

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DE MONTRÉAL

Un algorithme de programmation
dynamique par simulation et régression
appliqué au système hydroélectrique de
Kemano

Nicolas Léveillé

5 juin 2018

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Objectifs	1
1.2	Revue de littérature	2
1.3	Structure du mémoire	5
2	Le système de Kemano	6
2.1	Description du système	6
2.2	Le problème de l' <i>Administrateur</i>	7
2.3	Dynamique des apports d'eau	9
3	Modélisation du système	13
3.1	Modèle du système de Kemano	13
3.2	Note sur le temps	14
3.3	Notation	15
3.4	Contraintes	16
4	Formulation du programme dynamique	18
4.1	Formulation du problème de l' <i>Administrateur</i>	18
4.2	Récursion	20
5	Algorithme de résolution par simulation et régression	21
5.1	Notation de base	21
5.2	Opérateurs employés	24
5.3	Récursion	26
5.4	Pseudo-code	34

6	Inclusion de la variable hydrologique	35
6.1	Classification en fonction de la variable hydrologique	35
6.2	Récursion	40
6.3	Pseudo-code	44
7	Tests numériques	45
7.1	Paramètres de l'algorithme	45
7.2	Description du test comparatif	48
7.3	Résultats	50
7.3.1	Présentation des politiques optimales	50
7.3.2	Variation du paramètre ϕ	56
7.3.3	Variation du nombre de classes	62
8	Conclusion	67
A	Répartition des débits	69
B	Fonction bénéfice	72
C	Obtention de la condition terminale	76
D	Interpolation de la valeur	78

Table des figures

1	Carte du système de Kemano	7
2	Les débits maximal et minimal qu'il est permis d'évacuer par le déversoir de Skins Lake. L'année est séparée en 122 périodes et débute en octobre. Notez l'importante augmentation du débit maximal permis entre les instants 65 et 112, soit durant le printemps et l'été. L'écosystème de la rivière Nechako est adapté à ces forts débits durant ces saisons.	8
3	La fonte de la neige précède la crue printanière. Notez que l'année débute en automne. Un grand <i>volume</i> d'eau est reçu par le réservoir Nechako durant la crue.	10
4	L'évolution du volume d'eau dans le réservoir Nechako sur dix ans. Les lignes pointillées indiquent le début de l'automne pour chaque année. Remarquez la chute du volume durant l'automne et l'hiver alors que l'Administrateur puise dans sa réserve et la remontée qui a lieu au printemps durant la crue.	11
5	Schéma du modèle	14
6	La période t est encadrée par les instants $t - 1$ et t	14
7	En-haut à gauche, nous avons la grille définie par les matrices de décisions et d'apports $\bar{\xi}_{t;k}$ et $\alpha_{t;k}$. En-haut à droite, nous avons les volumes associés aux couples de décision et d'apport pour un volume de départ \bar{l}_k ; ces volumes sont stockés dans la matrice $l_{t+1;k}$. En-bas à gauche, nous avons l'échantillon $\Omega_{t;k}$. En-bas à droite se trouve le polynôme obtenu en régressant $\Omega_{t;k}$ sur $\bar{\xi}_{t;k}$ de même que son maximum.	33

8	Quatre trajectoires de l'apport sur le réservoir Nechako. Notez la forme en dents de scie des trajectoires qui fait des apports passés de bien piètres prédicteurs des apports à venir.	36
9	Quatre trajectoires de la variable hydrologique h_t et de z_t . Notez que les trajectoires ont tendance à demeurer dans la même classe, ce qui nous permet de déterminer très tôt si nous avons affaire à une année <i>sèche</i> ou <i>humide</i>	39
10	Deux nuages de points obtenus lors de la phase à rebours. Celui du bas présente un coude nous obligeant à employer un polynôme de degré élevé. Les deux polynômes tracés sur ces graphiques sont de degré 10.	47
11	Représentation graphique de la matrice \bar{X}^* pour le cas $n_z = 1$. Pour chaque volume et chaque instant de l'année, la surface indique le débit qu'il convient de soustraire du réservoir Nechako.	53
12	Représentation graphique des matrices \bar{X}_1^* et \bar{X}_2^* pour le cas où $n_z = 2$. La surface du haut ($z = 1$) correspond aux années <i>sèches</i> et moins d'eau sera soustraite du réservoir durant la crue. La surface du bas correspond aux années <i>humides</i> ; plus d'eau sera soustraite durant la crue.	54
13	Représentation graphique des matrices \bar{X}_1^* et \bar{X}_{10}^* pour le cas où $n_z = 10$. Les surfaces intermédiaires ont été omises pour alléger la page.	55

14	Atteinte de quatre objectifs pour diverses valeurs de ϕ et pour $n_z = 1$. En-haut à gauche, se trouve un graphique de la probabilité de fournir la DA. En-haut à droite, se trouve un graphique de la probabilité de fournir le supplément. En-bas à gauche, se trouve un graphique de la probabilité d'inonder la ville de Vanderhoof. En-bas à droite, se trouve un graphique du revenu annuel moyen issu de la vente d'électricité. Les lignes pointillées indiquent les valeurs obtenues par le partenaire.	59
15	Atteinte de quatre objectifs pour diverses valeurs de ϕ et pour $n_z = 10$. Les graphiques sont ordonnés de la même manière qu'à la figure 14	60
16	Atteinte de quatre objectifs pour diverses valeurs de ϕ et pour $n_z = 20$. Les graphiques sont ordonnés de la même manière qu'à la figure 14	61
17	Bien que la probabilité de livrer le <i>supplément</i> et les recettes subissent respectivement une hausse et une chute marquées entre $n_z = 1$ et $n_z = 5$, ces deux indicateurs se stabilisent par la suite. C'est la chute de la probabilité d'inonder qui est la plus remarquable, passant de 3,2% à 1,1% entre $n_z = 1$ et $n_z = 20$	65
18	Les indicateurs suivent ici la même dynamique qu'à la figure 18. Encore une fois c'est la chute, cette fois-ci de 2 points de pourcentage, de la probabilité d'inonder qui frappe.	66

Liste des tableaux

- 1 Ce tableau indique les résultats exacts pour $\phi = 2, 5$. À la première ligne, les nombres entre parenthèses sont des écarts-types. 62
- 2 Ce tableau indique les résultats exacts pour $\phi = 3, 0$. Ici, $n_z = 20$ offre les meilleurs résultats. À la première ligne, les nombres entre parenthèses sont des écarts-types. 63
- 3 Temps de calcul pour deux valeurs de ϕ et cinq valeurs de n_z . 63

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur, Michel Denault, mon superviseur chez Rio Tinto, Pascal Côté, l'équipe de Rio Tinto au Saguenay, de même que ma conjoint, Madeleine Plante. Je tiens aussi à remercier l'entreprise Rio Tinto et le programme MITACS pour l'aide financière qu'ils m'ont fournie.

1 Introduction

Ce mémoire traitera de l'application de la programmation dynamique par simulation et régression à l'optimisation des ressources du système hydroélectrique du site de Kemano en Colombie-Britannique. Il s'effectue en collaboration avec l'entreprise Rio Tinto, grand producteur d'aluminium et propriétaire dudit système. Les installations hydroélectriques de Kemano servent en premier lieu à approvisionner l'aluminerie de Kitimat, elle aussi détenue par Rio Tinto.

En plus de satisfaire aux besoins de son aluminerie, Rio Tinto doit fournir une puissance supplémentaire à BC Hydro (le distributeur public d'électricité en Colombie-Britannique). L'entreprise doit aussi respecter diverses contraintes environnementales afin de préserver certains écosystèmes aquatiques et de prévenir l'inondation d'une ville en aval.

Les administrateurs du système de Kemano doivent concilier ces exigences dans un monde marqué par l'aléa. En effet, les apports en eau varient d'une période à l'autre et sont marqués par une forte saisonnalité.

1.1 Objectifs

De nombreux chercheurs travaillent de concert pour épauler les responsables du système de Kemano dans le processus de prise de décision : certains modélisent les apports d'eau, d'autres optimisent la production sur une brève échéance, tandis que d'autres encore l'optimisent à plus ou moins long terme. Dans un tel contexte, il serait chimérique de chercher à offrir une solution intégrée aux diverses difficultés auxquelles font face les responsables du sys-

tème. Nous proposons ici un outil d'aide à la prise de décision pour la gestion à long terme du système de Kemano.

Ce faisant, nous bâtissons notre modèle sur la base de ce qui a déjà été construit par les chercheurs de Rio Tinto. En effet, ce sont eux qui nous ont fourni des simulations d'apport d'eau, une fonction de production et les diverses contraintes devant être respectées. Pour ce faire, nous emploierons une méthode originellement développée pour l'optimisation de portefeuilles d'actifs financiers.

Nous espérons que ce travail permettra d'offrir une perspective utile sur les défis que doivent surmonter les responsables du système de Kemano.

1.2 Revue de littérature

C'est la programmation dynamique qui est le plus communément employée pour déterminer une politique optimale de gestion d'un système hydroélectrique. On peut séparer les méthodes employées en deux grandes catégories : la programmation dynamique stochastique (SDP¹) et la programmation dynamique par échantillonnage (SSDP²).

L'approche SDP emploie une chaîne de Markov pour modéliser les apports en eau reçus par le réservoir. À chaque instant, la distribution des apports futurs, conditionnelle à l'apport observé à la période précédente, doit être estimée. Afin d'affiner l'estimation de la distribution des apports futurs, il est possible d'utiliser l'information véhiculée par diverses variables d'état exogènes qui leur sont corrélées. Turgeon [18] a considéré les apports observés

1. De l'anglais *Stochastic Dynamic Programming*.

2. De l'anglais *Sample Stochastic Dynamic Programming*.

au cours des p périodes précédentes et a noté une amélioration de la politique de gestion obtenue. Il est aussi possible d'employer des prévisions d'apports comme l'ont fait Stedinger *et al.* [15] et Kelman *et al.* [9].

Dans les régions recevant d'importantes chutes de neige, l'usage de l'équivalent en eau de la neige peut améliorer la politique de gestion (voir Stedinger *et al.* [15] et Tejada-Guibert *et al.* [16]). L'humidité du sol peut aussi apporter une information utile comme l'ont montré Mannocchi et Todisco [12].

Puisque le pouvoir prédictif des deux variables susnommées varie au cours de l'année (le couvert nival étant absent en été et l'eau dans le sol étant gelée en hiver) Côté *et al.* [3] ont considéré une combinaison linéaire des deux. L'usage d'un coefficient variant d'une période à l'autre leur a permis d'accorder davantage d'importance à la variable véhiculant le plus d'information à chaque période.

L'approche SSDP, quant à elle, ne modélise pas explicitement les apports, employant plutôt des suites d'apports soit historiques, soit simulées. Une politique optimale est ainsi obtenue en considérant tous ces scénarios simultanément. Une préoccupation importante est alors de calculer la probabilité de passer à un certain scénario, étant donné le scénario actuel. Faber et Stedinger [7] emploient des prédictions d'apports produites par le *National Weather Service* américain pour calculer ces probabilité de transition.

Du point de vue financier, l'administration d'un système hydroélectrique est intimement liée à la tarification d'options américaines. Le détenteur d'un tel produit dispose du droit de transiger un actif financier (le sous-jacent) au moment qu'il juge opportun et à un prix prédéterminé. Une option ne pouvant être exercée qu'une seule fois, la décision qu'il prend à un instant donné

affecte les décisions qu'il pourra prendre dans le futur. À chaque instant, il doit donc décider s'il exerce son option ou s'il la garde en réserve pour un usage ultérieur dans l'espoir que le prix futur du sous-jacent lui permettra d'engranger un plus grand profit.

Diverses méthodes ont été proposées pour tarifer les options américaines au moyen de la programmation dynamique par simulations et régressions (voir entre autres Longstaff et Schwartz [10], Tsitsiklis et Van Roy [17] et Carriere [2]).

L'administrateur d'un système hydroélectrique dispose, quant à lui, d'un portefeuille d'options réelles. En effet, à chaque instant il doit décider quel débit soustraire du réservoir (quelle portion de ses options exercer) afin de générer de l'électricité (son profit). Tout comme pour des options financières, la décision prise à un instant donné affectera les décisions qui pourront être prises dans le futur.

Eydeland et Wolyniec [6] ont considéré la question de la gestion d'un système hydroélectrique sous l'angle de la gestion d'un portefeuille d'options américaines. Toutefois, leur modèle comprenait de nombreuses simplifications le rendant peu réaliste : ils omettent par exemple les limites de stockage imposées par la taille du réservoir.

Carmona et Ludkovski [11] proposent d'utiliser une méthode de simulation et régression pour déterminer la politique optimale de gestion d'une installation de stockage du gaz. Ils notent par ailleurs que leur méthode pourrait être appliquée à la gestion d'un système hydroélectrique. C'est ce que font Denault, Simonato et Stentoft [5]. Leur méthode repose toutefois sur la discrétisation des décisions, prêtant ainsi flanc à la malédiction des dimen-

sions.

Dans le cadre de la gestion d'un portefeuille d'actifs financiers, Denault, Delage et Simonato [4] contournent les difficultés liées à la discrétisation de la décision en régressant non seulement sur la variable d'état exogène, mais aussi sur la variable de contrôle. Ils produisent un échantillon de la fonction valeur via une discrétisation du contrôle, puis en obtiennent une forme fonctionnelle grâce à une régression. Ils peuvent ainsi éliminer la malédiction liée à la discrétisation des contrôles, moyennant une erreur d'estimation.

C'est cette méthode qu'Olivier-Meunier [13] a transposée dans le cadre de la gestion des installations hydroélectriques de Rio Tinto au Saguenay-Lac-Saint-Jean.

1.3 Structure du mémoire

Au chapitre 2, nous présenterons le système de Kemano, les obligations devant être respectées par ses responsables et la dynamique particulière des apports d'eau. La manière dont nous modéliserons ce système sera présentée au chapitre 3. Au chapitre 4, nous formulerons rigoureusement le programme dynamique que nous comptons résoudre. Le chapitre 5 sera consacré à la description d'une version embryonnaire de notre algorithme. Au chapitre 6, nous présenterons une variante de notre algorithme permettant d'inclure dans le processus de décision l'information véhiculée par une variable hydrologique. Au chapitre 7, nous présenterons les résultats numériques que nous avons obtenus pour divers paramétrages de notre programme et les comparerons à ceux du partenaire.

2 Le système de Kemano

Bien que l'aluminium soit un élément très commun sur Terre, on ne l'y retrouve jamais à l'état pur. C'est plutôt son oxyde, l'alumine, qu'on retrouve dans la nature.

Le procédé de Hall-Héroult est le plus communément employé pour extraire l'aluminium de l'alumine. Puisqu'il requière de grandes quantité d'électricité, les alumineries sont souvent construites dans des région à fort potentiel hydroélectrique.

2.1 Description du système

Les installations hydroélectriques de Kemano ont été construites durant les années 1950 en Colombie-Britannique par l'entreprise Alcan (rachetée depuis par Rio Tinto) afin de pourvoir aux besoins en électricité de l'aluminerie de Kitimat, à 75 km de là. Comme on peut le voir à la figure 1, le système de Kemano est composé du réservoir Nechako, de la centrale Kemano et du déversoir de Skins Lake.

Le réservoir Nechako alimente en eau la centrale hydroélectrique de Kemano via un tunnel de 16 km creusé dans les Rocheuses. Le déversoir de Skins Lake permet de déverser de l'eau du réservoir Nechako dans le lac Cheslatta, un affluent de la rivière Nechako. La rivière Nechako se jette dans la rivière Nautley. La Nautley passe devant la petite ville de Vanderhoof pour ensuite rejoindre le fleuve Fraser. Le débit déversé à Skins Lake se joint à l'apport naturel de la Nautley, déterminant le débit observé à Vanderhoof.

Remarquez que la prise d'eau de la centrale est située à l'extrême ouest

du réservoir, à plus de 100 km du déversoir de SKins Lake.

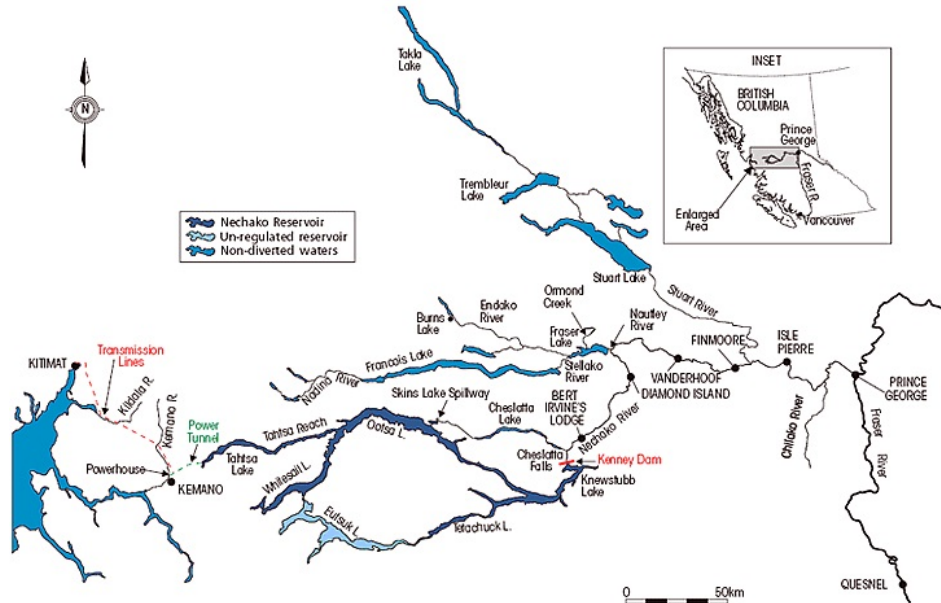


FIGURE 1 – Carte du système de Kemaño

2.2 Le problème de l'Administrateur

Bien que le système à l'étude soit géré par plusieurs équipes opérant de concert, il est utile de s'imaginer qu'il l'est plutôt par un unique individu. Nommons-le l'*Administrateur*.

L'Administrateur doit concilier plusieurs exigences. Notons d'abord qu'il ne peut pas acheter d'électricité sur le marché, il doit donc satisfaire la demande de Kitimat en entier. Toute chute sous un seuil critique de la puissance fournie à l'aluminerie entraînerait un arrêt de production, engendrant des coûts considérables. Cette puissance minimale sera appelée la *demande de*

l'aluminerie (DA). Il a toutefois la possibilité de vendre tout surplus d'électricité à BC Hydro à un prix établi par contrat. Ce contrat stipule aussi qu'une puissance supplémentaire minimale doit être fournie durant certaines périodes de l'année. Cette production sera appelée le *supplément*.

D'autre part, le déversoir de Skins Lake étant la principale source d'eau de la rivière Nechako, l'Administrateur doit y déverser un débit compris dans une certaine fourchette variant d'une période à l'autre, afin d'assurer la pérennité des écosystèmes en aval. En effet, si l'assèchement de la rivière serait nocif pour l'écosystème, un trop grand apport durant certaines périodes le serait tout autant. Cette fourchette, représentée à la figure 2, a été établie par un acteur externe et l'Administrateur se contente de la respecter.

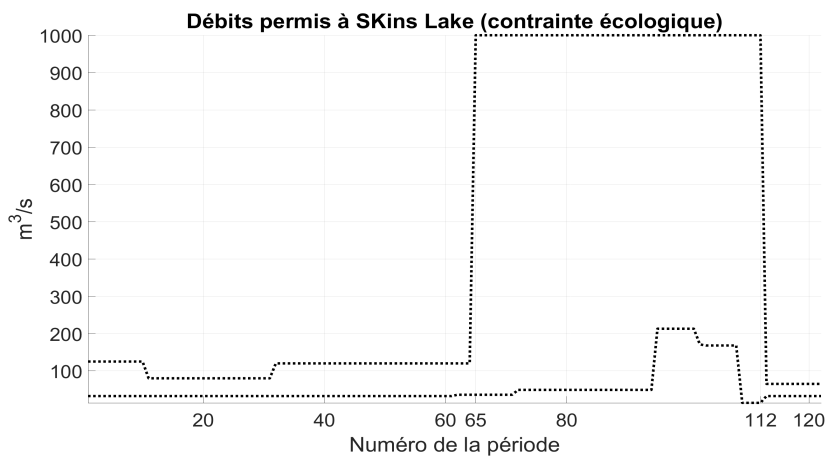


FIGURE 2 – Les débits maximal et minimal qu'il est permis d'évacuer par le déversoir de Skins Lake. L'année est séparée en 122 périodes et débute en octobre. Notez l'importante augmentation du débit maximal permis entre les instants 65 et 112, soit durant le printemps et l'été. L'écosystème de la rivière Nechako est adapté à ces forts débits durant ces saisons.

L'Administrateur doit respecter ces contraintes dans un contexte stochas-

tique. En effet, les apports en eau sont aléatoires. Bien que l'administrateur veuille d'une part générer le plus grand profit possible par la vente d'électricité, il doit d'autre part modérer ses ardeurs car il doit s'assurer d'avoir suffisamment d'eau dans le réservoir pour satisfaire les contraintes dans le futur. Tout cela sans savoir avec précision quels seront les apports futurs.

Il est bien entendu possible de dégager certaines tendances générales en analysant les apports passés : forte saisonnalité, corrélation des apports d'une période à la suivante etc., mais une caractéristique fondamentale des apports en eau sur le bassin du réservoir Nechako rend d'autant plus ardue la tâche de l'Administrateur : la crue printanière. Dans la prochaine section, nous examinerons en détail les apports d'eau.

2.3 Dynamique des apports d'eau

Le bassin du Nechako reçoit la majeure partie de ses précipitations en hiver sous forme de neige. Cette eau n'a alors aucun effet sur les apports reçus par le réservoir car elle est gelée et reste sur les montagnes alentour. Les apports en eau reçus par le Nechako sont ainsi relativement faibles et stables durant la période hivernale. Le printemps venu, le temps se réchauffe, la neige fond et une quantité colossale d'eau déferle des montagnes. La figure 3 montre le couvert nival moyen sur le bassin versant du réservoir Nechako de même que l'apport moyen en eau dans le Nechako sur un an.

Cette caractéristique jette un éclairage nouveau sur le problème de l'Administrateur. Au cours de l'année, son défi est non seulement de maximiser ses profits tout en respectant les contraintes de production et écologique, mais aussi de ménager un espace suffisant dans le réservoir Nechako pour

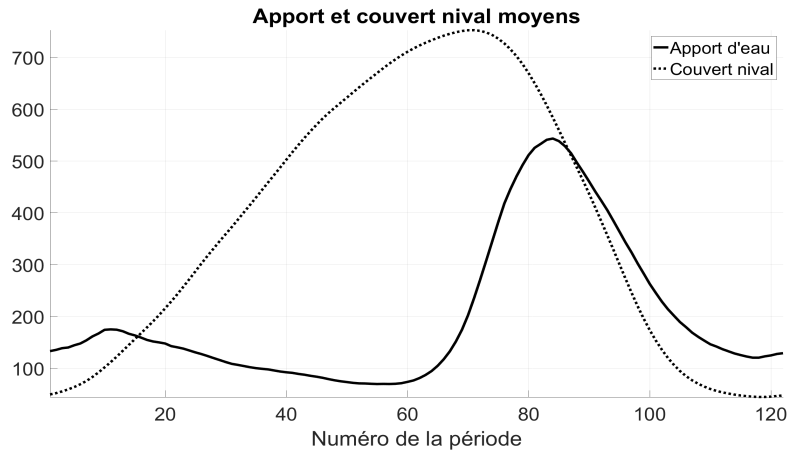


FIGURE 3 – La fonte de la neige précède la crue printanière. Notez que l’année débute en automne. Un grand *volume* d’eau est reçu par le réservoir Nechako durant la crue.

accueillir la crue printanière.

On peut ici comparer le problème de l’Administrateur à celui d’un travailleur gagnant un salaire relativement stable durant l’année. Malheureusement pour lui, ce salaire ne suffit pas pour payer ses diverses dépenses. Il se voit donc contraint de gruger son épargne pour subvenir à ses besoins. Lorsque le printemps arrive, il reçoit un remboursement d’impôt. Certaines années, ce montant est suffisant pour ramener son épargne à son niveau initial, d’autres, il est insuffisant et le travailleur doit gruger davantage son épargne l’année suivante. Si les années de vache maigre s’enfilaient, il risquerait de se retrouver sans le sou.

Revenons à l’Administrateur. Les apports faibles et stables que le Nechako reçoit durant l’hiver sont son salaire. Le volume d’eau reçu durant la crue printanière est son retour d’impôt. Son épargne est le volume d’eau dans

le Nechako. Si les années sèches se succèdent, il videra le réservoir et sera incapable de respecter les contraintes de production et écologiques. La figure 4 illustre cette dynamique.

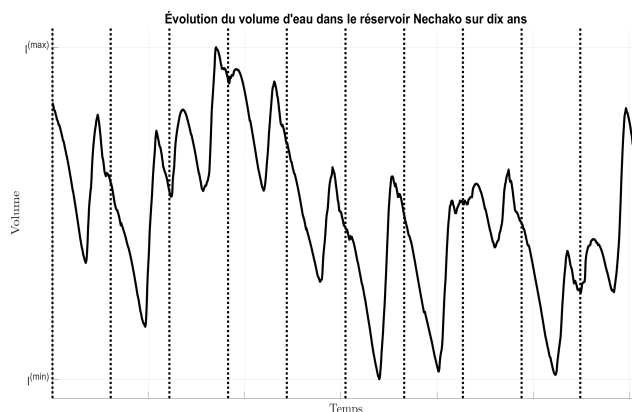


FIGURE 4 – L'évolution du volume d'eau dans le réservoir Nechako sur dix ans. Les lignes pointillées indiquent le début de l'automne pour chaque année. Remarquez la chute du volume durant l'automne et l'hiver alors que l'Administrateur puise dans sa réserve et la remontée qui a lieu au printemps durant la crue.

L'Administrateur fait toutefois face à une difficulté supplémentaire ; alors qu'un travailleur peut toujours s'accommoder d'un grand retour d'impôt, l'Administrateur, lui, craint une trop forte crue. En effet, s'il est incapable d'emmagasiner ce volume d'eau, il devra déverser le surplus à Skins Lake. Ce qui implique deux choses. D'une part, que cette eau ne servira pas à produire de l'électricité (elle sera déversée en pure perte) d'autre part, le débit déversé s'ajoutera en aval, à un apport naturel déjà fort, ce qui aurait pour conséquence d'inonder la ville de Vanderhoof et c'est là la dernière contrainte que l'Administrateur doit respecter. Il doit donc s'assurer de ne

pas vider le Nechako, mais aussi de ménager un espace suffisant pour accueillir la crue. Et c'est ici que la contrainte écologique refait surface. L'écosystème de la rivière Nechako s'est habitué au fil des âges, à ne recevoir que de faibles apports d'eau durant l'hiver et de forts apports au printemps. La contrainte écologique tente d'imiter cette dynamique.

Toutefois, si l'Administrateur doit ménager un grand espace en prévision d'une forte crue, il doit prendre sa décision tôt durant l'hiver car il ne peut évacuer qu'un faible débit par Skins Lake. Par contre, il ne dispose à ce moment, que de peu d'information au sujet de la crue à venir. Il pourrait bien entendu observer le couvert nival et tenter d'anticiper la crue. C'est une avenue que nous explorerons à la section 6.

Au chapitre suivant, nous présenterons la manière dont nous modéliserons ce système.

3 Modélisation du système

Il serait illusoire de vouloir résoudre le problème de l'Administrateur dans ses moindres détails. Nous avons choisi de nous attaquer à la résolution du problème dans une perspective à long terme. Il nous est ainsi possible de nous doter d'un modèle qui, tout en préservant les caractéristiques essentielles du problème réel, nous offre la marge de manœuvre requise pour obtenir des résultats raisonnables, faute d'être parfaits.

3.1 Modèle du système de Kemano

Notre modèle est schématisé à la figure 5. Il ne comprendra que deux apports d'eau non contrôlés soit l'eau arrivant de manière naturelle dans une composante du système et qui échappe à notre contrôle. Le premier, venant du bassin du réservoir Nechako, comprendra toute l'eau qui se rend de manière naturelle dans le réservoir Nechako et nous le nommerons *apport non contrôlé du réservoir Nechako*. Le second sera composé de tous les apports non contrôlés reçus par la ville de Vanderhoof et sera appelé *apport non contrôlé de Vanderhoof*. Bien entendu, la ville de Vanderhoof reçoit aussi un apport contrôlé passant par le déversoir de Skins Lake.

Notre modèle comprendra le réservoir Nechako et la centrale hydroélectrique de Kemano. Nous supposerons que l'eau évacuée par le déversoir de Skins Lake se retrouve immédiatement à Vanderhoof.

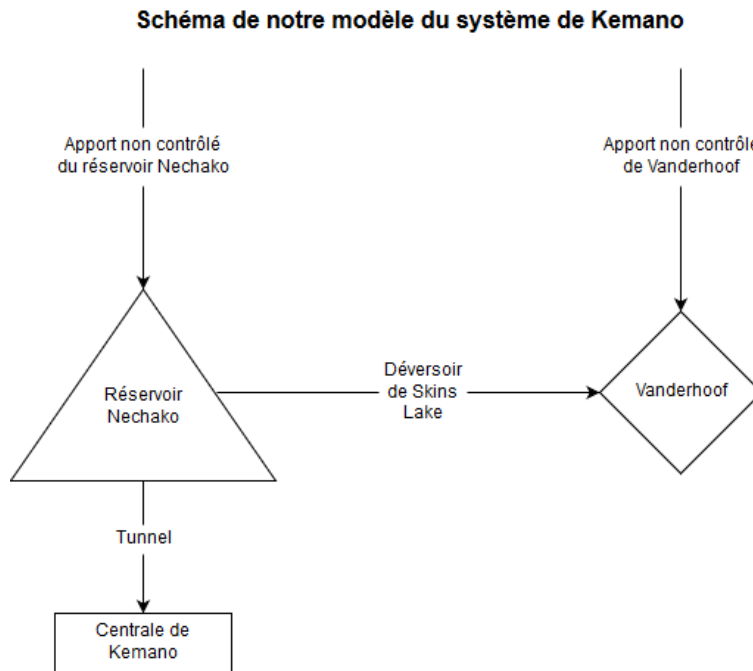


FIGURE 5 – Schéma du modèle

3.2 Note sur le temps

Avant de poursuivre, il convient de se doter d'une manière de noter le temps. Une année sera divisée en $T \in \mathbb{N}$ périodes numérotées de 1 à T . Les instants seront numérotés de 0 à T et la période t sera encadrée par les instants $t - 1$ et t . La Figure 6 illustre ceci.

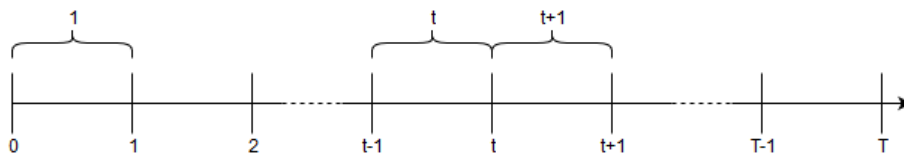


FIGURE 6 – La période t est encadrée par les instants $t - 1$ et t

Ainsi, toute réalisation d'une variable aléatoire ayant un indice inférieur ou égal à t est connue à l'instant t , tandis que toute variable ayant un indice strictement supérieur à t est inconnue à cet instant.

3.3 Notation

Nous considérerons trois types de variables : de décision, d'état exogènes (sur lesquelles l'Administrateur n'exerce aucun contrôle) et d'état endogènes (affectées tant par la décision que par les variables d'état exogènes).

Bien qu'en réalité, l'administrateur exerce deux contrôles car il décide du débit turbiné à la centrale de Kemano et du débit évacué par le déversoir de Skins Lake, en choisissant de satisfaire en priorité la contrainte écologique, il est possible de n'en considérer qu'un seul³ : le débit total soustrait du réservoir. Nous noterons x_t ce débit décidé à l'instant t et effectif durant toute la période $t + 1$. Il sera réparti comme suit. D'abord, le débit minimal requis pour le maintien de l'écosystème de la rivière Nechako sera déversé via Skins Lake. L'eau restante sera dirigée vers la centrale jusqu'à concurrence de sa capacité. Tout surplus sera, lui aussi, déversé à Skins Lake.

Nous noterons $a_t^{(N)}$ l'apport non contrôlé reçu par le réservoir Nechako réalisé durant la période t . De même, nous noterons $a_t^{(V)}$ l'apport non contrôlé de Vanderhoof réalisé durant la période t . Enfin, nous disposons aussi d'une variable hydrologique issue d'une combinaison du couvert nival et de l'humidité du sol ; nous la noterons h_t . Ces variables sont dites d'état exogènes car elles ne sont pas affectées par la décision.

Nous noterons l_t le volume d'eau dans le réservoir Nechako à l'instant t .

3. La manière dont les contrôles sont agrégés est décrite à l'annexe A.

Il respectera l'équation de transition

$$l_{t+1} = l_t + \kappa(a_{t+1}^{(N)} - x_t) \quad (1)$$

où κ est une constante permettant de convertir un débit (exprimé en m^3/s) en un volume (exprimé en hm^3).

Le débit observé à Vanderhoof à l'instant t sera noté $q_t^{(V)}$ et respectera

$$q_t^{(V)} = d_{t-1}(x_{t-1}, l_{t-1}) + a_t^{(V)} \quad (2)$$

où $d_{t-1}(x_{t-1}, l_{t-1})$ est le débit déversé par Skins Lake durant la période t .

Puisqu'elles sont affectée par la décision, l_t et $q_t^{(V)}$ sont des variables d'état endogènes.

Durant la période $t + 1$, un bénéfice⁴ dépendant de la décision x_t , du volume l_t et de l'apport non contrôlé sur Vanderhoof $a_{t+1}^{(V)}$ est généré. Ce bénéfice est une transformation de la quantité d'énergie vendue à BC Hydro à laquelle une pénalité est ajoutée en cas d'inondation de la ville de Vanderhoof et nous le noterons $B_{t+1}(x_t, l_t, a_t^{(V)})$.

3.4 Contraintes

Le réservoir Nechako ayant une capacité finie, le volume d'eau qu'il contient devra respecter :

$$l^{(min)} \leq l_t \leq l^{(max)} \text{ pour } t = 0, 1, \dots, T \quad (3)$$

4. L'annexe B traite de la fonction bénéfice plus en profondeur.

où $l^{(min)}$ est le volume en-deçà duquel, la production doit être interrompue à la centrale de Kemano car le niveau correspondant est plus bas que l'entrée du tunnel d'alimentation et $l^{(max)}$ est le volume au-delà duquel le réservoir déborderait.

La décision devra respecter la contrainte de débit

$$x_t^{(min)}(l_t) \leq x_t \leq x_t^{(max)}(l_t) \quad (4)$$

où $x_t^{(min)}(l_t)$ est le débit permettant tout juste de satisfaire à la demande de l'aluminerie tout en déversant le débit minimal nécessaire au maintien de l'écosystème de la rivière Nechako et $x_t^{(max)}(l_t)$ est le débit permettant de produire la puissance maximale à la centrale tout en ne déversant pas plus d'eau que ce que l'écosystème peut tolérer. Ces deux valeurs dépendent de l_t car tant la capacité de la centrale que celle du déversoir varient en fonction du volume d'eau dans le réservoir. Nous noterons $x_t \in \mathcal{X}_t$ une décision respectant la contrainte (4).

Enfin, la contrainte d'inondation sera notée

$$q_t^{(V)} \leq q^{(max)} \text{ pour } t = 1, 2, \dots, T \quad (5)$$

où $q^{(max)}$ est le débit observé à Vanderhoof au-delà duquel la ville est considérée comme étant inondée.

4 Formulation du programme dynamique

Maintenant que nous nous sommes dotés de l'outillage requis pour nous représenter le problème de l'Administrateur, nous allons le formuler rigoureusement, de même que la méthode utilisée pour le résoudre.

4.1 Formulation du problème de l'Administrateur

Il convient en premier lieu de nous intéresser aux décisions prises par l'Administrateur et à l'information qu'il peut utiliser pour éclairer ces décisions. Considérons un horizon d'une année divisée en T périodes.

Afin d'éviter les répétitions inutiles, nous illustrerons le processus de prise de décision pour un instant $t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$. Il faut bien comprendre que ce processus aura d'abord lieu pour $t = 0$, puis $t = 1$ et ainsi de suite, jusqu'à $t = T - 1$.

À l'instant t , l'Administrateur observe l'état du système de Kemano décrit par les variables d'état endogène et exogènes. Afin de ne pas alourdir le texte indûment, nous noterons $\theta_t = [a_t^{(N)}, a_t^{(V)}, h_t]$ le vecteur des variables d'état exogènes, soit les apports non contrôlés reçus par le réservoir Nechako et la ville de Vanderhoof et la variable hydrologique.

Ayant observé l'état du système, il doit choisir un débit à soustraire du réservoir $x_t \in \mathcal{X}_t$. Cette décision sera prise en fonction de l'information disponible à l'instant t uniquement, nous avons donc affaire à un processus markovien. Supposons que, pour l'aider dans sa tâche, l'Administrateur dispose d'une certaine règle de décision ρ_t qui lui indique la décision à prendre à l'instant t en fonction de l'état du système. Ainsi, pour un état donné il

n'aura qu'à consulter cette règle pour obtenir une décision $x_t = \rho_t(l_t, \theta_t)$.

Un ensemble de T règles de décision (une pour chaque instant où l'Administrateur doit prendre une décision) sera appelé une *politique* et noté $r = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{T-1}\}$. Nous noterons \mathcal{R} l'ensemble de toutes les politiques admissibles, c'est-à-dire les politiques dont règles rendent des décisions respectant la contrainte (4).

Ayant choisi x_t , l'Administrateur attendra la fin de la période $t + 1$. Pendant ce temps, il engrange un bénéfice $B_{t+1}(\rho_t(l_t, \theta_t), l_t, a_{t+1}^{(V)})$, dont la forme exacte est discutée à l'annexe B. Durant cette période, le système change d'état, le nouvel état n'étant observé qu'au début de la période suivante. Puis le même processus de décision se répétera jusqu'à $t = T - 1$. À l'instant T , l'Administrateur observera l_T et lui attribuera une valeur $v_T(l_T)$. La valeur associée à ce volume est issue de l'électricité que cette eau permettra de produire durant les années à venir.

Le but de l'Administrateur durant l'année est de maximiser son bénéfice tout en respectant les diverses contraintes qui lui sont imposées (de production, écologique et d'inondation). Toutefois, il ne peut pas se contenter de le maximiser une période à la fois, car la décision prise à un instant donné aura un effet sur les décisions qu'il pourra prendre dans le futur. Il doit se doter d'une politique lui permettant de maximiser l'espérance de la somme des bénéfices plus la valeur de l'état dans lequel se trouvera le système en fin d'année. L'Administrateur cherche à résoudre

$$\max_{r \in \mathcal{R}} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} B_{t+1}(\rho_t(l_t, \theta_t), l_t, a_{t+1}^{(V)}) + v_T(l_T) \right] \right\} \quad (6)$$

s. c. $l_{t+1} = l_t + \kappa(a_{t+1} - x_t)$

Le problème (6) est difficile à résoudre sous cette forme. L'algorithme de la programmation dynamique nous permettra d'en simplifier la résolution.

4.2 Récursion

L'algorithme de la programmation dynamique est une méthode nous permettant de résoudre le problème (6) en le scindant en plusieurs problèmes plus petits pouvant être résolus récursivement dans le temps. Le lecteur intéressé pourra consulter Bertsekas [1] et Powell [14].

Le théorème fondamental de la programmation dynamique nous permet de reformuler le problème (6) à l'aide de l'expression

$$v_t(l_t) = \max_{x_t \in \mathcal{X}_t} \left\{ \mathbb{E} \left[B_t(x_t, l_t, a_{t+1}^{(V)}) + v_{t+1}(l_{t+1}) \middle| l_t \right] \right\} \quad (7)$$

s. c. $l_{t+1} = l_t + \kappa(a_{t+1}^{(N)} - x_t)$

où $v_t(l_t)$ est la valeur associée au fait de disposer d'un volume d'eau l_t dans le réservoir à l'instant t .

L'équation (7) sera d'abord résolue pour $t = T - 1$ et pour plusieurs valeurs discrètes de l_{T-1} . Au passage, nous obtiendrons autant de points de la règle ρ_{T-1} qu'il y a de valeurs discrètes de l_{T-1} . Elle sera ensuite résolue pour $t = T - 2$ et ainsi de suite jusqu'à $t = 0$.

Bien que la reformulation du problème simplifie grandement notre tâche, la résolution des divers sous-problèmes présente souvent des difficultés tant techniques que théoriques. C'est pourquoi divers auteurs ont proposé des variantes de cet algorithme. C'est la variante proposée par Denault, Delage et Simonato [4] que nous appliquerons ici.

5 Algorithme de résolution par simulation et régression

Dans ce chapitre, nous présenterons l'algorithme par lequel nous résoudrons le problème présenté au chapitre précédent. Afin de présenter aussi clairement que possible l'algorithme que nous emploierons, nous ferons ici abstraction de l'information véhiculée par la variable hydrologique ; cette information sera intégrée au chapitre 6.

Nous présenterons d'abord la notation que nous emploierons pour décrire l'algorithme développé par Denault, Delage et Simonato [4] pour ensuite présenter l'algorithme lui-même, puis en donner le pseudo-code.

5.1 Notation de base

Notre but est de résoudre l'équation (7) à rebours dans le temps pour n_l volumes discrets. Ceux-ci seront notés \bar{l}_k pour $k = 1, 2, \dots, n_l$ et stockés dans le vecteur

$$\bar{l} = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \vdots \\ \bar{l}_{n_l} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons ainsi réécrire l'équation (7)

$$\bar{v}_{t;k} = v_t(\bar{l}_k) = \max_{x_t \in \mathcal{X}_t} \left\{ \mathbb{E} \left[B_t(x_t, l_t, a_{t+1}^{(V)}) + v_{t+1}(l_{t+1}) \middle| l_t = \bar{l}_k \right] \right\} \quad (8)$$

s. c. $l_{t+1} = \bar{l}_k + \kappa(a_{t+1} - x_t)$

L'espérance conditionnelle contenue dans l'équation (8) sera estimée par une procédure de simulation et régression. Pour ce faire, nous aurons recours à n_a trajectoires simulées des variables d'état exogènes. Les simulations d'apports sur le réservoir Nechako et sur Vanderhoof seront stockées respectivement dans les matrices

$$A^{(N)} = \begin{bmatrix} a_1^{(N)} & a_2^{(N)} & \cdots & a_T^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(N)} & a_{2,1}^{(N)} & \cdots & a_{T,1}^{(N)} \\ a_{1,2}^{(N)} & a_{2,2}^{(N)} & \cdots & a_{T,2}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n_a}^{(N)} & a_{2,n_a}^{(N)} & \cdots & a_{T,n_a}^{(N)} \end{bmatrix}$$

et

$$A^{(V)} = \begin{bmatrix} a_1^{(V)} & a_2^{(V)} & \cdots & a_T^{(V)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(V)} & a_{2,1}^{(V)} & \cdots & a_{T,1}^{(V)} \\ a_{1,2}^{(V)} & a_{2,2}^{(V)} & \cdots & a_{T,2}^{(V)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n_a}^{(V)} & a_{2,n_a}^{(V)} & \cdots & a_{T,n_a}^{(V)} \end{bmatrix}$$

où le vecteur $a_t^{(N)}$ pour un $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ contient les n_a apports sur le Nechako simulés pour la période t , tandis que $a_t^{(V)}$ contient les n_a apports sur Vanderhoof simulés pour la période t .

Notre méthode se distingue de la programmation dynamique par simulation et régression rencontrée en ingénierie financière en cela qu'elle inclut des fonctions de base en x comme régresseur. Pour ce faire, nous aurons recours

à $T \times n_l$ vecteurs contenant chacun n_x décisions discrètes. Ils seront notés

$$\bar{x}_{t;k} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{t;k;1} \\ \bar{x}_{t;k;2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{t;k;n_x} \end{bmatrix}$$

pour $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ et $k \in \{1, 2, \dots, n_l\}$ et les bornes supérieures et inférieures s'appuieront sur les débits minimaux et maximaux $x_t^{(min)}(\bar{l}_k)$ et $x_t^{(max)}(\bar{l}_k)$.

La résolution de l'équation (8) nous donnera une décision optimale pour chaque volume discret \bar{l}_k pour $k = 1, 2, \dots, n_l$ et ce à chaque instant $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$. Ces $n_l \times T$ décisions optimales seront stockées dans la matrice

$$X^* = \begin{bmatrix} x_0^* & x_1^* & \cdots & x_{T-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,1}^* & x_{1,1}^* & \cdots & x_{T-1,1}^* \\ x_{0,2}^* & x_{1,2}^* & \cdots & x_{T-1,2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0,n_l}^* & x_{1,n_l}^* & \cdots & x_{T-1,n_l}^* \end{bmatrix}$$

où les vecteurs x_t^* sont des règles de décision et X^* est une politique.

La résolution de l'équation (8) nous donnera aussi T matrices contenant chacune $n_l \times n_a$ points de la fonction valeur, soit n_l points pour chaque trajectoire simulée et chaque instant. Ces matrices seront notées

$$\bar{v}_t = \begin{bmatrix} \bar{v}_{t,1,1} & \bar{v}_{t,2,1} & \cdots & \bar{v}_{t,n_l,1} \\ \bar{v}_{t,1,2} & \bar{v}_{t,2,2} & \cdots & \bar{v}_{t,n_l,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{v}_{t,1,n_a} & \bar{v}_{t,2,n_a} & \cdots & \bar{v}_{t,n_l,n_a} \end{bmatrix}$$

où $\bar{v}_{t,k,j}$ est la valeur associée au fait d'avoir un volume d'eau \bar{l}_k dans le réservoir Nechako à l'instant t tout en étant sur la j^e trajectoire d'apport d'eau sur le Nechako simulée.

5.2 Opérateurs employés

Afin de présenter notre algorithme de manière aussi claire et concise que possible, nous aurons recours à divers opérateurs qui seront introduits ici.

Nous noterons $\mathcal{L}(a, b, n)$ le vecteur contenant n éléments équidistants entre $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ inclusivement. Cet opérateur correspond à la fonction *linspace* de Matlab. Par exemple

$$\mathcal{L}(0, 1, 3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour des vecteurs $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^m$, nous noterons $[A, B] = \mathcal{G}(a, b)$ les matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ servant à décrire la grille bidimensionnelle de tous les points pouvant être formés d'une première composante tirée du vecteur a et d'une seconde tirée de b . Cet opérateur correspond à la fonction *meshgrid* de Matlab. Par exemple, pour les vecteurs

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

l'opération $[A, B] = \mathcal{G}(a, b)$ renverra les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Nous emploierons la notation $[\sim, B] = \mathcal{G}(a, b)$ lorsque la matrice A est superflue.

Pour une matrice quelconque $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, nous noterons $B(\cdot)$ le vecteur composé des colonnes de B mises bout-à-bout. Par exemple, pour

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

nous aurons

$$B(\cdot) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nous noterons $d = \mathcal{I}(a, b, c)$ les valeurs interpolées ou extrapolées pour les points contenus dans le vecteur $c \in \mathbb{R}^n$ à partir des points contenus dans les vecteurs $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Cet opérateur correspond à la fonction *interp1* de Matlab. La manière exacte dont les interpolations et les extrapolations sont effectuées est discutée à l'annexe D.

Nous noterons $\mathcal{V}_\lambda(b)$ la matrice de Vandermonde de degré λ associée à un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$. Par exemple, pour

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

nous aurons

$$\mathcal{V}_2(b) = \begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & 2^2 \\ 3^0 & 3^1 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Enfin, nous noterons $A(i, :)$ la i^e ligne d'une matrice quelconque A et $A(:, j)$ sa j^e colonne.

Maintenant que nous nous sommes dotés de l'outillage requis, nous présenterons l'algorithme.

5.3 Récursion

Avant de nous lancer dans la description de l'algorithme, récapitulons le cheminement que nous avons fait. Notre but est de trouver une politique permettant de résoudre le problème (6). Puisque ce problème est difficile à résoudre sous cette forme, à la section 4.2, nous avons employé le théorème fondamental de la programmation dynamique pour le formuler sous la forme de l'équation (7). Celle-ci doit être résolue à rebours dans le temps c'est-à-dire d'abord pour $t = T - 1$, puis pour $t = T - 2$ et ainsi de suite jusqu'à $t = 0$.

Notons qu'elle dépend de quatre variables : notre décision x_t , le volume d'eau contenu dans le réservoir à l'instant t l_t et les apports reçus par le réservoir Nechako et la ville de Vanderhoof durant la période $t + 1$ ($a_{t+1}^{(N)}$ et $a_{t+1}^{(V)}$ respectivement). Le volume d'eau l_{t+1} , quant à lui, respecte $l_{t+1} = l_t + \kappa(a_{t+1}^{(N)} - x_t)$.

Comme nous le disions à la section 4.1, le volume d'eau dans le réservoir et les apports sont des variables d'état. Si $a_{t+1}^{(N)}$ et $a_{t+1}^{(V)}$ sont des variables d'état exogènes (non-affectées par notre décision) et se prêtent bien à un traitement par simulations et régressions, l_t est une variable d'état endogène (affectée par notre décision) et doit être traitée par discrétisation. C'est pourquoi, à la section 5.1, nous nous sommes dotés de n_l volumes discrets et avons pu réécrire l'équation (7) sous la forme de (8). Celle-ci doit non seulement être résolue à rebours dans le temps, mais aussi pour chacun des n_l volumes discrets. Le texte qui suit décrit les opérations à effectuer pour la résoudre à un instant $t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$ et pour un volume discret \bar{l}_k pour $k \in \{1, 2, \dots, n_l\}$. Pour ce faire, il nous faudra estimer l'espérance contenue dans l'équation (8). Afin d'alléger le texte, notons

$$\omega_{t+1;k}(x_t, a_{t+1}^{(N)}, a_{t+1}^{(V)}) = \left[B_{t+1}(x_t, l_t, a_{t+1}^{(V)}) + v_{t+1}(l_{t+1}) \middle| l_t = \bar{l}_k \right] \quad (9)$$

où $l_{t+1} = \bar{l}_k + \kappa(a_{t+1}^{(N)} - x_t)$.

À ce stade, nous voulons estimer l'espérance de $\omega_{t+1;k}(x_t, a_{t+1}^{(N)}, a_{t+1}^{(V)})$, qui est la somme du bénéfice $B_{t+1}(x_t, \bar{l}_k, a_{t+1}^{(V)})$ engrangé durant la période $t + 1$ et de la valeur de l'eau qu'il restera dans le réservoir à la fin de cette période c'est-à-dire $v_{t+1}(l_{t+1})$. Cette estimation se fera au moyen d'un polynôme de degré λ que nous noterons

$$\hat{\omega}_{t,k}(x) = \hat{\beta}_{t,k}^{(0)} + \hat{\beta}_{t,k}^{(1)}x + \dots + \hat{\beta}_{t,k}^{(\lambda)}x^\lambda \quad (10)$$

Notez que $\hat{\omega}_{t,k}(x)$ ne dépend que de la décision ; il sera obtenu par simulations et régressions ; nous régresserons sur la décision. Pour ce faire, nous

devrons produire un échantillon de la somme du bénéfice et de la valeur de l'eau qu'il restera dans le réservoir. Cet échantillon sera noté $\Omega_{t;k}$.

Afin de produire l'échantillon $\Omega_{t;k}$, nous allons d'abord générer un échantillon de volumes résultant de couples de décisions discrètes et d'apports simulés. Nous débutons en produisant un vecteur contenant n_x décisions discrètes grâce à l'équation

$$\bar{x}_{t;k} = \mathcal{L}(x_t^{(min)}(\bar{l}_k), (x_t^{(max)}(\bar{l}_k), n_x)$$

Nous pouvons ensuite obtenir tous les couples $(\bar{x}_{t;k;i}, a_{t;j}^{(N)})$ et les stocker dans les matrices $\bar{\xi}_{t;k}$ et $\alpha_{t;k}$. Ces matrices sont obtenues grâce à l'équation

$$[\bar{\xi}_{t;k}, \alpha_{t;k}^{(N)}] = \mathcal{G}(\bar{x}_{t;k}, a_t^{(N)})$$

Le graphique en-haut à gauche de la figure 7 offre une représentation de ces couples. Ceux-ci sont employés pour générer un échantillon de volumes résultants grâce à l'équation

$$l_{t+1;k} = \bar{l}_k + \kappa(\alpha_{t;k}^{(N)} - \bar{\xi}_{t;k}) \quad (11)$$

La matrice $l_{t+1;k}$ est $n_a \times n_x$ et contient tous les volumes qu'il peut résulter d'un décision discrète et d'un apport sur le Nechako simulé. Le graphique en-haut à droite de la figure 7 offre une représentation de ces volumes. À chacun de ces volumes est associée un valeur qui découle du bénéfice qui pourra être généré dans le futur par cette réserve d'eau. Nous voulons calculer cette valeur. Pour ce faire, nous emploierons la matrice \bar{v}_{t+1} . Celle-ci est

$n_a \times n_l$ et contient des points de la fonction valeur. Sa j^e ligne contient les n_l points de la fonction valeur associés aux n_l volumes discrets et à la j^e trajectoire simulée. Puisqu'à la j^e ligne de la matrice $l_{t+1;k}$ nous retrouvons les n_x volumes associés à la j^e trajectoire, nous passerons en boucle sur les lignes de $l_{t+1;k}$ et celles de \bar{v}_{t+1} pour calculer la valeur associée aux volumes contenus dans $l_{t+1;k}$. Ces valeurs seront calculées par interpolation et stockées dans une nouvelle matrice que nous noterons $\tilde{v}_{t+1;k}$ (le tilde nous rappellera qu'il s'agit de valeurs interpolées). Les lignes de $\tilde{v}_{t+1;k}$ seront obtenues grâce à l'équation

$$\tilde{v}_{t+1;k}(j, :) = \mathcal{I}(\bar{l}, \bar{v}_{t+1}(j, :), l_{t+1;k}(j, :)) \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n_a$$

Nous disposons maintenant d'une partie de l'échantillon $\Omega_{t+1;k}$ (la valeur associée aux volumes résultant des couples de décision et d'apport); il nous reste à lui ajouter le bénéfice. Nous voulons produire une matrice $n_a \times n_x$ contenant, sur sa j^e ligne les n_x bénéfices issus de nos décisions discrètes et du j^e apport sur Vanderhoof simulé. Pour ce faire, nous réutiliserons la matrice $\bar{\xi}_{t;k}$ et générerons une matrice $\alpha_{t+1;k}^{(V)}$ grâce à l'équation

$$[\sim, \alpha_{t+1}^{(V)}] = \mathcal{G}(\bar{x}_{t;k}, a_{t+1}^{(V)})$$

Nous pouvons dès lors obtenir l'échantillon

$$\Omega_{t+1;k} = B_{t+1}(\bar{\xi}_{t;k}, \bar{l}_k, \alpha_{t+1}^{(V)}) + \tilde{v}_{t+1;k}$$

Le graphique en-bas à gauche de la figure 7 offre une représentation de cet

échantillon.

C'est cet échantillon qui sera employé pour obtenir $\hat{\omega}_{t+1;k}(x)$, le polynôme de degré λ estimant l'espérance contenue dans l'équation (8). Puisque $\xi_{t;k}$ est une matrice $n_a \times n_x$, nous employons l'opérateur (\cdot) pour en faire un vecteur $n_a n_x \times 1$ qui sera utilisé pour générer la matrice de Vandermonde

$$G_{t+1;k} = \mathcal{V}_\lambda(\xi_{t;k}(\cdot))$$

Les coefficients définissant le polynôme $\hat{\omega}_{t+1;k}(x)$ seront stockés dans le vecteur $\hat{\beta}_{t+1;k}$ et obtenus par régression linéaire grâce à l'équation

$$\hat{\beta}_{t+1;k} = [G_{t+1;k}^\top G_{t+1;k}]^{-1} G_{t+1;k}^\top \Omega_{t+1;k}(\cdot)$$

Nous disposons maintenant d'un estimateur de l'espérance de $\omega_{t+1;k}(x_t, a_{t+1}^{(N)}, a_{t+1}^{(V)})$. Afin de compléter la résolution de l'équation (8), il nous faut maintenant maximiser $\hat{\omega}_{t+1;k}(x)$ par rapport à x . Nous le faisons et obtenons la décision optimale associée à la discrétisation choisie

$$x_{t;k}^* = \operatorname{argmax}_{x \in \mathcal{X}_{t;k}} \left\{ \hat{\omega}_{t+1;k}(x) \right\}$$

Le graphique en-bas à droite de la figure 7 offre une représentation de $\Omega_{t+1;k}$, du polynôme $\hat{\omega}_{t+1;k}(x)$ et de $x_{t;k}^*$.

Nous avons obtenu la décision optimale associée au volume discret \bar{l}_k pour l'instant t . Elle sera l'un des n_l éléments composant la t^e règle de décision. Toutefois, nous n'avons pas encore complété la résolution de l'équation (8) car nous n'avons pas encore obtenu les points de la fonction valeur qui devront

être utilisés lorsque nous reculerons d'un pas de temps. Pour ce faire, nous adopterons une approche dite de la *valeur réalisée*.

Elle se résume à appliquer la décision optimale $x_{t;k}^*$ en calculant la valeur de $\omega_{t+1;k}(x_{t;k}^*, a_{t+1;j}^{(N)}, a_{t+1;j}^{(V)})$ pour $j = 1, 2, \dots, n_a$ et à stocker les n_a résultats dans la k^e colonne d'une matrice \bar{v}_t . Lorsque nous reculerons d'un pas de temps, ce sera cette matrice qui sera employée pour calculer par interpolation la valeur associée aux volumes résultant, plutôt que \bar{v}_{t+1} .

Nous commençons par calculer les n_a volumes résultant, à l'instant $t + 1$, de l'application de la décision $x_{t;k}^*$. Ces volumes sont stockés dans un vecteur L_{t+1} et obtenus par l'équation

$$L_{t+1} = \bar{l}_k + \kappa(a_{t+1} - x_{t;k}^*)$$

Les valeurs qui leur sont associées sont calculées par interpolation et stockées dans le vecteur $\tilde{V}_{t+1;k}$ grâce à l'équation

$$\tilde{V}_{t+1;k}(j) = \mathcal{I}(\bar{l}, \bar{v}_{t+1}(j, :), L_{t+1}(j)) \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n_a$$

À ces valeurs, nous ajoutons le bénéfice associé à la décision optimale, pour obtenir la k^e colonne de \bar{v}_t

$$\bar{v}_t(:, k) = B_{t+1}(x_{t;k}^*, \bar{l}_k, a_{t+1}^{(V)}) + \tilde{V}_{t+1;k}$$

En répétant ces opérations pour chaque volume discret \bar{l}_k , nous obtiendrons n_l polynômes $\omega_{t;k}$, n_l décisions optimales $x_{t;k}^*$ (qui formeront la t^e règle de décision x_t^*) et les n_l colonnes de la matrice \bar{v}_t contenant les points de la

fonction valeur pour l'instant t . C'est cette matrice qui sera employée pour calculer la valeur des volumes résultants lorsque nous reculerons d'un pas de temps.

Lorsque nous aurons effectué les opérations décrites plus haut pour tous les instants, nous disposerons d'une politique composée de T règles de décisions. Cette politique sera stockée dans la matrice $X^* = [x_0^*, x_1^*, \dots, x_{T-1}^*]$. La section suivante donne le pseudo-code de l'algorithme.

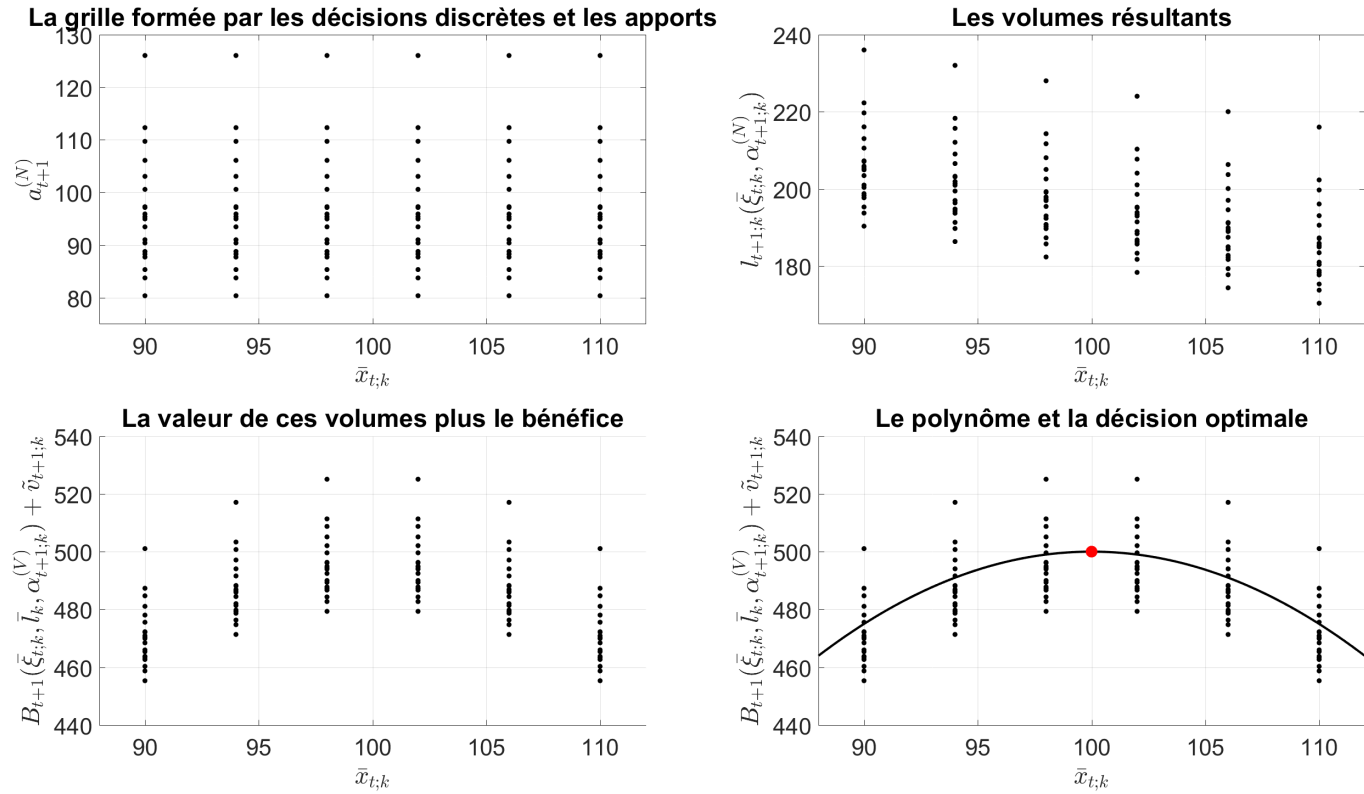


FIGURE 7 – En-haut à gauche, nous avons la grille définie par les matrices de décisions et d’apports $\bar{\xi}_{t;k}$ et $\alpha_{t;k}$. En-haut à droite, nous avons les volumes associés aux couples de décision et d’apport pour un volume de départ \bar{l}_k ; ces volumes sont stockés dans la matrice $l_{t+1;k}$. En-bas à gauche, nous avons l’échantillon $\Omega_{t;k}$. En-bas à droite se trouve le polynôme obtenu en régressant $\Omega_{t;k}$ sur $\bar{\xi}_{t;k}$ de même que son maximum.

5.4 Pseudo-code

Algorithme 1 : Régression sur le contrôle

Données : $A^{(N)}, A^{(V)}, \bar{V}_T, n_a, n_x, n_l$

Résultat : $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{T-1}$ et $X^* = [x_0^*, x_1^*, \dots, x_{T-1}^*]$

pour $t = T - 1$ **à** 0 **faire**

pour $k = 1$ **à** n_l **faire**

 Déterminer $x_t^{(min)}(\bar{l}_k)$ et $x_t^{(max)}(\bar{l}_k)$

$\bar{x}_{t;k} = \mathcal{J}(x_t^{(min)}(\bar{l}_k), x_t^{(max)}(\bar{l}_k), n_x)$

$[\xi_{t;k}, \alpha_{t+1;k}^{(N)}] = \mathcal{G}(\bar{x}_{t;k}, a_{t+1}^{(N)})$

$[\sim, \alpha_{t+1;k}^{(V)}] = \mathcal{G}(\bar{x}_{t;k}, a_{t+1;k}^{(V)})$

$l_{t+1;k} = \bar{l}_k + \kappa(\alpha_{t+1}^{(N)} - \xi_{t;k})$

pour $j = 1$ **à** n_a **faire**

$\tilde{v}_{t+1;k}(j, \cdot) = \mathcal{J}(\bar{l}, \bar{v}_{t+1}(j, \cdot), l_{t+1,k}(\cdot, j))$

fin

$\Omega_{t+1;k} = B_{t+1}(\xi_{t;k}, \bar{l}_k, \alpha_{t+1;k}^{(V)}) + \tilde{v}_{t+1,k}$

$G_{t+1;k} = \mathcal{V}_\lambda(\xi_{t;k}(\cdot))$

$\hat{\beta}_{t+1;k} = G_{t+1;k}^\top G_{t+1;k} \setminus G_{t+1;k}^\top \Omega_{t+1;k}(\cdot)$

$x_{t;k}^* = \operatorname{argmax}_{x \in \mathcal{X}_{t;k}} \left\{ \hat{\omega}_{t+1;k}(x) \right\}$

$L_{t;k} = \bar{l}_k + \kappa(a_{t+1;k}^{(N)} - x_{t;k}^*)$

pour $j = 1$ **à** n_a **faire**

$\bar{v}_t(j, k) = B_{t+1}(x_{t;k}^*, \bar{l}_k, a_t^{(V)}(j)) + \mathcal{J}(\bar{l}, \bar{v}_{t+1}(j, \cdot), L_{t;k}(j))$

fin

fin

fin

6 Inclusion de la variable hydrologique

Dans la section précédente, nous n'avons considéré que le volume d'eau contenu dans le réservoir Nechako pour éclairer notre décision. Toutefois, nous avons à notre dispositions diverses variables d'état exogènes qu'il serait raisonnable de prendre en compte lors du processus de prise de décision.

Bien qu'il serait tentant d'employer $a_t^{(N)}$, l'apport observé à la période précédente, afin de prédire $a_{t+1}^{(N)}$, l'apport à venir, un coup d'œil à la figure 8 suffit à nous convaincre du peu de potentiel prédictif de cette variable. D'une part, la forme en dents de scie des trajectoires nous indique qu'une forte variation de l'apport peut se produire d'une période à l'autre. D'autre part, comme nous l'expliquions à la section 2.3, le grand défi auquel nous faisons face n'est pas tant de prédire l'apport qui viendra à la prochaine période que d'anticiper le volume d'eau que recevra le réservoir Nechako durant la crue.

Nous disposons toutefois d'une variable permettant de prédire raisonnablement l'amplitude de la crue : h_t , la variable hydrologique qui est une combinaison du couvert nival et de l'humidité du sol. C'est elle que nous emploierons. Dans la section 6.1, nous décrirons la manière dont elle sera incluse et dans la section 6.3, nous donnerons le pseudo-code de l'algorithme correspondant.

6.1 Classification en fonction de la variable hydrologique

Nous disposons de simulations pour trois variables d'état exogènes : l'apport sur le réservoir Nechako, l'apport sur Vanderhoof et la variable hydro-

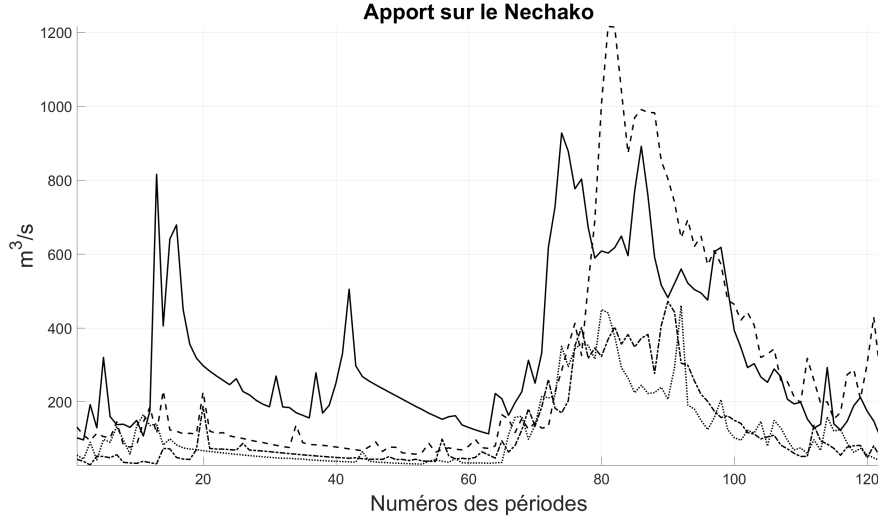


FIGURE 8 – Quatre trajectoires de l’apport sur le réservoir Nechako. Notez la forme en dents de scie des trajectoires qui fait des apports passés de bien piètres prédicteurs des apports à venir.

logique. Dans ce qui suit, lorsque nous parlerons de la j^e trajectoire, nous ferons référence à la j^e simulation de ces trois variables c’est-à-dire $a_{t;j}^{(N)}$, $a_{t;j}^{(V)}$ et $h_{t;j}$.

L’approche que nous avons retenue pour tenir compte de l’information véhiculée par la variable hydrologique h_t consiste à classifier, à chaque instant $t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$, les trajectoires en n_z classes en fonction de l’intensité de h_t .

À l’instant t , pour un volume \bar{l}_k , nous obtiendrons n_z polynômes $\hat{\omega}_{t;k;m}(x)$ pour $m = 1, 2, \dots, n_z$ plutôt qu’un seul. Le polynôme $\hat{\omega}_{t;k;m}(x)$ sera obtenu par la même méthode que celle décrite à la section 5.3, mais en ne considérant que les trajectoires tombant dans la m^e classe.

Afin d’établir ces classes, nous considérerons N_h trajectoires simulées de

la variable h_t . Ces trajectoires seront différentes de celles employées pour effectuer les régressions. Pour chaque instant $t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$, $n_z - 1$ *points de bascule* $\sigma_{t;p}$ correspondant aux $(n_z - 1)$ -quantiles de l'échantillons seront établis. Ces points de bascule seront stockés dans la matrice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_{T-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{0;1} & \sigma_{1;1} & \cdots & \sigma_{T-1;1} \\ \sigma_{0;2} & \sigma_{1;2} & \cdots & \sigma_{T-1;2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{0;n_z-1} & \sigma_{1;n_z-1} & \cdots & \sigma_{T-1;n_z-1} \end{bmatrix}$$

Grâce à ces points, nous établirons dans quelles classes tomberont les trajectoires employées pour effectuer les régressions. Le numéro de la classe à laquelle appartiendra la j^e trajectoire à l'instant t sera noté $z_{t;j}$ et sera obtenu grâce à l'équation

$$z_{t;j} = \begin{cases} 1 & \text{si } h_{t;j} \leq \sigma_{t;1} \\ p & \text{si } \sigma_{t;p-1} < h_{t;j} \leq \sigma_{t;p} \text{ pour } p \in \{2, 3, \dots, n_z - 1\} \\ n_z & \text{si } h_{t;j} > \sigma_{t;n_z-1} \end{cases} \quad (12)$$

Les valeurs de la variable z_t seront stockées dans la matrice

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{0;1} & z_{1;1} & \cdots & z_{T-1;1} \\ z_{0;2} & z_{1;2} & \cdots & z_{T-1;2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{0;n_a} & z_{2;n_a} & \cdots & z_{T-1;n_a} \end{bmatrix}$$

où $z_{t,j} \in \{1, \dots, n_z\}$ pour $j = 1, \dots, n_a$ et $t = 0, \dots, T - 1$.

La figure 9 montre les valeurs prises par $a_t^{(N)}$, h_t et z_t pour les quatre trajectoires représentées à la figure 8 et deux classes.

Ayant classé les trajectoires en n_z classes, nous appliquerons sensiblement le même algorithme que celui présenté à la section 5, sauf que, cette fois-ci, nous obtiendrons n_z polynômes pour chaque volume discret et chaque instant. À terme, nous aurons $T \times n_l \times n_z$ polynômes et autant de décisions optimales.

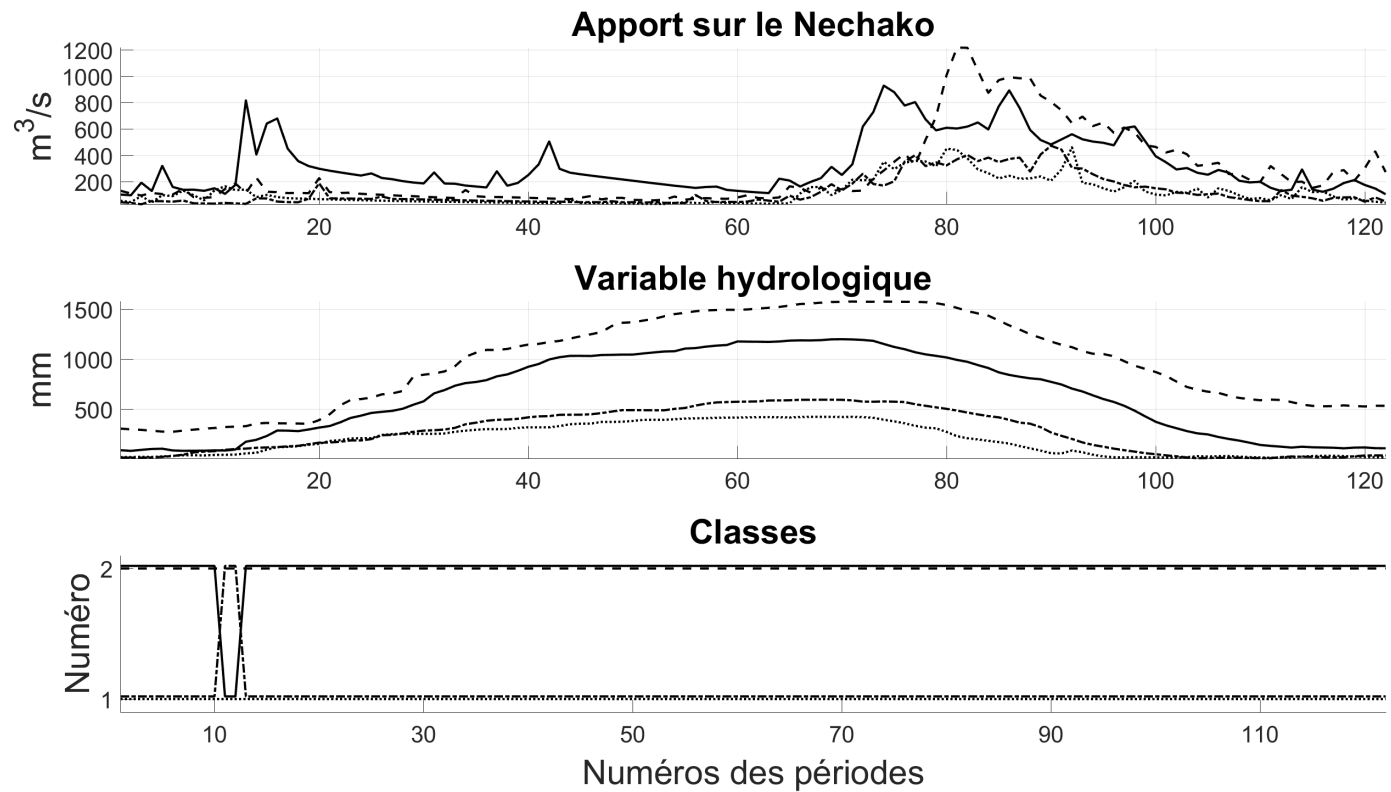


FIGURE 9 – Quatre trajectoires de la variable hydrologique h_t et de z_t . Notez que les trajectoires ont tendance à demeurer dans la même classe, ce qui nous permet de déterminer très tôt si nous avons affaire à une année *sèche* ou *humide*.

6.2 Récursion

Ici, nous décrirons l'algorithme pour un instant $t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$, un volume discret \bar{l}_k et une classe m . Afin de ne pas alourdir indûment le texte, nous noterons $I_{t;m}$ le vecteur contenant les indices de trajectoires tombant dans la m^e classe à l'instant t . Ainsi, $a_{t+1}^{(N)}(I_{t;m})$ et $a_{t+1}^{(V)}(I_{t;m})$ seront les vecteurs contenant les apports simulés sur le réservoir Nechako et sur Vanderhoof tombant dans la m^e classe. De même, nous noterons $\bar{v}_{t+1}(I_{t;m}, k)$ les éléments de la k^e colonne de la matrice \bar{v}_{t+1} correspondant aux trajectoires pour lesquelles $z_t = m$. Lorsque nous voudrions accéder un élément particulier du vecteur $I_{t;m}$, nous emploierons l'indice μ et noterons $I_{t;m}(\mu)$. Nous noterons $N_{t;m}$ le nombre d'éléments dans le vecteur $I_{t;m}$.

Cette version de l'algorithme est assez similaire à celle présentée au chapitre 5, c'est pourquoi nous nous contenterons de rappeler les opérations déjà présentées sans les expliquer en détail.

À l'instant t , pour un volume discret \bar{l}_k , le vecteur des décision discrètes est obtenu.

$$\bar{x}_{t,k} = \mathcal{L}(x_t^{(min)}(\bar{l}_k), (x_t^{(max)}(\bar{l}_k), n_x))$$

Le vecteur $\bar{x}_{t,k}$ demeurera le même pour toutes les classes. C'est pourquoi ce vecteur n'est pas indicé en m . Toutefois, la matrice $\bar{\xi}_{t;k;m}$ peut changer de dimensions pour chaque m car le nombre de valeurs contenues dans les vecteurs $a_{t+1}^{(N)}(I_{t;m})$ et $a_{t+1}^{(V)}(I_{t;m})$ peut changer. Les matrices $\bar{\xi}_{t;k;m}$ et $\alpha_{t;k;m}^{(N)}$ sont obtenues grâce à l'équation

$$[\bar{\xi}_{t;k;m}, \alpha_{t;k;m}^{(N)}] = \mathcal{G}(\bar{x}_{t,k}, a_{t+1}^{(N)}(I_{t;m}))$$

Les volumes résultants de ces couples de décisions et d'apports sont calculés et stockés dans la matrice

$$l_{t+1;k;m} = \bar{l}_k + \kappa(\alpha_{t;k;m}^{(N)} - \bar{\xi}_{t;k;m})$$

La matrice \bar{v}_{t+1} est utilisée pour calculer par interpolation la valeur associée à chacun de ces volumes selon l'équation

$$\tilde{v}_{t+1;k;m}(\mu, \cdot) = \mathcal{I}(\bar{l}, \bar{v}_{t+1}(I_{t,m}(\mu)), l_{t+1;k;m}(\cdot, \mu))$$

La matrice $\alpha_{t+1;m}^{(V)}$ est obtenue grâce à l'équation

$$[\sim, \alpha_{t+1;m}^{(V)}] = \mathcal{G}(\bar{x}_{t;k}, a_{t+1}^{(V)}(I_{t,m}))$$

L'échantillon employé pour effectuer la régression est enfin obtenu

$$\Omega_{t+1;k;m} = B_{t+1}(\bar{\xi}_{t;k;m}, \bar{l}_k, \alpha_{t+1}^{(V)}(I_{t,m})) + \tilde{v}_{t+1;k;m}$$

La matrice de Vandermonde est obtenue

$$G_{t+1;k;m} = \mathcal{V}_\lambda(\xi_{t;k;m}(\cdot))$$

Les coefficients définissant le polynôme $\hat{\omega}_{t+1;k;m}(x)$ sont obtenus par régression linéaire grâce à l'équation

$$\hat{\beta}_{t+1;k;m} = G_{t+1;k;m}^\top G_{t+1;k;m} \setminus G_{t+1;k;m}^\top \Omega_{t+1;k;m}(\cdot)$$

La décision optimale associée au volume discret \bar{l}_k , à l'instant t et à la m^e

classe est obtenue en maximisant $\hat{\omega}_{t+1;k;m}(x)$ par rapport à x

$$x_{t;k;m}^* = \operatorname{argmax}_{x \in \mathcal{X}_{t;k}} \left\{ \hat{\omega}_{t+1;k;m}(x) \right\}$$

Cette décision est enfin employée pour remplir les cases de la k^e colonne de la matrice \bar{v}_t correspondant aux trajectoires tombant dans la m^e classe. Les volumes résultant de l'application de la décision $x_{t;k;m}^*$ sont calculés grâce à l'équation

$$L_{t+1;k;m} = \bar{l}_k + \kappa(a_{t+1}^{(N)}(I_{t;m}) - x_{t;k;m}^*)$$

Les valeurs qui leur sont associées sont calculées par interpolation et stockées dans le vecteur $\tilde{V}_{t+1;k;m}$ selon l'équation

$$\tilde{V}_{t+1;k;m}(\mu) = \mathcal{I}(\bar{l}, \bar{v}_{t+1}(I_{t;m}(\mu)), L_{t+1;k;m}(\mu))$$

À ces valeurs, nous ajoutons le bénéfice associé à la décision optimale, pour obtenir les éléments de la k^e colonne de \bar{v}_t correspondant aux trajectoires tombant dans la m^e classe

$$\bar{v}_t(I_{t;m}) = B_{t+1}(x_{t;k}^*, \bar{l}_k, a_{t+1}^{(V)}) + \tilde{V}_{t+1;k;m}$$

Ces opérations sont répétées pour chaque classe et chaque volume discret. Nous obtenons ainsi la matrice \bar{v}_t contenant les points de la fonction valeur associés à chaque volume discret et chaque trajectoire pour l'instant t . Au passage, nous obtenons aussi les décisions optimales associées à chaque volume discret et chaque classe. Ces décisions sont notées $x_{t;k;m}^*$ et stockées

dans n_z vecteurs notés $x_{t,m}^*$. Ces n_z vecteurs forment la règle de décision de l'instant t .

À terme, nous aurons T matrices contenant des points de la fonction valeur $(\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{T-1})$ et T règles de décision qui seront stockées dans les matrices $X_1^*, X_2^*, \dots, X_{n_z}^*$. Ces matrices seront notre politique.

À la section suivante, nous donnerons le pseudo-code de cette variante de l'algorithme. Au prochain chapitre, nous présenterons les résultats numériques obtenus pour divers paramétrages de notre algorithme.

6.3 Pseudo-code

Algorithme 2 : Régression sur le contrôle et classification des trajectoires

Données : $A^{(N)}, A^{(V)}, Z, \bar{v}_T, n_a, n_x, n_l, n_z$

Résultat : $X_1^*, X_2^*, \dots, X_{n_z}^*$ et $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{T-1}$

pour $t = T - 1$ **à** 0 **faire**

pour $k = 1$ **à** n_l **faire**

 Déterminer $x_t^{(min)}(\bar{l}_k)$ et $x_t^{(max)}(\bar{l}_k)$

$$\bar{x}_{t;k} = \mathcal{L}(x_t^{(min)}(\bar{l}_k), x_t^{(max)}(\bar{l}_k), n_x)$$

pour $m = 1$ **à** n_z **faire**

$$[\bar{\xi}_{t;k;m}, \alpha_{t+1;m}^{(V)}] = \mathcal{G}(\bar{x}_{t;k}, a_{t+1}^{(N)}(I_{t;m}))$$

$$[\sim, \alpha_{t+1;m}^{(V)}] = \mathcal{G}(\bar{x}_{t;k}, a_{t+1}^{(V)}(I_{t;m}))$$

$$l_{t+1;k;m} = \bar{l}_k + \kappa(\alpha_{t+1;m}^{(N)} - \bar{\xi}_{t;k;m})$$

pour $\mu = 1$ **à** $N_{t;m}$ **faire**

$$\quad | \quad \tilde{v}_{t+1;k;m}(\mu) = \mathcal{J}(\bar{l}, \bar{v}_{t+1}(I_{t;m}(\mu)), l_{t+1;k;m})$$

fin

$$\Omega_{t+1;k;m} = B_{t+1}(\bar{\xi}_{t;k;m}, \bar{l}_k, \alpha_{t+1;m}^{(V)}) + \tilde{v}_{t+1;k;m}$$

$$G_{t;k;m} = \mathcal{V}_\lambda(\xi_{t;k;m}(\cdot))$$

$$\hat{\beta}_{t+1;k;m} = G_{t;k;m}^\top G_{t;k;m} \setminus G_{t;k;m}^\top \Omega_{t+1;k;m}(\cdot)$$

$$x_{t;k;m}^* = \operatorname{argmax}_{x \in \mathcal{X}_t} \left\{ \hat{\omega}_{t;k;m}(x) \right\}$$

$$L_{t+1;k;m} = \bar{l}_k + \kappa(a_{t+1}^{(N)}(I_{t;m}) - x_{t;k;m}^*)$$

pour $\mu = 1$ **à** $N_{t;m}$ **faire**

$$\quad | \quad \bar{v}_t(I_{t;m}(\mu), k) = B_{t+1}(x_{t;k;m}^*, \bar{l}_k, a_{t+1;m}^{(V)}(I_{t;m}(\mu))) +$$

$$\quad | \quad \mathcal{J}(\bar{l}, \bar{v}_{t+1}(I_{t;m}(\mu), \cdot), L_{t+1;k;m}(I_{t;m}(\mu)))$$

fin

fin

fin

fin

7 Tests numériques

Dans ce chapitre, nous comparerons les résultats obtenus grâce à l'application de notre algorithme à ceux obtenus par le partenaire, Rio Tinto. Dans la section 7.1, nous décrirons les paramètres de l'algorithme. À la section 7.3.1, nous présenterons les politiques et la manière dont les tests seront menés. Enfin, aux sections 7.3.2 et 7.3.3, nous présenterons les résultats obtenus pour divers paramétrages de l'algorithme.

7.1 Paramètres de l'algorithme

Les politiques ont été établies grâce à un échantillon de $n_a = 1000$ trajectoires⁵ d'une année chacune. Celles-ci ont été générées par le partenaire par un procédé auquel nous n'avons pas accès.

Nous avons utilisé $n_l = 10$ volumes discrets équidistants. Le volume minimal correspond à celui en-deçà duquel la production doit être arrêtée à la centrale et le volume maximal correspond à celui au-delà duquel le réservoir déborderait.

Nous avons employé des polynômes de degré 10. Certains des nuages de points générés présentent un *coude* qui est attribuable à la forme retenue pour le bénéfice (la forme exacte du bénéfice est discutée à l'annexe B). L'usage d'un polynôme de degré élevé nous permet de coller au mieux de tels nuages et d'obtenir une décision $x_{t;k;m}^*$ s'approchant autant que possible de l'optimum. Nous avons écarté la possibilité d'employer des polynômes d'un degré encore plus élevé car l'effet sur les résultats était minimes et les

5. Comme à la section 6.1, par trajectoire, nous entendons les valeurs simulées pour les trois variables exogènes.

temps de calcul augmentent avec le degré des polynômes. À la figure 10, deux nuages particulièrement différents sont présentés (tous deux obtenus à partir de données réelles). Pour celui du haut, un polynôme de degré 1 offrirait une estimation satisfaisante. Pour celui du bas, le coude vers $\bar{x}_{t,k} = 175$ nous oblige à recourir à un polynôme de degré plus élevé.

Les n_z classes de la variable hydrologique ont été établies grâce aux quantiles calculés selon la méthode décrite à la section 6.1 à partir d'un échantillon de mille années différent de ceux utilisés pour la phase à rebours et pour les tests hors-échantillon.

Nous avons discrétisé la décision en $n_x = 50$ valeurs équidistantes. Quelques tests préliminaires nous ont convaincu qu'une discrétisation plus fine n'affectait que très peu les résultats.

Outre quelques fonctions particulièrement exigeantes numériquement qui ont dû être codées en langage C, le programme a été rédigé en Matlab. Les calculs, quant à eux, ont été effectués sur un ordinateur personnel doté de 16 Go de mémoire vive et d'un processeur Intel(R) Core(TM) i7-6700 à deux cœurs de 3,4 GHz chacun.

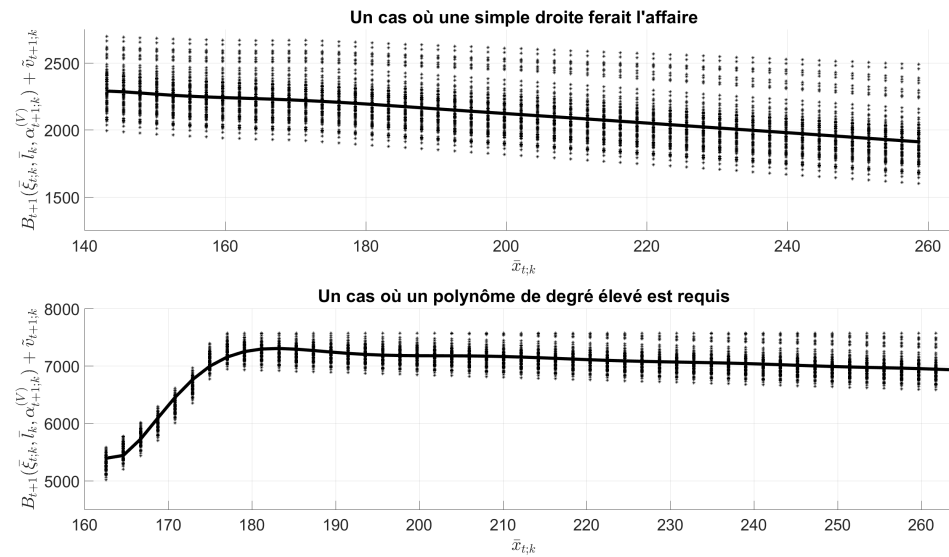


FIGURE 10 – Deux nuages de points obtenus lors de la phase à rebours. Celui du bas présente un coude nous obligeant à employer un polynôme de degré élevé. Les deux polynômes tracés sur ces graphiques sont de degré 10.

7.2 Description du test comparatif

Nous désirons tester les politiques obtenues par notre algorithme. Pour ce faire, nous utiliserons une nouvelle trajectoire simulée des variables d'état exogènes, soit l'apport sur le réservoir Nechako $a_t^{(N)}$, l'apport sur Vanderhoof $a_t^{(V)}$ et la variable hydrologique z_t . Cette fois-ci, nous considérerons une trajectoire unique de mille années consécutives, plutôt que n_a années en parallèle comme dans la phase à rebours. Ce choix est expliqué par notre volonté de tester notre politique dans un contexte de *régime perpétuel*.

Partant d'une condition initiale du système donnée par un volume arbitraire l_0 , nous obtiendrons trois séries chronologiques, soit le volume du réservoir Nechako, le débit observé à Vanderhoof et la puissance produite à la centrale hydroélectrique de Kemano. Ces trois suites seront par la suite employées pour calculer les statistiques servant à déterminer l'atteinte de nos objectifs.

À chaque instant t , la variable z_t sera employée pour choisir l'une des matrices $X_1^*, X_2^*, \dots, X_{n_z}^*$. Le volume d'eau dans le réservoir l_t sera ensuite employé pour déterminer la décision x_t^* qui sera appliquée. Cette décision, couplée aux variables $a_{t+1}^{(N)}$ et $a_{t+1}^{(V)}$ permettra de déterminer le volume résultant l_{t+1} selon l'équation (1), le débit observé à Vanderhoof selon l'équation (2) de même que la production $p_{t+1}(x_t^*, l_t)$.

Au passage, nous déterminerons si le supplément destiné à BC Hydro a pu être livré et si la ville de Vanderhoof est inondée. À cet égard, une procédure particulière a été incluse afin de minimiser la probabilité d'inondation. Puisque les périodes sont très courtes (trois jours seulement), dans les tests hors-échantillon, nous faisons l'hypothèse que les apports de la période $t + 1$

sont connus à l'instant t . Ainsi, s'il reste suffisamment d'espace dans le réservoir et que la décision x_t^* aurait pour conséquence d'inonder la ville, nous la corrigeons afin de ne pas l'inonder. Cette correction correspond à ce que l'Administrateur ferait dans la réalité et a pour conséquence que le seul cas où la ville de Vanderhoof peut être inondée est celui où il n'y a plus du tout de place dans le réservoir. Notez que cette procédure n'est nullement mise en place lors de la phase à rebours servant à produire les politiques.

La *probabilité d'inondation* sera calculée en divisant le nombre d'années pour lesquelles la ville de Vanderhoof aura été en situation d'inondation au moins une fois par le nombre total d'années de la trajectoire utilisée. C'est l'équation (5) qui est employée pour déterminer si la ville est en état d'inondation.

La *probabilité de livrer le supplément destiné à BC Hydro* sera calculée en divisant le nombre de périodes au cours desquelles le *supplément* devait être livré et l'a été par le nombre total de périodes où le *supplément* devait être livré.

La *probabilité de fournir la demande de l'aluminerie (DA)* sera déterminée en divisant le nombre d'années pour lesquelles la puissance générée n'a jamais chuté sous le minimum requis pour le bon fonctionnement de l'aluminerie par le nombre total d'années.

Le *revenu annuel moyen* généré par la vente d'électricité sera calculé en divisant la somme du revenu de chaque année par le nombre total d'années.

7.3 Résultats

Dans cette section, nous présenterons d’abord nos politiques et expliquerons la manière dont nous mènerons les tests hors-échantillon c’est-à-dire menés sur des simulations différentes de celles employées pour obtenir les politiques. Nous présenterons ensuite les résultats numériques obtenus lors de ces tests. Nous cherchons à satisfaire quatre objectifs différents en même temps : maximiser la valeur de l’énergie vendue à BC Hydro, maximiser la probabilité de fournir la demande ferme à l’aluminerie de Kitimat, maintenir la probabilité de fournir le supplément à BC Hydro au-dessus de 83,7% (car c’est la valeur obtenue par le partenaire) et minimiser la probabilité d’inonder la ville de Vanderhoof.

Pour moduler l’atteinte de ces objectifs, nous avons fait varier deux paramètres : l’exposant ϕ et n_z le nombre de classes dans lesquelles les trajectoires sont classées. Rappelons que cet exposant est inclus dans la fonction bénéfice et permet de favoriser la production d’électricité dans l’immédiat au détriment de l’accumulation d’eau, quitte à déverser cette eau plus tard. La forme exacte du bénéfice est présentée à l’Annexe B.

À la section 7.3.2, nous chercherons les valeurs de ϕ qui nous permettront de satisfaire au mieux nos quatre objectifs. Ce sont ces valeurs qui seront employées à la section 7.3.3 lorsque nous ferons varier n_z , le nombre de classes.

7.3.1 Présentation des politiques optimales

Au cours des chapitres 5 et 6, nous avons traité de la phase à rebours de notre algorithme qui nous permet d’obtenir une politique composée de règle de décisions nous permettant de déterminer le débit à soustraire du réservoir

Nechako à chaque instant de l'année.

Au chapitre 5, nous avons obtenu une politique décrite par une unique matrice notée X^* . Celle-ci nous indiquait le débit à soustraire à un instant et pour un volume d'eau donnés. Puisque dans la réalité, le volume d'eau contenu dans le réservoir ne tombera presque jamais sur l'un des volumes discret, la décision est obtenue par interpolation linéaire.

Au chapitre 6, nous avons séparé la variable hydrologique en n_z classes et obtenu une politique décrite par n_z matrices $\bar{X}_1^*, \bar{X}_2^*, \dots, \bar{X}_{n_z}^*$. Pour chaque volume discret et chaque instant, \bar{X}_m^* indique le débit à soustraire du réservoir Nechako lorsque la variable hydrologique tombe dans la m^e classe. Encore une fois, pour un volume qui ne ferait pas partie des volumes discrets, une simple interpolation nous indiquerait la décision à prendre.

Notez que le cas $n_z = 1$ correspond à la version de l'algorithme décrite au chapitre 5. C'est pourquoi, dorénavant, nous traiterons du cas $n_z = 1$ plutôt que de *la version de l'algorithme décrite à la section 5*.

Les figures 11 , 12 et 13 contiennent des représentations graphiques des matrices \bar{X}_m^* lorsque nous divisons la variable hydrologique h_t en 1, 2 et 10 classes, soit pour $n_z = 1, 2$ et 10 respectivement. Dans le cas $n_z = 10$, seules \bar{X}_1^* et \bar{X}_{10}^* ont été tracées afin de ne pas alourdir la page.

À la figure 11, notez l'importante augmentation du débit à soustraire durant la période de crue (périodes 60 à 90 environ) lorsque le volume est élevé. L'augmentation du débit à soustraire durant les périodes 90 à 110 environ est expliqué par la contrainte écologique.

À la figure 12, le même phénomène peut être observé c'est-à-dire une augmentation du débit à déverser en période de crue et lorsque la contrainte

écologique le requiert. Notez toutefois que l'augmentation du débit à soustraire est plus marquée sur la surface du bas (qui correspond aux années *humides*, pour lesquelles la valeur de la variable hydrologique est élevée) que pour celle du haut (qui correspond aux années *sèches*).

La différence est encore plus marquée entre les deux surfaces représentées à la figure 13. Celles-ci représentent les matrices \bar{X}_1^* et \bar{X}_{10}^* obtenues lorsque la variable hydrologiques est séparée en 10 classes. Il est donc clair que les politiques optimales diffèrent grandement lorsque la décision dépend du niveau de la variable hydrologique.

Débit à soustraire en fonction du volume d'eau dans le Nechako et de la période

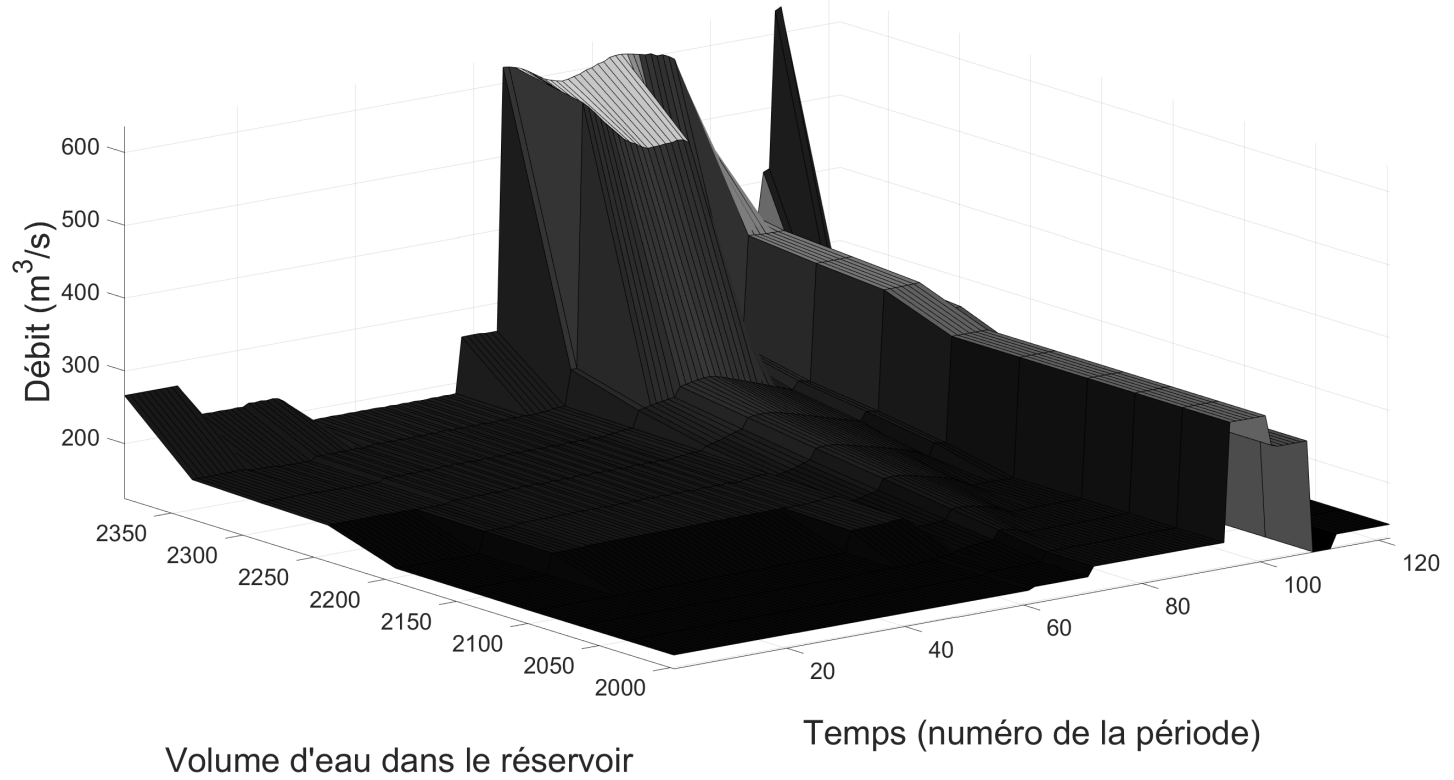


FIGURE 11 – Représentation graphique de la matrice \bar{X}^* pour le cas $n_z = 1$. Pour chaque volume et chaque instant de l'année, la surface indique le débit qu'il convient de soustraire du réservoir Nechako.

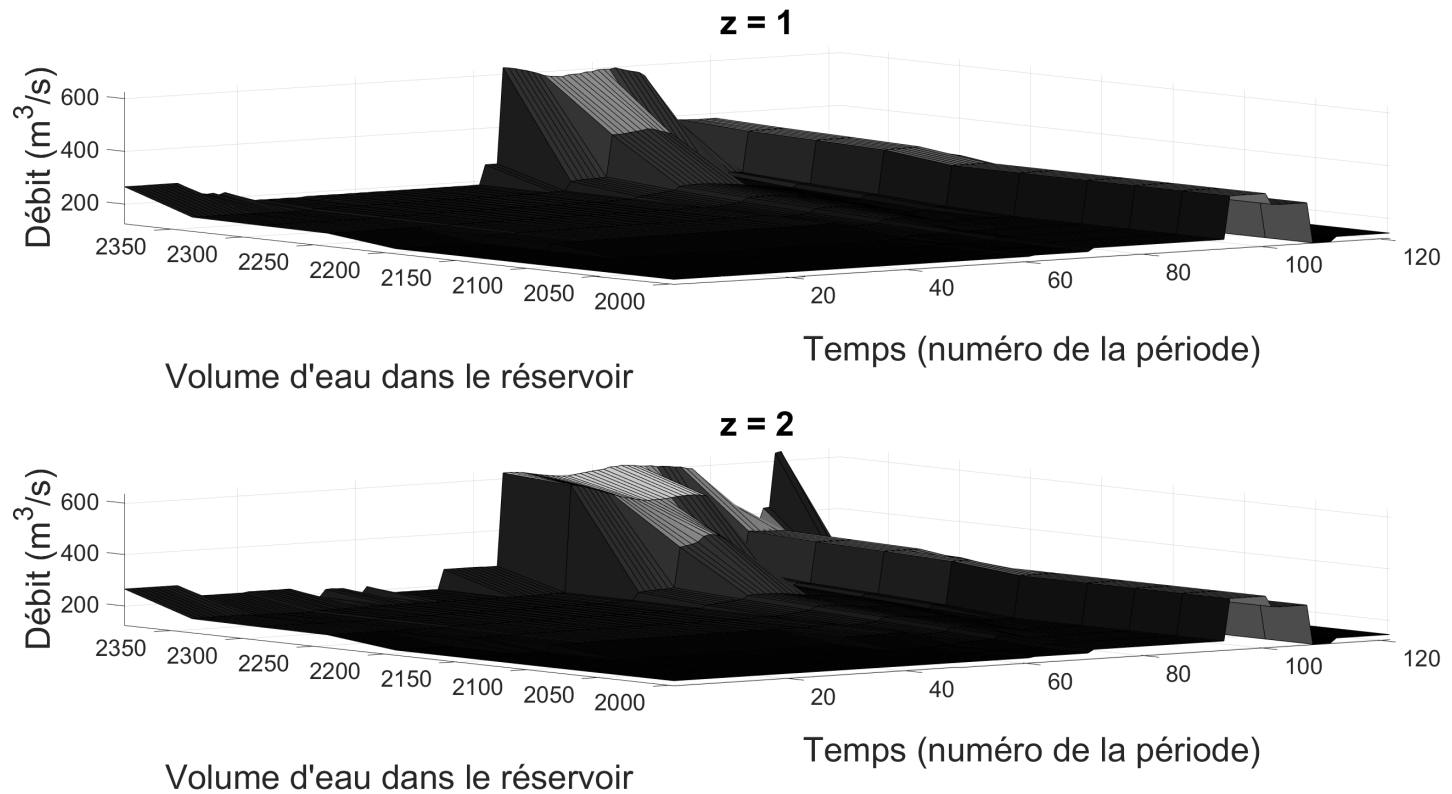


FIGURE 12 – Représentation graphique des matrices \bar{X}_1^* et \bar{X}_2^* pour le cas où $n_z = 2$. La surface du haut ($z = 1$) correspond aux années *sèches* et moins d'eau sera soustraite du réservoir durant la crue. La surface du bas correspond aux années *humides* ; plus d'eau sera soustraite durant la crue.

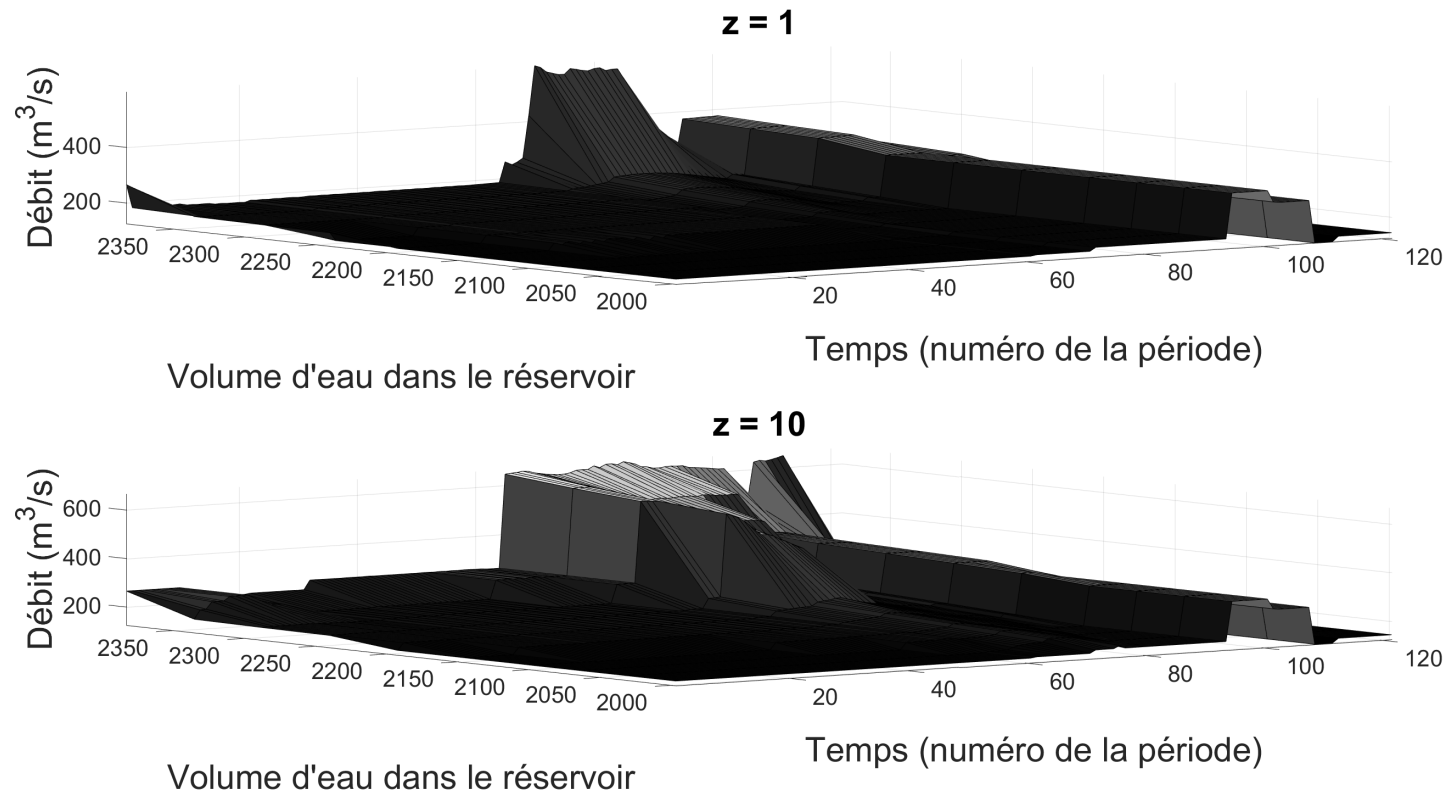


FIGURE 13 – Représentation graphique des matrices \bar{X}_1^* et \bar{X}_{10}^* pour le cas où $n_z = 10$. Les surfaces intermédiaires ont été omises pour alléger la page.

7.3.2 Variation du paramètre ϕ

Le paramètre ϕ nous permet de favoriser la production d'électricité dans l'immédiat au détriment de l'accumulation d'eau pour un usage futur. Puisque le réservoir Nechako a une capacité finie, accumuler à outrance peut nous obliger à déverser en pure perte dans le futur. De même, si la production d'électricité dans l'immédiat est trop favorisée, il peut arriver que nous vidions le réservoir et que nous ayons à interrompre la production. Il nous faut trouver le juste équilibre entre la production immédiate et l'accumulation d'une réserve d'eau en vue d'une production future.

Dans cette section, nous nous intéresserons à l'effet qu'a une variation de ϕ sur l'atteinte de nos objectifs et ce pour quelques valeurs de n_z . Notre but est de déterminer les tendances générales de l'évolution de l'atteinte de nos objectifs en fonction de ϕ . Nous chercherons à déterminer des valeurs de ϕ ayant un potentiel intéressant et qui pourront être réutilisées à la prochaine section lorsque nous ferons varier le nombre de classes n_z .

Les figures 14, 15 et 16 montrent l'effet qu'a la variation de ϕ sur l'atteinte de nos quatre objectifs pour $n_z = 1, 10$ et 20 respectivement.

Peu importe le nombre de classes choisi, le montant gagné grâce à la vente d'électricité croît en ϕ . C'est un résultat attendu car en favorisant la production dans l'immédiat, la quantité d'électricité générée augmente de même que les recettes issues de sa vente.

Les probabilité de fournir la *demande de l'aluminerie* (DA) et le *supplément*, quant à elles, décroissent en ϕ . C'est aussi un résultat attendu, car en produisant davantage dans l'immédiat, on consomme plus d'eau et on a donc plus de chances d'en manquer plus tard.

Notons que, peu importe la valeur de ϕ , nous sommes incapables d'obtenir exactement les mêmes valeurs que le partenaire. Nous pouvons toutefois choisir une valeur précise à atteindre pour un objectif donné afin de déterminer les valeurs auxquelles nous fixerons ϕ pour l'étude que nous ferons à la section 7.3.3. L'objectif dont nous fixerons la valeur est la probabilité de fournir la DA.

Nous chercherons ensuite une valeur de ϕ permettant de maximiser le revenu issu de la vente d'énergie.

Puisque le cas $n_z = 1$ offre de mauvais résultats, particulièrement en termes d'inondations, ce n'est pas sur lui que nous porterons notre attention. Les cas $n_z = 10$ et $n_z = 20$, par contre, présentent un potentiel intéressant.

Choisissons de maintenir la probabilité de fournir la DA au-dessus de 99,0% comme le partenaire le fait. Dans le cas $n_z = 10$, le choix de $\phi = 2,5$ nous permet de maintenir la probabilité de fournir la DA à 99,4%; celle de livrer le supplément à 91,9% (le partenaire fait 83,5%) et celle d'inonder la ville à 1,4% comme le partenaire. Toutefois, les revenus générés ne sont que de 59,4M\$ alors que le partenaire réussi à générer des recettes de 68,4M\$ par an.

Pour le cas $n_z = 20$, le choix de $\phi = 2,5$ nous permet d'obtenir une probabilité de fournir la DA de 99,4%; de livrer le supplément 92,4% du temps et de n'inonder la ville qu'avec une probabilité de 1,1%. Tout cela en générant un revenu annuel moyen de 58,8M\$.

Dans ces deux cas, le choix de $\phi = 2,5$ nous permet d'obtenir des résultats au moins aussi bons que ceux du partenaire, sauf en termes de revenus. Un coup d'œil aux figures 14, 15 et 16 nous convainc qu'une augmentation des

recettes issues de la vente d'électricité ne pourra se faire qu'au détriment de la probabilité de livrer la DA.

Voyons ce que nous pouvons obtenir en abaissant nos exigences en matière de livraison de la DA. Choisissons de maintenir cette probabilité au-dessus de 98,0%. Dans ce cas, pour $n_z = 10$, le choix de $\phi = 3,0$ nous permettra de fournir la DA 98,1% du temps et le supplément avec une probabilité de 86,2%. La probabilité d'inonder Vanderhoof sera toutefois de 2,0%, soit six années d'inondation de plus que le partenaire sur un millénaire. Les revenus générés seront de 67,6M\$, soit seulement 1,8M\$ de moins que le partenaire.

Pour $n_z = 20$, $\phi = 3$ nous permettra de satisfaire la demande de l'aluminerie 98,1% du temps et de livrer le *supplément* avec une probabilité de 87,1%. La probabilité d'inondation sera la même que pour le partenaire à 1,4%. Les revenus s'élèveront, quant à eux, à 67,1M\$.

À la section suivante, nous étudierons plus en profondeur l'effet d'une variation du nombre de classes n_z lorsque ϕ est fixé soit à 2,5, soit à 3,0.

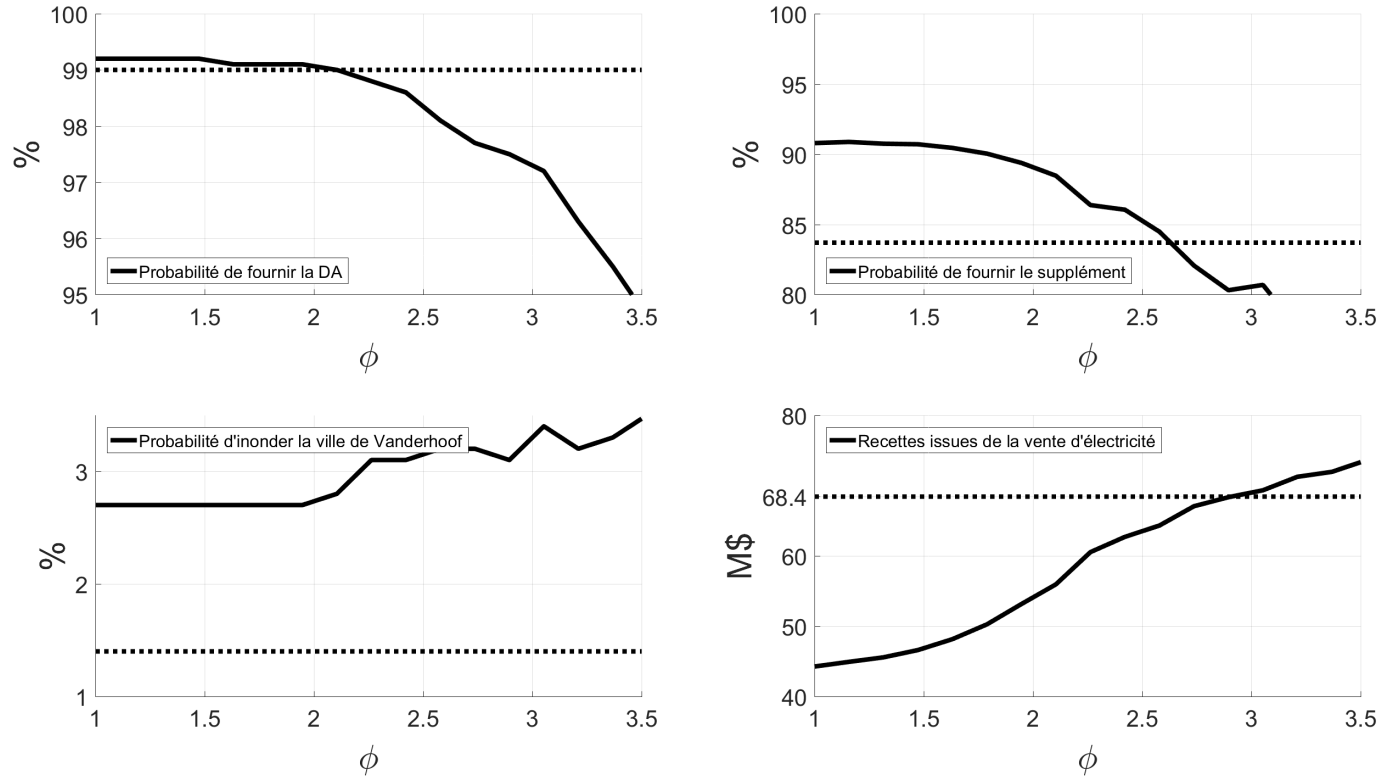


FIGURE 14 – Atteinte de quatre objectifs pour diverses valeurs de ϕ et pour $n_z = 1$. En-haut à gauche, se trouve un graphique de la probabilité de fournir la DA. En-haut à droite, se trouve un graphique de la probabilité de fournir le supplément. En-bas à gauche, se trouve un graphique de la probabilité d'inonder la ville de Vanderhoof. En-bas à droite, se trouve un graphique du revenu annuel moyen issu de la vente d'électricité. Les lignes pointillées indiquent les valeurs obtenues par le partenaire.

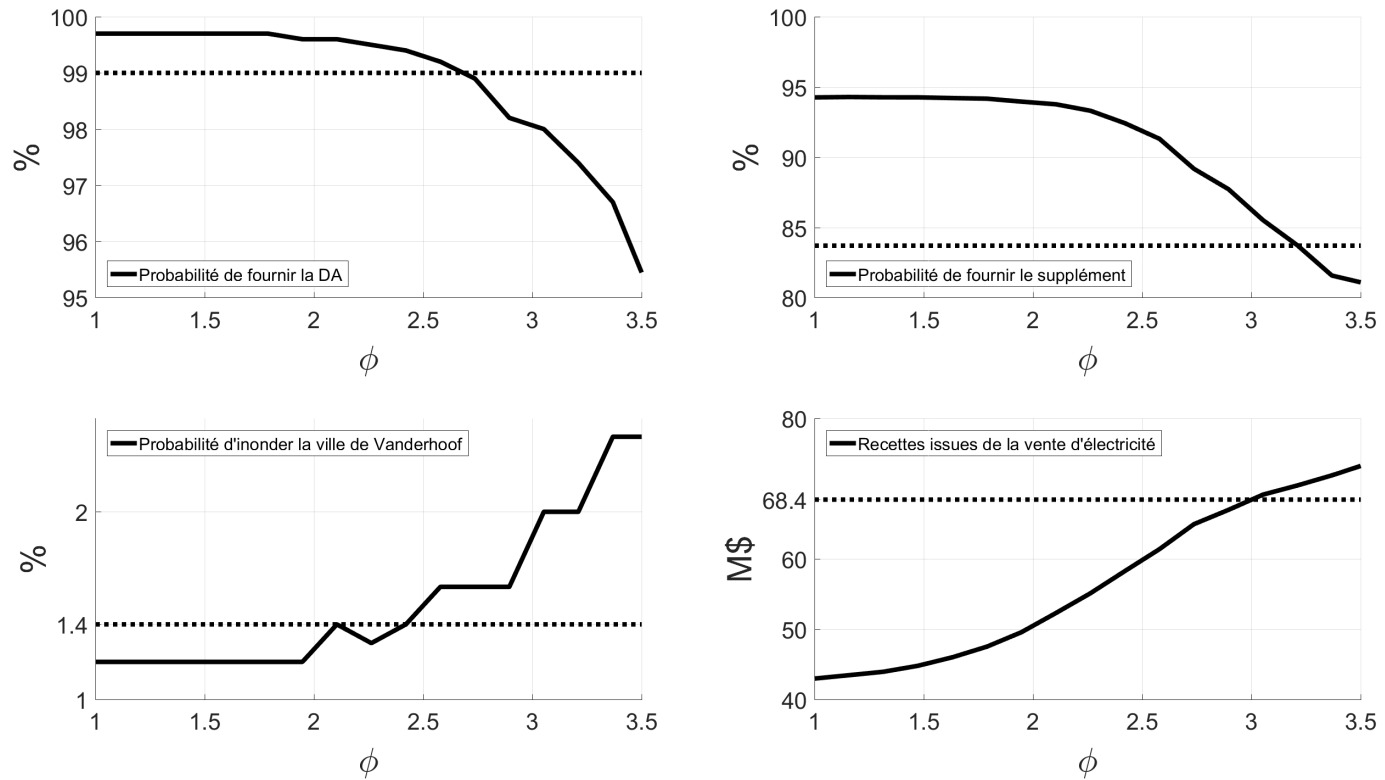


FIGURE 15 – Atteinte de quatre objectifs pour diverses valeurs de ϕ et pour $n_z = 10$. Les graphiques sont ordonnés de la même manière qu'à la figure 14

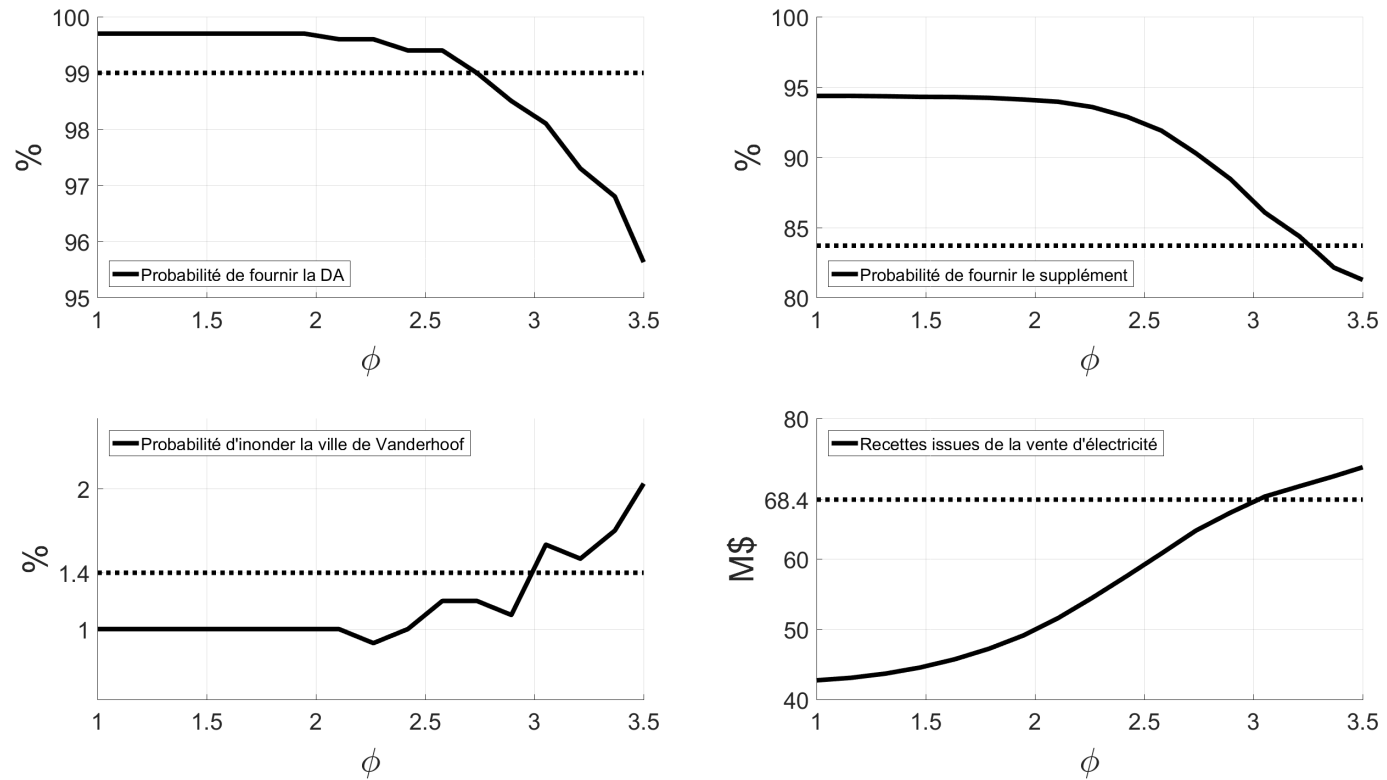


FIGURE 16 – Atteinte de quatre objectifs pour diverses valeurs de ϕ et pour $n_z = 20$. Les graphiques sont ordonnés de la même manière qu'à la figure 14

7.3.3 Variation du nombre de classes

À la section précédente, nous avons constaté que deux valeurs de ϕ offraient une perspective intéressante, soit 2,5 et 3,0. Ici, nous étudierons la manière dont évolue l'atteinte de nos objectifs lorsque nous fixons ϕ à ces valeurs et faisons varier n_z , le nombre de classes de la variable hydrologique.

Les tableaux 7.3.3 et 7.3.3 donnent les résultats exacts obtenus pour diverses valeurs de n_z et $\phi = 2,5$ et $3,0$ respectivement, tandis que les figures 17 et 18 donnent les graphiques associés à ces mêmes résultats.

Le choix du paramètre ϕ n'ayant aucun effet notable sur le temps de calcul, nous n'en avons pas parlé à la section précédente. Le nombre de classes, quant à lui, a un effet marqué sur le temps de calcul. Celui-ci, croissant de manière à peu près linéaire en n_z . Le tableau 7.3.3 donne les temps de calcul obtenus. Puisque le partenaire emploie un ordinateur différent du nôtre, nous n'incluons pas les temps de calculs qu'il obtient.

	SDP	Simulation et régression				
		$n_z = 1$	$n_z = 5$	$n_z = 10$	$n_z = 15$	$n_z = 20$
Export (M\$)	68,4 (29,6)	62,8 (27,3)	60,2 (26,3)	59,4 (26,3)	59,0 (26,2)	58,8 (26,2)
$\mathbb{P}(\text{inondation})$	1,4 %	3,2 %	2,1 %	1,4 %	1,1 %	1,1 %
$\mathbb{P}(\text{supplément})$	83,7 %	84,7 %	90,7 %	91,9 %	92,2 %	92,4 %
$\mathbb{P}(\text{DA})$	99,0 %	98,4 %	99,1 %	99,4 %	99,4 %	99,4 %

TABLE 1 – Ce tableau indique les résultats exacts pour $\phi = 2,5$. À la première ligne, les nombres entre parenthèses sont des écarts-types.

On observe deux tendances nous amenant à croire que l'inclusion de l'information véhiculée par le variable hydrologique de la manière que nous avons employée nous permet de mieux anticiper la crue.

	SDP	Simulation et régression				
		$n_z = 1$	$n_z = 5$	$n_z = 10$	$n_z = 15$	$n_z = 20$
Export (M\$)	68,4 (29,6)	68,9 (27,8)	68,9 (27,2)	68,5 (26,9)	68,2 (26,8)	68,0 (26,7)
$\mathbb{P}(\text{inondation})$	1,4 %	3,4 %	2,3 %	2,0 %	1,5 %	1,4 %
$\mathbb{P}(\text{supplément})$	83,7 %	81,1 %	85,1 %	86,2 %	86,8 %	87,1 %
$\mathbb{P}(\text{DA})$	99,0 %	97,2 %	97,9 %	98,1 %	98,1 %	98,1 %

TABLE 2 – Ce tableau indique les résultats exacts pour $\phi = 3,0$. Ici, $n_z = 20$ offre les meilleurs résultats. À la première ligne, les nombres entre parenthèses sont des écarts-types.

	$n_z = 1$	$n_z = 5$	$n_z = 10$	$n_z = 15$	$n_z = 20$
$\phi = 2,5$	4m28s	5m13s	7m 11s	8m 51s	10m 26s
$\phi = 3,0$	4m 25s	5m 16s	7m 12s	8m 49s	10m 20s

TABLE 3 – Temps de calcul pour deux valeurs de ϕ et cinq valeurs de n_z .

En premier lieu, la décroissance de la probabilité d'inondation entre $n_z = 1$ et $n_z = 20$ nous indique qu'un espace suffisant pour accueillir le volume d'eau reçu durant la crue est ménagé de manière de plus en plus fréquente lorsque n_z croît. En effet, pour le cas $\phi = 2,5$, cette probabilité chute de 3,2% à 1,1%, soit 21 années d'inondation de moins sur mille ans. Dans le cas $\phi = 3,0$, la probabilité passe de 3,4% à 1,4%, soit 20 ans de moins sur mille ans.

Ensuite, la hausse de la probabilité de livrer le *supplément* est due à une meilleure anticipation de la crue. En effet, en ménageant un espace optimal (ni trop grand, ni trop petit) dans le réservoir durant l'hiver pour accueillir la crue printanière, il est possible de s'assurer d'avoir une réserve d'eau suffisante pour subvenir non seulement au besoin de l'aluminerie, mais aussi aux exigences de BC Hydro durant l'année suivante. C'est pourquoi on observe

une hausse de la probabilité de livrer le *supplément* de 84,7% lorsque $n_z = 1$ à 92,4% lorsque $n_z = 20$ pour $\phi = 2,5$. Dans le cas où $\phi = 3,0$, cette hausse est de 81,1% à 87,1%.

Ainsi, nous voyons que notre méthode nous permet d'obtenir des résultats similaires à ceux du partenaire, sans toutefois arriver à les répliquer. La flexibilité de notre méthode nous permet par contre de favoriser certains objectifs au détriment d'autres. Par exemple, accroître les recettes issues de la vente d'électricité en diminuant la probabilité de fournir la DA.

Notons aussi que pour les deux valeurs de ϕ étudiées dans cette section, les recettes que nous générons ont un écart-type légèrement inférieur à ce lui du partenaire.

Enfin, à la vue des résultats présentés ici, il est clair que l'augmentation du nombre de classes de la variable hydrologique a un effet positif sur les probabilités de fournir la DA, de fournir le supplément et d'inonder la ville de Vanderhoof. Elle a toutefois un effet négatif sur les recettes issues de la vente d'électricité. Cet effet est toutefois faible pour $\phi = 3$.

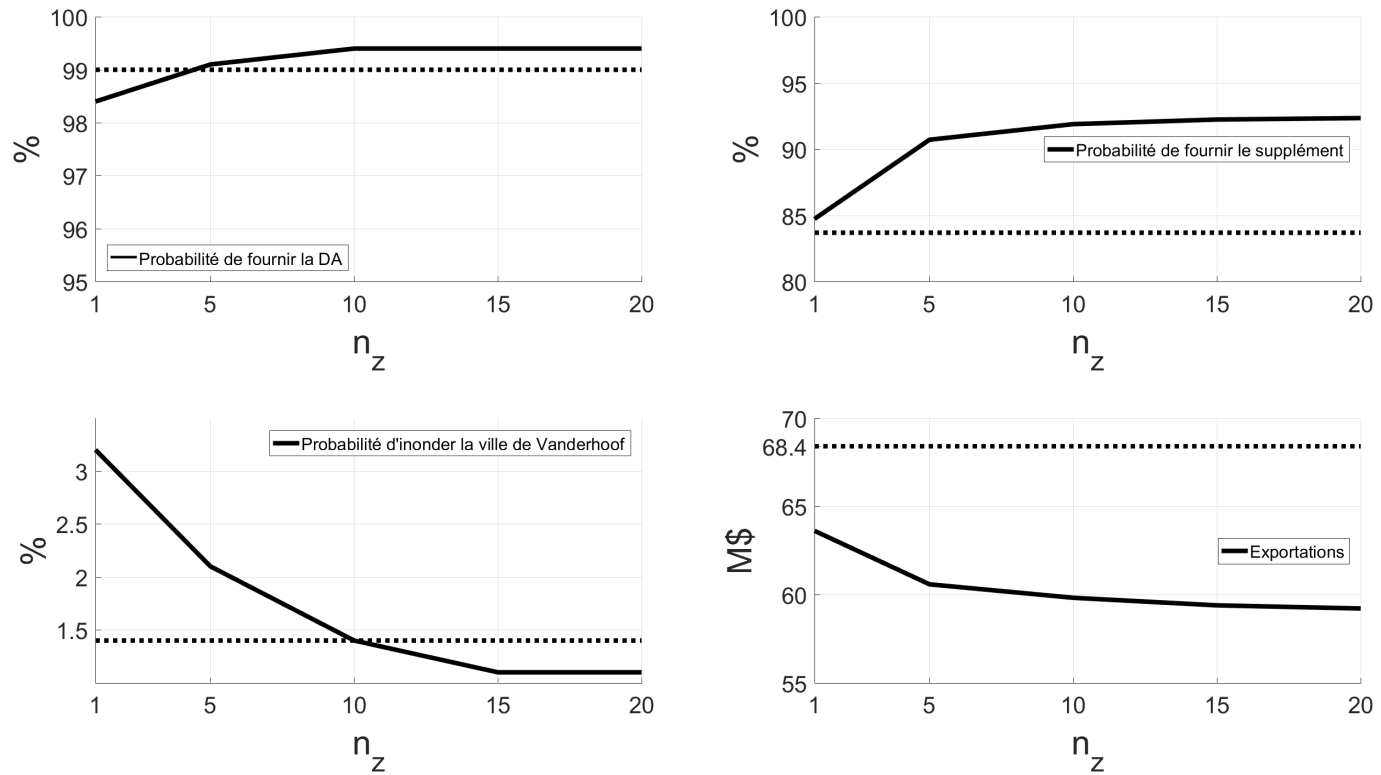


FIGURE 17 – Bien que la probabilité de livrer le *supplément* et les recettes subissent respectivement une hausse et une chute marquées entre $n_z = 1$ et $n_z = 5$, ces deux indicateurs se stabilisent par la suite. C'est la chute de la probabilité d'inonder qui est la plus remarquable, passant de 3,2% à 1,1% entre $n_z = 1$ et $n_z = 20$.

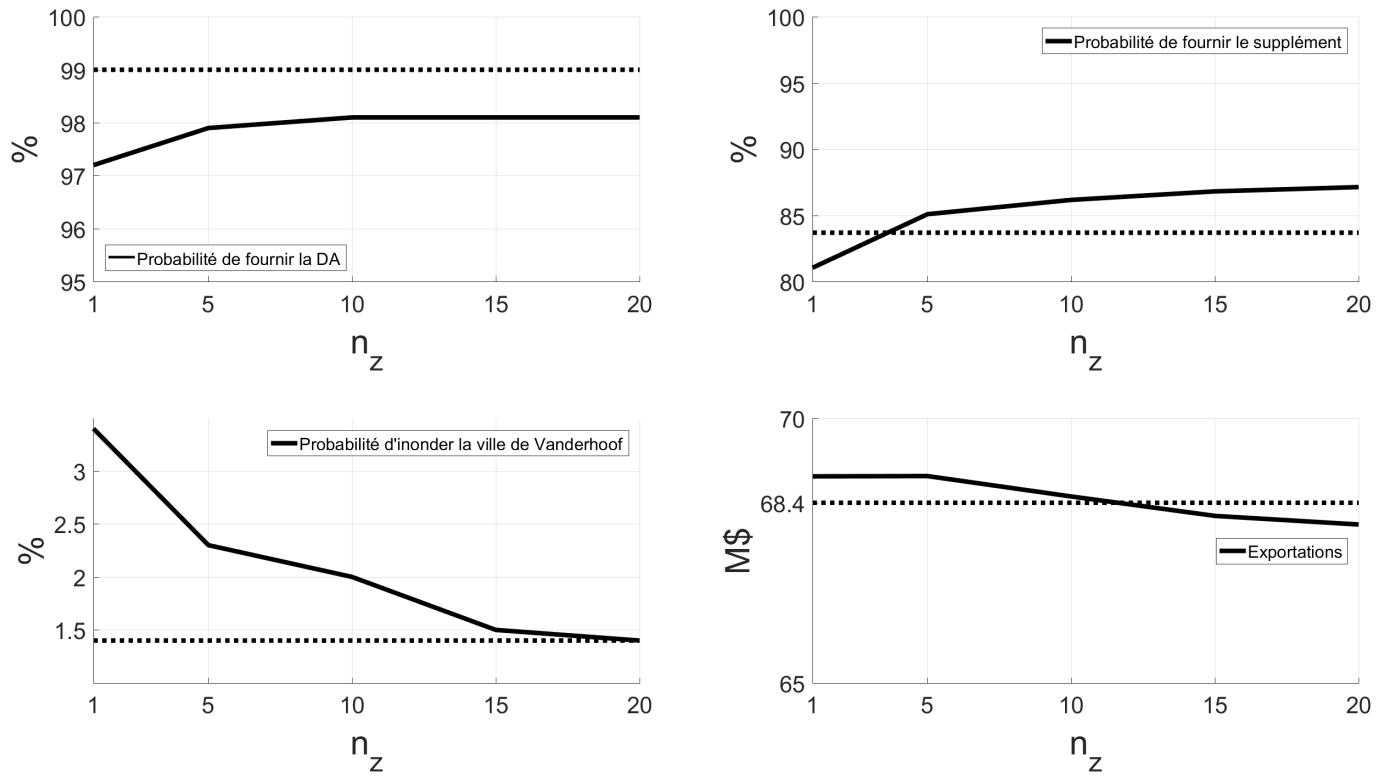


FIGURE 18 – Les indicateurs suivent ici la même dynamique qu’à la figure 18. Encore une fois c’est la chute, cette fois-ci de 2 points de pourcentage, de la probabilité d’inonder qui frappe.

8 Conclusion

Nous avons employé un algorithme de programmation dynamique pour obtenir une politique de gestion optimale des installations hydroélectriques de Kemano en Colombie-Britannique. Cet algorithme a été développé par Denault, Delage et Simonato pour résoudre des problèmes d'optimisation de portefeuilles d'actifs financiers. Cette méthode a pour spécificité d'utiliser la décision comme régresseur.

Un des grands défis offerts par le système Kemano est la gestion de la crue printanière. Nous soupçonnions que l'usage d'une variables hydrologique issue de la combinaison du couvert nival et de l'humidité du sol permettrait d'améliorer la gestion du système. L'inclusion adéquate de l'information véhiculée par cette variable dans le processus de prise de décision a été l'objet premier de notre attention.

Dans cet ouvrage, nous avons toutefois choisi de présenter d'abord une version épurée de cet algorithme, où la variable hydrologique ne joue aucun rôle. Nous avons ensuite inclus l'information véhiculée par une variable hydrologique en classifiant les trajectoires en n_z classes en fonction de l'intensité de ladite variable hydrologique.

Cette méthode nous a permis d'améliorer sur plusieurs fronts l'efficacité des politiques obtenues. L'augmentation du nombre de classes s'est traduite par une augmentation des probabilités de satisfaire à la demande de l'aluminerie et de fournir le supplément demandé par BC Hydro. Elle a aussi entraîné une chute marquée de la probabilité d'inonder la ville de Vanderhoof. Malheureusement, elle cause aussi une chute non négligeable des recettes engrangées grâce à la vente d'électricité.

Cette méthode offre toutefois une bonne flexibilité, permettant aux gestionnaires du système de déterminer quel objectif doit être satisfait en priorité.

A Répartition des débits

Lorsqu'à la section 3.3 nous avons introduit la notation employée pour modéliser le système, nous avons affirmé qu'il était possible d'agréger les deux contrôles effectivement exercés par l'Administrateur en un seul. Ici, nous expliquerons comment ces deux contrôles sont agrégés et comment il est possible d'obtenir leur valeur à partir du débit soustrait du réservoir.

Le débit soustrait du réservoir Nechako est simplement la somme du débit évacué par le déversoir de Skins Lake et du débit turbiné à la centrale hydro-électrique de Kemano. En choisissant de satisfaire en priorité la contrainte écologique, il est possible de déduire et le débit déversé et le débit turbiné à partir du débit soustrait du réservoir. D'abord, le débit minimal requis pour le maintien de l'écosystème de la rivière Nechako sera déversé à Skins Lake. Le reste sera envoyé à la centrale jusqu'à concurrence de sa capacité. S'il reste encore de l'eau, elle sera déversée à Skins Lake.

Rappelons que nous notons x_t le débit soustrait du réservoir Nechako, d_t le débit évacué par le déversoir de Skins Lake et c_t le débit turbiné à la centrale, de sorte que $x_t = c_t + d_t$.

Aussi, afin de préserver l'écosystème de la rivière Nechako, le débit évacué par le déversoir de Skins Lake doit respecter

$$d_t^{(min)} \leq d_t \leq d_t^{(max)}(l_t) \text{ pour } t = 0, 1, \dots, T - 1 \quad (13)$$

où $d_t^{(min)}$ est le débit minimal à déverser durant la période t afin de préserver l'écosystème de la rivière Nechako et $d_t^{(max)}(l_t)$ est le débit maximal pouvant être évacué. Celui-ci dépend du volume d'eau contenu dans le réservoir à

l'instant t car le déversoir a une capacité finie qui dépend de l_t .

À la puissance minimale devant être fournie durant la période $t + 1$ est associé un débit $c_t^{(min)}(l_t)$. Ce débit minimal dépend de l_t , volume d'eau contenu dans le réservoir à l'instant t , car la productivité de la centrale varie en fonction de la pression exercée par l'eau contenue dans le réservoir. Tout comme le déversoir de Skins Lake, le tunnel reliant le réservoir Nechako à la centrale Kemano a une capacité finie que nous noterons $c^{(max)}(l_t)$. Le débit turbiné devra ainsi respecter

$$c_t^{(min)}(l_t) \leq c_t \leq c^{(max)}(l_t) \text{ pour } t = 0, 1, \dots, T - 1 \quad (14)$$

Le débit soustrait du réservoir n'étant rien de plus que la somme des débits turbiné et déversé, soit $x_t = c_t + d_t$, il doit respecter la contrainte

$$x_t^{(min)}(l_t) \leq x_t \leq x_t^{(max)}(l_t)$$

où

$$x_t^{(min)}(l_t) = c_t^{(min)}(l_t) + d_t^{(min)} \quad (15)$$

$$x_t^{(max)}(l_t) = c^{(max)}(l_t) + d_t^{(max)}(l_t) \quad (16)$$

Afin de déterminer le bénéfice en fonction de x_t , il nous faut être capable d'obtenir les débits turbiné et déversé en fonction du débit soustrait. Nous les noterons respectivement $c_t(x_t, l_t)$ et $d_t(x_t, l_t)$. En décidant de satisfaire en

priorité la contrainte écologique, nous aurons que

$$c_t(x_t, l_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_t \leq d_t^{(min)} \\ x_t - d_t^{(min)} & \text{si } d_t^{(min)} < x_t \leq d_t^{(min)} + c_t^{(max)}(l_t) \\ c_t^{(max)}(l_t) & \text{si } x_t > d_t^{(min)} + c_t^{(max)}(l_t) \end{cases} \quad (17)$$

$$d_t(x_t, l_t) = \begin{cases} x_t & \text{si } x_t \leq d_t^{(min)} \\ d_t^{(min)} & \text{si } d_t^{(min)} < x_t \leq d_t^{(min)} + c_t^{(max)}(l_t) \\ x_t - c_t^{(max)}(l_t) & \text{si } x_t > d_t^{(min)} + c_t^{(max)}(l_t) \end{cases} \quad (18)$$

B Fonction bénéfice

À la section 4.1, lorsque nous avons formellement introduit le problème de l'administrateur, nous avons évoqué un certain bénéfice. Dans cette section, nous définirons ce bénéfice, qui est une adaptation de celui employé par le partenaire Rio Tinto.

Rappelons que nous cherchons une politique admissible r permettant de maximiser l'espérance de la somme des bénéfices engrangés au cours de T périodes plus la valeur associée à l'état dans lequel le système sera à l'instant T . Formellement, nous voulons résoudre

$$\max_{r \in \mathcal{R}} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} B_{t+1}(\rho_t(l_t, \theta_t), l_t, a_{t+1}^{(V)}) + v_T(l_T) \right] \right\}$$

où $B_{t+1}(\rho_t(l_t, \theta_t), s_t, \theta_{t+1})$ est le bénéfice engrangé durant la période $t + 1$. Pour abrégier, nous noterons $\rho_t(l_t, \theta_t) = x_t$. Nous noterons donc le bénéfice $B_{t+1}(x_t, l_t, a_{t+1}^{(V)})$.

La production, $p_{t+1}(x_t, l_t)$, est le choix le plus simple et le plus évident de bénéfice. Toutefois, une transformation de la production nous offrira une plus grande marge de manœuvre et nous permettra de contourner certaines difficultés. C'est pourquoi, nous avons choisi d'employer comme bénéfice une transformation de la quantité d'énergie vendue à BC Hydro additionnée de pénalités.

L'énergie vendue à BC Hydro correspond à toute l'énergie produite au-delà du minimum requis pour le fonctionnement de l'aluminerie de Kitimat. Nous noterons cette production minimale $p^{(min)}$ et l'énergie vendue durant la période $t + 1$ sera notée $p_{t+1}(x_t, l_t) - p^{(min)}$.

Notez que la production minimale n'est pas indicée en t car elle est invariable. Aussi, nous n'incluons pas le *supplément* dans la production minimale $p^{(min)}$. En effet, le *supplément* n'est rien d'autre qu'une portion de l'énergie vendue que nous avons l'*obligation* de fournir.

L'inclusion de paramètres supplémentaires nous permettra de pénaliser davantage les décisions menant à un export négatif – soit une production électrique insuffisante pour soutenir l'aluminerie de Kitimat – et de favoriser les décisions menant à un export élevé. Notons ces paramètres a, b, c et ϕ . Cet *export transformé* sera alors

$$P_{t+1}(x_t, l_t) = \begin{cases} a|p_{t+1}(x_t, l_t) - p^{(min)}|^b & \text{si } x_t \leq x^{(A)}(l_t) \\ c|p_{t+1}(x_t, l_t) - p^{(min)}|^\phi & \text{sinon} \end{cases} \quad (19)$$

où $x^{(A)}(l_t)$ est la décision (en m^3/s) permettant de satisfaire uniquement la demande de l'aluminerie $p^{(min)}$ (en MW) lorsque le volume d'eau dans le réservoir Nechako est l_t .

En ajoutant une pénalité dépendant du débit déversé à Skins Lake à cette transformation de l'énergie vendue, nous aurons la possibilité de contourner une difficulté. En effet, l'un de nos buts est de prévenir les inondations à Vanderhoof. Comme nous le disions à la section 3.4, la ville de Vanderhoof sera considérée comme inondée dès que le débit qui y est observé dépasse un seuil donné, soit lorsque $q_{t+1} > q^{(max)}$ où $q^{(max)}$ est le débit maximal toléré à Vanderhoof.

Notons que q_{t+1} est la somme de l'apport sur Vanderhoof durant la période $t+1$ $a_{t+1}^{(V)}$ (une variable d'état exogène) et du débit déversé à Skins Lake $d_t(x_t, l_t)$ (qui dépend de notre décision), ce qui en fait techniquement une va-

riable d'état endogène. Naturellement, nous aurions tendance à la traiter par discrétisation. Toutefois, nous prêterions alors flanc à l'une des malédictions des dimensions. L'inclusion d'une pénalité dépendant de q_{t+1} nous permet d'éviter cet écueil. Cette pénalité sera nulle tant que la ville ne sera pas inondée, puis croîtra à mesure que le débit observé à Vanderhoof dépassera le débit maximal toléré. Afin de moduler l'amplitude de la pénalité, nous emploierons deux paramètres notés e et f . Nous noterons la pénalité

$$\Pi_{t+1}(x_t, a_{t+1}^{(V)}) = e \max \{q_{t+1} - q^{(max)}, 0\}^f \quad (20)$$

Nous avons ainsi que le bénéfice est

$$B_{t+1}(x_t, l_t, a_{t+1}^{(V)}) = P_{t+1}(x_t, l_t) + \Pi_{t+1}(x_t, a_{t+1}^{(V)}) \quad (21)$$

où

$$P_{t+1}(x_t, l_t) = \begin{cases} a|p_{t+1}(x_t, l_t) - p^{(min)}|^b & \text{si } x_t \leq x^{(A)}(l_t) \\ c|p_{t+1}(x_t, l_t) - p^{(min)}|^\phi & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\Pi_{t+1}(x_t, a_{t+1}^{(V)}) = e \max \{q_{t+1} - q^{(max)}, 0\}^f$$

En modifiant les paramètres a, b, c, ϕ, e et f , nous pouvons modifier la politique obtenue, pénalisant davantage les arrêts de production, favorisant l'export ou réduisant la probabilité d'inonder Vanderhoof. Nous obtenons ainsi une marge de manœuvre que la production brute ne nous offre pas.

Afin de réduire l'éventail de paramétrages possibles et de comparer nos résultats à ceux du partenaire aussi bien que possible, nous avons employé les mêmes valeurs que le partenaire pour a, b, c, e et f et n'avons fait varier

que ϕ . La section 7.3.2 est consacrée à l'étude de l'effet qu'une variation de ce paramètre a sur les résultats.

C Obtention de la condition terminale

Lorsque nous avons présenté l'algorithme aux chapitres 5 et 6, nous avons supposé que nous disposions d'une condition terminale $v_T(l_T)$ nous donnant la valeur associée au fait de disposer d'un volume d'eau l_T dans le réservoir Nechako en fin d'année. Cette valeur est issue de l'électricité qui pourra être produite avec cette eau durant les années à venir. Nous présenterons ici la manière dont la condition terminale v_T est obtenue pour la version de l'algorithme présentée au chapitre 5.

Rappelons que $v_T(l_T)$ apparaît dans l'équation

$$\max_{r \in \mathcal{R}} \left\{ E \left[\sum_{t=0}^{T-1} B_t(\rho_t(l_t, \theta_t), l_t, a_{t+1}^{(V)}) + v_T(l_T) \right] \right\} \quad (22)$$

Grâce au théorème fondamental de la programmation dynamique et en discrétisant le volume d'eau dans le réservoir, nous avons pu réécrire le problème (22) sous cette forme

$$\begin{aligned} \bar{v}_t(\cdot, k) = \max_{x_t \in \mathcal{X}_t} \left\{ \mathbb{E} \left[B_t(x_t, l_t, \theta_{t+1}) + v_{t+1}(l_{t+1}) \middle| l_t = \bar{l}^{(k)} \right] \right\} \\ \text{s.c. } l_{t+1} = l_t + \kappa(a_{t+1}^{(N)} - x_t) \end{aligned} \quad (23)$$

Nous obtenons la condition terminale v_T par la même méthode que le partenaire Rio Tinto. Celle-ci est décrite par Keckler et Larson [8]. Nous résolvons une première fois la récursion 23 en posant $v_T = 0_{n_a \times n_l}$ c'est-à-dire en attribuant une valeur nulle à tous les volumes et pour toutes les trajectoires.

Nous obtenons ainsi $n_a \times n_l$ points de la fonction valeur à l'instant $t = 0$, que nous noterons cette fois-ci $\bar{v}_0^{(1)}$, avec un 1 surscrit pour bien indiquer

que ces points sont issus d'une *première* résolution de la récursion (23). Au passage, nous aurons obtenus une matrice de décisions optimales

$$X^{*(1)} = \left[x_0^{*(1)} \quad x_1^{*(1)} \cdots x_{T-1}^{*(1)} \right]$$

où les $x_t^{*(1)}$ contiennent chacun n_t points de la règle de décision $\rho_t^{(1)}(l_t)$.

La récursion 23 sera ensuite résolue une fois de plus, mais cette fois-ci en posant $v_T = v_0^{(1)}$. Nous obtiendrons alors $v_0^{(2)}$ et $X^{*(2)}$.

Ces opérations seront répétées jusqu'à ce que $\|X^{*(\iota)} - X^{*(\iota-1)}\| < \epsilon$, pour un ϵ de notre choix. La politique $X^{*(\iota)}$ sera ensuite utilisée pour mener des tests hors-échantillon.

Pour $\epsilon = 0,5$, le nombre requis d'itérations variait entre 9 et 11.

D Interpolation de la valeur

Aux chapitres 5 et 6, nous avons indiqué que la valeur associée à un volume tombant entre deux volumes discrets est interpolée tandis que celle associée à un volume inférieur au volume minimal ou supérieur au volume maximal est extrapolée. Nous présenterons ici comment ces valeurs sont interpolées ou extrapolées.

Rappelons d'abord que notre algorithme requiert que nous générions des échantillons de volumes résultant des couples de décisions et d'apports grâce à l'équation (11). Une valeur est associée à chacun de ces volumes ; elle est calculée grâce à une matrice \bar{v}_{t+1} . Sur sa j^e ligne, celle-ci contient les points de la fonction valeur associés aux n_l volumes discrets $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_{n_l}$ pour la j^e trajectoire.

Lorsqu'un des volumes générés tombe entre deux volumes discrets, la valeur qui lui est associée est interpolée. Diverses méthodes d'interpolations s'offrent à nous. Nous avons choisi l'interpolation linéaire car elle est la plus économique numériquement.

Supposons que, pour une trajectoire j quelconque, nous voulons calculer la valeur associée à un volume l_{t+1} tel que $\bar{l}_k < l_{t+1} < \bar{l}_{k+1}$ pour un $k \in \{1, \dots, n_l - 1\}$. Supposons de plus que nous disposons de la valeur associée à chacun de ces volumes discrets : $\bar{v}_{t+1}(k, j)$ et $\bar{v}_{t+1}(k+1, j)$. La valeur de l_{t+1} nous est donnée par la droite reliant les points $(\bar{l}_k, \bar{v}_{t+1}(k, j))$ et $(\bar{l}_{k+1}, \bar{v}_{t+1}(k+1, j))$, dont l'équation est

$$\tilde{v}_{t+1;k;j}(l_{t+1}) = \Delta_{t+1;k;j}l_{t+1} + \Gamma_{t+1;k;j} \quad (24)$$

où $\Delta_{t+1;k;j}$ est la pente de la droite et nous est donnée par

$$\Delta_{t+1;k;j} = \frac{\bar{v}_{t+1}(k+1, j) - \bar{v}_{t+1}(k, j)}{\bar{l}_{k+1} - \bar{l}_k}$$

et $\Gamma_{t+1}^{(k)}$ est donnée par

$$\Gamma_{t+1;k;j} = \frac{\bar{l}_{k+1}\bar{v}_{t+1}(k, j) - \bar{l}_k\bar{v}_{t+1}(k+1, j)}{\bar{l}^{(k+1)} - \bar{l}^{(k)}}$$

Il arrive aussi que certains des volumes générés soient supérieurs au volume maximal pouvant être contenu dans le réservoir ($l^{(max)}$) ou bien inférieurs au volume minimal ($l^{(min)}$). Une telle situation ne pourrait se produire dans la réalité. En effet, si le volume maximal était dépassé, le réservoir déborderait, ce qui ramènerait le volume d'eau qui y est contenu au volume maximal. Il est ainsi impossible de dépasser le volume maximal. De même, il est impossible d'avoir, dans le réservoir, un volume d'eau inférieur au volume minimal.

Il serait tentant de remédier à la situation en corrigeant simplement ces volumes en les remplaçant par $l^{(min)}$ ou $l^{(max)}$ selon le cas. Toutefois, cette approche rend l'algorithme instable. C'est pourquoi nous avons décidé de garder ces volumes tels quels et d'en extrapoler la valeur.

Pour un volume $l_t > \bar{l}^{(max)}$, il serait possible de calculer la valeur par extrapolation en employant l'équation (24) avec $k = n_l$. Toutefois, la valeur étant généralement croissante en l_t , une telle pratique nous donnerait des politiques favorisant l'accumulation abusive d'eau et nous amènerait à fréquemment déverser en pure perte.

Nous avons préféré employer une pente arbitraire $\Delta^{(max)}$ pour extrapoler

la valeur. Ainsi, la valeur associée à un volume $l_t > \bar{l}^{(max)} = \bar{l}_{n_i}$ nous sera donnée par

$$\tilde{v}_t^{(max)}(l_t) = \Delta^{(max)}l_t + \Gamma_t^{(max)} \quad (25)$$

où

$$\Gamma_t^{(n_i)} = \bar{v}_t^{(n_i)} - \Delta^{(max)}\bar{l}^{(max)}$$

Nous pouvons employer le même artifice pour extrapoler la valeur associée à un volume $l_t < \bar{l}^{(min)} = \bar{l}^{(1)}$ en recourant à une pente arbitraire $\Delta^{(min)}$. La valeur associée à ce volume nous sera alors donnée par

$$\tilde{v}_t^{(min)}(l_t) = \Delta^{(min)}l_t + \Gamma_t^{(min)} \quad (26)$$

où

$$\Gamma_t^{(min)} = \bar{v}_t^{(1)} - \Delta^{(min)}\bar{l}^{(min)}$$

L'usage de cette méthode d'extrapolation s'est révélée utile, nous permettant de contenir le volume entre $\bar{l}^{(min)}$ et $\bar{l}^{(max)}$ lors des tests menés hors-échantillon. Nous avons ainsi pu bénéficier d'une marge de manœuvre supplémentaire lors des tests préliminaire. Les pentes $\Delta^{(min)}$ et $\Delta^{(max)}$ ont par la suite été fixées à 1000 et -500 . Ce sont ces valeurs qui ont été employées pour obtenir les résultats présentés au chapitre 7.

Références

- [1] BERTSEKAS, D. P. *Dynamic Programming and Optimal Control*, seconde éd. 2000.
- [2] CARRIÈRE, J. F. Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression. *Insurance : Mathematics and Economics* 19, 19–30.
- [3] CÔTÉ, P., HAGUMA, D., LECONTE, R. ET KRAU, S. Stochastic optimisation of Hydro-Québec hydropower installations : a statistical comparison between SDP and SSDP methods. *Canadian Journal of Civil Engineering* 38 (2011), 1427–1434.
- [4] DENAULT, M., DELAGE, E. ET SIMONATO, J.-G. Dynamic portfolio choice : a simulation-and-regression approach. *Optimization and Engineering* 18, 2 (2017), 369–406.
- [5] DENAULT, M., SIMONATO, J.-G. ET STENTOFT, L. A simulation-and-regression approach for stochastic dynamic programs with endogenous state variables. *Computers and Operations Research* 40, 2760–2769.
- [6] EYDELAND, A. ET WOLYNYEC, K. *Energy and power risk management*. 2003.
- [7] FABER, B. ET STEDINGER, J. Reservoir optimization using sampling SDP with ensemble streamflow prediction (ESP) forecasts. *Journal of Hydrology* 249 (2001), 113–133.
- [8] KECKLER, W. G. ET LARSON, R. E. Dynamic programming applications to water resource system operation and planning. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 24 (1968), 80–109.
- [9] KELMAN, J., STEDINGER, J. R., COOPER, L. A., HSU, E. ET YUAN, S.-Q. Sampling stochastic dynamic-programming applied to reservoir operation. *Water Resources Research* 26 (1990), 447–454.
- [10] LONGSTAFF, F. A. ET SCHWARTZ, E. S. Valuing american options by simulation : A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies* 14 (2001), 113–147.
- [11] LUDKOVSKI, M. ET CARMONA, R. Valuation of energy storage : an optimal switching approach. *Quantitative Finance* 10 (2003), 359–374.
- [12] MANNOCCHI, F. ET TODISCO, F. Optimal reservoir operations for irrigation using a three spatial scales approach. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* 132, 2 (2006), 130–142.

- [13] OLIVIER-MEUNIER, J.-P. Contrôle optimal d'un système hydro-électrique par simulations et régressions. Mémoire, HEC Montréal, 2016.
- [14] POWELL, W. B. *Approximate Dynamic Programming*, seconde éd. 2003.
- [15] STEDINGER, J. R., SULE, B. F. ET LOUCKS, D. P. Stochastic dynamic programming models for reservoir operation optimization. *Water Resources Research* 20 (1984), 1499–1505.
- [16] TEJADA-GUIBERT, J. A., JOHNSON, S. A. ET STEDINGER, J. R. Comparison of two approaches for implementing multireservoir operating policies derived using stochastic dynamic programming. *Water Resources Research* 29, 12 (1993), 3969–3980.
- [17] TSITSIKLIS, J. N. ET VAN ROY, B. Regression methods for pricing complex American-Style options. *IEEE Transactions on Neural Networks* 12 (2001), 694–703.
- [18] TURGEON, A. Solving a stochastic reservoir management problem with multilag autocorrelated inflows. *Water Resources Research* 41, 12 (2005).