cette illustration, nous supposons que les prix des N actifs ainsi que celui du passif obéissent à un mouvement brownien géométrique:

$$\frac{dS_{it}^w}{S_{it}^w} = \mu_i dt + \sigma_i dW_{it}^w \quad \forall i \in \{1, \dots, N+1\} \quad \forall w \in \Omega \quad (3.1)$$

$$\text{où } E[dW_{it}^w dW_{jt}^w] = \rho_{ij} dt \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N+1\}$$

avec:

S_{it}^w : Prix de l'actif i à la date t du scénario w ,

$E(r_i)$: Rendement espéré de l'actif i ,

σ_i : Volatilité de l'actif i ,

W_{it}^w : Processus de Wiener de l'actif i à la date t du scénario w , d'espérance nulle et de variance 1,

ρ_{ij} : Corrélation entre les actifs i et j .

La succession des rendements obtenus pour un actif i sur un horizon T correspond à une trajectoire. Grâce à la décomposition de Cholesky de la matrice variance-covariance, nous obtenons les $N+1$ trajectoires corrélées pour un scénario donné:

$$\begin{pmatrix} W_{1t}^w \\ \vdots \\ W_{N+1t}^w \end{pmatrix} = L^T \begin{pmatrix} Y_{1t}^w \\ \vdots \\ Y_{N+1t}^w \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Avec:

Y_{it}^w : Processus de Wiener indépendant du processus de diffusion de l'actif/passif i à la date t du scénario w ,

W_{it}^w : Processus de Wiener corrélé du processus de diffusion de l'actif/passif i à la date t du scénario w ,

L^T : Matrice triangulaire supérieure de la décomposition de Cholesky de la matrice variance-covariance.

Dempster et Thompson (2002) suggèrent qu'il est préférable de favoriser un plus grand nombre de branches à l'initiation de l'arbre du fait du plus grand impact des décisions prises à court terme relativement à celles prises à long terme dans une perspective d'utilisation sur un horizon fuyant. Nous proposons donc l'arborescence suivante pour la structure de l'arbre des scénarios:

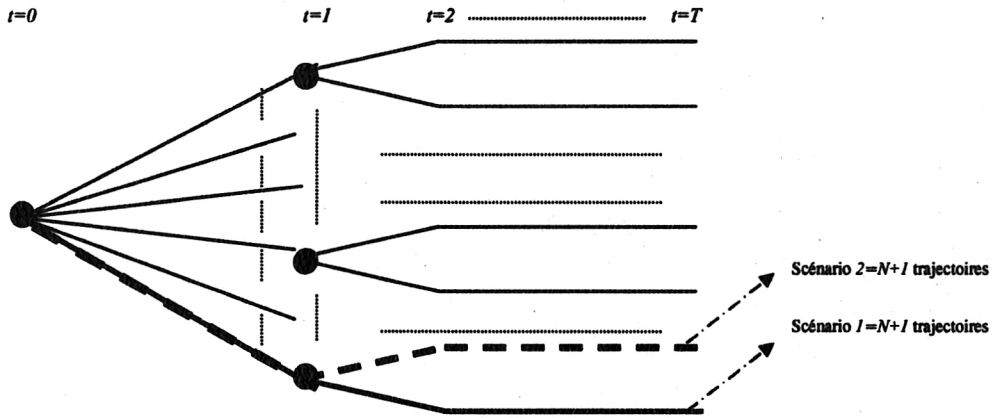


Figure 3-1: Arbre des scénarios

Afin de satisfaire les contraintes de non-anticipation au nœud initial et aux nœuds au début de la seconde période, nous devons ajouter les contraintes de non-anticipation (3.3) pour le nœud à $t=0$ et (3.4) pour les nœuds à $t=1$:

$$X_{i0}^w = X_{i0}^{w'} \quad i = 1, \dots, N \quad \forall w, w' \in \Omega \quad (3.3)$$

$$X_{i1}^w = X_{i1}^{w+H/2} \quad i = 1, \dots, N \quad w = 1, \dots, H/2 \quad H = \text{Card}(\Omega) \quad (3.4)$$

3.3 Méthodologie de résolution

Nous suggérons de traiter le programme dynamique selon l'approche d'un horizon fuyant afin de résoudre la composition optimale à chaque date t . Ainsi, Le modèle *PDS* est optimisé itérativement à chaque date t (figure 3-2). La résolution itérative permet ainsi de tenir compte de l'observabilité des rendements réalisés au cours de la dernière période écoulée pour construire le nouvel arbre des scénarios. Ainsi, elle prend en considération la révélation progressive des variables incertaines pour les allocations futures.

En itérant la méthodologie de résolution à chaque date t sur toute la période d'investissement, nous obtenons la composition du portefeuille pour chacune de ces dates.

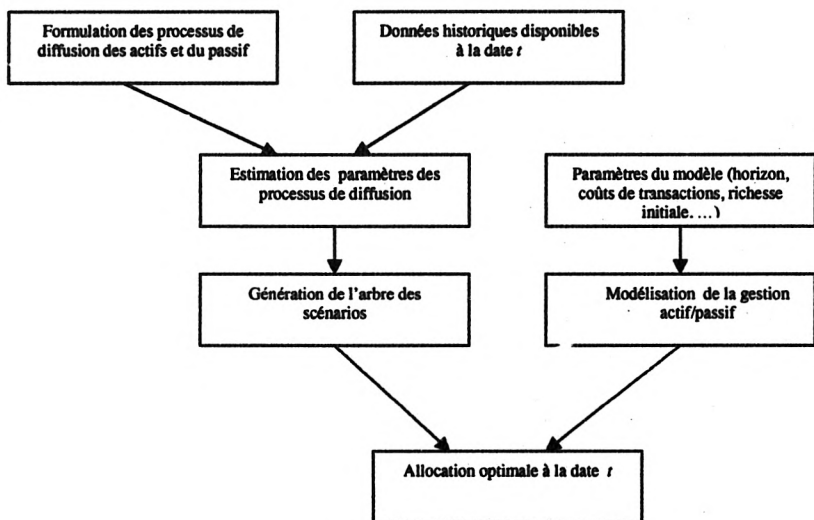


Figure 3-2: Méthodologie de résolution

La méthodologie de résolution sur un horizon fuyant est la suivante. À la date m , la composition initiale du portefeuille est observée. Les rendements et les covariances des processus de diffusion sont estimés en se basant sur les données historiques disponibles à m . Les scénarios sont ensuite simulés et l'arbre de scénarios est construit sur un horizon T , de la date m à la date $m+T$. Le modèle *PDS* est alors optimisé sur cet arbre à partir de $t_0=m$. La solution de ce programme donne la composition optimale du portefeuille à la

date m . À la date $m+1$, la part du portefeuille dans chaque actif est observée selon les rendements réalisés des actifs entre les dates m et $m+1$ (figure 3-3). La méthodologie est de nouveau appliquée à $t_0 = m+1$.

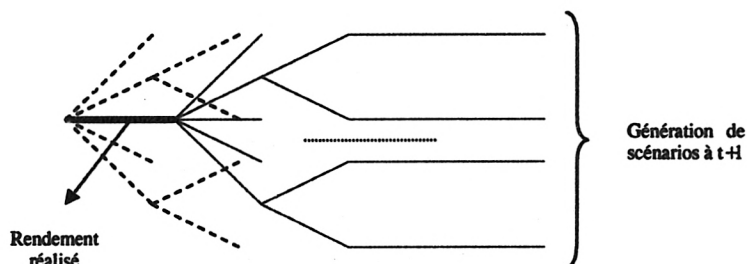


Figure 3-3: Détermination de la valeur du portefeuille à $t+1$.

3.4 Illustration numérique

Nous testons le comportement du modèle en illustrant sa solution dans le contexte d'une caisse de retraite nord-américaine rééquilibrant annuellement son portefeuille de 1984 à 2003 en transigeant les indices:

- «*S&P 500 US*» pour les actions,
- «*Lehman Brothers US Aggregate*» pour les obligations,
- «*NCREIF*» pour l'immobilier.

Nous supposons que le taux d'actualisation du passif est fortement corrélé au rendement des obligations de longues durées tel qu'agrégé par l'indice «*Lehman Brothers US Treasury 20+*»¹.

Le portefeuille initial avant rééquilibrage a une valeur de 30\$ répartie également dans les trois indices transigés. Les coûts de transactions d'achat et de vente pour les obligations, les actions et l'immobilier sont respectivement de 1%, 1% et 5%. L'arbre des

¹ Cette hypothèse est une approximation assez réaliste. Une meilleure estimation serait cependant une combinaison entre des obligations à long terme et des obligations à rendement réels pour le taux d'inflation.

scénarios est composé de 1 700 scénarios générés sur une fenêtre de quatre ans. Les scénarios sont considérés équiprobables. Chaque scénario est composé des rendements annuels sur les quatre prochaines années du passif, des obligations, des actions et de l'immobilier. Chaque scénario est donc composé de quatre trajectoires corrélées représentant les trois actifs et le passif. L'initiation de l'arbre est composée de 1 700 scénarios et de 850 nœuds à $t=1$. A chaque nœud à $t=1$, il existe un couple de scénarios dont les rendements estimés à cette date sont identiques.

3.4.1 Modèle de prévision

Rappelons que nous faisons l'hypothèse que tous les indices obéissent à un mouvement brownien géométrique. Il s'agit donc d'estimer les paramètres de tendance (rendements espérés) et de volatilité.

Passif

Nous supposons que le taux d'actualisation du passif est égal au rendement à terme de l'indice obligations gouvernementales US à long terme «*Lehman Brothers US Treasury 20+*» (provenant de la base de données *RIMES*):

$$E(r_t^L) = y_t^{LBT20} \quad (3.5)$$

Avec:

$E(r_t^L)$: le taux d'actualisation espéré du passif pour l'année t

y_t^{LBT20} : le rendement à échéance de l'indice "Lehman Brothers US Treasury 20 + year" pour l'année t

Lehman Brothers US Aggregate

Nous supposons que le rendement espéré de l'indice «*Lehman Brothers US Aggregate*» est égal à son rendement à terme:

$$E(r_t^{LB}) = y_t^{LB} \quad (3.6)$$

Avec:

$E(r_t^{LB})$: le rendement espéré de l'indice Lehman Brothers pour l'année t

y_t^{LB} : le rendement à terme de l'indice Lehman Brothers pour l'année t

Les rendements à terme proviennent de la base de données *RIMES*.

NCREIF

Le rendement espéré de l'indice «*NCREIF*» au début de l'année t est supposé identique au rendement réalisé au cours de l'année précédente:

$$E(r_t^{NCREIF}) = r_{t-1}^{NCREIF} \quad (3.7)$$

Avec:

$E(r_t^{NCREIF})$: le rendement espéré de l'indice *NCREIF* pour l'année t

r_{t-1}^{NCREIF} : le rendement réalisé de l'indice *NCREIF* pour l'année $t - 1$

Les rendements de l'indice «*NCREIF*» proviennent du site <http://www.ncreif.com/>.

S&P 500 US

Étant donné la volatilité élevée de l'indice «*S&P 500 US*», l'estimation de son rendement annuel s'avère plus délicate. Nous proposons d'appliquer le modèle de prévision de Arnott et Bernstein (2002). Ces derniers proposent de décomposer le rendement en trois parties: la croissance réelle du *PNB/capita*, le taux de dividende et le taux d'inflation :

$$E(r_t^{S\&P}) = E(g_t^{PNB/C}) + div_t^{S\&P} + E(i_t) \quad (3.8)$$

$$E(g_t^{PNB/C}) = \frac{(1 + E(g_t^{PNB}))}{(1 + pop_{t-1})} \quad (3.9)$$

Avec:

$E(r_t^{S\&P})$: le rendement total annuel espéré du S & P 500 pour l'année t ,

$div_t^{S\&P}$: le rendement à terme du dividende du S & P 500 pour l'année t ,

$r_{t-1}^{S\&P}$: le rendement total annuel réalisé du S & P 500 pour l'année $t-1$,

$r_{t-1}^{S\&PPP}$: le rendement ex - dividende annuel réalisé du S & P 500 pour l'année $t-1$,

$E(g_t^{PNB/C})$: Taux de croissance du PNB per Capita espéré pour l'année t ,

$E(g_t^{PNB})$: Taux de croissance du PNB espéré pour l'année t ,

pop_{t-1} : la croissance de la population américaine pour l'année $t-1$,

$E(i_t)$: le taux d'inflation espéré pour l'année t .

Étant donné que les données du «Consensus Forecast» ne sont disponibles qu'à partir de 1989, les taux espérés de croissance du PNB ($E(g_t^{PNB})$) et d'inflation ($E(i_{t-1})$) sont supposés égaux aux données historiques de l'année $t-1$ de 1984 à 1988, et aux données du «Consensus Forecast» de l'année t de 1989 à 2003.

Les données du «S&P 500 US» proviennent de la base de données RIMES. Quant aux données du PNB, du taux d'inflation et de la population, celles-ci proviennent du site de la Réserve Fédérale américaine de Saint-Louis (<http://www.stlouisfed.org/>) et du rapport du «Consensus Forecast».

Nous obtenons les rendements prévisionnels suivants:

1984	11,6%	12,5%	7,4%	13,1%
1985	9,6%	10,5%	11,0%	13,8%
1986	9,2%	8,2%	10,4%	11,2%
1987	9,2%	8,7%	9,2%	8,3%
1988	8,4%	9,1%	7,4%	8,0%
1989	8,1%	9,1%	9,4%	6,6%
1990	8,0%	9,0%	10,0%	7,8%
1991	8,0%	7,9%	10,0%	2,3%
1992	7,5%	6,9%	9,1%	-5,6%
1993	7,4%	5,9%	9,5%	-4,3%
1994	6,8%	7,2%	8,0%	1,4%
1995	6,7%	6,8%	7,7%	6,4%
1996	6,5%	6,7%	7,4%	7,5%
1997	6,1%	6,7%	9,5%	10,3%
1998	6,0%	5,9%	9,7%	13,9%
1999	5,7%	6,5%	6,2%	16,3%
2000	5,6%	7,1%	5,9%	11,4%
2001	5,4%	5,8%	6,2%	12,3%
2002	5,2%	5,0%	5,7%	7,3%
2003	4,9%	4,0%	5,7%	6,9%

Tableau 3-1: Estimation des rendements

Estimation de la matrice Variance-Covariance

La matrice Variance-Covariance est déterminée à partir d'une fenêtre mobile sur les cinq dernières années des rendements historiques (Fama et Mc Beth (1973)). Par exemple, la matrice Variance-Covariance pour 1985 est déterminée à partir des rendements historiques de 1980 à 1984.

3.4.2 Analyse et comparaison

Fonction de pénalité

Dans cette section, nous analysons la sensibilité du portefeuille selon l'aversion au risque de déficit. A cette fin, nous varions les β^k de la fonction de pénalité ϕ (figure 3-4). Les résultats obtenus sont affichés dans le tableau 3-2.

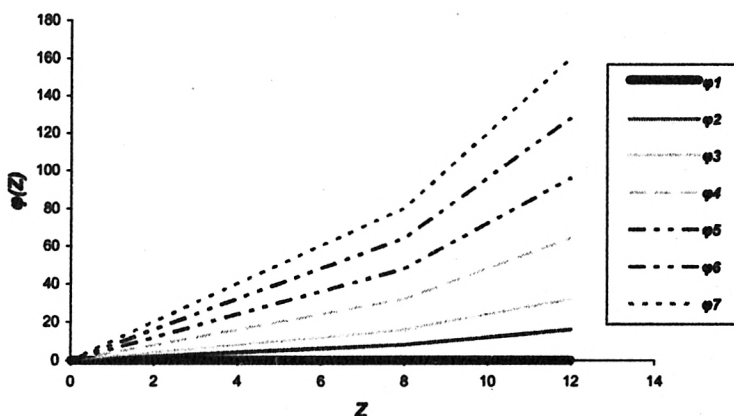


Figure 3-4: Différents cas de fonction de pénalité ϕ

Nous constatons que lorsque les coefficients directeurs de la fonction de pénalité augmentent, l'allocation en actions dans le portefeuille ex-ante optimal diminue au profit des obligations et, dans une moindre mesure, de l'immobilier (figure 3-5). En effet, par exemple, en 1991, pour la fonction de pénalité la moins sévère ϕ_1 , le portefeuille optimal ex-ante est composé de 74,87% d'actions et de 25,13% d'immobilier. Mais en augmentant les coefficients directeurs de la fonction de pénalité, les pondérations optimales ex-antes pour ϕ_3 passent à 10,94% en obligations, 60,13% en actions et 28,93% en immobilier. Pour la fonction la plus sévère ϕ_7 , elles passent à 14,79% en obligations, 56,07% en actions et 29,14% en immobilier. C'est donc surtout les obligations qui bénéficient de l'augmentation de l'aversion au risque de déficit. Étant donné que les obligations représentent la catégorie d'actif la moins risquée, en allouant une plus grande partie de sa richesse dans celle-ci, le comité diminue l'espérance de son risque de déficit, mais il diminue aussi l'espérance de gain.

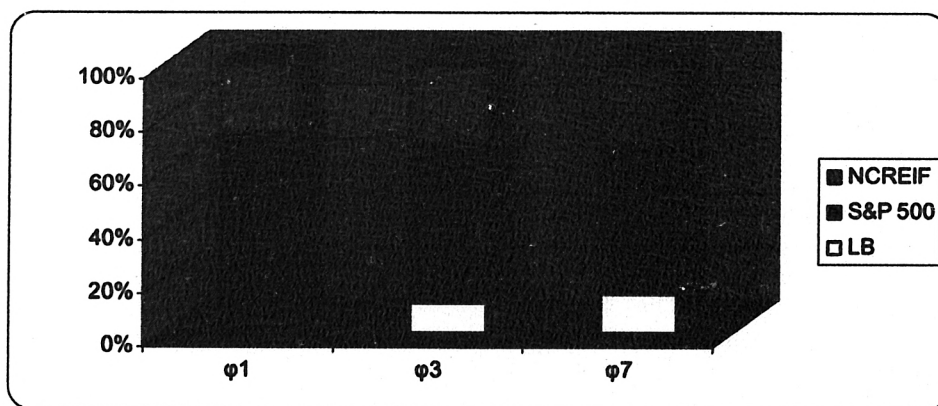


Figure 3-5: Composition du portefeuille optimal en 1991 pour différentes fonctions de pénalité φ

En résumé, *ceteris paribus*, plus le comité est averse au risque de déficit, plus le portefeuille est conservateur.

Année	ϕ_1			ϕ_2			ϕ_3			ϕ_4			ϕ_5			ϕ_6			ϕ_7		
	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF
1984	33,3%	33,3%	33,3%	66,3%	0,0%	33,7%	66,3%	0,0%	33,7%	66,3%	0,0%	33,7%	66,3%	0,0%	33,7%	66,3%	0,0%	33,7%	66,3%	0,0%	33,7%
1985	0,0%	65,7%	34,3%	66,6%	0,0%	33,4%	66,6%	0,0%	33,4%	66,6%	0,0%	33,4%	66,6%	0,0%	33,4%	66,6%	0,0%	33,4%	66,6%	0,0%	33,4%
1986	0,0%	69,4%	30,6%	52,6%	15,9%	31,5%	60,1%	8,5%	31,5%	62,6%	6,0%	31,4%	63,7%	4,9%	31,4%	64,5%	4,1%	31,4%	65,1%	3,5%	31,4%
1987	0,0%	71,3%	28,7%	53,3%	16,6%	30,1%	61,1%	8,8%	30,1%	63,7%	6,2%	30,0%	64,8%	5,1%	30,0%	65,7%	4,2%	30,0%	66,3%	3,7%	30,0%
1988	0,0%	70,8%	29,2%	52,3%	16,7%	31,0%	60,1%	8,9%	31,0%	62,7%	6,3%	31,1%	63,8%	5,2%	31,1%	64,7%	4,3%	31,1%	65,2%	3,7%	31,1%
1989	0,0%	72,0%	28,0%	51,4%	17,7%	30,9%	59,3%	9,5%	31,2%	62,0%	6,7%	31,2%	63,2%	5,5%	31,3%	64,1%	4,6%	31,3%	64,7%	4,0%	31,3%
1990	0,0%	75,9%	24,1%	51,0%	20,2%	28,9%	59,6%	11,0%	29,4%	62,6%	7,8%	29,6%	63,9%	6,4%	29,7%	64,9%	5,3%	29,8%	65,5%	4,7%	29,8%
1991	0,0%	74,9%	25,1%	9,4%	62,0%	28,6%	10,9%	60,1%	28,9%	13,6%	57,4%	29,0%	14,9%	56,0%	29,1%	14,1%	56,8%	29,1%	14,8%	56,1%	29,1%
1992	0,0%	100,0%	0,0%	9,6%	90,4%	0,0%	11,1%	88,9%	0,0%	13,9%	86,1%	0,0%	14,0%	86,0%	0,0%	14,5%	85,5%	0,0%	15,2%	84,8%	0,0%
1993	0,0%	100,0%	0,0%	9,6%	90,5%	0,0%	11,1%	88,9%	0,0%	13,9%	86,1%	0,0%	14,0%	86,0%	0,0%	14,4%	85,6%	0,0%	15,1%	84,9%	0,0%
1994	0,0%	100,0%	0,0%	9,5%	90,5%	0,0%	11,1%	88,9%	0,0%	13,8%	86,2%	0,0%	14,0%	86,0%	0,0%	14,4%	85,6%	0,0%	15,1%	84,9%	0,0%
1995	0,0%	100,0%	0,0%	9,2%	90,8%	0,0%	10,7%	89,3%	0,0%	13,3%	86,7%	0,0%	13,4%	86,7%	0,0%	13,9%	86,1%	0,0%	14,6%	85,5%	0,0%
1996	0,0%	100,0%	0,0%	8,0%	92,0%	0,0%	9,3%	90,7%	0,0%	11,7%	88,3%	0,0%	12,0%	88,0%	0,0%	12,2%	87,8%	0,0%	12,8%	87,2%	0,0%
1997	0,0%	100,0%	0,0%	6,8%	93,2%	0,0%	8,0%	92,0%	0,0%	11,7%	88,3%	0,0%	27,4%	72,7%	0,0%	33,1%	66,9%	0,0%	39,1%	60,9%	0,0%
1998	0,0%	100,0%	0,0%	5,7%	94,3%	0,0%	6,7%	93,3%	0,0%	9,8%	90,2%	0,0%	23,6%	76,4%	0,0%	28,9%	71,1%	0,0%	34,6%	65,5%	0,0%
1999	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	1,4%	98,6%
2000	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	1,5%	98,4%
2001	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	1,2%	98,7%
2002	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	1,0%	99,0%
2003	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,8%	99,2%
Richesse	440,07			361,24			352,61			342,91			323,56			316,43			306,91		
Rendement	14,37%			13,25%			13,11%			12,95%			12,63%			12,50%			12,33%		
Volatilité	12,33%			9,23%			9,10%			8,88%			8,33%			8,14%			7,96%		
R. Sharpe	0,71			0,83			0,82			0,83			0,84			0,85			0,84		

Tableau 3-2: Pondération optimale ex-ante du portefeuille pour différentes fonctions de pénalités ϕ

Les pondérations optimales sont obtenues par la simulation de 1700 scénarios sur une période de 4 années à chaque date de rééquilibrage. Les Flux Monétaires Nets sont considérés nuls. Les coûts de transactions des obligations, des actions et de l'immobilier sont respectivement de 1%, 1% et 5%. Le passif et l'actif initial sont de 30\$. L'actif initial est de 10\$ dans chacun des actifs. L'investisseur ne peut vendre plus de 100\$ dans la catégorie immobilière à chaque date de rééquilibrage. La première sous-colonne correspond à la pondération du portefeuille optimal dans l'indice

Flux Monétaires Nets

Nous définissons les Flux Monétaires Nets (*FMN*) comme étant la série chronologique des différences entre les cotisations collectées et les prestations versées prédéterminées. Nous considérons plusieurs cas de *FMN* (figure 3-6):

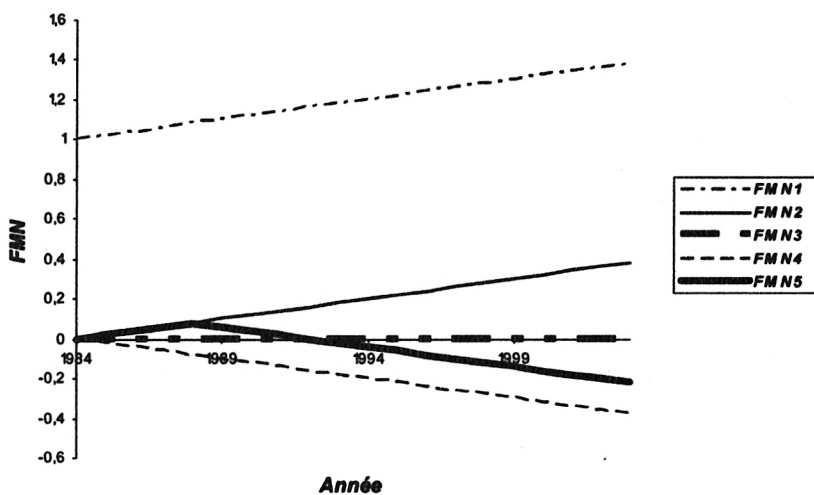


Figure 3-6: Vecteurs Flux Monétaires Nets *FMN*

Les pondérations optimales sont obtenues pour différents *FMN*, et ce pour les fonctions de pénalité φ_3 (tableau 3-3), φ_5 (tableau 3-4) et φ_7 (tableau 3-5).

Comme dans la section précédente, nous constatons que lorsque l'aversion au risque augmente, l'investisseur prend moins de risque, et ceci quel que soit le vecteur des *FMN*. Par ailleurs, lorsque les Flux Monétaires Nets augmentent, le portefeuille est moins risqué (figure 3-7). En effet, pour la fonction φ_3 , dans le cas où les Flux Monétaires Nets sont les plus élevés (*FMN*₁), le portefeuille ex-ante optimal en 1991 est composé de 42,43% en obligations, 33,33% en actions et 24,24% en immobilier. Tandis que, pour la même année, dans le cas où les Flux Monétaires Nets sont les moins élevés (*FMN*₄), la composition optimale ex-ante du portefeuille est de 4,47% en obligations, 66,22% en actions et 29,30% en immobilier. La diminution de la part des obligations se fait surtout au profit des actions, et légèrement au profit de l'immobilier. Par conséquent, plus les

Flux Monétaires Nets sont faibles, voire négatifs, plus l'investisseur prend en considération la diminution des cotisations par rapport aux prestations et plus il est incité à prendre des risques afin de subvenir à ses futures dépenses, et plus son portefeuille sera agressif.

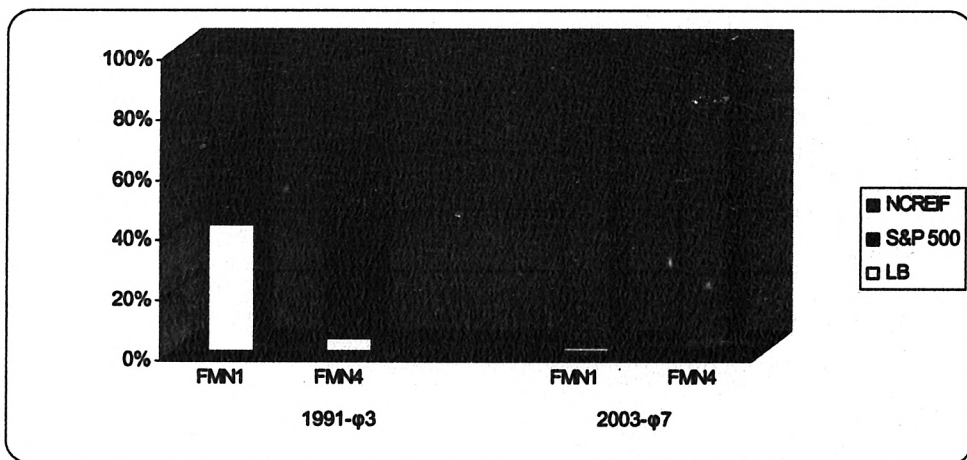


Figure 3-7: Composition du portefeuille optimal pour différents Flux Monétaire Nets

En résumé, la composition ex-ante du portefeuille optimal dépend à la fois des cotisations et prestations à venir, mais aussi de l'aversion au risque de déficit de l'investisseur. Ces deux composantes ont des effets analogues sur la composition du portefeuille. En effet, plus les *FMN* et la fonction de pénalité sont élevés, plus le portefeuille est conservateur.

Année	FMN ₁				FMN ₂				FMN ₃				FMN ₄				FMN ₅			
	FMN	Composition portefeuille			FMN	Composition portefeuille			FMN	Composition portefeuille			FMN	Composition portefeuille			FMN	Composition portefeuille		
		Oblig.	Actions	Immo.		Oblig.	Actions	Immo.		Oblig.	Actions	Immo.		Oblig.	Actions	Immo.		Oblig.	Actions	Immo.
1984	1	67,4%	0,0%	32,6%	0	66,3%	0,0%	33,7%	0	66,3%	0,0%	33,7%	0	66,3%	0,0%	33,7%	0	66,3%	0,0%	33,7%
1985	1,02	68,6%	0,0%	31,4%	0,02	66,6%	0,0%	33,4%	0	66,6%	0,0%	33,4%	-0	66,6%	0,0%	33,4%	0	66,6%	0,0%	33,4%
1986	1,04	65,1%	6,1%	28,8%	0,04	60,9%	7,7%	31,4%	0	60,1%	8,5%	31,5%	-0	59,9%	8,6%	31,5%	0,04	60,9%	7,7%	31,4%
1987	1,06	73,0%	0,0%	27,0%	0,06	62,0%	8,0%	30,0%	0	61,1%	8,8%	30,1%	-0,1	61,0%	8,9%	30,1%	0,06	62,0%	8,0%	30,0%
1988	1,08	70,6%	2,0%	27,4%	0,08	60,9%	8,2%	30,9%	0	60,1%	8,9%	31,0%	-0,1	59,8%	9,0%	31,2%	0,08	60,9%	8,2%	30,9%
1989	1,1	68,9%	3,9%	27,2%	0,1	60,1%	9,0%	31,0%	0	59,3%	9,5%	31,2%	-0,1	59,0%	9,6%	31,4%	0,06	60,1%	8,9%	31,0%
1990	1,12	68,5%	6,0%	25,4%	0,12	60,2%	10,5%	29,2%	0	60,2%	10,5%	29,2%	-0,1	59,2%	11,1%	29,7%	0,04	60,4%	10,3%	29,3%
1991	1,14	42,4%	33,3%	24,2%	0,14	18,0%	53,4%	28,6%	0	10,9%	60,1%	28,9%	-0,1	4,5%	66,2%	29,3%	0,02	14,3%	56,9%	28,7%
1992	1,16	61,7%	38,3%	0,0%	0,16	18,4%	81,6%	0,0%	0	11,1%	88,9%	0,0%	-0,2	4,5%	95,5%	0,0%	0	14,6%	85,4%	0,0%
1993	1,18	62,2%	37,8%	0,0%	0,18	18,6%	81,4%	0,0%	0	11,1%	88,9%	0,0%	-0,2	4,3%	95,7%	0,0%	-0	14,6%	85,4%	0,0%
1994	1,2	62,6%	37,5%	0,0%	0,2	18,7%	81,3%	0,0%	0	11,1%	88,9%	0,0%	-0,2	4,1%	96,0%	0,0%	-0	14,5%	85,5%	0,0%
1995	1,22	62,0%	38,0%	0,0%	0,22	18,3%	81,7%	0,0%	0	10,7%	89,3%	0,0%	-0,2	3,6%	96,4%	0,0%	-0,1	13,9%	86,1%	0,0%
1996	1,24	57,9%	42,1%	0,0%	0,24	16,3%	83,7%	0,0%	0	9,3%	90,7%	0,0%	-0,2	3,2%	96,9%	0,0%	-0,1	12,2%	87,8%	0,0%
1997	1,26	54,1%	45,9%	0,0%	0,26	14,3%	85,7%	0,0%	0	8,0%	92,0%	0,0%	-0,3	2,7%	97,3%	0,0%	-0,1	10,5%	89,5%	0,0%
1998	1,28	49,6%	50,4%	0,0%	0,28	12,2%	87,8%	0,0%	0	6,7%	93,3%	0,0%	-0,3	2,1%	97,9%	0,0%	-0,1	8,8%	91,2%	0,0%
1999	1,3	0,0%	0,0%	100,0%	0,3	0,0%	0,0%	100,0%	0	0,0%	0,0%	100,0%	-0,3	0,0%	0,0%	100,0%	-0,1	0,1%	0,1%	99,8%
2000	1,32	0,7%	0,0%	99,3%	0,32	0,2%	0,0%	99,9%	0	0,0%	0,0%	100,0%	-0,3	0,0%	0,0%	100,0%	-0,2	0,1%	0,0%	99,9%
2001	1,34	1,3%	0,0%	98,7%	0,34	0,3%	0,0%	99,7%	0	0,0%	0,0%	100,0%	-0,3	0,0%	0,0%	100,0%	-0,2	0,0%	0,0%	100,0%
2002	1,36	1,7%	0,1%	98,2%	0,36	0,4%	0,0%	99,6%	0	0,0%	0,0%	100,0%	-0,4	0,0%	0,0%	100,0%	-0,2	0,0%	0,0%	100,0%
2003	1,38	1,8%	0,6%	97,6%	0,38	0,4%	0,1%	99,4%	0	0,0%	0,0%	100,0%	-0,4	0,0%	0,0%	100,0%	-0,2	0,0%	0,0%	100,0%
Richesse		324,16				345,15				352,68				357,26				344,76		
Rendement		11,04%				12,82%				13,11%				13,36%				12,99%		
Volatilité		6,22%				8,64%				9,1%				9,52%				8,91%		
R. Sharpe		0,87				0,83				0,82				0,81				0,83		

Tableau 3-3: Pondération optimale ex-ante du portefeuille pour la fonction de pénalité ϕ_3 , et différents vecteurs FMN.

Les pondérations optimales sont obtenues par la simulation de 1700 scénarios sur une période de 4 années à chaque date de rééquilibrage. La fonction de pénalité est ϕ_3 . Les coûts de transactions des obligations, des actions et de l'immobilier sont respectivement de 1%, 1% et 5%. Le passif et l'actif initial sont de 305. L'actif initial est de 105 dans chacun des actifs. L'investisseur ne peut vendre plus de 100% dans la catégorie immobilière à chaque date de rééquilibrage. La première sous-colonne correspond à la pondération du portefeuille optimal dans l'indice *Lehman Brothers*. La seconde sous-colonne à l'indice *S&P 500 US* et la troisième sous-colonne à l'indice *NCREIF*.

Année	FMN ₁				FMN ₂				FMN ₃				FMN ₄				FMN ₅			
	FMN	Portfolio Composition			FMN	Composition portefeuille			FMN	Composition portefeuille			FMN	Composition portefeuille			FMN	Composition portefeuille		
		Oblig.	Actions	Immo.		Oblig.	Actions	Immo.		Oblig.	Actions	Immo.		Oblig.	Actions	Immo.		Oblig.	Actions	Immo.
1984	1	67,4%	0,0%	32,6%	0	66,3%	0,0%	33,7%	0	66,3%	0,0%	33,7%	0	66,3%	0,0%	33,7%	0	66,3%	0,0%	33,7%
1985	1,02	68,6%	0,0%	31,4%	0,02	66,6%	0,0%	33,4%	0	66,6%	0,0%	33,4%	-0	66,6%	0,0%	33,4%	0,02	66,6%	0,0%	33,4%
1986	1,04	67,0%	4,2%	28,8%	0,04	63,2%	5,4%	31,4%	0	63,7%	4,9%	31,4%	-0	59,9%	8,6%	31,5%	0,04	64,8%	3,9%	31,4%
1987	1,06	73,1%	0,0%	27,0%	0,06	64,4%	5,6%	30,0%	0	64,8%	5,1%	30,0%	-0,1	61,0%	8,9%	30,2%	0,06	66,0%	4,1%	30,0%
1988	1,08	70,6%	2,0%	27,4%	0,08	63,3%	5,8%	30,9%	0	63,8%	5,2%	31,1%	-0,1	60,0%	8,8%	31,2%	0,08	64,8%	4,3%	30,9%
1989	1,1	69,0%	3,9%	27,2%	0,1	64,5%	4,4%	31,1%	0	63,2%	5,5%	31,3%	-0,1	59,1%	9,6%	31,3%	0,06	64,2%	4,7%	31,1%
1990	1,12	68,6%	6,0%	25,4%	0,12	63,0%	7,6%	29,4%	0	63,9%	6,4%	29,7%	-0,1	59,3%	11,0%	29,7%	0,04	65,0%	5,4%	29,6%
1991	1,14	50,6%	29,4%	20,0%	0,14	19,3%	52,1%	28,7%	0	14,9%	56,0%	29,1%	-0,1	4,6%	66,0%	29,4%	0,02	15,5%	55,6%	28,9%
1992	1,16	66,5%	33,5%	0,0%	0,16	19,8%	80,2%	0,0%	0	14,0%	86,0%	0,0%	-0,2	4,5%	95,5%	0,0%	0	15,8%	80,9%	3,3%
1993	1,18	66,9%	33,1%	0,0%	0,18	19,9%	80,1%	0,0%	0	14,0%	86,0%	0,0%	-0,2	4,3%	95,7%	0,0%	-0	15,8%	81,2%	3,0%
1994	1,2	67,2%	32,8%	0,0%	0,2	20,1%	79,9%	0,0%	0	14,0%	86,0%	0,0%	-0,2	4,1%	95,9%	0,0%	-0	15,8%	81,5%	2,8%
1995	1,22	66,7%	33,3%	0,0%	0,22	19,6%	80,4%	0,0%	0	13,4%	86,7%	0,0%	-0,2	7,6%	92,4%	0,0%	-0,1	15,1%	82,0%	2,9%
1996	1,24	62,3%	37,7%	0,0%	0,24	27,5%	72,5%	0,0%	0	12,0%	88,0%	0,0%	-0,2	6,7%	93,4%	0,0%	-0,1	13,4%	84,2%	2,4%
1997	1,26	58,6%	41,4%	0,0%	0,26	25,8%	74,2%	0,0%	0	27,4%	72,7%	0,0%	-0,3	12,7%	87,4%	0,0%	-0,1	28,3%	69,5%	2,2%
1998	1,28	54,2%	45,8%	0,0%	0,28	22,6%	77,4%	0,0%	0	23,6%	76,4%	0,0%	-0,3	12,1%	87,9%	0,0%	-0,1	25,1%	72,8%	2,1%
1999	1,3	0,0%	2,1%	97,9%	0,3	0,0%	0,0%	100,0%	0	0,0%	0,0%	100,0%	-0,3	0,0%	0,0%	100,0%	-0,1	0,3%	1,1%	98,6%
2000	1,32	0,7%	2,3%	97,1%	0,32	0,2%	0,0%	99,9%	0	0,0%	0,0%	100,0%	-0,3	0,0%	0,0%	100,0%	-0,2	0,3%	1,1%	98,7%
2001	1,34	1,3%	1,8%	96,9%	0,34	0,3%	0,0%	99,7%	0	0,0%	0,0%	100,0%	-0,3	0,0%	0,0%	100,0%	-0,2	0,2%	0,9%	98,9%
2002	1,36	1,8%	1,6%	96,6%	0,36	0,5%	0,0%	99,6%	0	0,0%	0,0%	100,0%	-0,4	0,0%	0,0%	100,0%	-0,2	0,2%	0,7%	99,2%
2003	1,38	1,9%	1,7%	96,5%	0,38	0,5%	0,1%	99,4%	0	0,0%	0,0%	100,0%	-0,4	0,0%	0,0%	100,0%	-0,2	0,1%	0,5%	99,4%
Richesse		312,77			321,98	323,56			340,53				313,67							
Rendement		10,82%			12,42%	12,63%			13,09%				12,46%							
Volatilité		6,05%			8,11%	8,33%			9,14%				8,43%							
R. Sharpe		0,86			0,84	0,84			0,82				0,81							

Tableau 3-4: Pondération optimale ex-ante du portefeuille pour la fonction de pénalité ϕ_3 et différents vecteurs FMN.

Les pondérations optimales sont obtenues par la simulation de 1700 scénarios sur une période de 4 années à chaque date de rééquilibrage. La fonction de pénalité est ϕ_3 . Les coûts de transactions des obligations, des actions et de l'immobilier sont respectivement de 1%, 1% et 5%. Le passif et l'actif initial sont de 30\$. L'actif initial est de 10\$ dans chacun des actifs. L'investisseur ne peut vendre plus de 100\$ dans la catégorie immobilière à chaque date de rééquilibrage. La première sous-colonne correspond à la pondération du portefeuille optimal dans l'indice *Lehman Brothers*. La seconde sous-colonne à l'indice *S&P 500 US* et la troisième sous-colonne à l'indice *NCREIF*.

Année	FMN ₁				FMN ₂				FMN ₃				FMN ₄				FMN ₅			
	Composition portefeuille				Composition portefeuille				Composition portefeuille				Composition portefeuille				Composition portefeuille			
	FMN	Oblig.	Actions	Immo.	FMN	Oblig.	Actions	Immo.	FMN	Oblig.	Actions	Immo.	FMN	Oblig.	Actions	Immo.	FMN	Oblig.	Actions	Immo.
1984	1	67,4%	0,0%	32,6%	0	66,3%	0,0%	33,7%	0	66,3%	0,0%	33,7%	0	66,3%	0,0%	33,7%	0	66,3%	0,0%	33,7%
1985	1,02	68,6%	0,0%	31,4%	0,02	66,6%	0,0%	33,4%	0	66,6%	0,0%	33,4%	-0	66,6%	0,0%	33,4%	0,02	66,6%	0,0%	33,4%
1986	1,04	68,9%	2,3%	28,8%	0,04	65,5%	3,1%	31,4%	0	65,1%	3,5%	31,4%	-0	63,7%	4,8%	31,5%	0,04	68,6%	0,1%	31,3%
1987	1,06	73,1%	0,0%	26,9%	0,06	66,8%	3,3%	30,0%	0	66,3%	3,7%	30,0%	-0,1	64,9%	5,0%	30,1%	0,06	69,9%	0,1%	30,0%
1988	1,08	70,7%	2,0%	27,4%	0,08	65,6%	3,4%	30,9%	0	65,2%	3,7%	31,1%	-0,1	63,8%	5,0%	31,2%	0,08	68,8%	0,3%	31,0%
1989	1,1	69,0%	3,9%	27,2%	0,1	65,0%	3,9%	31,1%	0	64,7%	4,0%	31,3%	-0,1	63,2%	5,4%	31,5%	0,06	68,3%	0,4%	31,3%
1990	1,12	68,6%	6,0%	25,4%	0,12	65,7%	4,7%	29,6%	0	65,5%	4,7%	29,8%	-0,1	63,8%	6,2%	30,0%	0,04	69,5%	0,5%	29,9%
1991	1,14	58,8%	25,4%	15,8%	0,14	20,6%	50,6%	28,8%	0	14,8%	56,1%	29,1%	-0,1	8,5%	62,0%	29,5%	0,02	16,7%	54,3%	29,1%
1992	1,16	71,3%	28,7%	0,0%	0,16	21,1%	78,9%	0,0%	0	15,2%	84,8%	0,0%	-0,2	8,7%	91,3%	0,0%	0	16,9%	76,4%	6,7%
1993	1,18	71,6%	28,4%	0,0%	0,18	21,3%	78,7%	0,0%	0	15,1%	84,9%	0,0%	-0,2	8,5%	91,5%	0,0%	-0	17,0%	77,1%	6,0%
1994	1,2	71,9%	28,1%	0,0%	0,2	21,4%	78,6%	0,0%	0	15,1%	84,9%	0,0%	-0,2	8,2%	91,8%	0,0%	-0	17,0%	77,5%	5,5%
1995	1,22	71,4%	28,6%	0,0%	0,22	30,9%	69,1%	0,0%	0	14,6%	85,5%	0,0%	-0,2	7,7%	92,4%	0,0%	-0,1	16,3%	77,9%	5,8%
1996	1,24	66,7%	33,3%	0,0%	0,24	28,7%	71,3%	0,0%	0	12,8%	87,2%	0,0%	-0,2	2,7%	97,3%	0,0%	-0,1	14,6%	80,7%	4,7%
1997	1,26	63,1%	36,9%	0,0%	0,26	37,3%	62,7%	0,0%	0	39,1%	60,9%	0,0%	-0,3	38,6%	61,5%	0,0%	-0,1	46,1%	49,5%	4,4%
1998	1,28	58,8%	41,2%	0,0%	0,28	32,9%	67,1%	0,0%	0	34,6%	65,5%	0,0%	-0,3	33,9%	66,1%	0,0%	-0,1	41,5%	54,4%	4,1%
1999	1,3	0,0%	4,2%	95,8%	0,3	0,0%	0,0%	100,0%	0	0,0%	1,4%	98,6%	-0,3	0,3%	1,3%	98,5%	-0,1	0,5%	2,0%	97,5%
2000	1,32	0,7%	4,5%	94,8%	0,32	0,2%	0,0%	99,8%	0	0,0%	1,5%	98,4%	-0,3	0,2%	1,2%	98,6%	-0,2	0,5%	2,1%	97,4%
2001	1,34	1,3%	3,7%	95,0%	0,34	0,3%	0,0%	99,7%	0	0,0%	1,2%	98,7%	-0,3	0,2%	0,9%	99,0%	-0,2	0,4%	1,7%	97,9%
2002	1,36	1,9%	3,0%	95,1%	0,36	0,5%	0,0%	99,5%	0	0,0%	1,0%	99,0%	-0,4	0,0%	0,7%	99,3%	-0,2	0,4%	1,3%	98,3%
2003	1,38	2,0%	2,8%	95,3%	0,38	0,5%	0,2%	99,4%	0	0,0%	0,8%	99,2%	-0,4	0,0%	0,4%	99,6%	-0,2	0,3%	1,0%	98,8%
Richesse		301,70				303,03				306,91				308,14				284,82		
Rendement		10,61%				12,07%				12,33%				12,54%				11,92%		
Volatilité		5,74%				7,60%				7,96%				8,26%				7,36%		
R. Sharpe		0,87				0,85				0,84				0,84				0,86		

Tableau 3-5: Pondération optimale ex-ante du portefeuille pour la fonction de pénalité ϕ , et différents vecteurs FMN

Les pondérations optimales sont obtenues par la simulation de 1700 scénarios sur une période de 4 années à chaque date de rééquilibrage. La fonction de pénalité est ϕ . Les coûts de transactions des obligations, des actions et de l'immobilier sont respectivement de 1%, 1% et 5%. Le passif et l'actif initial sont de 30\$. L'actif initial est de 10\$ dans chacun des actifs. L'investisseur ne peut vendre plus de 100\$ dans la catégorie immobilière à chaque date de rééquilibrage. La première sous-colonne correspond à la pondération du portefeuille optimal dans l'indice *Lehman Brothers*. La seconde sous-colonne à l'indice *S&P 500 US* et la troisième sous-colonne à l'indice *NCREIF*.

Ratio actif/passif initial

Le tableau 3-6 présente la sensibilité de la solution au ratio actif/passif initial. Nous constatons que, plus le déficit initial de l'actif de la caisse de retraite par rapport à son passif est élevé et plus le comité pondère les actions aux dépens des obligations et, dans une moindre mesure, de l'immobilier (figure 3-8). En effet, pour l'année 1987, lorsqu'il y a surplus ($A^{ini}=30$ \$ et $L^{ini}=25$ \$), la pondération ex-ante optimale est de 69,81% pour l'indice «*Lehman Brothers*» et de 30,19% pour l'indice «*NCREIF*». Lorsque l'actif initial est égal au passif, cette pondération diminue à 61,11% pour l'indice «*Lehman Brothers*» et à 30,05% pour l'indice «*NCREIF*», tandis qu'elle augmente à 8,84% pour l'indice «*S&P 500*». Lorsqu'il y a déficit ($L^{ini}=35$ \$ et $A^{ini}=30$ \$), la pondération dans les actions passe à 57,60% aux dépens des obligations et de l'immobilier dont les poids diminuent respectivement à 12,89% et à 29,51%: plus élevé est le déficit, plus agressif est le portefeuille. A l'instar des *FMN*, en investissant dans un portefeuille plus risqué, la caisse de retraite augmente son rendement espéré afin de pouvoir résorber le déficit à venir.

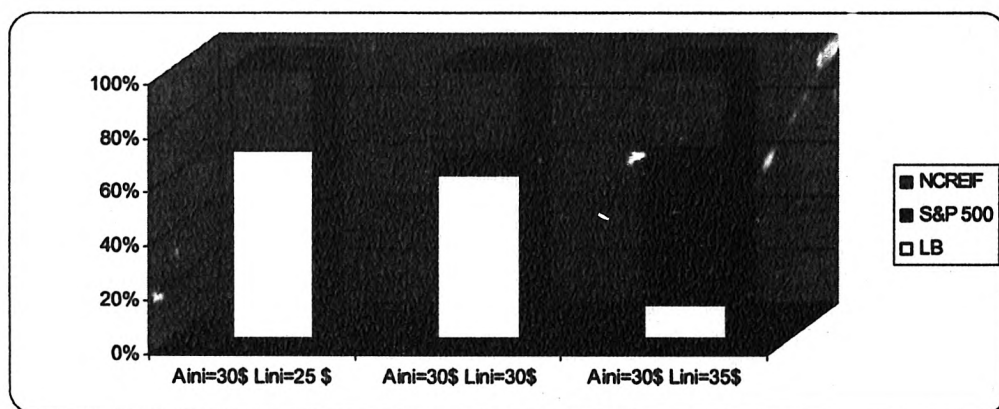


Figure 3-8: Composition du portefeuille optimal en 1987 pour différents déficits initial actif/passif

Dans le cas où la caisse de retraite a un contrôle sur les *FMN*, celle-ci peut augmenter les cotisations ou diminuer les prestations afin de diminuer le risque du portefeuille. L'investisseur doit donc arbitrer entre augmenter le risque du portefeuille et augmenter les *FMN*. Dans le cas contraire où l'actif initial excède le passif, le comité n'a

pas besoin de prendre des actifs à rendements élevés, car il augmenterait le risque de déficit. Le comité se contente alors d'avoir un niveau de risque moindre en investissant plus dans les actifs peu risqués puisqu'il n'a pas initialement de déficit à résorber et s'assure ainsi que son actif reste supérieur à son passif ultérieurement.

En résumé, plus le déficit est élevé, plus l'investisseur doit éponger ce déficit, et plus le portefeuille suggéré est agressif.

Année	L ^{m=25} A ^{m=30}			L ^{m=28} A ^{m=30}			L ^{m=30} A ^{m=30}			L ^{m=32} A ^{m=30}			L ^{m=35} A ^{m=30}		
	Oblig.	Actions	Immo.	Oblig.	Actions	Immo.	Oblig.	Actions	Immo.	Oblig.	Actions	Immo.	Oblig.	Actions	Immo.
1984	66,3%	0,0%	33,7%	66,3%	0,0%	33,7%	66,3%	0,0%	33,7%	66,2%	0,1%	33,7%	35,4%	31,2%	33,4%
1985	66,6%	0,0%	33,4%	66,6%	0,0%	33,4%	66,6%	0,0%	33,4%	66,5%	0,1%	33,4%	36,4%	29,7%	33,9%
1986	53,3%	15,2%	31,5%	64,4%	4,2%	31,4%	60,1%	8,5%	31,5%	36,7%	31,7%	31,7%	12,9%	55,8%	31,3%
1987	69,8%	0,0%	30,2%	69,9%	0,0%	30,1%	61,1%	8,8%	30,1%	37,0%	32,9%	30,1%	12,9%	57,6%	29,5%
1988	68,8%	0,0%	31,3%	68,9%	0,0%	31,1%	60,1%	8,9%	31,0%	36,2%	33,0%	30,9%	12,5%	57,3%	30,1%
1989	68,4%	0,0%	31,6%	68,5%	0,0%	31,5%	59,3%	9,5%	31,2%	35,1%	34,5%	30,4%	11,9%	58,9%	29,1%
1990	69,7%	0,0%	30,3%	69,8%	0,0%	30,2%	59,6%	11,0%	29,4%	34,0%	38,4%	27,7%	11,1%	63,3%	25,6%
1991	40,5%	30,3%	29,2%	46,3%	24,7%	29,1%	10,9%	60,1%	28,9%	1,8%	70,3%	27,9%	0,0%	73,6%	26,4%
1992	64,0%	36,0%	0,0%	49,4%	50,7%	0,0%	11,1%	88,9%	0,0%	1,8%	98,2%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%
1993	63,9%	36,1%	0,0%	49,3%	50,7%	0,0%	11,1%	88,9%	0,0%	1,8%	98,2%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%
1994	63,9%	36,2%	0,0%	49,2%	50,8%	0,0%	11,1%	88,9%	0,0%	1,8%	98,3%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%
1995	62,9%	37,1%	0,0%	48,2%	51,8%	0,0%	10,7%	89,3%	0,0%	1,7%	98,3%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%
1996	59,3%	40,7%	0,0%	44,5%	55,5%	0,0%	9,3%	90,7%	0,0%	1,5%	98,6%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%
1997	55,1%	44,9%	0,0%	40,3%	59,7%	0,0%	8,0%	92,0%	0,0%	1,2%	98,8%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%
1998	50,3%	49,7%	0,0%	35,7%	64,3%	0,0%	6,7%	93,3%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%
1999	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%
2000	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%
2001	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%
2002	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%
2003	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%
Richesse	238,25			264,11			352,68			391,02			417,34		
Rendement	10,92%			11,49%			13,11%			13,70%			14,07%		
Volatilité	5,94%			6,69%			9,1%			9,79%			10,27%		
R. Sharpe	0,89			0,88			0,82			0,83			0,82		

Tableau 3-6: Pondération optimale ex-ante du portefeuille pour différents passifs initiaux L^{int} .

Les pondérations optimales sont obtenues par la simulation de 1 700 scénarios sur une période de 4 années à chaque date de rééquilibrage. La fonction de pénalité est ϕ_3 et les Flux Monétaires Nets sont nuls. Les coûts de transactions des obligations, des actions et de l'immobilier sont respectivement de 1%, 1% et 5%. L'actif initial total est de 308. L'actif initial dans chacun des actifs est de 10. L'investisseur ne peut vendre plus de 100% dans la catégorie immobilière à chaque date de rééquilibrage. La première sous-colonne correspond à la pondération du portefeuille optimal dans l'indice *Lehman Brothers*. La seconde sous-colonne à l'indice *S&P 500 US* et la troisième sous-colonne à l'indice *NCREIF*.

Analyse de sensibilité des frictions du marché

Afin de comparer l'impact des frictions de marché (liquidité et frais de transaction) sur la composition du portefeuille, nous avons comparé le modèle *PDS* au modèle Moyenne-Variance. Afin de mieux analyser ces deux aspects, nous avons déterminé le plus réaliste possible les paramètres de liquidité et les frais de transaction du modèle selon les suggestions de spécialistes dans les différentes catégories d'actif. Ainsi, la contrainte de liquidité correspond à limiter la capacité de vente de l'immobilier à 40% du portefeuille immobilier détenu :

$$V_{\text{immeuble } t}^w \leq 0,4 (1 + r_{\text{immeuble } t-1}^w) X_{\text{immeuble } t-1}^w \quad t = 0, \dots, T-1 \quad w \in \Omega \quad (3.10)$$

Cette nouvelle contrainte met en exergue le coût en capital humain important pour la liquidation de l'actif immobilier (avocats, évaluateurs, négociateurs, ...). Les ressources humaines dédiées au portefeuille immobilier sont proportionnelles à la taille de ce dernier, et il devient difficile de liquider au delà de 40% du portefeuille immobilier.

Les frais de transactions considérés sont de l'ordre de 50 points de base pour les obligations, 75 points de base pour les actions et 500 points de base pour l'immobilier. Par ailleurs, nous avons considéré un portefeuille initial équilibré investissant 100 millions de dollars dans chacune des catégories d'actif. La fonction de pénalité ϕ_4 est considérée pour le risque de déficit de l'actif par rapport au passif.

Afin de déterminer le portefeuille optimal du modèle Moyenne-Variance, nous avons pris le modèle le plus usité: minimisation la variance du portefeuille pour un rendement espéré donné. Le rendement espéré à chaque date de rééquilibrage du portefeuille fut déterminé avec un actuair sur toute la période. Ainsi, le rendement espéré du portefeuille était aux environs de 12% au cours des années 1980 pour diminuer progressivement à 7% pour les années 2000. La méthodologie d'estimation des performances espérés des actifs (rendements, variances et corrélations) est la même que celle appliquée pour le modèle *PDS*. À chaque date de rééquilibrage, le montant transigé pour chaque catégorie d'actif est vérifié afin qu'il n'y ait pas de problème de profondeur du marché et d'impact sur les prix selon la liquidité du marché.

Les figures 3-9 et 3-10 représentent les frais de transactions déboursés sous les deux approches, par année et cumulatifs. En analysant ces graphiques, il est intéressant de constater que les frais de transaction déboursés par le portefeuille du modèle *PDS* sont inférieurs à ceux du modèle Moyenne-Variance, exception faite pour l'année 1999. Néanmoins, malgré des frais de transactions plus élevés pour l'année 1999, les frais de transactions en dollars cumulés restent cependant inférieurs à ceux encourus par le modèle Moyenne-Variance.

Par ailleurs, nous constatons que le montant des frais de transaction cumulés pour le modèle Moyenne-Variance est de 229 millions de dollars, alors qu'il n'est que de 152 millions de dollars pour le portefeuille *PDS* sur la même période, pour une richesse totale cumulée respectivement de 1,29 et 3,24 milliard de dollars.

La contrainte de liquidité est saturée de 1991 à 1998 pour le portefeuille *PDS*. La caisse de retraite a pu écouler 40% de son portefeuille immobilier détenu par an au cours de cette période. En analysant le cas du modèle Moyenne-Variance, la contrainte de liquidité n'a pas été respectée 30% des cas (6 années sur 20).²

Cette application montre bien que le modèle *PDS* prend en considération les frais de transaction pour déterminer le portefeuille optimal, contrairement au modèle Moyenne-Variance dont les frais de transactions sont plus élevés en absolu et relativement à la taille du portefeuille. Par ailleurs le modèle Moyenne-Variance ne prend pas en compte les problèmes de liquidité rencontrés pour des catégories d'actif peu liquides telles que l'immobilier. Le rendement réalisé annuel du modèle *PDS* est 508 points de base supérieur au modèle Moyenne-Variance (12,63% vs 7,55%).

² C'est-à-dire les années 1985, 1987, 1991, 1993, 1996 et 1999.

	PDS			Moyenne-Variance		
	Obligations	Actions	Immeuble	Obligations	Actions	Immeuble
1984	66,2%	0,0%	33,8%	43,6%	21,7%	34,7%
1985	66,6%	0,0%	33,4%	100,0%	0,0%	0,0%
1986	62,6%	6,0%	31,4%	62,9%	16,7%	20,4%
1987	63,7%	6,2%	30,1%	0,0%	100,0%	0,0%
1988	62,6%	6,3%	31,1%	53,0%	29,2%	17,8%
1989	62,0%	6,7%	31,3%	4,8%	49,9%	45,3%
1990	62,6%	7,8%	29,6%	17,1%	-0,4%	83,4%
1991	14,3%	68,6%		71,6%	24,8%	3,6%
1992	12,1%	80,1%		35,2%	59,3%	5,5%
1993	11,8%	84,1%		58,3%	41,7%	0,0%
1994	13,5%	84,3%		1,9%	80,8%	17,3%
1995	12,5%	86,1%		36,7%	11,8%	51,5%
1996	11,4%	88,0%		100,0%	0,0%	0,0%
1997	11,4%	88,3%		100,0%	0,0%	0,0%
1998	9,4%	90,2%		98,8%	0,0%	1,2%
1999	0,0%	0,0%	100,0%	39,0%	61,0%	0,0%
2000	0,0%	0,0%	100,0%	36,8%	58,3%	4,9%
2001	0,0%	0,0%	100,0%	70,2%	12,6%	17,3%
2002	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%
2003	0,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%
Richesse finale	3 235 425 105,55 \$			1 286 107 938,26 \$		
	contrainte de liquidité saturée					
	Contrainte de liquidité non respectée					

Tableau 3-7: Comparaison de la richesse finale du PDS au Moyenne-Variance

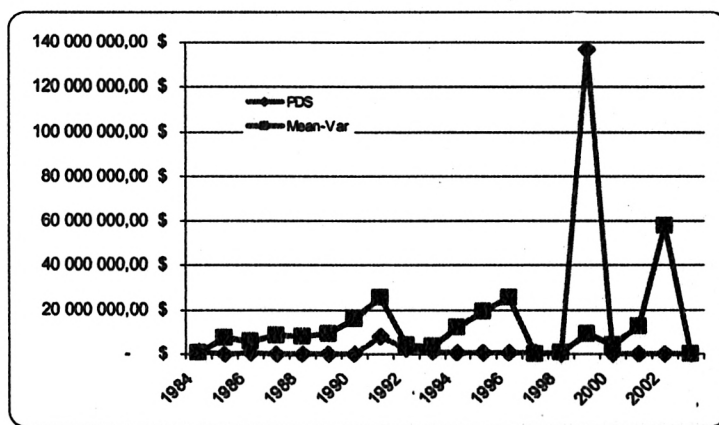


Figure 3-9: Frais de transaction

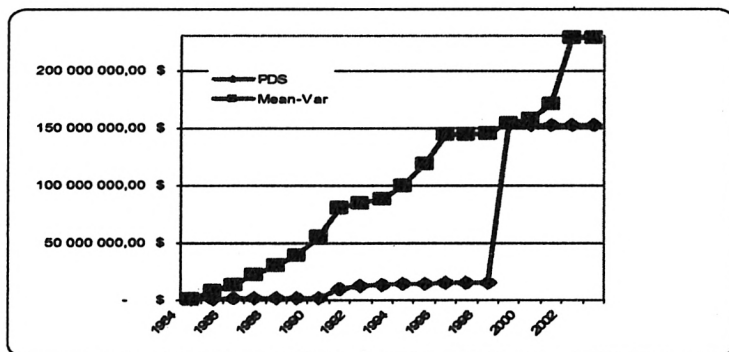


Figure 3-10: Comparaison des frais de transaction cumulatif

Comparaison des rendements réalisés

En observant les rendements et les volatilités réalisés par les portefeuilles *PDS* sur la période 1984 à 2003, nous constatons que les performances varient selon la fonction de pénalité, les Flux Monétaires Nets et le déficit initial. En effet, en faisant varier l'aversion au risque de déficit (tableau 3-2), le rendement du portefeuille augmente de 12,33% pour la fonction la plus sévère φ_7 à 14,37% pour la fonction la moins sévère φ_3 . Quant à la volatilité, elle augmente de 7,96% à 9,1%. De même, en variant les Flux Monétaires Nets, le rendement passe de 11,04% pour FMN_1 à 13,36% pour FMN_4 , et la volatilité de 6,22% à 9,52% (tableau 3-3). Quant au déficit initial, le rendement et la volatilité augmentent respectivement de 10,92% et 5,94% ($L^{ini} = 25$ \$) à 14,07% et 10,27% ($L^{ini} = 35$ \$) (tableau 3-6). Par conséquent, le rendement réalisé et le risque du portefeuille augmentent lorsque son déficit initial augmente, et lorsque les *FMN* et l'aversion au risque de déficit diminuent.

Nous observons que le ratio de Sharpe³ varie entre 0,81 et 0,89 pour l'ensemble des cas testés (excepté pour φ_1 qui ne prend pas en considération le risque de pénalité). Ce ratio est très stable d'un cas à l'autre. En effet, le modèle rééquilibre le portefeuille en

³ $Ratio\ Sharpe = (R - R_{TSR}) / \sigma$; avec R : le rendement du portefeuille, R_{TSR} : le taux sans risque (T-bill 3 mois), σ : la volatilité du portefeuille.

arbitrant entre le rendement et la volatilité du portefeuille. Il trouve ainsi un portefeuille qui permet d'équilibrer la relation rendement-risque.

A titre de comparaison, nous testons des méthodes d'allocations traditionnelles (l'«Achat-Détention»⁴ et le «Constant-Mix»⁵), et ce pour différentes pondérations (tableau 3-8). Ces approches sont des approches myopes car elles pondèrent mécaniquement et indépendamment du contexte de l'investissement.

Selon la pondération et le cas, le ratio de Sharpe de l'«Achat-Détention» varie entre 0,43 et 0,72, et celui du «Constant-Mix» varie entre 0,51 et 0,65. Il est à noter que le meilleur ratio de Sharpe pour les deux méthodes est obtenu lorsque le portefeuille est équipondéré⁶. Nous constatons que les ratios de Sharpe sont beaucoup plus variables quand on utilise les méthodes d'allocation traditionnelles que selon le modèle de *PDS*. Par ailleurs, nous observons que le modèle *PDS* a des rendements généralement égaux ou supérieurs pour des degrés de volatilité plus faibles: les ratios de Sharpe sont donc plus élevés. Ces résultats s'expliquent par le fait que, contrairement à l'«Achat-Détention» et au «Constant-Mix», le modèle considère tout le contexte de l'investissement pour déterminer le rendement-risque du portefeuille optimal: les prévisions, l'aversion du risque de déficit, le flux monétaires, le déficit et les frictions du marché sont prises en compte pour un rééquilibrage du portefeuille selon le rendement-risque optimal.

⁴ L'«Achat-Détention» consiste à acheter en début de période un certain pourcentage dans chacune des catégories d'actif et à les détenir jusqu'à terme. Cette stratégie est dite passive car aucun rééquilibrage n'est fait durant la période.

⁵ Le «Constant-Mix» consiste à rééquilibrer le portefeuille périodiquement afin de garder constantes les pondérations initiales.

⁶ Ce point est souligné dans le papier DeMiguel, Garlappi et Uppal (2004).

Composition du portefeuille					FMN ₁	FMN ₂	FMN ₃	FMN ₄
LB	S&P	NCREIF						
30%	50%	20%	Achat-détention	Richesse	319,77 \$	256,53 \$	249,45 \$	242,16 \$
				Rendement	10,96%	11,13%	11,17%	11,21%
				Volatilité	12%	12%	12%	12%
				R. Sharpe	0,45	0,46	0,46	0,47
			Constant-Mix	Richesse	312,61 \$	248,26 \$	240,50 \$	232,75 \$
				Rendement	10,82%	10,94%	10,97%	11%
20%	60%	20%	Achat-détention	Volatilité	9,48%	9,48%	9,48%	9,48%
				R. Sharpe	0,55	0,56	0,57	0,57
				Richesse	338,55 \$	272,40 \$	265,16 \$	257,69 \$
				Rendement	11,30%	11,47%	11,51%	11,55%
			Constant-Mix	Vol.	13,26%	13,26%	13,26%	13,26%
				R. Sharpe	0,43	0,44	0,44	0,45
40%	60%	0%	Achat-détention	Richesse	329,99 \$	262,88 \$	254,98 \$	247,08 \$
				Return	11,15%	11,276%	11,29%	11,32%
				Volatilité	10,9%	10,9%	10,9%	10,9%
				R. Sharpe	0,51	0,52	0,52	0,52
			Constant-Mix	Richesse	346,89 \$	280,01 \$	272,79 \$	265,42 \$
				Rendement	11,45%	11,62%	11,67%	11,71%
30%	60%	10%	Achat-détention	Volatilité	13,11%	13,11%	13,11%	13,11%
				R. Sharpe	0,45	0,46	0,46	0,47
				Richesse	349,38 \$	280,31 \$	272,39 \$	264,47 \$
				Rendement	11,49%	11,63%	11,66%	11,69%
			Constant-Mix	Volatilité	11,25%	11,25%	11,25%	11,25%
				R. Sharpe	0,52	0,54	0,54	0,54
33.3%	33.3%	33.3%	Achat-détention	Richesse	342,93 \$	276,39 \$	269,15 \$	255,88 \$
				Rendement	11,38%	11,55%	11,59%	11,51%
				Volatilité	13,11%	13,11%	13,11%	13,11%
				R. Sharpe	0,44	0,45	0,46	0,45
			Constant-Mix	Richesse	339,90	271,71	263,80	243,23
				Rendement	11,33%	11,45%	11,48%	11,24%
Φ ₃			Achat-détention	Volatilité	11,04%	11,04%	11,04%	11,04%
				R. Sharpe	0,52	0,53	0,53	0,51
				Richesse	280,60 \$	224,14 \$	217,50 \$	306,63 \$
				Rendement	10,17%	10,37%	10,41%	12,51%
			Constant-Mix	Volatilité	9,65%	9,65%	9,65%	9,65%
				R. Sharpe	0,47	0,49	0,50	0,72
Φ ₅			Achat-détention	Richesse	263,38 \$	206,54 \$	207,27 \$	199,78 \$
				Rendement	9,78%	9,91%	10,15%	10,17%
				Volatilité	7,07%	7,07%	7,07%	7,07%
				R. Sharpe	0,59	0,61	0,64	0,65
			Constant-Mix	Richesse	324,17 \$	345,15 \$	352,69 \$	324,17 \$
				Rendement	11,04%	12,82%	13,11%	11,04%
Φ ₇			Achat-détention	Volatilité	6,22%	8,64%	9,1%	6,22%
				R. Sharpe	0,87	0,83	0,82	0,87
				Richesse	312,77 \$	321,99 \$	323,57 \$	312,77 \$
				Rendement	10,82%	12,42%	12,63%	10,82%
			Constant-Mix	Volatilité	6,05%	8,11%	8,33%	6,05%
				R. Sharpe	0,86	0,84	0,84	0,86
Φ ₉			Achat-détention	Richesse	301,70 \$	303,04 \$	306,91 \$	301,70 \$
				Rendement	10,61%	12,07%	12,33%	10,61%
				Volatilité	5,74%	7,60%	7,96%	5,74%
				R. Sharpe	0,87	0,85	0,84	0,87

Tableau 3-8: Comparaison de la richesse finale des méthodes traditionnelles au PDS

3.5 Conclusion

Nous appliquons un modèle de programmation dynamique stochastique prenant en considération le risque de déficit de l'actif par rapport au passif, les coûts de transactions, le manque de liquidité de certains actifs et l'interdiction de vente à découvert. Pour l'application de ce modèle, nous proposons une méthode simple et explicite pour la génération de scénarios à partir de la simulation de Monte-Carlo de processus estimés à l'aide de données publiques. Le modèle est testé pour différentes fonctions de pénalités, de flux de cotisations/prestations et de déficit/surplus initiaux. La richesse finale ainsi que la volatilité des rendements sont comparées à celles réalisées par des méthodes d'allocations plus traditionnelles, le modèle Moyenne-Variance, l'«Achat-Détention» et le «Constant-Mix».

Les résultats montrent que plus l'investisseur est averse au risque de déficit, plus il investit dans les actifs les moins risqués (surtout en obligations et, dans une moindre mesure, dans l'immobilier, aux dépens des actions).

Nous constatons aussi que plus les Flux Monétaires Nets et le surplus initial de l'actif par rapport au passif sont élevés, et plus le portefeuille est conservateur favorisant ainsi les obligations aux dépens des actions et, dans une moindre mesure, de l'immobilier. Dans le cas contraire, c'est-à-dire des Flux Monétaires Nets faibles ou négatifs, l'investisseur va prendre un portefeuille plus risqué pour obtenir un plus haut rendement espéré et ainsi faire face aux futures prestations grâce au gain de capital espéré du portefeuille.

Enfin, contrairement aux trois autres méthodes d'allocation, le modèle de *PDS* prend en considération les caractéristiques de l'investisseur (son aversion au risque de déficit), les caractéristiques du marché (le manque de liquidité, les coûts de transaction et la non-vente à découvert), l'information disponible (les rendements historiques, le *PNB*, le taux d'inflation,...) et les caractéristiques du portefeuille de la caisse de retraite (les actifs, le passif, la période, les cotisations et les prestations,...) pour déterminer le portefeuille ex-ante optimal et maximiser l'objectif du comité. Ex post, nous constatons que les performances réalisés par le modèle de *PDS* sont meilleures que les méthodes d'allocation traditionnelles. Ces résultats confirment l'utilité d'un modèle *PDS* pour une

allocation de portefeuille tenant compte des considérations de risque dans un contexte dynamique et incertain. Ce sujet est d'autant plus d'actualité considérant le déficit des grands fonds de pension occidentaux tels que celui de General Motors.

4 Approche *minimax* pour une solution robuste

4.1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous soulignons que les modèles basés sur la programmation dynamique stochastique (*PDS*) ont été développés afin de pallier les inconvénients de l'approche statique (sensibilité aux paramètres, approche myope, problème de gestion actif/passif, frictions du marché,...). Or, l'approche *PDS* nécessite de connaître la distribution de probabilité des événements incertains, alors que l'investisseur n'a probablement qu'une connaissance imparfaite de cette distribution.

Nous proposons de relâcher la condition de la connaissance parfaite de la distribution de probabilités des scénarios par une connaissance imparfaite de celle-ci. Par ailleurs, nous proposons de trouver la solution robuste du modèle *PDS* selon l'information partielle de la distribution grâce à l'approche *minimax*.

Nous montrons que l'approche *worst-case* est un cas particulier de l'approche *minimax*. Par ailleurs, nous montrons comment la composition du portefeuille varie selon la disponibilité de cette information. Nous appliquons numériquement le modèle pour une gestion actif-passif d'une caisse de retraite, et nous analysons la sensibilité de la composition du portefeuille selon le degré de connaissance de l'information. Les résultats de l'application sur la période 1990 à 2004 vérifient que moins la distribution est décrite avec précision, plus la solution robuste est conservatrice.

Dans la première partie, nous présentons les approches robustes dans le contexte de l'allocation d'actif. Nous exposons l'approche *minimax* pour déterminer la solution

robuste du modèle *PDS* dans la seconde partie. Enfin, dans la troisième partie, nous présentons les résultats d'une application numérique dans le cas d'une gestion actif-passif d'une caisse de retraite, ainsi que l'analyse de sensibilité du portefeuille selon les contraintes sur la distribution.

4.2 Approche robuste pour l'allocation d'actif

Malgré le succès théorique du modèle Moyenne-Variance, son application est problématique du fait de la sensibilité de la solution aux valeurs des paramètres et de l'imprécision de l'estimation de ces paramètres. Ainsi, Michaud (1998) mentionne :

«Small changes in input assumptions often lead to large changes in the optimized....Although Markowitz efficiency is a convenient and useful theoretical framework for portfolio optimality, in practice it is an error-prone procedure that often results in error-maximized and investment-irrelevant portfolios».

Du fait que l'estimation des paramètres du marché (rendements et covariances) est sujette à des erreurs statistiques, Chopra (1993) et, Chopra et Ziemba (1993) reconnaissent que les résultats des optimisations ne sont pas toujours très fiables.

Plusieurs techniques sont suggérées afin d'atténuer le problème de variation des paramètres dans le temps, telles que contraindre les poids des portefeuilles (Chopra (1993)), utiliser l'estimateur de James-Stein pour la moyenne («shrinkage estimator») (Chopra *et al.* (1993)), prendre des estimateurs baysiens pour les rendements et les covariances (Frost et Savarinio (1986), Black et Litterman (1990)). Toutes ces approches permettent d'atténuer la variation des estimations des paramètres dans le temps, mais ne garantissent pas l'admission (respect des contraintes) de la solution, même pour de légères erreurs dans l'estimation des paramètres. Bertsimas et Sim (2004) suggèrent de reformuler les modèles sous une approche «robuste» permettant d'immuniser la solution du modèle aux incertitudes des données («*solution approaches that are immune to data uncertainty*»). L'approche robuste est un terme englobant plusieurs techniques permettant de garantir l'admissibilité et, dans une certaine mesure, la performance de la solution lorsque les paramètres d'un modèle sont incertains.

Si nous prenons le cas de l'optimisation de portefeuille, le modèle Moyenne-Variance classique pour d'allocation dans n actifs est le suivant:

$$\begin{aligned} \min_x & X^T \Sigma X \\ \text{s.c.} & \quad r^T X = \bar{r} \\ & \quad \Lambda X \leq \gamma \end{aligned} \quad (4.1)$$

Où :

X : Vecteur des proportions investies dans les actifs,

Σ : Matrice variance-covariance,

r : Vecteur des rendements espérés des actifs,

$\bar{r}$: Rendement cible du portefeuille,

$\Lambda X \leq \gamma$: Contraintes sur le portefeuille (limites de pondération dans les catégories d'actifs,...).

Toutefois, si nous supposons par exemple que le vecteur des rendements espérés n'est pas connu mais appartient à un ensemble quelconque donné, noté $\mathfrak{I}$, la reformulation du modèle (4.1) sous sa forme robuste est :

$$\begin{aligned} \min_x & X^T \Sigma X \\ \text{s.c.} & \quad \tilde{r}^T X = \bar{r} \\ & \quad \Lambda X \leq \gamma \\ & \quad \forall \tilde{r} \in \mathfrak{I} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ainsi, la solution du modèle (4.2) correspond à la meilleure répartition du portefeuille dans les actifs telle que les contraintes sont respectées pour n'importe quel $\tilde{r} \in \mathfrak{I}$.

Le premier à proposer une approche robuste fut Soyster (1973), dans un cadre général. Dans le cas de l'allocation d'actif, la solution suggérée par Soyster correspond à résoudre le modèle suivant:

$$\begin{aligned}
 & \min_x X^T \Sigma X \\
 & \text{s.c. } \hat{r}^T X = \bar{r} \\
 & \quad \Delta X \leq \gamma \\
 & \quad \hat{r} = \inf \{\mathfrak{I}\}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Cette approche consiste à optimiser le portefeuille dans le cas où tous les rendements sont simultanément les plus mauvais. Toutefois, la solution de ce problème est très conservatrice, car elle ne tient pas compte de la corrélation entre les actifs. Dans le cas où on représente l'incertitude par plusieurs scénarios rivaux, Chow (1979) suggère de déterminer la composition optimale du portefeuille dans chacun des scénarios, puis de choisir le portefeuille dont le rendement est le plus faible, correspondant donc au pire scénario. Cette approche consiste donc à maximiser le rendement pour le pire scénario (*worst-case*). Cette approche est également très conservatrice, et ne prend pas non plus en compte les corrélations.

Plusieurs autres approches robustes d'allocation d'actif moins conservatrices furent développées par la suite. Ben-Tal et Nemirovki proposent un cadre de travail pour les optimisation robustes statiques convexes (Ben-Tal et Nemirovki (1998)) et linéaires (Ben-Tal et Nemirovki (1999)). Ils montrent qu'un modèle sous l'approche robuste peut être numériquement traité lorsque l'ensemble $\mathfrak{I}$ est ellipsoïdal. Le problème correspond alors à un programme quadratique conique. Goldfarb et Yiengar (2003) reprennent les trois variantes du modèle de Markowitz (maximisation du rendement sous la contrainte de la minimisation de la variance, minimisation de la variance sous la contrainte de la maximisation du rendement, maximisation du ratio de Sharpe) et les reformulent selon l'approche robuste en considérant l'incertitude sur les rendements r , les facteurs du marché f et les covariances σ sous la forme de domaines de variation.

Ainsi, le problème robuste de maximisation du ratio de Sharpe correspond alors à la modélisation *minimax* suivante:

$$\max_{x \in D^x} \min_{r \in D^r, f \in D^f, \sigma \in D^\sigma} \left\{ \frac{E(r_x) - r_f}{\sigma_x} \right\}. \quad (4.4)$$

Leurs résultats montrent que les portefeuilles robustes supportent mieux les perturbations incertaines des paramètres que les modèles classiques. En effet, les résultats fluctuent moins, d'où une moindre dégradation des performances que le modèle Moyenne-Variance. La robustesse de la méthode se distingue alors par la non-infériorité de la solution malgré les perturbations des paramètres.

Plus récemment, ces modèles ont été étendus au cas multipériode. Ainsi, Ben-Tal, Margalit et Nemirovki (2000) reprennent leurs résultats et l'étendent à un modèle convexe d'allocation multipériode où l'ensemble incertain est ellipsoïdal. Dans la même lignée, Bertsimas et Pachamanova (2005) considèrent que l'ensemble incertain est polyédrique (tel que présentés par Bertsimas, Pachamanova et Sim (2004)), et proposent une formulation robuste linéaire d'un problème multipériode d'allocation de portefeuille. La modélisation linéaire du problème permet de résoudre un modèle d'allocation d'actif plus complexe prenant en compte les coûts de transaction, les contraintes d'impôt et les contraintes sur la structure du portefeuille. Leurs résultats montrent que cette modélisation dynamique affiche de meilleures performances que le modèle statique Moyenne-Variance. Pinar et Tütüncü (2004) présentent un modèle d'opportunité de profit robuste où chacun des éléments du vecteur des rendements prospectifs varie dans un intervalle, dans un cadre multipériode:

$$\begin{aligned} & \sup_{x, \theta} \\ & s.c., \quad \tilde{r}^T X - \theta \sqrt{X^T \Sigma X} \geq 0, \\ & 1^T X < 0, \\ & \tilde{r} \in \mathfrak{F} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le problème (4.5) consiste alors à maximiser le rendement-risque pour l'aversion au risque θ la plus élevée, et ne nécessitant pas d'investissement initial.

4.3 Approche *minimax* pour la formulation robuste de *PDS*

La plupart des approches robustes présentées dans la littérature suggèrent que les rendements espérés sont incertains. Or, l'incertitude peut également se traduire par celle des probabilités de scénarios rivaux:

$$\inf(\hat{r}) \leq \sum_{w \in \Omega} P^w \hat{r}^w \leq \sup(\hat{r}) \quad (4.6)$$

Où:

$\hat{r}$: Variable rendement espéré d'un actif $\hat{r} \in \mathfrak{I}^1$,

P^w : Variable probabilité du scénario w , $P^w \geq 0$, $\sum_{w \in \Omega} P^w = 1$, $w \in \Omega$,

$\hat{r}^w$: Rendement espéré du scénario w , $w \in \Omega$.

L'approche *minimax* est donc une généralisation des problèmes robustes. Nous proposons de résoudre, grâce à l'approche *minimax*, le modèle robuste *PDS* de gestion actif-passif d'une caisse de retraite présenté dans le chapitre précédent. Pour cela, nous considérons que l'information disponible au sujet de la distribution de probabilité des paramètres est incomplète.

Ainsi, Breton et El-Hachem (1994) proposent de résoudre le problème robuste d'un portefeuille d'actif par l'approche *minimax* lorsque l'information disponible au sujet de la distribution de probabilité des paramètres est incomplète. De même, Rustem, Becker et Marty (2000) proposent d'utiliser l'approche *minimax* pour déterminer le portefeuille robuste de bons de trésor pour différents scénarios Moyenne-Variance :

$$\min_P \max_X \sum_{w \in \Omega} P^w (\hat{r}^w X - \alpha (X - \bar{X})^T \Sigma^w (X - \bar{X})) \quad (4.7)$$

Où :

X : Vecteur des proportions investies dans les bons de trésor,

$\hat{r}^w$: Vecteur des rendements espérés des bons de trésor du scénario w ,

α : Aversion au risque,

Σ^w : Matrice covariance pour le scénario w ,

$\bar{X}$: Composition du portefeuille cible,

P : Vecteur de probabilité des scénarios, $P = \left\{ P^w; w \in \Omega / \sum_{w \in \Omega} P^w = 1; P^w \geq 0 \right\}$

En reprenant le modèle *PDS* présenté dans le chapitre 2, pour une distribution de probabilité des scénarios donnée p , la fonction objectif f du modèle consiste à déterminer l'allocation optimale X respectant les contraintes sur l'allocation D_X (les contraintes d'inventaire (2.1), (2.2) et (2.3), de budget (2.4), du marché (2.5), (2.6) et (2.7), de fonction de pénalité (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) et (2.12), et de non anticipation (3.3) et (3.4)) maximisant la richesse de la caisse de retraite tout en considérant les coûts de pénalité du déficit actif/passif:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{X \in D_X} f(X) &= \text{Max}_{X \in D_X} E_{w \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{t=1}^T \phi(Z_t^w) \right] \\ &= \text{Max}_{X \in D_X} \sum_{w \in \Omega} \left[P^w \left(\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{t=1}^T \phi(Z_t^w) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Or, l'investisseur peut être plus à l'aise en ne spécifiant que partiellement la distribution de probabilités des scénarios. L'algorithme *minimax* permet alors de résoudre le modèle *PDS* malgré une information incomplète sur la distribution. La probabilité de réalisation du scénario w n'est plus un paramètre déterministe p^w , mais une variable P^w respectant l'information partielle.

Soit la distribution de probabilités des scénarios

$$P = \left\{ P^w; w \in \Omega / \sum_{w \in \Omega} P^w = 1; P^w \geq 0 \right\}.$$

Le modèle va alors maximiser la fonction objectif par rapport à la pire des distributions P respectant la connaissance partielle D_P qu'a l'investisseur de la distribution:

$$\begin{aligned} \min_{P \in D_P} \max_{X \in D_X} f(X, P) &= \min_{P \in D_P} \max_{X \in D_X} E_{w \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{t=1}^T \varphi(Z_t^w) \right] \\ &= \min_{P \in D_P} \max_{X \in D_X} \sum_{w \in \Omega} \left[P^w \left(\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{t=1}^T \varphi(Z_t^w) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

La fonction objectif à optimiser (4.9) correspond alors à un jeu dynamique où se confrontent deux acteurs. D'une part, la «nature» minimise la fonction objectif f en optimisant sur la distribution des probabilités P selon le portefeuille X . D'autre part, l'investisseur maximise la fonction objectif f en optimisant le portefeuille X selon la distribution P .

Grâce à cette flexibilité sur l'information, ce modèle permet de regrouper les modèles *PDS*, *worst-case* de Chow (1979) et *minimax* de Rustem, Becker et Marty (2000). En effet, en spécifiant l'information disponible sur la distribution, nous spécifions le domaine de définition de la distribution de probabilité. Il suffit donc de faire varier les contraintes sur le domaine de définition pour obtenir l'un de ces modèles.

Dans le cas du problème *PDS*, celui-ci correspond au problème du *minimax* lorsque que l'information sur la distribution est complète. Ainsi, il suffit de prendre la distribution de probabilité supposée par l'investisseur pour avoir le modèle *PDS*. Dans notre cas, nous supposons que cette distribution est identique à celle du chapitre précédent c'est-à-dire que les scénarios sont équiprobables. Le problème *minimax* correspond alors au modèle *PDS* suivant:

$$\begin{aligned} \min_{P \in D_P^{PDS}} \max_{X \in D_X} f(X, P) &= \min_{P \in D_P^{PDS}} \max_{X \in D_X} E_{w \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{t=1}^T \varphi(Z_t^w) \right] \\ &= \min_{P \in D_P^{PDS}} \max_{X \in D_X} \sum_{w \in \Omega} \left[P^w \left(\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{t=1}^T \varphi(Z_t^w) \right) \right] \\ &= \max_{X \in D_X} \sum_{w \in \Omega} \left[P^w \left(\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{t=1}^T \varphi(Z_t^w) \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \text{Max}_{X \in D_X} \sum_{w \in \Omega} \left[S^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{i=1}^T \varphi(Z_i^w) \right) \right] = \text{Max}_{X \in D_X} f(X) \quad (4.10)$$

Avec:

$$D_p^{PDS} = \{P / P^w = p^w = 1/S; S = \text{card}(\Omega)\}$$

De même, l'approche *worst-case* correspond à résoudre le modèle *minimax* suivant:

$$\begin{aligned} \min_{P \in D_p^{WC}} \text{Max}_{X \in D_X} f(X, P) &= \min_{P \in D_p^{WC}} \text{Max}_{X \in D_X} E_{w \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{i=1}^T \varphi(Z_i^w) \right] \\ &= \min_{P \in D_p^{WC}} \text{Max}_{X \in D_X} \sum_{w \in \Omega} \left[P^w \left(\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{i=1}^T \varphi(Z_i^w) \right) \right] \\ &= \min_{w \in \Omega} \left\{ \text{Max}_{X \in D_X} f^w(X) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Avec:

$$D_p^{WC} = \left\{ P / \sum_{\substack{i,j \in \Omega \\ i \neq j}} P^i P^j = 0 \right\}$$

$$f^w(x) = f(x, p^{WC}) / p^{WC} = \{P / p^w = 1\}$$

En supposant qu'aucune information n'est disponible et en remplaçant la variance par le déficit actif/passif, le modèle *minimax* dynamique stochastique et celui de Rustem, Becker et Marty (2000) deviennent alors similaires:

$$\begin{aligned} \min_{P \in D_p^{SC}} \text{Max}_{X \in D_X} f(X, P) &= \min_{P \in D_p^{SC}} \text{Max}_{X \in D_X} E_{w \in \Omega} \left[\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{i=1}^T \varphi(Z_i^w) \right] \\ &= \min_{P \in D_p^{SC}} \text{Max}_{X \in D_X} \sum_{w \in \Omega} \left[P^w \left(\sum_{i=1}^N X_{iT}^w - \sum_{i=1}^T \varphi(Z_i^w) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Avec:

$$D_p^{SC} = \left\{ P / \sum_{w \in \Omega} P^w = 1; P^w \geq 0 \right\}$$

La flexibilité selon la spécification de la distribution des probabilités des scénarios permet de regrouper l'ensemble de ces méthodes sous le même modèle *minimax* générique.



Figure 4-1: Différents modèles selon la distribution de probabilités

La solution robuste dépend donc de la disponibilité de l'information sur la distribution.

Lemme 4.1

Soit D_p^1 et D_p^2 représentent des domaines de définition des distributions de probabilités, si $D_p^1 \subset D_p^2$ alors $\min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) \leq \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X)$

Preuve

Soit $D_p^1 \subset D_p^2$ (1)

D'après (1):

$$\forall P \in D_p^1 \Rightarrow P \in D_p^2 \quad (2)$$

Soit les couples (P^{1*}, X^{1*}) et (P^{2*}, X^{2*}) , les solutions des égalités suivantes:

$$f(P^{1*}, X^{1*}) = \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (3)$$

$$f(P^{2*}, X^{2*}) = \min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (4)$$

Étant donné l'inclusion (2), nous avons donc $P^{1*} \in D_p^2$. D'après (3) et (4), nous pouvons donc écrire:

$$\min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) = f(P^{2*}, X^{2*}) \leq f(P^{1*}, X^{2*}) \leq f(P^{1*}, X^{1*}) = \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (5)$$

D'où

$$D_p^1 \subset D_p^2 \Rightarrow \min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) \leq \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (6)$$

Étant donné que la solution robuste du domaine D_p^1 est supérieure à celle du domaine D_p^2 , il en résulte que le portefeuille X^{2*} devrait être plus conservateur que X^{1*} .

■

Ainsi, plus les contraintes sont restrictives, et moins le portefeuille est conservateur. Par ailleurs, ce lemme montre que la solution obtenue sous l'approche *minimax* sans contraintes est plus robuste que l'approche *worst-case*. En effet, soit D_p^{wc} et D_p^{sc} , respectivement les domaines de définition des distributions des approches *worst-case* et du cas sans contraintes. Nous obtenons alors l'inégalité suivante confirmant que le cas *worst-case* est un cas particulier le modèle *minimax* plus général:

$$D_p^{wc} \subset D_p^{sc} \Rightarrow \min_{P \in D_p^{sc}} \max_{X \in D_X} f(P, X) \leq \min_{P \in D_p^{wc}} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{w \in \Omega} \left\{ \max_{X \in D_X} f^w(X) \right\}$$

Lemme 4.2

Soit P^{1*} et P^{2*} , respectivement les probabilités optimale du problème pour les domaines de distribution D_p^1 et D_p^2 , alors:

$$P^{1*} \in D_p^2 \text{ et } P^{2*} \notin D_p^1 \Rightarrow \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) \leq \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1 \cap D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X)$$

$$P^{1*} \notin D_p^2 \text{ et } P^{2*} \in D_p^1 \Rightarrow \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) \leq \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1 \cap D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X)$$

$$P^{1*} \in D_p^2 \text{ et } P^{2*} \in D_p^1 \Rightarrow \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1 \cap D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X)$$

Preuve

Soit les couples (P^{1*}, X^{1*}) , (P^{2*}, X^{2*}) et (P^{3*}, X^{3*}) , les solutions des égalités suivantes:

$$f(P^{1*}, X^{1*}) = \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (7)$$

$$f(P^{2*}, X^{2*}) = \min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (8)$$

$$f(P^{3*}, X^{3*}) = \min_{P \in D_p^1 \cap D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (9)$$

3 cas se présentent:

Cas (1): $P^{1*} \in D_p^2$ et $P^{2*} \notin D_p^1$

Cas (2): $P^{1*} \notin D_p^2$ et $P^{2*} \in D_p^1$

Cas (3): $P^{1*} \in D_p^2$ et $P^{2*} \in D_p^1$

Cas (1):

$$P^{1*} \in D_p^2 \text{ et } P^{2*} \notin D_p^1 \Rightarrow \min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) \leq \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1 \cap D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X)$$

Soit $P^{1*} \in D_p^2$, d'après (7) et (8), nous pouvons écrire:

Si $P^{1*} \in D_p^2$ alors:

$$\min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) = f(P^{2*}, X^{2*}) \leq f(P^{1*}, X^{2*}) \leq f(P^{1*}, X^{1*}) = \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (9)$$

De même:

$P^{3*} \in D_p^1$ alors:

$$\min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) = f(P^{1*}, X^{1*}) \leq f(P^{1*}, X^{3*}) \leq f(P^{3*}, X^{3*}) = \min_{P \in D_p^3} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (10)$$

$P^{1*} \in D_p^3$ alors $P^{1*} \in D_p^1 \cap D_p^3$:

$$\min_{P \in D_p^3} \max_{X \in D_X} f(P, X) = f(P^{3*}, X^{3*}) \leq f(P^{1*}, X^{3*}) \leq f(P^{1*}, X^{1*}) = \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (11)$$

D'après les inéquations (10) et (11), nous obtenons donc l'égalité suivante:

$$\min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (12)$$

En combinant l'inéquation (9) et l'égalité (12):

$$\min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) \leq \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1 \cap D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) \quad (13)$$

D'où:

$$P^{1*} \in D_p^2 \text{ et } P^{2*} \notin D_p^1 \text{ alors } \min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) \leq \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1 \cap D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X)$$

Cas (2):

Démonstration idem au cas (1)

$$P^{1*} \notin D_p^2 \text{ et } P^{2*} \in D_p^1 \Rightarrow \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) \leq \min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1 \cap D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X)$$

Cas (3):

$$P^{1*} \in D_p^2 \text{ et } P^{2*} \in D_p^1 \Rightarrow \min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1 \cap D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X)$$

Soit $P^{1*} \in D_p^2$ et $P^{2*} \in D_p^1$

En se basant sur les cas (1) et (2), nous avons les relations suivantes:

$$\min_{P \in D_p^1} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X) = \min_{P \in D_p^1 \cap D_p^2} \max_{X \in D_X} f(P, X)$$

■

Ainsi, plus l'investisseur est incertain sur la forme de la distribution, plus le portefeuille sera conservateur.

4.4 Application numérique

Nous proposons d'appliquer le modèle *PDS* couplé à l'algorithme *minimax* pour différentes contraintes sur la distribution de probabilité des scénarios, et ce dans le cas d'une caisse de retraite dont le portefeuille est composé des indices «*S&P 500*», «*Lehman Brothers Aggregate*» et «*NCREIF*» durant la période 1990-2004.

La méthode de résolution est récursive. Le modèle est optimisé annuellement après avoir généré l'arbre des scénarios. L'arbre est construit en sélectionnant 256 scénarios provenant des arbres de scénarios obtenus dans le chapitre précédent. Ces scénarios prennent en considération les corrélations historiques entre les actifs. Contrairement à l'application du chapitre précédent où les scénarios sont générés aléatoirement d'un test à l'autre (et où les scénarios sont équiprobables), toutes les applications numériques sont testées sur le même arbre des scénarios pour la même année.

Il faut souligner que l'objectif de ce travail n'est pas de tester les performances du modèle selon les rendements réalisés, mais plutôt d'analyser l'impact de l'application de l'algorithme *minimax* sur la composition du portefeuille selon la disponibilité de l'information sur la distribution des probabilités. L'arbre des scénarios est généré sur une fenêtre de quatre ans. La probabilité de réalisation des scénarios dépend de l'information

partielle connue sur la distribution de probabilités des scénarios. Chaque scénario est composé des rendements annuels sur les quatre prochaines années du passif, des obligations, des actions et de l'immobilier. Chaque scénario est donc composé de quatre trajectoires corrélées représentant les trois actifs et le passif. A chaque nœud à $t=1$, il existe un couple de scénarios dont les rendements estimés à cette date sont identiques.

Afin de résoudre ce jeu dynamique, nous appliquons l'algorithme des plans sécants proposé par Breton et El Hachem (1994). Ces derniers montrent que l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations.

Le tableau 4-1 affiche les résultats lorsque seul le premier quartile est contraint pour différentes probabilités et le tableau 4-2 correspond aux contraintes sur le dernier quartile pour différentes probabilités. Les tableaux 4-3 et 4-4 affichent respectivement la composition du portefeuille ex-ante optimal en contraignant les probabilités du premier décile, du premier quartile et de la première moitié des scénarios et en contraignant les derniers décile et quartile.

Nous constatons que moins d'information est disponible sur la distribution de probabilités des scénarios et plus le portefeuille est conservateur. Le portefeuille est donc plus agressif lorsque l'information sur la distribution est complète, et est plus conservateur lorsque qu'aucune information n'est disponible. En effet, en 2000, la composition du portefeuille pour une distribution uniforme (toute la distribution est connue) est de 13,86% en obligations, 64,52% en actions et 21,62% dans l'immobilier et est de 78,25% en obligations, 2,12% en actions et 19,63% dans l'immobilier lorsque aucune information n'est spécifiée sur la distribution (sans contraintes) (figure 4-2). Ainsi, l'optimisation par rapport à la pire distribution de probabilités incite à diminuer la pondération des actifs risqués afin de limiter leurs impacts lors d'évènement négatif.

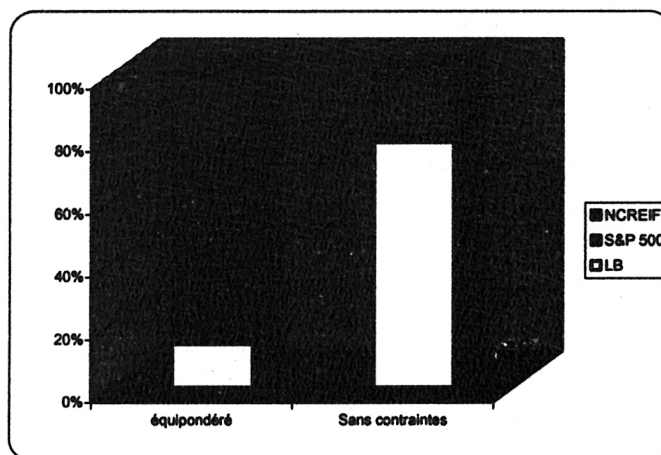


Figure 4-2: Composition du portefeuille optimal en 2000 pour différentes contraintes sur la distribution

Comme stipulé dans le lemme 4.1, les tableaux 4-1 et 4-2 confirment que plus la contrainte est restrictive et moins le portefeuille est conservateur. En effet, dans le tableau 4-1, les pondérations en 2000 passent de 68,51% en obligations, 3,11% en actions et 28,38% dans l'immobilier lorsque la probabilité cumulative du premier décile est contrainte à être supérieure à 0,25, à 65,25% en obligations, 4,54% en actions et 30,21% dans l'immobilier lorsque cette probabilité cumulative doit être supérieure à 0,7 (figure 4-3). En restreignant la contrainte sur la distribution, la pire distribution sélectionnée est alors moins risquée que lorsque la contrainte est relâchée. Étant donné que le modèle optimise par rapport à la pire distribution, le portefeuille sélectionné est alors plus conservateur. Il en est de même lorsque le dernier décile et le dernier quartile sont contraints (tableau 4-2).

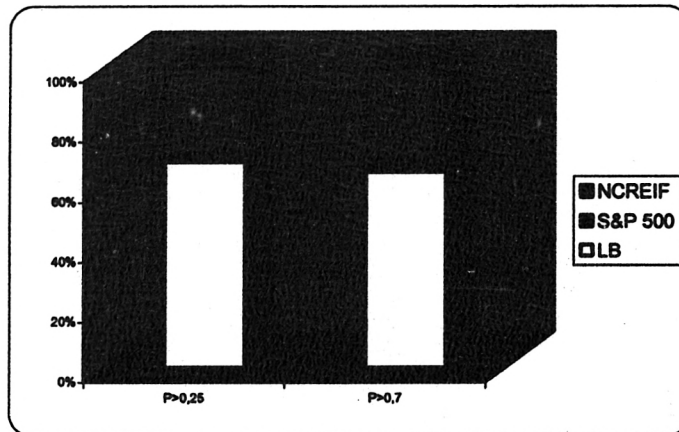


Figure 4-3: Composition du portefeuille optimal en 2000 pour différentes contraintes sur la distribution

Les tableaux 4-3 et 4-4 illustrent le lemme 2. Le risque du portefeuille croît avec la révélation de l'information sur la distribution. Selon le tableau 4-3, en 1994, lorsque la probabilité cumulative sur le premier quartile doit être supérieure à 0,25, le portefeuille est composé de 27,48% en obligations, 43,42% en actions et 29,10% dans l'immobilier. Ces pourcentages passent respectivement à 27,48%, 43,42% et 29,10% lorsque nous contraignons à la fois le premier décile et le premier quartile, et à 25,46%, 45,56% et 28,98% lorsque le premier décile, le premier quartile et la première moitié sont contraints (figure 4-4). Il en est de même pour le tableau 4-4. Par conséquent, la prise de risque (la part des actions, et dans une moindre mesure la part de l'immobilier) augmente donc avec une plus grande connaissance (plus de contraintes) de l'investisseur sur la forme de la distribution.

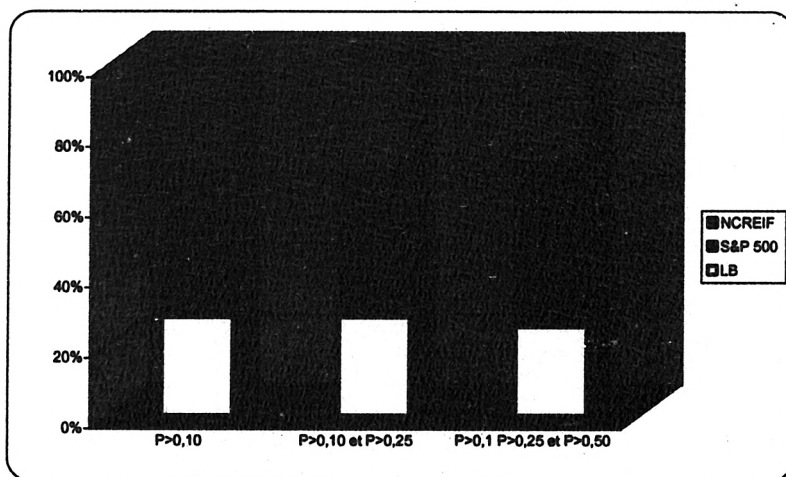


Figure 4-4: Composition du portefeuille optimal en 1994 pour différentes contraintes sur la distribution

En optimisant par rapport à la pire des distributions, l'investisseur bénéficie de cette approche pour se prémunir des risques des scénarios catastrophes. Elle lui permet d'éviter de subir de fortes pertes lorsque les marchés sont en fortes baisses. Ainsi, de 2000 à 2002, le portefeuille ne possède pas d'actions dans le cas où toute hypothèse est relâchée sur la distribution. Tandis que pour une distribution uniforme, la part des actions dans le portefeuille est de 64,52% en 2000, 58,25% en 2001 et 51,45% en 2002. Sachant que ces années ne furent guère fastes pour l'indice «S&P 500» (-9.1% en 2000, -11.88% en 2001 et -22.09% en 2002), l'application de l'algorithme *minimax* permet donc de se protéger des risques de correction du marché grâce à une protection contre la pire distribution.

Année	équipondéré				$\sum_{v=1}^4 p^v \geq 0.7$				$\sum_{v=1}^4 p^v \geq 0.25$				Sans contraintes			
	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	NCREIF
1990	0,00%	67,45%	32,55%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	66,67%	0,00%	33,33%	33,33%
1991	0,00%	65,23%	34,77%	45,36%	30,64%	24,00%	45,36%	30,64%	24,00%	45,36%	30,64%	24,00%	78,77%	0,00%	21,23%	21,23%
1992	32,33%	35,23%	32,44%	68,27%	13,12%	18,61%	68,27%	13,12%	18,61%	68,27%	13,12%	18,61%	78,27%	3,12%	18,61%	18,61%
1993	36,50%	35,10%	28,40%	68,21%	10,07%	21,72%	69,56%	8,72%	21,72%	69,56%	8,72%	21,72%	74,56%	3,72%	21,72%	21,72%
1994	13,30%	65,43%	21,27%	29,25%	40,22%	30,53%	30,25%	39,22%	30,53%	30,25%	39,22%	30,53%	72,45%	3,19%	24,36%	24,36%
1995	30,14%	23,22%	46,64%	70,02%	8,18%	21,80%	71,19%	7,01%	21,80%	71,19%	7,01%	21,80%	81,29%	4,56%	14,15%	14,15%
1996	41,38%	24,09%	34,53%	75,22%	9,32%	15,46%	76,22%	8,32%	15,46%	76,22%	8,32%	15,46%	81,18%	5,12%	13,70%	13,70%
1997	2,12%	64,86%	33,02%	39,74%	34,43%	25,83%	40,00%	34,17%	25,83%	40,23%	34,17%	25,60%	70,23%	5,65%	24,12%	24,12%
1998	1,01%	68,67%	30,32%	47,02%	35,94%	17,04%	47,08%	35,88%	17,04%	47,23%	35,88%	16,89%	75,24%	4,56%	20,20%	20,20%
1999	2,11%	69,84%	28,05%	39,28%	35,42%	25,30%	40,04%	34,66%	25,30%	40,28%	34,66%	25,06%	77,54%	3,33%	19,13%	19,13%
2000	13,86%	64,52%	21,62%	65,25%	4,54%	30,21%	67,01%	3,11%	29,88%	68,51%	3,11%	28,38%	78,25%	2,12%	19,63%	19,63%
2001	17,61%	58,25%	24,14%	65,93%	0,00%	34,07%	68,33%	0,00%	31,67%	69,86%	0,00%	30,14%	81,32%	0,00%	18,68%	18,68%
2002	22,04%	51,45%	26,51%	71,02%	0,00%	28,98%	74,84%	0,00%	25,16%	75,02%	0,00%	24,98%	83,02%	0,00%	16,98%	16,98%
2003	27,75%	53,21%	19,04%	71,65%	0,00%	28,35%	74,87%	0,00%	25,13%	75,50%	0,00%	24,50%	82,81%	0,00%	17,19%	17,19%

Tableau 4-1: Portefeuille optimal pour différentes probabilités cumulatives du dernier quartile des scénarios

Les pondérations optimales sont obtenues pour 256 scénarios sur une période de 4 années à chaque date de rééquilibrage. La fonction de pénalité ϕ a pour coefficients directeurs $\beta_1 = 2$ et $\beta_2 = 4$. Les flux monétaire nets sont nuls. Les coûts de transactions des obligations, des actions et de l'immobilier sont respectivement de 1%, 1% et 5%. L'actif initial total est de 30\$. L'actif initial dans chacun des actifs est de 10. L'investisseur ne peut vendre plus de 100\$ dans la catégorie immobilière à chaque date de rebalancement. La deuxième colonne considère que les probabilités des scénarios sont équipondérées. Les colonnes 3, 4 et 5 supposent respectivement que la probabilité cumulative des 64 premiers scénarios est supérieure à 0,7, 0,5 et 0,25. La dernière colonne correspond au cas où aucune information sur la distribution n'est disponible.

Année	équipondéré				$\sum_{i=1}^4 P^* \geq 0.5$				$\sum_{i=1}^4 P^* \geq 0.25$				Sans contraintes			
	LB	S&P	NCREIF		LB	S&P	NCREIF		LB	S&P	NCREIF		LB	S&P	NCREIF	
1990	0.00%	67.45%	32.55%		22.33%	44.03%	33.64%		22.33%	44.03%	33.64%		66.67%	0.00%	33.33%	
1991	0.00%	65.23%	34.77%		27.88%	39.22%	32.90%		27.88%	39.22%	32.90%		78.77%	0.00%	21.23%	
1992	32.33%	35.23%	32.44%		46.63%	28.68%	24.69%		46.63%	28.68%	24.69%		78.27%	3.12%	18.61%	
1993	36.50%	35.10%	28.40%		48.23%	27.17%	24.60%		48.23%	27.17%	24.60%		74.56%	3.72%	21.72%	
1994	13.30%	65.43%	21.27%		27.15%	51.51%	21.34%		27.15%	51.51%	21.34%		72.45%	3.19%	24.36%	
1995	30.14%	23.22%	46.64%		48.22%	14.35%	37.43%		50.12%	12.65%	37.23%		81.29%	4.56%	14.15%	
1996	41.38%	24.09%	34.53%		51.33%	14.35%	34.32%		53.25%	13.02%	33.73%		81.18%	5.12%	13.70%	
1997	2.12%	64.86%	33.02%		20.60%	32.28%	47.12%		22.66%	31.88%	45.46%		70.23%	5.65%	24.12%	
1998	1.01%	68.67%	30.32%		21.12%	42.16%	36.72%		23.02%	40.25%	36.73%		75.24%	4.56%	20.20%	
1999	2.11%	69.84%	28.05%		19.51%	44.21%	36.28%		20.11%	43.80%	36.09%		77.54%	3.33%	19.13%	
2000	13.86%	64.52%	21.62%		42.46%	40.57%	16.97%		45.87%	38.67%	15.46%		78.25%	2.12%	19.63%	
2001	17.61%	58.25%	24.14%		51.52%	16.88%	31.60%		52.55%	15.95%	31.50%		81.32%	0.00%	18.68%	
2002	22.04%	51.45%	26.51%		52.55%	15.62%	31.83%		55.65%	14.12%	30.23%		83.02%	0.00%	16.98%	
2003	27.75%	53.21%	19.04%		48.56%	16.61%	34.83%		52.12%	14.11%	33.77%		82.81%	0.00%	17.19%	

Tableau 4-2: Portefeuille optimal pour différentes probabilités cumulatives du premier quartile des scénarios

Les pondérations optimales sont obtenues pour 256 scénarios sur une période de 4 années à chaque date de rééquilibrage. La fonction de pénalité ϕ a pour coefficients directeurs $\beta_1=2$ et $\beta_2=4$. Les flux monétaire nets sont nuls. Les coûts de transactions des obligations, des actions et de l'immobilier sont respectivement de 1%, 1% et 5%. L'actif initial total est de 30\$. L'actif initial dans chacun des actifs est de 10. L'investisseur ne peut vendre plus de 100\$ dans la catégorie immobilière à chaque date de rééquilibrage. La deuxième colonne considère que les probabilités des scénarios sont équipondérées. Les colonnes 3 et 4 supposent respectivement que la probabilité cumulative des 64 derniers scénarios est supérieure à 0,5 et 0,25. La dernière colonne correspond au cas où aucune information sur la distribution n'est disponible.

Année	$\sum_{i=1}^{12} P^* \geq 0.5$ $\sum_{i=1}^{12} P^* \geq 0.1$										$\sum_{i=1}^{12} P^* \geq 0.25$ $\sum_{i=1}^{12} P^* \geq 0.1$										Sans contraintes									
	équipondré					$\sum_{i=1}^{12} P^* \geq 0.25$					$\sum_{i=1}^{12} P^* \geq 0.1$					$\sum_{i=1}^{12} P^* \geq 0.25$					$\sum_{i=1}^{12} P^* \geq 0.1$					Sans contraintes				
	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF
1990	0,00%	67,45%	32,55%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	66,67%	0,00%	0,00%	33,33%	0,00%	0,00%	33,33%	0,00%	0,00%
1991	0,00%	65,23%	34,77%	45,36%	30,64%	24,00%	45,36%	30,64%	24,00%	45,36%	30,64%	24,00%	45,36%	30,64%	24,00%	45,36%	30,64%	24,00%	45,36%	30,64%	24,00%	45,36%	30,64%	24,00%	78,77%	0,00%	0,00%	21,23%	0,00%	0,00%
1992	32,33%	35,23%	32,44%	68,27%	13,12%	18,61%	68,27%	13,12%	18,61%	68,27%	13,12%	18,61%	68,27%	13,12%	18,61%	68,27%	13,12%	18,61%	68,27%	13,12%	18,61%	68,27%	13,12%	18,61%	78,27%	3,12%	3,12%	18,61%	3,12%	3,12%
1993	36,50%	35,10%	28,40%	69,56%	8,72%	21,72%	69,56%	8,72%	21,72%	69,56%	8,72%	21,72%	69,56%	8,72%	21,72%	69,56%	8,72%	21,72%	69,56%	8,72%	21,72%	69,56%	8,72%	21,72%	74,56%	3,72%	3,72%	21,72%	3,72%	3,72%
1994	13,30%	65,43%	21,27%	25,46%	45,56%	28,98%	25,46%	45,56%	28,98%	25,46%	45,56%	28,98%	25,46%	45,56%	28,98%	25,46%	45,56%	28,98%	25,46%	45,56%	28,98%	25,46%	45,56%	28,98%	72,45%	3,19%	3,19%	24,36%	3,19%	3,19%
1995	30,14%	23,22%	46,64%	70,84%	8,64%	20,52%	70,84%	8,64%	20,52%	70,84%	8,64%	20,52%	70,84%	8,64%	20,52%	70,84%	8,64%	20,52%	70,84%	8,64%	20,52%	70,84%	8,64%	20,52%	81,29%	4,56%	4,56%	14,15%	4,56%	4,56%
1996	41,38%	24,09%	34,53%	72,43%	7,26%	20,31%	72,43%	7,26%	20,31%	72,43%	7,26%	20,31%	72,43%	7,26%	20,31%	72,43%	7,26%	20,31%	72,43%	7,26%	20,31%	72,43%	7,26%	20,31%	81,18%	5,12%	5,12%	13,70%	5,12%	5,12%
1997	2,12%	64,86%	33,02%	40,23%	34,17%	25,60%	40,23%	34,17%	25,60%	40,23%	34,17%	25,60%	40,23%	34,17%	25,60%	40,23%	34,17%	25,60%	40,23%	34,17%	25,60%	40,23%	34,17%	25,60%	70,23%	5,65%	5,65%	24,12%	5,65%	5,65%
1998	1,01%	68,67%	30,32%	45,11%	48,87%	6,02%	45,11%	48,87%	6,02%	45,11%	48,87%	6,02%	45,11%	48,87%	6,02%	45,11%	48,87%	6,02%	45,11%	48,87%	6,02%	45,11%	48,87%	6,02%	75,24%	4,56%	4,56%	20,20%	4,56%	4,56%
1999	2,11%	69,84%	28,05%	40,28%	34,66%	25,06%	40,28%	34,66%	25,06%	40,28%	34,66%	25,06%	40,28%	34,66%	25,06%	40,28%	34,66%	25,06%	40,28%	34,66%	25,06%	40,28%	34,66%	25,06%	77,54%	3,33%	3,33%	19,13%	3,33%	3,33%
2000	13,86%	64,52%	21,62%	66,21%	4,11%	29,68%	66,21%	4,11%	29,68%	66,21%	4,11%	29,68%	66,21%	4,11%	29,68%	66,21%	4,11%	29,68%	66,21%	4,11%	29,68%	66,21%	4,11%	29,68%	78,23%	2,12%	2,12%	19,63%	2,12%	2,12%
2001	17,61%	58,25%	24,14%	69,86%	0,00%	30,14%	69,86%	0,00%	30,14%	69,86%	0,00%	30,14%	69,86%	0,00%	30,14%	69,86%	0,00%	30,14%	69,86%	0,00%	30,14%	69,86%	0,00%	30,14%	81,32%	0,00%	0,00%	18,68%	0,00%	0,00%
2002	22,04%	51,45%	26,51%	75,02%	0,00%	24,98%	75,02%	0,00%	24,98%	75,02%	0,00%	24,98%	75,02%	0,00%	24,98%	75,02%	0,00%	24,98%	75,02%	0,00%	24,98%	75,02%	0,00%	24,98%	83,02%	0,00%	0,00%	16,98%	0,00%	0,00%
2003	27,75%	53,21%	19,04%	74,93%	0,00%	25,07%	74,93%	0,00%	25,07%	74,93%	0,00%	25,07%	74,93%	0,00%	25,07%	74,93%	0,00%	25,07%	74,93%	0,00%	25,07%	74,93%	0,00%	25,07%	82,81%	0,00%	0,00%	17,19%	0,00%	0,00%

Tableau 4-3: Portefeuille optimal supposant différentes probabilités cumulatives sur le dernier décile, le troisième et quatrième quartile

Les pondérations optimales sont obtenues pour 256 scénarios sur une période de 4 années à chaque date de rééquilibrage. La fonction de pénalité ϕ pour coefficients directeurs $\beta_1=2$ et $\beta_2=4$. Les flux monétaire nets sont nuls. Les coûts de transactions des obligations, des actions et de l'immobilier sont respectivement de 1%, 1% et 5%. L'actif initial total est de 30\$. L'actif initial dans chacun des actifs est de 10. L'investisseur ne peut vendre plus de 100\$ dans la catégorie immobilière à chaque date de rééquilibrage. La deuxième colonne considère que les probabilités des scénarios sont équipondrées. Les colonnes 5, 6 et 7 supposent respectivement que la probabilité cumulative des 128, 64 et 25 premiers scénarios est supérieure à 0,5, 0,25 et 0,1. Les colonnes 3 et 4 regroupent respectivement les conditions sur la distribution des colonnes 5, 6 et 7, et 6 et 7. La dernière colonne correspond au cas où aucune information sur la distribution n'est disponible.

Année	équipondéré				$\sum_{n=104}^{12} P^{**} \geq 0.25$				$\sum_{n=104}^{12} P^{**} \geq 0.1$				Sans contraintes			
	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB	S&P	NCREIF	LB
1990	0,00%	67,45%	32,55%	22,33%	44,03%	33,64%	22,33%	44,03%	33,64%	22,33%	44,03%	33,64%	66,67%	0,00%	33,33%	33,33%
1991	0,00%	65,23%	34,77%	27,88%	39,22%	32,90%	27,88%	39,22%	32,90%	27,88%	39,22%	32,90%	78,77%	0,00%	21,23%	21,23%
1992	32,33%	35,23%	32,44%	46,63%	28,68%	24,69%	46,63%	28,68%	24,69%	46,63%	28,68%	24,69%	78,27%	3,12%	18,61%	18,61%
1993	36,50%	35,10%	28,40%	48,23%	27,17%	24,60%	48,23%	27,17%	24,60%	48,23%	27,17%	24,60%	74,56%	3,72%	21,72%	21,72%
1994	13,30%	65,43%	21,27%	7,25%	68,31%	24,44%	7,25%	68,31%	24,44%	8,89%	67,09%	24,02%	72,45%	3,19%	24,36%	24,36%
1995	30,14%	23,22%	46,64%	50,12%	12,65%	37,23%	50,12%	12,65%	37,23%	71,04%	3,22%	25,75%	81,29%	4,56%	14,15%	14,15%
1996	41,38%	24,09%	34,53%	70,25%	6,12%	23,63%	70,25%	6,12%	23,63%	71,32%	5,46%	23,22%	81,18%	5,12%	13,70%	13,70%
1997	2,12%	64,86%	33,02%	0,00%	75,11%	24,89%	0,00%	74,88%	19,46%	0,00%	75,11%	24,89%	70,23%	5,65%	24,12%	24,12%
1998	1,01%	68,67%	30,32%	0,00%	78,13%	21,57%	0,00%	77,45%	18,53%	0,00%	78,13%	21,57%	75,24%	4,56%	20,20%	20,20%
1999	2,11%	69,84%	28,05%	0,00%	79,53%	20,47%	0,00%	78,80%	17,94%	0,00%	79,53%	20,47%	77,54%	3,33%	19,13%	19,13%
2000	13,86%	64,52%	21,62%	44,67%	36,67%	18,66%	44,67%	36,67%	18,66%	49,73%	28,56%	21,71%	78,25%	2,12%	19,63%	19,63%
2001	17,61%	58,25%	24,14%	58,05%	18,55%	23,40%	58,05%	18,55%	23,40%	64,54%	13,65%	21,81%	81,32%	0,00%	18,68%	18,68%
2002	22,04%	51,45%	26,51%	68,50%	9,87%	21,63%	68,50%	9,87%	21,63%	68,50%	9,87%	21,63%	83,02%	0,00%	16,98%	16,98%
2003	27,75%	53,21%	19,04%	70,05%	8,85%	21,10%	70,05%	8,85%	21,10%	70,05%	8,85%	21,10%	82,81%	0,00%	17,19%	17,19%

Tableau 4-4: Portfeuille optimal supposant différentes probabilités cumulatives sur le premier décile, le premier quartile

Les pondérations optimales sont obtenues pour 256 scénarios sur une période de 4 années à chaque date de rééquilibrage. La fonction de pénalité ρ a pour coefficients directeurs $\beta_1=2$ et $\beta_2=4$. Les flux monétaire nets sont nuls. Les coûts de transactions des obligations, des actions et de l'immobilier sont respectivement de 1%, 1% et 5%. L'actif initial total est de 30\$. L'actif initial dans chacun des actifs est de 10. L'investisseur ne peut vendre plus de 100\$ dans la catégorie immobilière à chaque date de rééquilibrage. La deuxième colonne considère que les probabilités des scénarios sont équipondérées. Les colonnes 4 et 5 supposent respectivement que la probabilité cumulative des 64 et 25 derniers scénarios est supérieure à 0,25 et 0,1. La colonne 3 regroupe les conditions sur la distribution des colonnes 4 et 5. La dernière colonne correspond au cas où aucune information sur la distribution n'est disponible.

4.5 Conclusion

Nous proposons de relâcher l'hypothèse d'une connaissance parfaite de la distribution de probabilités des scénarios par celle d'une connaissance partielle de celle-ci en appliquant l'algorithme de résolution *minimax* afin de résoudre un modèle de *PDS*. Cet algorithme correspond à un jeu dynamique où la «nature» minimise la fonction objectif pour une pondération donnée en contrôlant la distribution de probabilités des scénarios, et où l'investisseur maximise la fonction objectif pour une distribution de probabilités donnée en contrôlant la pondération du portefeuille.

Cette méthode de résolution permet de déterminer le portefeuille optimal pour la pire distribution de probabilités des scénarios tout en respectant l'information partielle de cette distribution fournie par l'investisseur.

Cette approche permet de relâcher la condition d'une description de la totalité de la distribution, par une estimation partielle de celle-ci. La méthode *minimax* est très intéressante lorsque l'investisseur a un plus grand degré de confort par une estimation partielle de la distribution de probabilités des scénarios selon ses convictions, qu'une estimation de la probabilité de chacun des scénarios.

L'approche *minimax* est une généralisation des problèmes robustes. Nous montrons que l'approche *worst-case* est un cas particulier de l'approche *minimax*. Par ailleurs, nous montrons que plus l'investisseur est incertain sur la distribution de probabilité, plus son portefeuille sera conservateur. Nous appliquons numériquement le modèle pour une gestion actif-passif d'une caisse de retraite, et nous analysons la sensibilité de la composition du portefeuille selon le degré de connaissance de l'information. Les résultats confirment que moins d'information est révélée, plus la solution robuste est conservatrice.

5 Étude de l'anticipation de l'effet taille par différentes méthodes de l'intelligence artificielle

5.1 Introduction

Plusieurs études ont montré l'existence d'une prime associée à l'investissement dans les petites firmes. En effet, historiquement les petites firmes ont eu de meilleurs rendements en moyenne que les grandes firmes (Reinganum (1982), Fama et French (1992, 1993, 1996)). Néanmoins, en se basant sur les données du portefeuille SMB («Small Minus Big» correspondant à être long dans les actions de petites firmes et court dans celles des grandes firmes) disponibles sur le site de Kenneth French, nous remarquons que les actions de petites firmes ont de meilleurs rendements que les actions de grandes firmes uniquement dans 51,26% des mois, entre juillet 1926 et juin 2005: il peut être intéressant d'anticiper l'effet taille.

À cette fin, nous proposons de prédire la position du portefeuille SMB en exploitant la relation de prédiction entre le rendement de ce portefeuille et les variables macro-économiques. Nous testons quatre méthodes (le Partitionnement Récursif, le Réseau de Neurones, le modèle Logit et la Machine à Vecteurs de Support) de 1990 à 2004. Nous observons que ces méthodes dominent généralement la stratégie achat-détention du portefeuille SMB à long terme. Néanmoins, ces méthodes ont plus de difficultés à dominer à plus court terme. Toutefois, en appliquant le consensus de ces approches (correspondant à la majorité des réponses), nous constatons que, d'une part la stratégie du consensus domine le portefeuille SMB sur toutes les sous-périodes, et d'autre

part, ses capacités de prédictions sont meilleures sur toute la période. Le consensus domine donc la stratégie SMB à court terme et à long terme. Les tests d'anticipation du marché effectués confirment la capacité de prédiction de ces approches. Par ailleurs, en analysant l'impact des coûts de transaction sur les rendements, ces stratégies restent rentables pour des frais de transactions raisonnables et peuvent donc être appliquées empiriquement à l'aide d'indices similaires au SMB (Russel 2000 – Russel 1000).

Le plan de ce chapitre se décompose en six grandes parties. Dans la première partie, nous proposons les variables prédictives. Les différentes méthodes sont présentées dans la seconde partie. Les quatre dernières parties correspondent aux résultats, au test d'anticipation du marché, à l'analyse de sensibilité et à l'application empirique.

5.2 Variables prédictives

Selon plusieurs auteurs, la prime expliquant le meilleur rendement des actions de petites firmes relativement à celles des grandes firmes est liée au risque fondamental de l'économie (Fama et French (1993,1996), Jensen, Johnson et Mercer (1998), Liew et Vassalou (2000)). Il existerait donc une interrelation entre la prime de rendement du portefeuille SMB et le cycle économique. En effet, Fama et French (1993,1996) constatent que le rendement du portefeuille SMB est sensible aux facteurs du cycle économique. Ils suggèrent que les bénéfices des firmes de petites capitalisations sont plus sensibles aux conditions économiques. Dans le même ordre d'idées, Jensen, Johnson et Mercer (1998) constatent que la prime SMB dépend du raffermissement de la politique monétaire. Lorsque la Réserve Fédérale américaine augmente son taux directeur, la politique monétaire devient plus restrictive et le rendement du portefeuille est plus faible. Inversement, lorsque la «Fed» diminue son taux lors d'une politique monétaire plus accommodante, le rendement du portefeuille est plus élevé. Liew et Vassalou (2000) vont plus loin en montrant que les rendements du portefeuille SMB permettent de prédire le taux de croissance futur du produit intérieur brut et, par conséquent, de prédire les cycles économiques. Par ailleurs, Coggin (1998) constate que, malgré la marche aléatoire du rendement des indices, il est possible d'anticiper l'effet taille en considérant les variables macro-économiques (le cycle économique et le taux d'intérêt).

Ainsi, en se fondant sur la relation entre les facteurs macro-économiques et le rendement du SMB, il serait donc possible de faire un modèle d'allocation tactique afin d'anticiper l'effet taille. À cette fin, deux approches peuvent être utilisées:

- soit en déterminant le rendement du portefeuille à partir de l'estimation des variables économiques futures,
- soit en anticipant la réaction du marché aux variables économiques actuelles par le développement d'un modèle économique avec des variables économiques décalées.

Les études empiriques (DeBondt et Thaler (1985) et Bernard et Thomas (1989)) montrent que la seconde approche donne de meilleurs résultats. Ainsi, plusieurs modèles de gestion active, fondés sur cette seconde approche, ont été proposés dans la littérature afin de profiter de l'effet taille. En effet, Kester (1990) montre qu'une gestion plus active du portefeuille, en ajustant selon l'effet taille, permet d'améliorer le rendement du portefeuille comparativement à une stratégie «Achat-Détention» et «Constant-Mix». De même, Ahmed, Lockwood et Nanda (2002) montrent qu'il peut être bénéfique d'exploiter la prime SMB et d'appliquer une stratégie de rotation entre plusieurs styles.

Plusieurs études proposent des modèles pour anticiper l'effet taille grâce à des variables macro-économiques. Ainsi, Levis et Liodakis (1999) suggèrent l'anticipation de l'effet taille et style des firmes anglaises à partir d'un modèle de régression linéaire et d'un modèle logit. Ils proposent de prédire la variation du rendement d'un portefeuille SMB à partir du taux d'inflation, de la structure à terme, du changement du taux des bons du trésor, du taux de versement de dividendes du portefeuille SMB, du changement annuel de l'indicateur coïncidant et de la prime de risque des actions. Le modèle proposé permet ainsi d'obtenir de meilleurs résultats que le portefeuille «Achat-Détention», et ceci après considération des coûts de transaction.

De même, Kao et Shumaker (1999) proposent un modèle de Partitionnement Récursif utilisant des facteurs macro-économiques permettant l'anticipation de la prime HML et SMB sur le marché américain. Ils considèrent sept variables prédictives pour construire leur règles de transaction: l'écart de la courbe de taux (l'écart de taux entre le bon du trésor de 10 ans et de 3 mois), le taux du bon de trésor 30 ans réel ajusté au taux

d'inflation, l'écart de crédit corporatif (écart de taux entre les obligation cotées BBB et AA), la croissance du produit intérieur brut prévisionnel, la différence entre le E/P du S&P 500 et le taux obligataire long terme, et l'indice de prix du consommateur.

Toujours dans le même esprit, Cooper, Gulen et Vassalou (2001) proposent un modèle de régression linéaire pour l'anticipation de l'effet taille et style, en se basant sur des variables macro-économiques. Ils utilisent les variables macro-économiques prédictives suivantes: la différence ente les bons du Trésor 3 mois et 1 mois, l'écart de taux entre les obligations Baa et Aaa, le taux de dividende de l'indice S&P 500, l'écart de taux entre les taux des bons du Trésor 10 ans et 3 mois, et 10 ans et 1 mois.

Amenc *et al.* (2003) montrent aussi qu'il est possible de générer un rendement anormal grâce à une stratégie d'anticipation de l'effet taille à partir d'une régression linéaire dynamique multifactorielle. Ils regroupent les variables prédictives en trois catégories: celles reliées au taux d'intérêt (le taux court et l'écart de taux), celles reliées au risque (la volatilité historique, la volatilité implicite et l'écart de crédit), celles reliées à la valeur des actions (B/M, P/E et le taux de dividende). Par ailleurs, ils proposent d'autres variables ayant un impact sur l'anticipation: les indicateurs de liquidité (l'écart du bid-ask du NYSE et le volume du marché), le prix des commodités (indice de commodités et le prix du pétrole), les taux de changes, ainsi que des variables économiques (le taux d'inflation, la croissance économique, le taux de chômage, les indicateurs de la masse monétaire, l'indice de confiance du consommateur).

Ainsi, toutes ces études montrent que la considération des facteurs macro-économiques permet d'améliorer les capacités de prédiction de la prime due à l'effet taille de la firme. En se basant sur ces différentes études, nous déterminons un ensemble de variables macro-économiques susceptibles de prévoir la variation du rendement d'un portefeuille SMB (tableau 5-1). Il est à noter, que les variables ont été décalées pour tenir compte des délais de publication constatés en pratique.

Variables	Source
Écart de crédit (Taux obligataire corporatif Baa - taux obligataire corporatif Aaa)	Calculé à partir de la base de données FRED de la Réserve Fédérale
Écart de taux (Bon du trésor 10 ans – Bon du trésor 1 an)	Calculé à partir de la base de données FRED de la Réserve Fédérale
Bon du Trésor 3 mois	Base de données FRED de la Réserve Fédérale
Taux de capacité d'utilisation (industrie totale)	Base de données FRED de la Réserve Fédérale
Changement mensuel de l'indice de production industriel	Calculé à partir de la base de données FRED de la Réserve Fédérale
Indice de confiance des consommateurs	Base de données FRED de la Réserve Fédérale
Indice composite d'activité du secteur industriel (ISM)	Base de données FRED de la Réserve Fédérale
Taux d'épargne personnel	Base de données FRED de la Réserve Fédérale
Changement mensuel de l'indice des prix du consommateur	Calculé à partir de la base de données FRED de la Réserve Fédérale
Changement mensuel monétaire M2	Calculé à partir de la base de données FRED de la Réserve Fédérale
Ratio P/E du S&P 500	Calculé à partir des données de RIMES
Momentum 6 mois du S&P 500	Calculé à partir des données de RIMES
Taux de dividende du S&P 500	RIMES
Indice des indicateurs économiques avancés	Datastream
Indice des indicateurs économiques coïncidents	Datastream
Rendement mensuel de l'indice GSCI («Goldman Sachs Commodity Index»)	Calculé à partir des données de l'indice
Changement mensuel de l'indice des prix de production des commodités industrielles	Calculé à partir des données de RIMES
Changement mensuel taux de change pondéré	Calculé à partir des données de RIMES
Changement mensuel du volume du NYSE	Datastream

Tableau 5-1: Variables macro-économiques prédictives

5.3 Méthodes de prévision de la prime

Nous proposons d'appliquer quatre méthodes afin de prédire la prime associée à l'effet Taille à l'aide des variables macro-économiques:

- le Partitionnement Récursif (PR),
- le Réseau de Neurones (RN),
- le Modèle Logit (ML),
- La Machine à Vecteurs de Support (MVS).

Ces méthodes nécessitent une période d'apprentissage de 1975 à 1989 (in-sample) pour construire le modèle. Une fois les modèles obtenus, ils sont ensuite validés sur une période test de 1990 à 2004 (out-sample).

5.3.1 Partitionnement Récursif

Le Partitionnement Récursif consiste à construire un arbre de décisions à partir d'un échantillon d'observations. Répétitivement, l'ensemble des variables est divisé en deux sous-ensemble d'observations (ou descendants) afin d'augmenter leur homogénéité (ou pureté). Ainsi, à chaque division, le branchement de l'arbre croît. Les deux éléments clés régissant la croissance de l'arbre sont la sélection de la meilleure variable séparant en deux la branche précédente et le critère d'arrêt de croissance du branchement. L'approche est décrite plus amplement dans Breiman *et al.* (1984), et des applications financières de cette méthode sont proposées pour l'anticipation du marché (Kao et Shumaker (1999)), la sélection de titres (Sorensen, Miller et Ooi (2000)) ou le risque de faillite (Frydman, Altman et Kao (1985)).

Durant la période d'apprentissage (de 1975 à 1989), le PR divise chaque branche de l'arbre en deux par la sélection de la variable macro-économique la plus appropriée, ainsi que son seuil afin d'augmenter l'homogénéité (correspondant à la position optimale du portefeuille SMB (long vs court)) des deux nouveaux sous-ensembles. Par ailleurs, nous contraignons l'arbre afin qu'il y ait au moins 10 observations dans chaque nœud

terminal pour diminuer le risque de sur-ajustement sur les observations de l'échantillon d'entraînement et que l'arbre puisse être généralisé sur d'autres échantillons.

5.3.2 Réseau de Neurones

Le Réseau de Neurones se base sur un ensemble de concepts inspiré du système neuronal humain. Sa structure est composée d'un ensemble de neurones artificiels interconnectés par des arcs permettant le traitement parallèle (figure 5-1). Chaque neurone reçoit un signal input, le traite au moyen d'une fonction de transfert, puis envoie un signal output. L'architecture d'un Réseau de Neurones est flexible. Elle est caractérisée par le nombre de couches, ainsi que le nombre de neurones dans chacune de ses couches.

La structure à plusieurs couches est composée d'une couche input (la première couche où les données externes sont reçues), d'une ou plusieurs couches intermédiaires et d'une couche output (la dernière couche où sort l'output).

Une fois construit, le réseau a besoin d'être entraîné. Durant cette étape d'apprentissage, le réseau essaye de trouver un patron dans les données par l'ajustement des poids des arcs reliant les neurones entre elles. En ajustant ses pondérations à l'aide d'un algorithme d'apprentissage, le modèle tente de minimiser la différence entre la donnée output obtenue et la valeur cible de l'échantillon d'apprentissage. Une fois le modèle entraîné sur l'échantillon d'apprentissage, il est ensuite testé pour évaluer ses capacités prédictives. Plusieurs applications financières du Réseau de Neurones ont été proposées (Kingdon et Feldman (1995)) telles que la sélection de titres (Kryzanowski, Galler et Wright (1993), Eakins et Stansell (2003)), le risque de faillite (Coats et al. (1993), Zhang *et al.* (1999)), la politique de dividende (Ean, Subrahmanyam et Alli (1999)) ou la variation du taux de change (Davis, Episcopos et Wettimuny (2001)).

Les données input correspondent aux variables macroéconomiques de l'échantillon d'apprentissage, et les valeurs cibles correspondent aux rendements du portefeuille SMB de cet échantillon.

Afin de déterminer la structure du réseau et son algorithme d'apprentissage, l'échantillon d'apprentissage est subdivisé en deux sous-périodes: une sous-période pour l'apprentissage du réseau (de 1975 à 1983) et une sous-période test (de 1984 à 1989). Plusieurs structures sont entraînées au cours de la première sous-période, puis sont testés sur la seconde sous-période. Le modèle finalement sélectionné pour être testé sur la période de validation (de 1990 à 2004) correspond à celui qui minimise la somme des carrés des erreurs entre les rendements cibles et les données output du modèle durant la période sous-test. Cette approche permet d'éviter le risque de sur-ajustement du modèle aux données.

Le Réseau de Neurones sélectionné pour la période de validation est finalement composé de 20 neurones sur la couche intermédiaire et dont les fonctions de transfert sont logistiques (ou tan-sigmoïde) (figure 5-2). La fonction de transfert pour la couche output est linéaire (figure 5-3). L'algorithme d'apprentissage utilisé pour entraîner le réseau est celui de rétropropagation de «Levenberg-Marquardt». Cet algorithme appartient aux méthodes d'apprentissage supervisés. L'algorithme essaye de minimiser l'écart entre la solution output et la valeur réalisée en faisant varier les poids synaptiques des neurones afin que la solution converge vers la valeur réalisée. Cette méthode consiste à interpoler entre les méthodes de Gauss-Newton et du Gradient descendant à l'aide d'un facteur d'amortissement. Ce facteur est déterminé heuristiquement et varie d'une itération à l'autre. Lorsque la réduction est importante, le facteur d'amortissement tend vers zéro favorisant ainsi la méthode Gauss-Newton. Si la réduction est insuffisante, le facteur d'amortissement augmente favorisant la méthode du gradient descendant.

La régularisation Bayésienne est implantée dans cet algorithme afin de prévenir du sur-ajustement du modèle aux données. Cette méthode d'apprentissage fait partie de la catégorie apprentissage supervisé où les outputs des intrants utilisés sont connus.

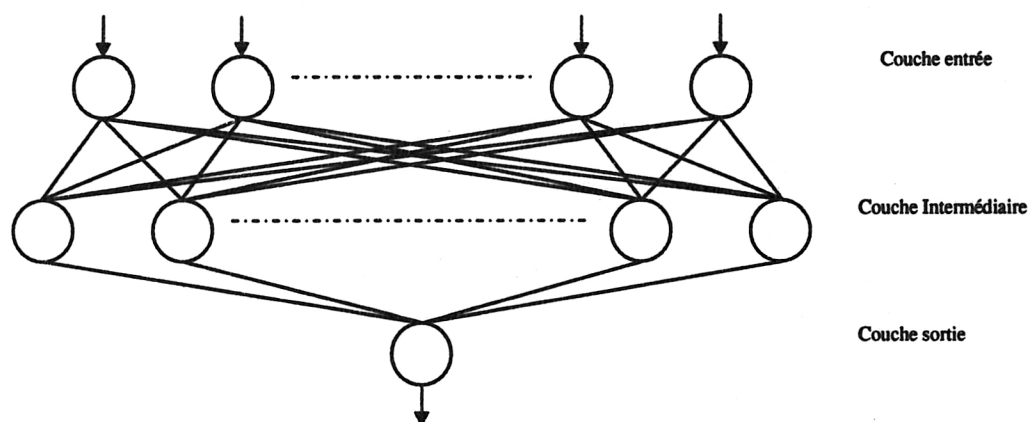
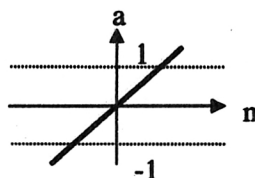
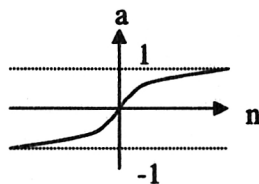


Figure 5-1: Architecture d'un Réseau de Neurones

Figure 5-2: Fonction de transfert linéaire $a=f(n)$ Figure 5-3: Fonction de transfert tan-sigmoïde $a=f(n)$

5.3.3 Modèle Logit

Le modèle Logit (ou régression logistique) s'applique parfaitement aux problèmes dichotomiques, où la variable expliquée y ne peut prendre que deux modalités (0 ou 1). La technique de régression logistique appartient à la famille des modèles probabilistes de choix. L'objectif de ce modèle est de déterminer la probabilité de survenue de l'évènement comme l'espérance de la variable codée y . Dans notre cas, il s'agit de

déterminer la probabilité s'il est préférable de prendre une position longue (courte) dans les actions de firmes petite taille et une position courte (longue) dans celles de grande taille conditionnellement aux valeurs des variables macro-économiques. La variable à expliquer prend alors la valeur de 1 lorsque le modèle prédit que les actions des petites firmes vont mieux performer que celles des grandes firmes, et 0 dans le cas contraire.

La probabilité p d'apparition de l'évènement y où le rendement du portefeuille $SMB > 0$, conditionnellement aux variables exogènes est donc:

$$p = \text{Prob}(y = 1 / x_1 \dots x_{20})$$

$$= \frac{\exp(Z)}{1 + \exp(Z)} \quad (5.1)$$

Avec:

$$Z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{20} x_{20} \quad (5.2)$$

x_i : la $i^{\text{ème}}$ variable macroéconomique,

β_i : le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ variable macroéconomique,

Les coefficients estimés à partir des données correspondent à la sensibilité de la variable endogène aux variations des variables exogènes macro-économiques. Ils sont estimés sur la période de 1975 à 1989. Pour chaque mois durant cette période, les rendements du portefeuille SMB sont classifiés. Si le rendement du portefeuille est positif, le mois prend la valeur de 1, et 0 dans le cas contraire.

Une fois les coefficients du modèle Logit déterminés, celui-ci est ensuite testé sur la période de validation (de 1990 à 2004). Durant cette période, la probabilité événementielle que le rendement du portefeuille SMB soit positif est estimée pour chaque mois. Si la probabilité est supérieure (inférieure) à 0,5, le modèle prévoit que les actions des firmes de petite taille vont mieux (moins bien) performer que celles de grande taille.

Le modèle Logit a déjà été utilisée avec succès pour la prévision de la prime de l'effet Taille par Levis et Liodakis (1999) dans le cas de la Grande-Bretagne. Nous proposons de tester ce modèle dans le contexte des États-Unis.

5.3.4 Machine à Vecteurs de Support

Une Machine à Vecteurs de Support appartient aux méthodes d'apprentissage supervisé. La méthode consiste à séparer les données en deux ou plusieurs groupes par un hyperplan. Cette approche qui fut initialement proposée par Vapnik et Lerner (1963) est basée sur une fonction dite noyau (Kernel) permettant de déterminer le plan optimal.

L'hyperplan est obtenu en maximisant la distance des points les plus proches. Soit un hyperplan $w'x - \gamma = 0$, le modèle consiste à alors à optimiser:

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} w'w \\ \text{s.c.} & -x^i w + \gamma \leq 1 \quad \forall i \in A \\ & x^j w - \gamma \leq 1 \quad \forall j \in B \end{aligned} \quad (5.3)$$

Il suffit donc d'ajuster les paramètres w et γ tel que le point le plus proche soit à une distance de $\frac{1}{\|w\|}$ correspondant à la marge.

Dans un espace à n dimensions, l'hyperplan est de $n-1$ dimensions, et nécessite $n+1$ points (correspondant aux points les plus proches) afin de le déterminer. Ces points qui supportent l'hyperplan sont appelés les vecteurs de support. Prenons le cas d'un espace de 2 dimensions, l'hyperplan est donc à 1 dimension correspondant donc à une ligne et le nombre de points nécessaire pour déterminer l'hyperplan est de 3.

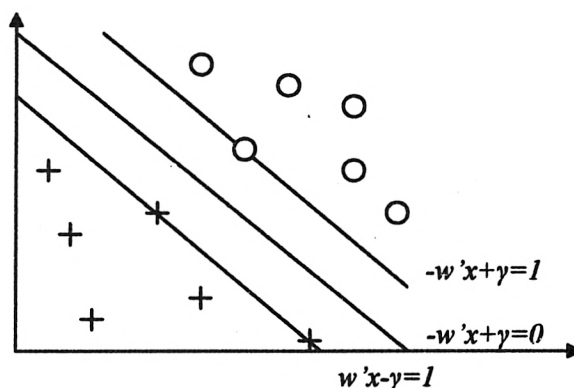


Figure 5-4: Exemple de MVS à 2 dimensions

La méthode nécessite donc des données d'apprentissage afin d'établir l'hyperplan séparant du mieux possible les points, puis de tester celui-ci sur des données pour valider la capacité de prédiction du modèle. Le modèle est entraîné sur les données de la période 1975-1989 avec une fonction noyau linéaire, puis il est testé sur la période 1990-2004. Le rendement du portefeuille SMB est classifié sur la période d'apprentissage: si le rendement est positif, la valeur prise est 1, et 0 dans le cas contraire.

5.3.5 Avantages et inconvénients des approches

Ces différentes méthodes possèdent des avantages et des inconvénients.

Dans le cas du Réseau de Neurones, du Partitionnement Récuratif et de la Machine à Vecteurs de Support, ces méthodes ont l'avantage de ne pas nécessiter d'hypothèses (la linéarité, la normalité des distributions,...), contrairement aux modèles économétriques. Par ailleurs, elles ne requièrent pas une connaissance préalable de la relation existant entre la variable à prévoir et les variables prédictives. En effet, à l'opposé de la régression logistique, elles permettent de déterminer plusieurs formes de non-linéarité entre les variables. Ces méthodes sont donc très flexibles et permettent de reconnaître des patrons. Un autre avantage de ces méthodes est qu'elles ne nécessitent pas de connaissances formalisées: elles dépendent uniquement des données disponibles au cours du processus d'apprentissage. Ces approches sont donc intéressantes lorsque les connaissances sont limitées.

Néanmoins, ces méthodes possèdent aussi des inconvénients, dont le risque de sur-ajustement, c'est-à-dire que le modèle s'ajuste trop aux données de l'échantillon d'apprentissage, rendant plus difficile la généralisation de celui-ci sur d'autres échantillons de données. De plus, ces méthodes peuvent conclure à des relations contraires à la théorie ou l'intuition. Par ailleurs, ces méthodes ne peuvent être appliquées lorsque les données disponibles sont limitées. En effet, elles nécessitent beaucoup de données pour leur phase d'apprentissage. Enfin, la validation de prédiction du modèle dépend énormément des données d'entraînement utilisées pour la construction.

Dans le cas du RN, il souffre du syndrome de la «boîte noire», c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de déterminer la relation existant entre les variables explicatives et la variable à prévoir.

5.4 Performances des quatre approches

Les quatre approches sont testées selon l'approche statique et dynamique, puis comparées au SMB sur la période de janvier 1990 à décembre 2004.

L'approche statique consiste à entraîner les modèles de janvier 1975 à décembre 1989, puis de garder invariant le calibrage des modèles sur toute la période test. Cette approche prend en considération la nouvelle information disponible au fur et à mesure pour recalibrer périodiquement les modèles.

Quant à l'approche dynamique (ou réursive), elle consiste à entraîner annuellement les modèles en y incluant les nouvelles données disponibles, puis de les tester pour prévoir les douze prochaines positions mensuelles de l'année.

5.4.1 Approche statique

Le tableau 5-2 représente les performances des quatre méthodes d'intelligence artificielle sous l'approche statique durant la période janvier 1990 à décembre 2004. En analysant les HIT ratio (nombre de choix corrects/ nombre total de choix faits), nous observons que les quatre approches ont des résultats égaux ou supérieurs à la stratégie SMB (52,78%) (variant de 52,78% pour le Logit à 56,98% pour le RN) mettant en

exergue une certaine capacité de prédiction de ces méthodes. Par ailleurs, nous constatons que le rendement annuel de la méthode de Réseaux de Neurones et du Partitionnement Récursif sont meilleurs que la stratégie SMB. En effet, leurs rendements sont supérieurs d'au moins 400 points de base à celui du SMB. Quant aux rendements des modèles Logit et MVS, ils sont légèrement plus faibles que celui du SMB. Les volatilités sont similaires variant autour de 13,1 %. En terme de rendement par unité de risque, nous constatons que le RN et PR dominent la stratégie SMB.

De prime abord, les modèles Logit et MVS ont des résultats plus faibles que ceux du SMB. Toutefois, l'examen des gains mensuels les plus élevées nous conduit à des conclusions intéressantes. En effet, nous constatons que les deux modèles ne permettent pas l'anticipation du meilleur rendement mensuel (21,49%) et n'évite pas le pire rendement mensuel (-16,69%). Malgré un Hit ratio égal au portefeuille SMB pour le Logit et supérieur pour le MVS, ces constats expliquent donc le faible rendement des deux modèles relativement aux autres méthodes (nous y reviendrons lors de l'analyse de sensibilité de l'année 2000).

Par ailleurs, comparativement au SMB, il est à noter que le RN et PR ont des gains plus élevés lorsque la prévision est correcte (2,91% et 2,93%), et des pertes plus faibles lorsque la prévision est incorrecte (-2,38% et -2,41%).

Le modèle «Consensus» (correspondant à la majorité des quatre méthodes ou à la même position que le mois précédent s'il y a égalité) a un meilleur rendement que le SMB. En effet, son rendement est de 6,05%, c'est-à-dire 453 points de base de plus que le SMB. Par ailleurs, sa volatilité est légèrement plus faible que le portefeuille SMB (13,09%) pour un rendement par unité de risque plus élevé (0,46). Son rendement moyen lorsque la prédiction est correcte est le plus élevé (2,99%) et son rendement moyen lorsque la prédiction est erronée est le plus faible (-2,34%). Il en est de même pour le HIT ratio (54.44%), alors que celui du SMB n'est que de 52,78%. Nous constatons donc une dominance du «Consensus» sur tous les aspects comparativement au SMB.

	SMB	PR	RN	Logit	MVS	Consensus
Rendement Géométrique Annuel	1,52%	6,25%	6,91%	0,87%	1,00%	6,05%
Écart Type Annualisé	13,21%	13,08%	13,05%	13,22%	13,22%	13,09%
Rendement par Unité de Risque	0,12	0,48	0,53	0,07	0,08	0,46
Plus Grande Perte Mensuelle	-16,69%	-16,69%	-7,71%	-21,49%	-21,49%	-7,71%
Plus Grand Gain Mensuel	21,49%	21,49%	21,49%	16,69%	16,69%	21,49%
Hit Ratio	52,78%	56,11%	56,98%	52,78%	55,00%	54,44%
Rendement Moyen Correct	2,74%	2,91%	2,93%	2,69%	2,59%	2,99%
Rendement Moyen Incorrect	-2,64%	-2,41%	-2,38%	-2,70%	-2,82%	-2,34%
Nombre de Transactions	1	32	55	79	29	35

Tableau 5-2: Comparaison des méthodes sous l'approche statique

5.4.2 Approche dynamique

Selon l'approche dynamique (tableau 5-3), nous observons que les quatre méthodes ont des HIT ratio plus élevés que celui du SMB: 58,89% pour le modèle Logit, 59,44% pour le RN et MVS, et 57,78% pour le PR. De même, leurs rendements sont plus élevés que celui du SMB (3,10% pour le Logit, 6,37% pour le RN, 3,77% pour le MVS et 3,80% pour le PR). Par ailleurs, nous constatons que les quatre méthodes ont une volatilité légèrement moindre que celle du SMB. Néanmoins, aucune des méthodes n'arrive à anticiper le meilleur rendement mensuel (février 2000). En effet, une des limites de ces modèles est que leur capacité de prédiction dépend de la période d'apprentissage. Elles ne peuvent donc prédire des événements extrêmes inédits.

Le «Consensus» obtient de meilleurs résultats que toutes les autres approches. Son rendement est supérieur à celui du SMB de près de 706 points de base, tandis que son écart type n'est que de 12,97% d'où un rendement par unité de risque de 0,66. Il en est de même pour le HIT ratio avec un pourcentage de 64,44%.

En comparant l'approche statique à l'approche dynamique, nous constatons que les HIT ratio des quatre méthodes et du «Consensus» sont plus élevés avec l'approche dynamique. Le ratio passe de 52,78% à 58,89% pour le modèle Logit, de 56,98% à 59,44% pour le RN, de 55% à 59,44% pour le MVS et de 56,11% à 57,78% pour le PR. En entraînant annuellement les modèles à partir de toute l'information disponible, les capacités de prédiction sont donc améliorées. Les rendements annuels des modèles Logit et MVS passent respectivement de 0,87% à 3,10% et de 1% à 3,77%. Le rendement du Réseau de Neurones diminue légèrement et celui du Partitionnement Récursif est plus

faible sous l'approche dynamique. Toutefois, en considérant le consensus des quatre méthodes, le rendement annuel s'améliore nettement de 253 points de base (passant de 6,05% à 8,58%), avec un HIT ratio plus élevé (passant de 54,44% à 66,44%). Le Consensus dynamique a donc de meilleurs résultats que les autres méthodes en dynamique, et que le Consensus statique.

	SMB	PR	RN	Logit	MVS	Consensus
Rendement Géométrique Annuel	1,52%	3,80%	6,37%	3,10%	3,77%	8,58%
Écart Type Annualisé	13,21%	13,16%	13,07%	13,18%	13,16%	12,97%
Rendement par Unité de Risque	0,12	0,29	0,49	0,24	0,29	0,66
Plus Grande Perte Mensuelle	-16,69%	-21,49%	-21,49%	-21,49%	-21,49%	-21,49%
Plus Grand Gain Mensuel	21,49%	16,69%	16,69%	16,69%	16,69%	16,69%
Hit Ratio	52,78%	57,78%	59,44%	58,89%	59,44%	64,44%
Rendement Moyen Correct	2,74%	2,66%	2,76%	2,57%	2,59%	2,68%
Rendement Moyen Incorrect	-2,64%	-2,73%	-2,60%	-2,87%	-2,85%	-2,72%
Nombre de Transactions	1	68	54	65	37	30

Tableau 5-3: Comparaison des méthodes sous l'approche dynamique

5.5 Analyse des variables des modèles

Nous proposons d'analyser les variables dans les différents modèles obtenus après l'entraînement sur la période d'apprentissage de 1975 à 1989. Malheureusement, il n'existe pas actuellement une méthode permettant d'analyser les variables du modèle entraîné par l'approche MVS.

Dans le cas du Partitionnement Récursif, nous obtenons l'arbre suivant:

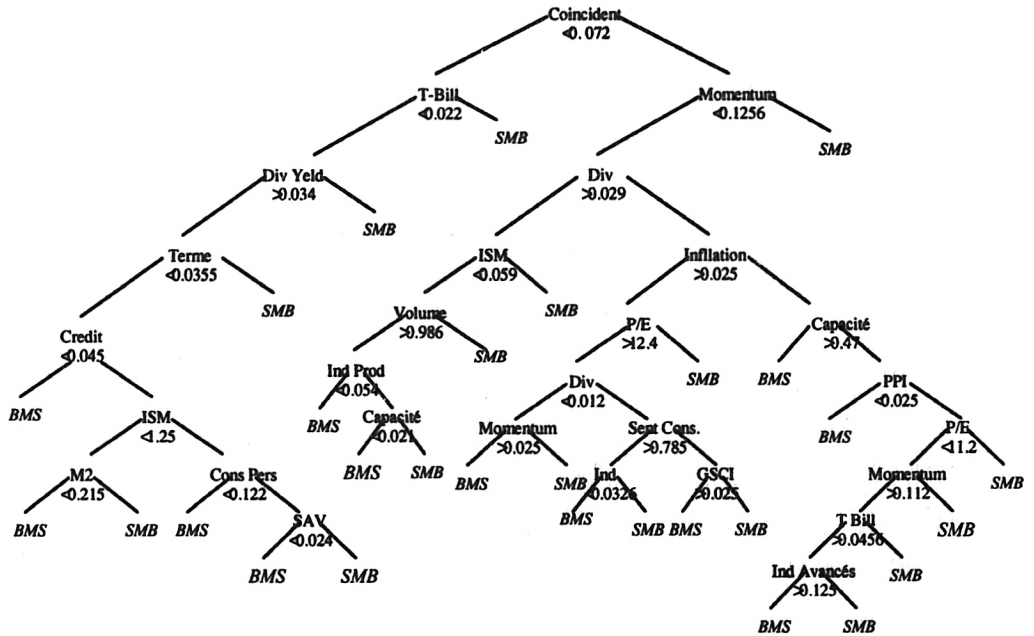


Figure 5-5: Arbre du Partitionnement Récursif

L'arbre est composé de 28 nœuds finaux dont les chemins varient de 2 branchements à 10 branchements. La première variable affichée par l'arbre est l'indice des indicateurs économiques coïncidents, suivis par le taux court et le Momentum. Par exemple, lorsque les variables indice des indicateurs économiques coïncidents et Momentum sont supérieures à un certain seuil, le modèle prédit que les actions de petites firmes vont mieux performer que celles des grandes firmes. Ce résultat a du sens étant donné que ces variables indiquent un environnement économique en croissance.

Concernant le Réseau de Neurones, Olden, Joy et Death (2004) suggèrent la méthodologie des « poids des connexions » afin de quantifier l'importance des variables. Elle consiste à faire la somme des produits des poids des connexions des neurones pour chacune des variables. Ainsi, il est alloué un score pour chaque variable permettant de les classer les unes aux autres. Nous obtenons que les dix variables les plus importantes par ordre croissant sont l'inflation, l'écart de taux, l'indice des indicateurs économiques

coïncidents, le P/E, le Momentum, l'écart de crédit, le bon du Trésor 3 mois, l'indice des indicateurs économiques avancés, le taux de dividende et le changement du taux de change.

Afin d'analyser les variables pour le modèle Logit, les coefficients de la régression Logit et les tests de Wald pour chacune des variables sont présentés dans le tableau 5-4. La signification des coefficients des variables indépendantes est donnée par le test de Wald. La statistique de Wald est obtenue par le rapport entre la valeur du coefficient et son écart type. Elle suit une loi normale centrée réduite. Un coefficient est significatif si la valeur empirique du test de Wald est supérieure à sa valeur théorique pour un seuil d'erreur donné.

L'analyse du tableau montre que les variables écart de crédit, bon du Trésor 3 mois, indice des indicateurs économiques coïncidents et avancés sont significatifs au seuil de 10%, le ratio P/E, l'inflation et changement mensuel de l'indice de production industriel le sont à 5% et le Momentum à 1%. En analysant le signe du Beta, nous constatons que les variables Momenteum, P/E et indicateurs économiques avancés influent positivement sur la performance du portefeuille. En effet, ces variables sont liés à une croissance économique. Tandis que les variables écart de taux, bon du Trésor 3 mois, l'inflation et taux de dividende sont liés à un ralentissement économique, et influent donc négativement la performance du portefeuille SMB.

Par ailleurs, il est intéressant de constater que les signes des coefficients des variables bon du Trésor 3 mois et de la masse monétaire M2 sont similaires aux résultats obtenus par Jensen, Johnson et Mercer (1998) suggérant que le rendement du portefeuille SMB est plus faible lorsque la Réserve Fédérale américaine augmente son taux directeur et que la politique monétaire devient plus restrictive. De même, les signes obtenus pour les coefficients des variables inflation, structure à terme et indice indicateur économique coïncidents sont identiques à ceux de l'étude réalisée par Levis et Liodakis (1999).

<i>Variables</i>	<i>β</i>	<i>Wald</i>
	-0.541	15.53
Écart de crédit (Taux obligataire corporatif Baa - taux obligataire corporatif Aaa)	-0.384	4.56*
Écart de taux (Bon du trésor 10 ans – Bon du trésor 1 an)	0.144	10.53
T-Bill 3 mois	-0.256	7.45*
Taux de capacité d'utilisation (industrie totale)	0.442	12.23
Changement mensuel de l'indice de production industriel	-0.025	8.56**
Indice de confiance des consommateurs	1.25	4.95
Indice composite d'activité du secteur industriel (ISM)	2.85	3.65
Taux d'épargne personnel	1.15	3.12
Changement mensuel de l'indice des prix du consommateur	-5.51	10.23**
Changement mensuel monétaire M2	0.258	4.52
Ratio P/E du S&P 500	3.12	8.45**
Momentum 6 mois du S&P 500	4.45	7.45***
Taux de dividende du S&P 500	-1.23	12.56*
Indice des indicateurs économiques avancés	0.258	8.52
Indice des indicateurs économiques coïncidents	0.552	7.62*
Rendement mensuel de l'indice GSCI («Goldman Sachs Commodity Index»)	-1.23	6.89
Changement mensuel de l'indice des prix de production des commodités industrielles	-2.12	8.82
Changement mensuel taux de change pondéré	0.02	3.18
Changement mensuel du volume du NYSE	1.56	4.52

*, **, *** respectivement significatif au seuil de 10%, 5% et 1%

Tableau 5-4: Variables de la régression Logit

5.6 Tests d'anticipation du marché

5.6.1 Test non paramétrique de Henriksson-Merton

Pour tester la robustesse de prédiction des modèles, nous appliquons le test non paramétrique d'anticipation du marché de Henriksson-Merton (1981) (tableau 5-5). Il consiste à mesurer la capacité du modèle à prédire la position du portefeuille (long versus court). À cette fin, il détermine le nombre de prédictions correctes lorsque le rendement du portefeuille est positif et le nombre de prédictions correctes lorsque le rendement est négatif, puis calcule le test statistique (*p-stat*) comme suit:

$$p-stat = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2}$$

Avec :

n_1 : Le nombre de prédictions correctes lorsque le rendement du portefeuille SMB > 0,

N_1 : Le nombre d'observations où le rendement du portefeuille SMB > 0,

n_2 : Le nombre de prédictions correctes lorsque le rendement du portefeuille SMB < 0,

N_2 : Le nombre d'observations où le rendement du portefeuille SMB < 0.

Lorsque le *p-stat* > 1, le test confirme la capacité de prédiction du modèle. Plus la valeur est élevée, et plus la capacité de prédiction du modèle est élevée. Les résultats sont affichés dans le tableau 5-5:

	PR		RN		Logit		MVS		Consensus	
	Stat.	Dyn.	Stat.	Dyn.	Stat.	Dyn.	Stat.	Dyn.	Stat.	Dyn.
n1	70	53	54	50	38	42	23	44	40	47
n2	31	51	48	57	60	63	76	63	58	69
p-stat	1,102	1,158	1,133	1,197	1,106	1,183	1,136	1,204	1,104	1,307
p-value	9,55%*	2,44%**	5%**	0,59%***	12,27%	0,47%***	7,8%*	0,66%***	1,51%**	0%***

*, **, *** correspondent respectivement à 10%, 5% et 1% niveau de confiance.

p-stat = $n_1/N_1 + n_2/N_2$; n_1 : nombre de prédictions correctes lorsque SMB > 0; N_1 : nombre d'observations où SMB > 0; n_2 : nombre de prédictions correctes lorsque SMB < 0; N_2 : nombre d'observations où SMB < 0; n_3 : nombre d'observations incorrectes lorsque SMB < 0;

p-value est calculé selon la formule suivante (Park et Switzer (1996)):

$$p-value = \sum_{n_1}^{\min(N_1, n)} \left[\frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}} \right] \quad \text{Avec } N = N_1 + N_2; n = n_1 + n_3$$

Tableau 5-5: Test non paramétrique de Henriksson-Merton

Nous observons que tous les *p-stat* sont supérieurs à 1. De plus, leurs valeurs augmentent de l'approche statique à l'approche dynamique. Parmi les quatre méthodes, le MVS dynamique possède le *p-stat* le plus élevé de l'ordre de 1,204, suivi du RN (1,197).

Par ailleurs, nous observons que les modèles sont significatifs sous l'approche statique à un niveau de confiance de 10%. En passant à l'approche dynamique, les niveaux de confiance descendent à 5% pour le PR et 1% pour le RN, le MVS et le modèle Logit. La méthode Consensus en dynamique détient le meilleurs *p-stat* (1,336) et le plus faible *p-value* (1.10^{-5}).

Le test non paramétrique de Henriksson-Merton met donc en exergue les capacités de prédiction des modèles et surtout ceux du Consensus sous l'approche dynamique. Un investisseur peut donc considérer les prévisions proposées sur la position du portefeuille SMB afin de générer de l'alpha.

5.6.2 Test paramétrique de Henriksson-Merton

Le test non paramétrique de Henriksson-Merton a pour inconvénient de ne pas tenir compte de l'amplitude des rendements. Nous proposons d'appliquer le test d'anticipation du marché paramétrique d'Henriksson-Merton (1981) qui tient compte des rendements réalisés pour déterminer la capacité de prédiction des modèles.

Le test suggère de discerner entre les rendements positifs et négatifs du SMB par l'inclusion d'une variable indicatrice dans la régression linéaire:

$$r_{mod} = a + b r_{smb} + c r_{smb} D + e_p \quad (5.4)$$

Avec:

r_{mod} : le rendement du portefeuille du modèle,

r_{smb} : le rendement du portefeuille SMB,

D : la variable indicatrice $D=1$ si $r_{smb} \geq 0$, et $D=0$ sinon,

b : le bêta du portefeuille lorsque $r_{smb} \geq 0$,

c : la capacité d'anticipation du marché du modèle.

b correspond au bêta du portefeuille lorsque $r_{smb} < 0$ et $b+c$ lorsque $r_{smb} > 0$. La capacité d'anticipation du modèle est égale à la différence entre les deux bêtas c'est-à-dire c . Plus c est élevé, et plus le modèle est apte à anticiper l'effet taille.

Nous observons que l'aptitude d'anticipation est confirmée pour le RN, le PR et le Consensus en statique (tableau 5-6), et pour le RN et le Consensus en dynamique (tableau 5-7). Néanmoins, ces résultats sont significatifs à 1% de niveau de confiance uniquement pour les méthodes statiques. Ce constat s'oppose aux résultats obtenus jusqu'à présent démontrant de meilleures aptitudes sous l'approche dynamique que statistique (surtout pour le Consensus). Toutefois, il est à noter que cette régression linéaire est sensible aux valeurs extrêmes telles que celles observées au cours de l'année 2000. Or, sous l'approche dynamique, toutes les méthodes ont une position longue pour le pire des mois (-16,69%) induisant des niveaux de confiance de 1% pour b , tandis qu'aucune n'est longue au cours du meilleur mois (21,49%) causant des p -value non significatifs pour l'aptitude de prédiction. Ces résultats confirment bien la grande sensibilité de la régression aux valeurs extrêmes.

	PR		RN		Logit		MVS		Consensus	
	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value
a	0,00	64,61%	-0,01	0,21%	0,01	0,1%***	0,00	2,35%**	0,00	65,63%
b	0,30	0,95%***	-0,51	0,01%***	-0,45	0,10%***	0,25	2,57%**	0,13	30,57%
c	0,46	0,83%***	1,26	0,00%***	0,16	4,05%**	0,16	3,05%**	0,57	0,98%***

*, **, *** correspondent respectivement à 10%, 5% et 1% niveau de confiance.

Tableau 5-6: Test paramétrique de Henriksson-Merton sous l'approche statique

	PR		RN		Logit		MVS		Consensus	
	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value
a	0,01	16,43%	0,00	77,69%	0,00	10,31%	0,00	10,23%	0,01	5,31%*
b	-0,37	0,53%***	-0,59	0,00%**	-0,60	0%***	-0,49	0,08%***	-0,66	0,00%***
c	-0,04	83,35%	0,42	3,68%**	-0,05	7,78%*	0,23	6,68%*	0,68	0,43%***

*, **, *** correspondent respectivement à 10%, 5% et 1% niveau de confiance.

Tableau 5-7: Test paramétrique de Henriksson-Merton sous l'approche dynamique

Il n'est donc pas possible de conclure que l'aptitude d'anticipation du modèle est mauvaise (ou bonne) uniquement sur le fait qu'il se trompe (ou non) lors d'un mois rare et extrême.

En retirant les trois mois où le rendement du portefeuille SMB est supérieur en absolu à 10%, nous obtenons les tableaux 5-8 sous l'approche statique et 5-9 sous l'approche dynamique.

Les résultats observés sont alors plus en ligne avec les conclusions déduites jusqu'à présent. En effet, nous constatons que toutes les méthodes ont des capacités d'anticipation. Par ailleurs, excepté pour le PR, le coefficient d'anticipation s'améliore de l'approche statique au dynamique. Le test est significatif avec un niveau de confiance de 5% pour les modèles Logit, MVS et PR, et de 1% pour le RN et le Consensus.

Le test confirme l'aptitude d'anticipation du Consensus en statique et en dynamique avec un niveau de confiance inférieur à 1%.

Les tests sont donc concluants et confirment les aptitudes d'anticipation des modèles, surtout sous l'approche dynamique et pour le Consensus.

	PR		RN		Logit		MVS		Consensus	
	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value
a	0,00	44,16%	0,00	93,25%	0,00	87,82%	0,00	3,52%**	0,00	40,92%
b	0,03	83,00%	-0,04	80,52%	-0,24	9,69%*	-0,23	8,35%*	-0,21	12,98%
c	0,59	0,99%***	0,30	22,07%	0,05	3,91%**	0,48	4,22%**	0,73	0,22%***

*, **, *** correspondent respectivement à 10%, 5% et 1% niveau de confiance.

Tableau 5-8: Test paramétrique de Henriksson-Merton sous l'approche statique sans les valeurs extrêmes

	PR		RN		Logit		MVS		Consensus	
	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value	Coeff	P-value
a	0,00	71,43%	0,00	61,74%	0,00	74,66%	0,00	12,33%	0,00	65,12%
b	-0,34	2,22%**	-0,53	0,02%***	-0,57	0%***	-0,56	3,12%**	-0,76	0,00%***
c	0,52	3,21%**	0,61	0,94%***	0,30	1,78%**	0,51	2,26%**	0,87	0,01%***

*, **, *** correspondent respectivement à 10%, 5% et 1% niveau de confiance.

Tableau 5-9: Test paramétrique de Henriksson-Merton sous l'approche dynamique sans les valeurs extrêmes

5.7 Analyse de sensibilité

Dans cette partie, nous analysons les résultats obtenus antérieurement sur trois aspects. Nous testons la sensibilité des résultats au cours des sous-périodes. Ensuite, nous analysons les résultats plus en détail concernant l'année 2000 correspondant à l'éclatement de la bulle technologique. Enfin, nous étudions l'impact des coûts de transactions sur les performances de ces méthodes.

5.7.1 Sous-périodes

Dans cette section, nous examinons les résultats des méthodes sous les approches statique (tableau 5-10) et dynamique (tableau 5-11) sur trois sous-périodes: 1990-1994, 1995-1999 et 2000-2004.

Nous observons que les modèles Logit et MVS dominent le SMB sur les deux premières sous-périodes en statique et dynamique. Elles détiennent les deux meilleurs rendements pour les périodes 1990-1994 en dynamique. Les faibles rendements totaux de ces deux approches s'expliquent par de moins bonnes performances dues à une malchance durant la sous-période la plus agitée c'est-à-dire 2000-2004.

Par ailleurs, nous constatons qu'aucune des quatre méthodes ne domine le SMB sur toutes les sous-périodes, à la fois sous l'approche statique et dynamique (seul le rendement et les HIT ratio du Réseau de Neurones et du MVS en dynamique dominent le SMB sur les trois sous-périodes). Néanmoins, les quatre méthodes, en statique et dynamique, dominent le SMB sur au moins deux des trois sous-périodes et affichent parmi les meilleurs rendement dans au moins une des trois sous-périodes. En effet, sous l'approche statique, les meilleurs rendements sont obtenus par le PR de 1990-1994 (9,23%), le MVS de 1995-1999 (5,12%), et le RN de 2000-2004 (19,81%). De même, sous l'approche dynamique, le meilleur rendement est obtenu par le modèle Logit de 1990-1994 (8,65%), le PR de 1995-1999 (4,70%) et le RN de 2000-2004 (12,49%). Ces constats mettent en exergue deux éléments. Premièrement, ces méthodes sont plus performantes à plus long terme. En effet, en leur donnant une période plus longue, nous donnons plus de chance aux modèles de battre le SMB. Deuxièmement, ce constat renforce l'approche du consensus. En effet, il est intéressant d'observer que la stratégie «Consensus» domine le SMB quelle que soit la sous-période en statique et en dynamique. Par ailleurs, elle obtient parmi les meilleurs rendements et HIT ratio sur les trois sous-périodes pour l'approche dynamique.

La comparaison des deux approches pour la sous-période 2000-2004 montre que les rendements augmentent dans le cas du Logit et du MVS en dynamique. Par ailleurs, le passage de l'approche statique au dynamique permet d'améliorer le HIT ratio du

«Consensus» sur les trois sous-périodes. En effet, le ratio passe, de 58,33 % à 66,67 % pour la sous-période 1990-1994, de 53,33 % à 58,33 % pour la sous-période 1995-1999, et de 51,67 % à 68,33 % pour la sous-période 2000-2004. Il en est de même pour les rendements des sous-périodes 1990-1994, 1995-1999 et 2000-2004 passant respectivement de 6,33 % à 9,25 %, de 0,63 % à 4,61 % et de 11,45 % à 11,99 %.

De l'analyse des sous-périodes, nous pouvons donc conclure que, d'une part, les résultats de ces approches affichent de meilleures performances plus la période est longue, et d'autre part, prendre le consensus des méthodes (plus particulièrement sous l'approche dynamique) améliore les capacités de prédiction à court terme et à long terme. Enfin, il y a une nette amélioration des résultats lorsqu'on applique les modèles sont adaptés récursivement à l'information.

	SMB	PR	RN	Logit	MVS	Consensus
1990-1994						
Rendement Géométrique Annuel	1,28%	9,23%	-0,69%	6,80%	6,70%	6,33%
Écart Type Annualisé	8,35%	7,92%	8,36%	8,11%	8,12%	8,14%
Rendement par Unité de Risque	0,15	1,17	-0,08	0,84	0,83	0,78
Plus Grande Perte Mensuelle	-6,03%	-3,39%	-6,03%	-6,03%	-6,03%	-6,03%
Plus Grand Gain Mensuel	8,49%	8,49%	8,49%	8,49%	8,49%	8,49%
Hit Ratio	55,00%	58,33%	47,46%	58,33%	63,33%	58,33%
Rendement Moyen Correct	1,72%	2,16%	1,85%	2,00%	1,84%	1,97%
Rendement Moyen Incorrect	-1,88%	-1,26%	-1,68%	-1,42%	-1,62%	-1,46%
Nombre de Transactions	1	8	23	29	19	13
1995-1999						
Rendement Géométrique Annuel	-4,50%	2,73%	2,70%	-0,79%	5,12%	0,63%
Écart Type Annualisé	12,56%	12,51%	12,57%	12,59%	12,49%	12,60%
Rendement par Unité de Risque	-0,36	0,22	0,21	-0,06	0,41	0,05
Plus Grande Perte Mensuelle	-6,53%	-7,44%	-7,71%	-7,44%	-7,71%	-7,71%
Plus Grand Gain Mensuel	7,71%	7,71%	6,98%	7,71%	7,44%	6,53%
Hit Ratio	43,33%	50,00%	56,67%	51,67%	56,67%	53,33%
Rendement Moyen Correct	2,82%	3,05%	2,69%	2,67%	2,86%	2,70%
Rendement Moyen Incorrect	-2,69%	-2,49%	-2,42%	-2,71%	-2,88%	-2,39%
Nombre de Transactions	1	14	19	20	4	8
2000-2004						
Rendement Géométrique Annuel	8,19%	6,89%	19,81%	-3,15%	-8,15%	11,45%
Écart Type Annualisé	11,04%	11,25%	11,32%	11,46%	11,30%	11,58%
Rendement par Unité de Risque	0,74	0,61	1,75	-0,27	-0,72	0,99
Plus Grande Perte Mensuelle	-16,69%	-16,69%	-7,53%	-21,49%	-21,49%	-6,98%
Plus Grand Gain Mensuel	21,49%	21,49%	21,49%	16,69%	16,69%	21,49%
Hit Ratio	60,00%	60,00%	66,67%	48,33%	45,00%	51,67%
Rendement Moyen Correct	2,41%	3,53%	3,89%	3,54%	3,31%	4,43%
Rendement Moyen Incorrect	-2,36%	-3,58%	-2,88%	-3,56%	-3,73%	-2,61%
Nombre de Transactions	1	10	13	30	6	14

Tableau 5-10: Comparaison statique des sous-périodes

	SMB	PR	RN	Logit	MVS	Consensus
1990-1994						
Rendement Géométrique Annuel	1,28%	3,15%	5,10%	8,65%	6,84%	9,25%
Écart Type Annualisé	8,35%	8,30%	8,21%	7,97%	8,11%	7,92%
Rendement par Unité de Risque	0,15	0,38	0,62	1,09	0,84	1,17
Plus Grande Perte Mensuelle	-6,03%	-8,49%	-6,03%	-3,87%	-6,03%	-6,03%
Plus Grand Gain Mensuel	8,49%	5,76%	8,49%	8,49%	8,49%	8,49%
Hit Ratio	55,00%	56,67%	61,67%	63,33%	65,00%	66,67%
Rendement Moyen Correct	1,72%	1,81%	1,78%	1,96%	1,80%	1,89%
Rendement Moyen Incorrect	-1,88%	-1,70%	-1,77%	-1,42%	-1,68%	-1,49%
Nombre de Transactions	1	25	26	23	19	9
1995-1999						
Rendement Géométrique Annuel	-4,50%	4,70%	1,78%	-0,58%	1,06%	4,61%
Écart Type Annualisé	12,56%	12,50%	12,54%	12,57%	12,57%	12,51%
Rendement par Unité de Risque	-0,36	0,38	0,14	-0,05	0,08	0,37
Plus Grande Perte Mensuelle	-6,53%	-7,44%	-7,71%	-7,71%	-7,44%	-7,44%
Plus Grand Gain Mensuel	7,71%	7,71%	6,53%	5,92%	7,71%	7,71%
Hit Ratio	43,33%	58,33%	56,67%	53,33%	53,33%	58,33%
Rendement Moyen Correct	2,82%	2,75%	2,62%	2,60%	2,73%	2,74%
Rendement Moyen Incorrect	-2,69%	-2,84%	-2,64%	-2,90%	-2,92%	-2,80%
Nombre de Transactions	1	23	11	26	7	5
2000-2004						
Rendement Géométrique Annuel	8,19%	3,55%	12,49%	1,45%	3,49%	11,99%
Écart Type Annualisé	11,04%	11,55%	11,23%	11,54%	11,45%	10,99%
Rendement par Unité de Risque	0,74	0,31	1,11	0,13	0,30	1,09
Plus Grande Perte Mensuelle	-16,69%	-21,49%	-21,49%	-21,49%	-21,49%	-21,49%
Plus Grand Gain Mensuel	21,49%	16,69%	16,69%	16,69%	16,69%	16,69%
Hit Ratio	60,00%	58,33%	60,00%	60,00%	60,00%	68,33%
Rendement Moyen Correct	2,41%	2,42%	2,45%	2,36%	2,38%	2,47%
Rendement Moyen Incorrect	-2,36%	-2,35%	-2,30%	-2,44%	-2,41%	-2,24%
Nombre de Transactions	1	20	17	16	11	16

Tableau 5-11: Comparaison dynamique des sous-périodes

5.7.2 Année 2000

Dans cette section, nous étudions plus particulièrement la sensibilité des performances du modèle au cours de l'année 2000. En effet, cette année est assez particulière dans la période test. Elle correspond à l'année de l'écclatement de la bulle spéculative technologique. Ainsi, cette année possède trois mois où les rendements ont dépassé 10% en absolu (21,49% pour le mois de février, -16,69% pour le mois de mars et 13,3% pour le mois de juin). C'est donc d'une part une période assez instable, et d'autre part il n'existe pas d'événements extrêmes dans le passé similaires à celui-ci. Afin

d'étudier l'impact de cette année sur les résultats, nous analysons la sensibilité des résultats à cette année en la retirant de l'échantillon test (tableaux 5-12 et 5-13), puis en plafonnant les plus fortes hausses et baisses (tableaux 5-14 et 5-15).

En éliminant l'année 2000 de l'échantillon test, nous réduisons les événements extrêmes de la période test. L'analyse des rendements par unité de risque montre une amélioration de ceux-ci pour les quatre approches. Par ailleurs, les performances sont supérieures à celle du SMB (0,37 pour le Logit, 0,36 pour le MVS, 0,50 pour le RN, 0,36 pour le PR et 0,21 pour le SMB) pour l'approche statique. Il en est de même de l'approche dynamique concernant la dominance de ces méthodes par rapport au SMB, concernant le rendement annuel, le HIT ratio et le rendement par unité de risque.

Le «Consensus» en dynamique garde sa supériorité relativement aux quatre méthodes et au SMB, concernant le rendement annuel, le HIT ratio, la volatilité et le rendement par unité de risque. Les résultats confirment la supériorité du «Consensus» dans le cadre dynamique où le rendement par unité de risque passe de 0,13 à 0,84.

	SMB	PR	RN	Logit	MVS	Consensus
Rendement Géométrique Annuel	2,16%	6,94%	3,07%	0,09%	3,74%	1,42%
Écart Type Annualisé	10,51%	10,33%	10,49%	10,54%	10,47%	10,52%
Rendement par Unité de Risque	0,21	0,67	0,29	0,01	0,36	0,13
Plus Grande Perte Mensuelle	-6,53%	-7,44%	-7,71%	-7,44%	-8,49%	-7,71%
Plus Grand Gain Mensuel	8,49%	8,49%	8,49%	8,49%	7,71%	8,49%
Hit Ratio	54,17%	57,14%	55,09%	52,38%	54,17%	52,98%
Rendement Moyen Correct	2,41%	2,62%	2,45%	2,33%	2,35%	2,41%
Rendement Moyen Incorrect	-2,36%	-2,08%	-2,31%	-2,45%	-2,44%	-2,37%
Nombre de Transactions	1	30	51	72	29	31

Tableau 5-12: Comparaison statique des méthodes sans l'année 2000

	SMB	PR	RN	Logit	MVS	Consensus
Rendement Géométrique Annuel	2,16%	3,74%	5,24%	3,84%	4,51%	8,60%
Écart Type Annualisé	10,51%	10,47%	10,41%	10,46%	10,44%	10,23%
Rendement par Unité de Risque	0,21	0,36	0,50	0,37	0,43	0,84
Plus Grande Perte Mensuelle	-6,53%	-8,49%	-7,71%	-7,71%	-7,44%	-7,44%
Plus Grand Gain Mensuel	8,49%	7,71%	8,49%	8,49%	8,49%	8,49%
Hit Ratio	54,17%	56,5%	58,3%	58,3%	58,9%	63,1%
Rendement Moyen Correct	2,41%	2,42%	2,45%	2,36%	2,38%	2,47%
Rendement Moyen Incorrect	-2,36%	-2,35%	-2,30%	-2,44%	-2,41%	-2,24%
Nombre de Transactions	1	67	52	65	35	29

Tableau 5-13: Comparaison dynamique des méthodes sans l'année 2000

L'analyse du plafonnement des rendements extrêmes à -10% et 10% indique les mêmes constats que précédemment. En effet, les quatre méthodes dominent le SMB au niveau du rendement, du rendement par unité de risque et du HIT ratio. De plus, la volatilité des quatre approches est aux alentours de 11,5%. Combinant ces résultats avec ceux du rendement, nous obtenons des rendements par unité de risque supérieurs à celui du SMB.

Par ailleurs, le «Consensus» reste supérieur aux autres méthodes affichant un rendement de 9,41% en dynamique. Il est à noter que le «Consensus» sous l'approche dynamique obtient de meilleurs résultats (le HIT ratio, le rendement et le rendement par unité de risque) que sous l'approche statique.

	SMB	PR	RN	Logit	MVS	Consensus
Rendement Géométrique Annuel	1,17%	5,88%	5,58%	1,19%	4,60%	4,73%
Écart Type Annualisé	11,55%	11,41%	11,43%	11,55%	11,46%	11,46%
Rendement par Unité de Risque	0,10	0,52	0,49	0,10	0,40	0,41
Plus Grande Perte Mensuelle	-10,00%	-10,00%	-7,71%	-10,00%	-10,00%	-7,71%
Plus Grand Gain Mensuel	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%
Hit Ratio	52,78%	56,11%	56,98%	52,78%	56,11%	54,44%
Nombre de Transactions	1	32	55	79	29	35

Tableau 5-14: Comparaison statique des méthodes avec les rendements plafonnés

	SMB	PR	RN	Logit	MVS	Consensus
Rendement Géométrique Annuel	1,17%	4,60%	6,71%	3,82%	4,57%	9,41%
Écart Type Annualisé	11,55%	11,46%	11,37%	11,49%	11,47%	11,22%
Rendement par Unité de Risque	0,10	0,40	0,59	0,34	0,40	0,84
Plus Grande Perte Mensuelle	-10,00%	-10,00%	-10,00%	-10,00%	-10,00%	-10,00%
Plus Grand Gain Mensuel	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%
Hit Ratio	52,78%	59,44%	59,44%	58,89%	59,44%	64,44%
Nombre de Transactions	1	68	54	65	37	30

Tableau 5-15: Comparaison dynamique des méthodes avec les rendements plafonnés

5.7.3 Coûts de transaction

Contrairement à la stratégie passive du SMB, ces quatre méthodes nécessitent le rééquilibrage périodique du portefeuille impliquant des frais de transactions. Nous testons donc la sensibilité de ces approches en considérant les frais de transaction qui leur sont imputées (tableau 5-16). À cette fin, nous déterminons les rendements géométriques

annuels nets de frais de transaction. Par ailleurs, nous évaluons les frais de transaction maximum annulant le rendement, ainsi que ceux égalisant avec la stratégie SMB.

Hormis les modèles Logit et MVS dans le cadre statique dont le rendement est inférieur au SMB, les autres stratégies restent rentables relativement au SMB pour des frais de transaction variant de 35,47 points de base pour le Logit dynamique à 328,3 points de base pour le Consensus dynamique. Ainsi, pour des coûts de transaction de l'ordre de 30 Pb, ces stratégies restent rentables par comparaison au SMB.

Nous remarquons que le MVS statique est la stratégie la moins sensible aux coûts de transaction. Avec un nombre de transaction total de 29, son rendement diminue plus lentement que les autres approches à mesure que le coût d'une transaction augmente. Par ailleurs, elle est la moins sensible des quatre approches en dynamique. Le RN garde un nombre de transactions similaire en passant du statique au dynamique, tandis que le nombre de transaction du modèle Logit diminue.

Par ailleurs, nous constatons que la stratégie Consensus sous l'approche dynamique nécessite le moins de transactions (30) que les quatre autres approches. Ajouté au rendement élevé de cette méthode, c'est la seule méthode qui reste rentable relativement au SMB pour des frais s'élevant à 328 points de base.

	Frais de transaction	SMB	PR		RN		Logit		MVS		Consensus	
			Stat.	Dyn.	Stat.	Dyn.	Stat.	Dyn.	Stat.	Dyn.	Stat.	Dyn.
Rdt géométrique annuel	0 bp	1,5%	6,3%	3,8%	6,9%	6,4%	0,9%	3,1%	1,0%	3,8%	6,0%	8,6%
	25 bp	1,5%	5,7%	2,6%	5,9%	5,4%	-0,5%	2,0%	0,5%	3,1%	5,4%	8,0%
	50 bp	1,5%	5,1%	1,5%	5,0%	4,5%	-1,8%	0,9%	0,0%	2,5%	4,8%	7,5%
	100 bp	1,5%	4,0%	-0,8%	3,0%	2,6%	-4,4%	-1,3%	-0,9%	1,2%	3,6%	6,4%
	125 bp	1,4%	3,4%	-2,0%	2,1%	1,7%	-5,6%	-2,4%	-1,4%	0,6%	3,0%	5,9%
	150 bp	1,4%	2,9%	-3,1%	1,2%	0,8%	-6,9%	-3,5%	-1,9%	-0,1%	2,4%	5,3%
Break even 0% (bp)		S/O	281,0	81,8	180,8	170,8	16,3	70,0	50,6	140,2	250,0	400,0
Break even SMB (bp)		S/O	111,5	54,5	127,0	114,2	S/O	35,5	S/O	78,8	186,6	328,3
Nb transactions		1	32	68	55	54	79	65	29	37	35	30

Tableau 5-16: Coûts de transactions

5.7.4 Approche par échantillonnage

Afin de s'assurer que les résultats obtenus sur la période de test (de 1990 à 2004) ne sont pas dus uniquement à une heureuse répartition des données entre les périodes d'apprentissage et de test, nous avons appliqué la méthodologie en ordonnant aléatoirement les 360 groupes de données mensuelles disponibles de janvier 1975 à décembre 2004. L'approche est appliquée un dizaine de fois dans le cas dynamique. Les moyennes des performances sont calculées à partir des résultats obtenus (tableau 5-17).

	SMB	PR	RN	Logit	SVM	Consensus
Moyenne Rendement Géométrique Annuel	1,68%	2,88%	4,37%	3,60%	3,10%	7,69%
Moyenne Écart Type Annualisé	12,16%	11,82%	11,72%	11,91%	11,94%	11,58%
Rendement par Unité de Risque	0,14	0,24	0,37	0,30	0,26	0,66
Moyenne Hit Ratio	53,43%	57,22%	56,67%	57,50%	58,06%	63,33%

Tableau 5-17: Moyenne des performances par échantillonnage

Les performances réalisées confirment les constats malgré des résultats légèrement plus faible que celles obtenues au paravent. En effet, les rendements des quatre modèle sont supérieurs à celui du portefeuille SMB, variant de 2.88% pour le PR à 4.37% pour le RN. Par ailleurs, le modèle Consensus performe mieux que le portefeuille SMB, ainsi que les portefeuilles des autres modèles. Il en est de même pour la volatilité de toutes ces méthodes légèrement plus faible que celle du portefeuille SMB. Enfin les Hit ratios des modèles confirment cette capacité de prédiction, avec une supériorité du modèle Consensus dont le Hit ratio est de l'ordre de 63,33%.

5.8 Application empirique

Nous proposons de tester les positions proposées par les modèles sur des indices transigées à l'aide d'ETF dont les frais de transaction sont faibles. A cette fin, nous répliquons le portefeuille SMB par une composition de l'indice Russell 2000 pour les actions de petites firmes et l'indice Russell 1000 pour les actions de grandes firmes. La

corrélation entre les portefeuilles Russell 2000 - Russell 1000 et SMB est de 93%. Toutefois, il existe d'autres indices pouvant répliquer le portefeuille SMB tels que le S&P 600 - S&P 500 ou Wilshire 1750 - Wilshire 750.

Nous comparons les performances des différentes méthodes comparativement à la stratégie passive consistant à être long dans l'indice Russell 2000 et court dans l'indice Russell 1000 pour la période 1990-2004 sous l'approche statique (tableau 5-18) et dynamique (tableau 5-19).

Les résultats confirment la dominance de ces méthodes relativement à la stratégie passive. Par ailleurs, les rendements augmentent du statique au dynamique. Sans surprise, le meilleur rendement est obtenu avec la méthode du Consensus sous l'approche dynamique avec un écart de 1002 points de base comparativement au portefeuille Russel.

	SMB	PR	RN	Logit	MVS	Consensus
Rendement Géométrique Annuel	0,00%	4,91%	6,58%	1,64%	2,56%	5,10%
Écart Type Annualisé	12,00%	11,89%	11,82%	11,98%	11,96%	11,89%
Rendement par Unité de Risque	0,00	0,41	0,56	0,14	0,21	0,43
Plus Grande Perte Mensuelle	-15,70%	-15,70%	-7,70%	-16,78%	-16,78%	-7,70%
Plus Grand Gain Mensuel	16,78%	16,78%	16,78%	15,70%	15,70%	16,78%
Hit Ratio	51,11%	55,56%	56,42%	55,56%	53,33%	56,11%
Rendement Moyen Correct	2,57%	2,72%	2,81%	2,48%	2,66%	2,71%
Rendement Moyen Incorrect	-2,56%	-2,37%	-2,25%	-2,67%	-2,46%	-2,38%
Nombre de Transactions	1	32	55	79	29	35

Tableau 5-18: Comparaison statique des méthodes avec Russell 2000-Russell 1000

	SMB	PR	RN	Logit	MVS	Consensus
Rendement Géométrique Annuel	0,00%	2,26%	7,76%	4,34%	4,95%	10,18%
Écart Type Annualisé	12,00%	11,97%	11,76%	11,91%	11,89%	11,62%
Rendement par Unité de Risque	0,00	0,19	0,66	0,36	0,42	0,88
Plus Grande Perte Mensuelle	-15,70%	-16,78%	-16,78%	-16,78%	-16,78%	-16,78%
Plus Grand Gain Mensuel	16,78%	15,70%	15,70%	15,70%	15,70%	15,70%
Hit Ratio	51,11%	55,00%	62,22%	57,22%	56,67%	63,89%
Rendement Moyen Correct	2,57%	2,56%	2,61%	2,60%	2,67%	2,69%
Rendement Moyen Incorrect	-2,56%	-2,58%	-2,49%	-2,51%	-2,43%	-2,35%
Nombre de Transactions	1	68	54	65	37	30

Tableau 5-19: Comparaison dynamique des méthodes avec Russell 2000-Russell 1000

5.9 Conclusion

La stratégie d'anticipation de l'effet taille peut être très profitable si l'investisseur a de bonnes capacités de prédire la prime. À cette fin, nous proposons l'anticipation de l'effet taille en se basant sur les données macro-économiques prédictives, et ceci grâce à des approches basées sur l'intelligence artificielle (le Partitionnement Récursif, le Réseau de Neurones, le modèle Logit et la Machine à Vecteurs de Support). Une fois ces modèles entraînés sur l'échantillon d'apprentissage de 1975 à 1990, nous les testons sous l'approche statique et dynamique (les modèles sont entraînés annuellement en disposant de toutes les données disponibles) sur la période 1990 à 2004.

Relativement à la stratégie SMB, nous constatons que les quatre modèles sous l'approche dynamique ont de meilleures performances. Cependant, aucune des méthodes ne domine le SMB sur toutes les sous-périodes de cinq ans. Toutefois, une stratégie basée sur le consensus des méthodes permet de dominer le SMB sur chacune des sous-périodes, et d'améliorer les résultats sur l'ensemble de la période. Les méthodes dominent généralement sur le long terme, alors que le Consensus domine sur le court terme et le long terme. Par ailleurs, nous observons que l'approche dynamique améliore les capacités de prédiction relativement à l'approche statique.

Nous montrons que pour des coûts de transaction relativement raisonnables, ces méthodes restent généralement rentables. Les tests d'anticipation du marché confirment les capacités de prédiction de ces méthodes. De plus, ces stratégies d'anticipation du marché peuvent être appliquées empiriquement pour des indices similaires au SMB (S&P 600 – S&P 500, Russel 2000 – Russel 1000) et implémentées à l'aide de ETFs, de contrats à terme ou de Swap sur le rendement.

Parmi d'autres avenues de recherches, il serait intéressant de tester les résultats pour d'autres méthodes d'apprentissage automatique telles que la méthode des k plus proches voisins, la logique floue, ou d'autres approches de discrimination d'ensembles.

Bibliographie

Ahmed, P., Lockwood L.J., Nanda S., "Multistyle Rotation Strategies", *The Journal of Portfolio Management*, 28, (Printemps 2002), pp. 17-29.

Amenc, N., Malaise P., Martellini L., Sfeir D., "Tactical Style Allocation- A New Form of Market Neutral Strategy", *Journal of Alternative Investment*, (Été 2003), pp. 8-22.

Arnott, R.D., et P.L. Bernstein. "What Risk Premium is "Normal"?" *Financial Analysts Journal*, 58 (2002), pp. 64-84.

Ben-Tal, A., et A. Nemirovski. «Robust Convex optimization». *Mathematics of Operation Research*, 23 (1998), pp. 769-805.

Ben-Tal, A., et A. Nemirovski. «Robust Solution of Uncertain Linear Programs». *Operation Research Letters*, 25 (1999), pp. 1-13.

Ben-Tal, A., T. Margelit, et A. Nemirovski. "Robust Modeling of Multi-Stage Portfolio Problems", H. Frenk, K. Ross, T. Terlaky, et S. Zhang, *High-Performance Optimization*, Kluwe Academic Publishers, pp. 303-328, 2000.

Bernard, V., et J. Thomas, "Post-Earning-Announcement Drift: Delayed Price Response or Risk Premium?", *The Journal of Accounting Research*, 27, (1989), pp. 1-36.

Bertsimas, D., et D. Pachamanova. "Robust Multiperiod Portfolio Management in the Presence of Transaction Costs". Working paper, Sloan School of Management and Operation research Center, MIT, 2005.

Bertsimas, D., D. Pachamanova, et M. Sim. "Robust Linear Optimization under General Norms". *Operation Research Letters*, 32 (2004), pp. 510-516.

Black, F., et R. Litterman. "Asset Allocation: Combining Investor views with Market Equilibrium". *Technical Report Fixed Income Research*, Goldman, Sachs & Co., New York, 1990.

Bradley, S.P., et D.B. Crane. "Management of Commercial Bank Government Security Portfolios: An Optimization Approach under Uncertainty." *Journal of Bank Research*, 4 (1973), pp. 18-30.

Breiman, L., Friedman J.H., Olsen R.A., Stone C.J., *Classification and Regression Trees*, Wadsworth International Group, Belmont, 1984.

Breton, M., et S. El Hachem. «Algorithms for the Solution of Stochastic Dynamic Minimax Problems». *Computational Optimization and Applications*, 4 (1994), pp 317-345.

Brodth, A.I. "International Bank Asset and Liability Management." *Journal of Bank Research*, 15 (1984), pp. 82-94.

Cariño, D., T. Kent, D. Myers, C. Stacy, M. Sylvanus, A. Turner, K. Watanabe, et W.T. Ziemba. "The Russell-Yazuda Kasai Model: An Asset Liability Model for a Japanese Insurance Company using Multi-Stage Stochastic Programming." *Interfaces*, 24 (1994), pp. 29-49.

Cariño, D., D. Myers, et W.T. Ziemba, "Concepts, technical issues and Uses of the Russel-Yasuda Kasai Financial planning Model". *Operation Research*, 46 (1994), pp. 433-449.

Chopra, V.K. "Improving Optimization". *Journal of Investing*, 8 (1993), pp. 51-59.

Chopra, V.K., C.R. Hensel, et A.L. Turner. "Massaging Mean-Variance Input : Returns from Alternative Investment Strategies in the 1980s". *Management Science*, 39 (1993), pp. 845-855.

Chopra, V.K., et W.T. Ziemba. «The effect of Errors in Means, Variance and Covariances on Optimal Portfolio Choice». *The Journal of Portfolio Management*, Hiver (1993), pp. 6-11.

Chow, G.C. «Effective use of econometric models in macroeconomics policy formulation». In: Holly, S., B. Rustem, et M. Zarrop. *Optimal Control for Econometric Models*. Macmillan, London, 1979.

Coats, P.K., et L.K. Frant, "Recognizing Financial Distress Patterns Using a Neural Network", *Financial Management*, 22 (3), (1993), pp. 142-155.

Coggin, T.D. "Long-Term Memory in Equity Style Indexes", *The Journal of Portfolio Management*, (Hiver 1998), pp. 37-46.

Consigli, G., et M.A.H. Dempster, "Dynamic Stochastic Programming for Asset-Liability Management", *Annals of Operation Research*, 81, (1998), pp. 131-162.

Cooper, M., H. Gulen, et M. Vassalou, "Investing in Size and Book-to-Market Portfolios Using Information about the Macroeconomy : Some New Trading Rules", Working paper, *Graduate School of Business, Columbia University*, 2001.

Davis, J.T., Episcopos A., Wettimuny S., "Predicting Direction Shifts on Canadian-US Exchange with Artificial Neural Networks", *International Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, 10 (2001), pp. 83-96.

DeMiguel, A.V., L. Garlappi, et R. Uppal. "How inefficient are simple asset-allocation strategies?" Working paper, London Business School, 2004.

Dempster, M.A.H., et G.W.P. Thompson. "Stochastic Modelling and Optimization using STOCHASTICSTM." Working paper, University of Cambridge, 2002.

Dert, C.L. "A Multi-Stage Stochastic Programming Approach to Asset/Liability Management." Thèse de Phd, Econometric Institute, Erasmus University, 1995.

DeBondt W., et R. Thaler. "Does the Stock Market Over-react?", *The Journal of Finance*, 40, (1985), pp. 793-805.

Eakins, S.G., et S.R. Stansell. "Can Value-Based Selection Criteria Yield Superior Risk-Adjusted Returns: an Application of Neural Networks", *International Review of Financial Analysis*, 12, (2003), pp. 83-97.

Ean, J.V., V. Subrahmanyam, et K. Alli. "Research Note: Neural Network Analysis of Dividend Policy", *Managerial Finance*, 25 (1999), pp. 44-56.

Eppen, G.D., et E.F. Fama. "Three Asset Cash Balance and Dynamic Portfolio." *Management Science*, 17 (1971), pp. 313-319.

Fama, E., et K.R. French. "The Cross-Section of Expected Stock returns", *The Journal of Finance*, 47 (2), (1992), pp. 427-465.

Fama, E., et K.R. French. "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds", *The Journal of Financial Economics*, 33, (1993), pp. 3-56.

Fama, E., et K.R. French. "Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies", *The Journal of Finance*, 51 (1), (1996), pp. 55-84.

Fama, E., et J.M. Mc Beth. "Risk Return Equilibrium: Empirical Tests." *Journal of Political Economy*, 81 (1973), pp. 607-636.

Frost, P.A., et J.E. Savarino. «An Empirical Bayes Approach to Efficient Portfolio Selection». *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 21 (1986), pp. 293-305.

Frydman, H., E. Altman, et D. Kao. "Introducing Recursive Partitioning for Financial Classification Distress", *The Journal of Finance*, (1985), pp. 269-291.

Geyer, A., W. Herold, K. Kontriner, et W.T. Ziemba. "The Innovest Austrian Pension Fund Financial Planning Model InnoALM." Working paper, Yale School of Management, 2003.

Goldfarb, D., et G. Iyengar. «Robust Portfolio Selection Problems». *Mathematics of Operation Research*, 28 (2003), pp. 1-38.

Gonzio, J., et R. Kouwenberg. "High Performance Computing for Asset Liability Management." Working paper, Erasmus University, 2004

Harlow, W.V. "Asset Allocation in a Downside-Risk Framework". *Financial Analysts Journal*, 47 (1991), pp. 28-40.

Henriksson, R.D., et R.C. Merton. "On market Timing and Investment Performance. II. Statistical Procedures for Evaluating Forecast skills", *The Journal of Business*, 54, (1981), pp. 513-517.

Holmer, R.H. "The Asset-Liability Management Strategy System at Fannie Mae." *Interfaces*, 24 (1994), pp. 3-21.

Jensen, G.R, R.R. Johnson, et J.M. Mercer. "The Inconsistency of Small-Firm and Value Stock Premiums", *The Journal of Portfolio Management*, 24 (1998), pp. 27-35.

Kall, P., et S.W. Wallace. *Stochastic Programming*. John Wiley and Sons, Chichester, 1994.

Kao, D.L., et R.D. Shumaker. "Equity Style Timing", *The Financial Analyst Journal*, (Janvier/Février 1999), pp. 37-48.

Kester, G.W. "Market Timing with Small vs. Large Firm Stocks: Potential Gains and required Predictive Ability", *The Financial Analyst Journal*, (Septembre/Octobre 1990), pp. 63-69.

King, A.J., "Asymmetric Risk Measures and tracking Models for Portfolio Optimization under Uncertainty". *Annals of Operations Research*, 45 (1973), pp. 165-177.

Kingdon, J., et K. Feldman. "Neural Networks and some Applications to Finance", *Applied Mathematical Finance*, 2, (1995), pp. 17-42.

Konno, H., H. Shirakawa, et H. Yamazaki. "A Mean-Absolute Deviation Skewness Portfolio Optimization Model". *Annals of Operations Research*, 45 (1993), pp. 205-220.

Konno, H., et R. Yamamoto. "A Mean-Variance-Skewness Model: An Algorithm and Applications". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 4 (2005), pp. 409-423.

Koskosidis, Y.A., et A.M. Duarte. "A Scenario-Based Approach to Active Asset Allocation." *The Journal of Portfolio Management*, 23 (1997), pp. 74-85.

Kryzanowski, L., M. Galler, et D.W. Wright. "Using Artificial Neural Networks to Pick Stocks", *The Financial Analyst Journal*, (Juillet/Août 1993), pp. 21-27.

Kusy, M.I., et W.T. Ziemba. "A Bank Asset and Liability Model." *Operation Research*, 34 (1986), pp. 356-376.

Levis, M., et M. Liodakis. "The Profitability of style Rotation Strategies in the United Kingdom", *The Journal of Portfolio Management*, 26, (Automne 1999), pp. 73-86.

Liew, J., et M. Vassalou. "Can Book-to-Market, Size and Momentum be Risk Factors that Predict Economic Growth"?, *The Journal of Financial Economics*, 57, (2000), pp. 221-245.

Markowitz, H.M. "Portfolio Selection." *Journal of Finance*, 7 (1952), pp. 77-91.

Markowitz, H.M. *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. John Wiley and Sons, Chichester 1991.

Markowitz, HM, P. Todd, G. Xu, et Y. Yamane. "Computation of Mean-Semivariance Efficient Sets by the Critical Line Algorithm". *Annals of Operation Research*, 45 (1993), pp. 307-317.

Michaud, R.O. *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Management and Asset Allocation*. Financial Management Association Survey and Synthesis Series, HBS Press, Boston, MA, 1998.

Miller, M.H., et M. Scholes. "Rate of Return in Relation to Risk: A Re-examination of Recent Findings", *Studies in the Theory of capital Markets*, Paraeger NY, 1972.

Mulvey, J.M. "An Asset-Liability Investment System", *Interfaces*, 24 (1994), pp. 22-33.

Mulvey, J.M., W.R. Pauling, et R.E. Madey. "Advantages of Multiperiod Portfolio Models: Performance Enhancements." *The Journal of Portfolio Management*, 29 (2003), pp. 35-45.

Mulvey, J.M., et H. Vladimirov. "Stochastic Network Programming for Financial Planning Problems." *Management Science*, 38 (1992), pp. 1642-1664.

Mulvey, J.M., et W.T. Ziemba. *Worldwide Asset and Liability Modeling*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

Olden, J.D., M.K. Joy, et R.G. Death. "An Accurate Comparison of Methods for Quantifying Variable Importance in Artificial Neural Networks Using Simulated Data". *Ecological Modelling*. 178 (2004), pp. 389-397.

Park, T.H., et L.N. Switzer, "Mean Reversion of Interest-Rate Term Premiums and Profits from Trading Strategies with Treasury Futures Spreads", *Journal of Future Markets*, 16 (3), (1996), pp.331-352.

Pinar, M.Ç., et R.H. Tütüncü. «Robust Profit Opportunities in Risky Financial Portfolios». *Operation Research Letters*, 33 (2005), pp. 331-340.

Reinganum M.R. "A Direct Test of Roll's Conjecture on the Firm Size Effect", *The Journal of Finance*, 37, (1982), pp. 27-35.

Rustem, B., R.G. Becker, et W. Marty. «Robust Min-Max Portfolio Strategies for Rival Forecast and Risk Scenarios». *Journal of Economic Dynamics Control*, 24 (2000), pp. 1591-1621.

Sorensen, E.H., K.L Miller, et C.K. Ooi. "The Decision Tree Approach to Stock Selection", *The Journal of Portfolio Management*, 27, (Automne 2000), pp. 42-52.

Soyster, A.L. "Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and its Applications to Inexact Linear Programming". *Operation Research*, 21 (1973), pp. 1154-1157.

Vapnik, V., et A. Lerner, "Pattern Recognition Using Generalized Portrait Method." *Automaton and Remote Control*, 24 (1963), pp. 774-780.

Zenios, S.A., M.R. Holmes, R. McKendall, et C. Vassiadou-Zeniou. "Dynamic Models for Fixed-Income Portfolio Management under Uncertainty." *Journal of Economic Dynamics and Control*, (1998), pp. 1517-1541.

Zhang, G., M.Y. Hu, B.E. Patuwo, et D.C. Indro. "Artificial Neural networks in Bankruptcy Prediction: General Framework and Cross-Validation Analysis", *European Journal of Operational Research*, 116, (1999), pp. 142-155.

Ziemba, W.T. *The Stochastic Programming Approach to Asset-Liability and Wealth Management*. AIMR-Blackwell, 2003.