

HEC MONTRÉAL

MÉMOIRE

---

**Couverture en temps discret:  
minimisation de la variance et  
inconstance temporelle**

---

*Auteur :*  
Olivier Chassé St-Laurent

*Superviseur :*  
Christian Dorion

Sciences de la gestion  
Ingénierie financière

*Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du grade de maîtrise ès sciences (M. Sc.)*

Avril 2016

© Olivier Chassé St-Laurent, 2016



*« It should be obvious to anyone with common sense that every financial axiom is wrong, and that finance can never in its wildest dreams be Euclid. Different endeavors, as Aristotle wrote, require different degrees of precision. Finance is not one of the natural sciences, and its invisible worm is its dark secret love of mathematical elegance and too much exactitude. »*

Emmanuel Derman et Paul Wilmott, *Financial Modelers' Manifesto*

HEC MONTRÉAL

## *Résumé*

Ingénierie financière  
Sciences de la gestion

Maîtrise ès sciences (M. Sc.)

**Couverture en temps discret:  
minimisation de la variance et inconstance temporelle**

par Olivier Chassé St-Laurent

La couverture de droits contingents en temps discret et en cas de marché incomplet repose traditionnellement sur l'utilisation des résultats théoriques obtenus pour des modèles en temps continu et en marché complet pour obtenir une stratégie dynamique rebalancée périodiquement. En conséquence, celle-ci ne prend pas en compte les effets de l'incomplétude du marché ou de l'impossibilité de rebalancer continuellement la couverture. D'un autre côté, les méthodes de couverture dynamique prenant en compte ces deux aspects et reposant sur le critère de minimisation de la variance permettent d'obtenir une stratégie optimale à un moment initial, mais celle-ci ne maintient pas son optimalité sur toute la période, c.à-d. que l'agent est tenté de dévier de la stratégie initialement optimale, révélant l'inconstance temporelle de cette dernière. L'article de Basak et Chakauri (2013) montre comment il est possible d'appliquer le critère de minimisation de la variance en temps discret et en marché incomplet pour obtenir une stratégie de couverture optimale et cohérente dans le temps, c.-à-d. dont l'agent ne déviara pas. Ce mémoire montre que les formules explicites obtenues sont facilement applicables en pratique, même sous des différents modèles, et qu'elles permettent, sous certaines conditions, d'obtenir une couverture plus efficace en temps discret.

Mots clés : couverture, minimisation de la variance, inconstance temporelle, temps discret, marché incomplet.

## *Remerciements*

J'aimerais remercier mon directeur, Christian Dorion, d'avoir accepté de me diriger et de guider mes efforts dans la rédaction de ce mémoire, ainsi que pour son aide et ses conseils pour finalement mener à terme un projet ayant connu plusieurs détours. Je tiens de plus à remercier mes parents, Jean et Jocelyne, pour leur soutien matériel et moral, et leur patience intarissable, ainsi que mes frères, Julien et Étienne, pour les discussions qui m'ont permis de mettre mes idées au clair, mais aussi, et peut-être surtout, d'avoir pu penser à autre chose de temps à autre.

# Table des matières

Résumé	iv
Remerciements	v
Table des matières	vi
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	ix
Symboles	x
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Revue de littérature</b>	<b>7</b>
2.1 Frais de transaction . . . . .	8
2.1.1 Rebalancements périodiques . . . . .	8
2.1.2 Approche par la fonction d'utilité . . . . .	13
2.2 Minimisation de la variance par programmation dynamique . . . . .	16
2.2.1 Modèle en temps continu . . . . .	17
2.2.2 Inconstance temporelle . . . . .	18
2.2.3 Couverture en temps continu . . . . .	21
2.2.4 Couverture en temps discret . . . . .	24
<b>3 Données</b>	<b>27</b>
3.1 Indice S&P 500 . . . . .	27
3.2 Options . . . . .	30
3.3 Contrats à terme . . . . .	31
3.4 Indice VIX . . . . .	33
<b>4 Méthodologie</b>	<b>35</b>
4.1 Choix des options . . . . .	35
4.2 Choix des modèles . . . . .	36
4.2.1 Mouvement brownien géométrique . . . . .	36
4.2.2 Modèle de Heston et Nandi . . . . .	36
4.3 Estimation des paramètres . . . . .	37

4.3.1	Mouvement brownien géométrique . . . . .	38
4.3.2	Modèle de Heston et Nandi . . . . .	39
4.3.2.1	Estimation de $L_R^{\mathbb{P}}$ . . . . .	39
4.3.2.2	Estimation de $L_O^{\mathbb{Q}}$ . . . . .	40
4.3.2.3	Algorithmes . . . . .	42
4.4	Évaluation des stratégies de couverture . . . . .	43
4.4.1	Calcul des résultats . . . . .	43
4.4.2	Stratégies de couverture . . . . .	45
4.4.2.1	Choix des paramètres . . . . .	45
4.4.2.2	Couverture delta-neutre . . . . .	45
	Modèle BSM . . . . .	46
	Modèle HN . . . . .	47
4.4.2.3	Approche de Basak et Chabakauri . . . . .	47
4.4.2.4	Stratégie <i>ad hoc</i> . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Résultats</b> . . . . .	<b>49</b>
5.1	Rendements . . . . .	49
5.2	Rendements par type d'option et par degré de parité . . . . .	51
5.3	Positions de couverture . . . . .	56
5.4	Cohérence temporelle . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Résultats additionnels</b> . . . . .	<b>65</b>
6.1	Frais de transaction . . . . .	65
6.2	Mesure physique . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>A</b>	<b>Fonction caractéristique des rendement (modèle HN)</b> . . . . .	<b>79</b>
<b>B</b>	<b>Erreur de couverture actualisée</b> . . . . .	<b>83</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>85</b>

# Liste des figures

3.1	Indice S&P 500 . . . . .	28
3.2	Rendements quotidiens de l'indice S&P 500 . . . . .	29
5.1	Positions de couverture (moyennes) en fonction de l'échéance (toutes les options) . . . . .	57
5.2	Positions de couverture (moyennes) en fonction de l'échéance et du type d'options . . . . .	58
6.1	Positions de couverture (moyennes) en fonction de l'échéance (mesure physique, toutes les options) . . . . .	74
6.2	Positions de couverture (moyennes) en fonction de l'échéance et du type d'options (mesure physique) . . . . .	75

# Liste des tableaux

3.1	Caractéristiques des log-rendements quotidiens (annualisés), ex-dividendes . . . . .	30
3.2	Statistiques de l'échantillon d'options (1996 à 2012) . . . . .	32
5.1	Caractéristiques des rendements (toutes les options) . . . . .	50
5.2	Caractéristiques des rendements (options de vente) . . . . .	53
5.3	Caractéristiques des rendements (options d'achat) . . . . .	54
5.4	Coefficients de régression (différence des positions de cou- verture pour le modèle HN) . . . . .	63
6.1	Caractéristiques des rendements en présence de frais de transaction (toutes les options) . . . . .	67
6.2	Caractéristiques des rendements en présence de frais de transaction (options de vente) . . . . .	68
6.3	Caractéristiques des rendements en présence de frais de transaction (options d'achat) . . . . .	69
6.4	Caractéristiques des rendements (mesure physique, toutes les options) . . . . .	70
6.5	Caractéristiques des rendements (mesure physique, options de vente) . . . . .	71
6.6	Caractéristiques des rendements (mesure physique, options d'achat) . . . . .	72

# Symboles

$S$	Prix du sous-jacent	
$F$	Prix du contrat à terme	$= Se^{(r-q)T}$
$K$	Prix d'exercice	
$\frac{F}{K}$	Degré de parité ( <i>moneyness</i> )	
$r$	Taux sans risque (continu)	
$q$	Taux de dividende (continu)	
$\sigma$	Volatilité	
$T$	Échéance (années)	
$\mathcal{N}$	Distribution normale	
$\Phi$	Fonction de répartition (loi normale centrée réduite)	
$\phi$	Fonction de densité (loi normale centrée réduite)	

# Chapitre 1

## Introduction

La notion de couverture est une des notions centrales tant au niveau théorique que pratique. Au niveau théorique, l'applicabilité des modèles d'évaluation des droits contingents par absence d'arbitrage repose sur la possibilité d'une couverture parfaite, autrement dit sur la possibilité de répliquer parfaitement un actif, dont le meilleur exemple est probablement le modèle Black-Scholes-Merton (Black et Scholes, 1973), ci-après le modèle BSM. Au niveau pratique, la couverture, et surtout la question de l'optimalité de la stratégie de couverture, représente aussi une notion centrale dans le domaine de la gestion des risques, comme, par exemple, dans le cas des teneurs de marché de produits dérivés, qui ne sont pas en mesure de choisir leur inventaire.

En théorie, une couverture parfaite peut être obtenue directement dans un marché complet, ou alors par une stratégie dynamique si le marché est seulement dynamiquement complet ; c'est l'hypothèse qui sous-tend le théorème fondamental d'évaluation des actifs, développé par Harrison et Kreps (1979) et Harrison et Pliska (1981), ainsi que dans sa forme plus large par Delbaen et Schachermayer (1994). Mais plusieurs conditions sont nécessaires dans ce cadre théorique, dont la plupart reviennent essentiellement à l'absence de frictions. En effet, la preuve repose sur le passage à la limite lorsque le nombre de transactions tend vers l'infini (ou, alternativement, que la période entre deux transactions tend vers 0) d'une stratégie en temps discret, ainsi que sur l'absence de frais de transactions, par lesquels on entend autant les coûts directs que les coûts indirects, comme, par exemple, les écarts entre les cours acheteur et vendeur. Bien que ces hypothèses sont parfaitement admissibles en théorie, leur application pratique est problématique. Le problème de la couverture en marché incomplet demeure en conséquence ouvert.

Traditionnellement, la solution a été d'utiliser des stratégies de couverture statiques permettant de minimiser la variance de l'erreur de couverture à une date initiale, ou de reproduire les stratégies dynamiques obtenues par la théorie, p. ex. le modèle BSM. Un des avantages de ces approches est leur simplicité, mais plusieurs études ont montré qu'elles ne sont pas optimales lorsque la couverture se fait sur plusieurs périodes (Leland (1985), Bakshi et al. (1997a), Brandt (2003), etc.) et elles ne fournissent pas nécessairement une couverture parfaite même pour un marché dynamiquement complet. Une autre solution est de tenter de maximiser une fonction d'utilité de l'agent (voir, entre autres, Hodges et Neuberger (1989) et Clewlow et Hodges (1997)) habituellement définie en fonction de la moyenne et de la variance de l'erreur de couverture. Bien que cette dernière approche semble préférable, la plupart des tentatives en ce sens ne permettent pas de dériver des solutions explicites, et doivent se rabattre sur des approximations numériques.

Basak et Chabakauri (2013) reprennent le critère de minimisation de la variance et parviennent à obtenir une formulation explicite et (relativement) simple pour le calcul de la stratégie de couverture optimale en marché incomplet. Bien qu'il existe d'autres résultats dans le même sens, ceux-ci prennent la forme de stratégies permettant de minimiser la variance à une date fixe (habituellement, en date initiale) mais seulement si l'agent maintient la stratégie initiale sur toute la période de couverture. Or, dans le monde réel, un agent tente de minimiser la variance à la date à laquelle la position existe : la stratégie optimale initiale permettant de minimiser la variance à un temps  $t$  ne permet pas nécessairement (même, rarement) de minimiser la variance de la position à un temps  $t^*$  ( $\neq t$ ). Donc, au temps  $t^* > t$ , un agent tente de minimiser la variance au temps  $t^*$ , et non pas la variance au temps  $t$ , et adopte une stratégie différente, à moins d'être contraint de maintenir la stratégie initiale. Il y a donc une inconstance temporelle inhérente à l'objectif de minimisation de la variance.

Donc, en absence de contrainte, la stratégie initiale ne sera pas maintenue sur toute la période par l'agent, et ne peut donc pas être qualifiée d'optimale. Un des aspects les plus intéressants de la couverture optimale développée par Basak et Chabakauri (2013) est que celle-ci prend en compte la déviation future de l'agent par rapport à une stratégie initiale dans l'optimisation de la position de couverture à chaque période, et permet d'obtenir une mesure de probabilité cohérente dans le temps, c.-à-d. dont l'agent ne déviara pas à une date ultérieure. Le but de ce présent mémoire est de mettre en pratique cette approche, afin de comparer les résultats obtenus par rapport aux méthodes traditionnelles utilisant la couverture optimale sous une hypothèse de marché complet et de mettre en lumière l'efficacité supérieure (ou non) de la couverture sous une mesure temporellement cohérente.

Pour ce faire, nous reproduisons une stratégie de couverture suite à la vente d'options, réévaluée quotidiennement et employant des contrats à terme sur l'actif sous-jacent comme outil de couverture, en utilisant deux modèles en temps discret : le modèle du mouvement brownien géométrique, ci-après le modèle MBG, bien connu pour son utilisation dans le modèle BSM sous sa forme en temps continu, à volatilité constante, ainsi que le modèle de Heston et Nandi (2000), ci-après le modèle HN, à volatilité stochastique et corrélée avec les rendements de l'actif.

Nos résultats montrent que l'approche proposée par Basak et Chabakauri (2013) apporte peu d'amélioration sous le modèle MBG, surtout au vu du travail supplémentaire nécessaire pour son utilisation, mais les résultats sont plus probants dans le cadre du modèle HN. En effet, la prise en compte des erreurs de couverture futures, qui dépendent du niveau de la volatilité, permet d'utiliser la corrélation entre les rendements de l'actif sous-jacent et la volatilité future pour obtenir une couverture plus efficace, notamment dans le cas des options de vente initialement hors de la monnaie. Plus concrètement, l'inclusion de l'espérance des erreurs de couverture futures permet d'adopter une stratégie de minimisation de la variance locale, ce qui se traduit par une diminution de la variance totale pour toute la période de couverture. Nous montrons aussi que, sous le modèle HN, la couverture temporellement cohérente permet d'obtenir des résultats semblables à ceux obtenus en utilisant une stratégie de couverture delta-neutre reposant sur la volatilité implicite des options.

Deux aspects principaux se dégagent des résultats obtenus. D'abord, sous l'hypothèse d'une modélisation adéquate des différentes sources de risque, lorsque celles-ci ne sont pas indépendantes, une approche de gestion des risques peut avoir beaucoup à gagner en incluant tous les risques dans la détermination de la stratégie optimale, incluant ceux liés aux actions propres de l'agent dans le futur, qui peuvent dévier de la stratégie initialement optimale. L'approche développée par Basak et Chabakauri (2013), en utilisant toutes les sources de risque, permet de réduire au maximum la variance d'une position, objectif qu'une stratégie qui tente de n'utiliser qu'un seul outil par source de risque ne peut pas atteindre. Il est important de noter que, même si nos résultats portent sur des options sur l'indice S&P 500, la stratégie optimale de couverture de Basak et Chabakauri (2013) ne se limite pas à celles-ci ; en effet, la minimisation de la variance est possible tant qu'il existe un, ou plusieurs, actif qui n'est pas entièrement indépendant de l'objet de la stratégie de couverture.

L'autre aspect important est au niveau de l'hypothèse de constance temporelle de l'objectif sous-jacente à la grande majorité des stratégies de couverture ; celle-ci permet de

grandement simplifier les équations et les calculs, mais au prix d'une très réelle possibilité d'augmenter l'erreur de couverture finale, y compris celle qui est visée par l'objectif de minimisation. En pratique, c'est une hypothèse très forte : déjà, dans les années 50, Strotz (1955) montrait qu'un agent tentant de maximiser son utilité en planifiant sa consommation déviara de son plan initial dans presque tous les cas, même en absence d'incertitude quant à la fonction d'utilité future et à sa richesse, simplement à cause de la fonction d'escompte utilisée. En d'autres termes, la stratégie initiale optimale n'est optimale qu'initialement, et ce, simplement à cause du passage du temps. Ainsi, même dans un monde d'où sont absentes toutes sources d'incertitude, l'agent lui-même devient une source d'incertitude.

Strotz (1955) montre aussi que la seule forme de la fonction d'escompte permettant de conclure à l'optimalité sur toute la période est celle où le taux d'intérêt utilisé est constant (et continu, sous un modèle en temps continu). Dans le cas contraire, deux possibilités s'offrent à l'agent pour contrer l'inconstance temporelle : se contraindre à suivre la stratégie initiale, même si celle-ci n'est plus optimale, ou alors choisir la stratégie optimale parmi l'ensemble, plus restreint, de celles qui seront effectivement respectées sur toute la période. Pour illustrer le problème, on peut imaginer une institution financière tentant de minimiser la variance des positions vendues à ses clients. Si l'objectif est de minimiser l'erreur entre deux périodes de rebalancement de la couverture, aucun problème d'inconstance n'apparaît. Par contre, si la couverture doit être rebalancée sur plusieurs périodes, la déviation par rapport à la stratégie initiale constitue une nouvelle source de risque, mais qui n'apparaît pas dans les modèles. Il peut être tentant de simplifier le problème en contraignant l'institution à respecter la stratégie initiale, mais c'est irréaliste ; en effet, la stratégie adoptée minimise la variance à une date initiale, mais l'institution souhaite minimiser la variance à la date présente. Il semble donc qu'il est important de limiter le choix à une stratégie qui sera respectée pour toute la période de couverture. Toutefois, cela peut être impossible à réaliser dans la pratique si cette approche se révèle trop complexe ou le temps de calcul trop élevé. À ce titre, le simple fait que nous ayons des résultats montre que l'approche présentée par Basak et Chabakauri (2013) satisfait à ces deux critères et est donc parfaitement réalisable en pratique, en plus d'offrir une amélioration non négligeable de la qualité de la couverture lorsqu'un modèle approprié est utilisé.

À notre connaissance, aucun résultat utilisant cette approche n'existe ailleurs dans la littérature, et les résultats présentés ici représentent donc la première mise en application pratique de l'article de Basak et Chabakauri (2013). Nous espérons que celle-ci ne représente que le premier pas.

La présentation du sujet se fait comme suit. Dans un premier temps, nous revenons sur la littérature existante quant aux problèmes liés à l'application des résultats théoriques dans le monde pratique (chapitre 2). Ensuite, nous présentons le choix de nos données (chapitre 3), ainsi que les méthodes utilisées pour estimer les paramètres des modèles et pour obtenir nos résultats (chapitre 4). Les résultats principaux sont présentés au chapitre 5. Nous présentons ensuite quelques résultats supplémentaires (chapitre 6), avant de conclure.



## Chapitre 2

# Revue de littérature

La théorie de l'évaluation des droits contingents par absence d'arbitrage repose sur la possibilité d'une réplique parfaite. En effet, si l'on suppose qu'un portefeuille (statique ou dynamique) permet de répliquer de manière exacte la fonction de paiement d'un droit contingent, le théorème fondamental de l'évaluation des actifs impose que sa valeur soit égale à celle du droit contingent. Ainsi, la complétude du marché permet d'obtenir la valeur d'un actif et la stratégie de couverture parfaite ; en fait, le marché n'est complet que si cette stratégie existe, et inversement. Comme le soulève Leland (1985), l'hypothèse d'un marché dynamiquement complet est difficile à maintenir en pratique ; la complétude du marché s'opère par le rebalancement continu du portefeuille, ce qui pose problème lorsque les coûts de transaction ne sont pas nuls, notamment dans le cas du mouvement brownien, dont la variation non bornée entraîne un nombre infini de transactions. Les défenseurs de la stratégie delta-neutre justifient habituellement son utilisation en limitant le nombre de transactions et en s'appuyant sur l'hypothèse que les erreurs de couverture consécutives seront minimales et non corrélées avec le marché. Comme nous allons le voir, cette approche est critiquée pour plusieurs raisons, et plusieurs auteurs ont développé des approches alternatives qui incluent les frais de transaction et les erreurs liées à un nombre limité de transactions dans la valeur de réplique, soit en maintenant des rebalancements de portefeuille à date prédéterminées (p. ex. Leland (1985), Bakshi et al. (1997a), Basak et Chabakauri (2013)) ou alors en tentant de minimiser ceux-ci en incluant la décision de rebalancer ou non le portefeuille dans la stratégie optimale (p. ex. Clewlow et Hodges (1997), Zakamouline (2006)). Nous allons aussi voir pourquoi, même en l'absence de frais de transaction, l'impossibilité de transiger en temps continu rend sous-optimale la stratégie de réplique delta-neutre.

## 2.1 Frais de transaction

Cette section a pour but de présenter les critiques apportées par Leland (1985) et Clewlow et Hodges (1997) contre les hypothèses simplificatrices du modèle BSM, ainsi que l'approche suggérée pour prendre en compte un rebalancement en temps discret de la position de couverture et les frais de transaction liés à ces rebalacements. Nous débutons par les travaux de Leland (1985), où les rebalancements de la couverture sont effectués à des dates prédéterminées, avant de passer aux travaux de Clewlow et Hodges (1997), où l'utilisation d'une fonction d'utilité permet d'inclure le choix des dates de rebalancement dans l'objectif de minimisation de l'erreur de couverture.

### 2.1.1 Rebalancements périodiques

Leland (1985), soulève deux critiques contre la discrétisation de la stratégie optimale obtenue en appliquant le modèle BSM, avant de développer sa stratégie de réplcation prenant en compte les coûts de transaction. D'abord, la minimisation de l'erreur de réplcation requiert des rebalancements fréquents du portefeuille, ce qui peut devenir très coûteux : « Paradoxalement, il se peut que le coût total de la stratégie de réplcation dépasse celui de l'action elle-même, même si le rendement de l'action domine le rendement de l'option. » (traduction libre) <sup>1</sup>. Ensuite, les coûts de transaction eux-mêmes sont aléatoires, et contribue donc à l'erreur de couverture. En conséquence, les coûts de transaction devraient être inclus dans le calcul du coût de la stratégie de réplcation de l'option ; même sous l'hypothèse d'une réplcation parfaite du paiement de l'option à l'échéance, ces coûts peuvent rapidement devenir non négligeables.

En plus de leur caractère aléatoire, le fait que les coûts de transaction dépendent de la trajectoire du prix du sous-jacent rend encore plus nécessaire leur inclusion. On peut alors envisager deux solutions possibles : inclure le montant maximal possible lié aux frais de transaction, ou alors tenter d'en calculer l'espérance. L'inclusion du maximum des frais possibles devient rapidement intenable : en effet, le delta d'une option se situant entre 1 et -1, le maximum des frais de transaction converge vers le nombre de rebalancements multipliés par le prix du sous-jacent, et dépassera ainsi largement le prix du sous-jacent, qui, comme mentionné plus haut, domine la fonction de paiement de l'option à l'échéance. L'utilisation de l'espérance des frais de transaction est compliquée par le fait que ces frais ne sont pas indépendants des rendements du sous-jacent (et pour laquelle il n'existe pas nécessairement de forme analytique) : la position prise à la vente d'une option

---

<sup>1</sup>« Paradoxically, we could find that the total cost of the replicating strategy exceeds that of the stock itself, even though the stock returns dominate the option return. », (Leland, 1985), p. 1284.

profondément dans la monnaie sera relativement stable si cette dernière demeure dans la monnaie, limitant les frais de transaction ; par contre, dans le cas contraire, la position sera progressivement éliminée, entraînant des frais de transaction plus élevés. Ce dernier point montre que l'hypothèse de l'absence de corrélation avec le marché n'est pas entièrement justifiée. Il est donc clair qu'une stratégie de réplcation doit prendre en compte ces deux aspects, et donc que la valeur d'une option doit inclure les frais de transaction encourus par la stratégie de réplcation.

L'approche adoptée par Leland utilise des frais de transactions proportionnels, ce qui permet de faire dépendre la stratégie elle-même sur l'importance des frais ainsi que la fréquence des rebalancements du portefeuille, permettant de fixer des bornes sur le prix des options grâce à une modification de la volatilité du sous-jacent :

$$\bar{\sigma}^2(\sigma^2, k, \Delta t) = \sigma^2 \left[ 1 + \frac{kE \left[ \left| \frac{\Delta S}{S} \right| \right]}{\sigma^2 \Delta t} \right] \quad (2.1)$$

$$= \sigma^2 \left[ 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{\sigma \Delta t} \right] \quad (2.2)$$

où  $k$  représente les frais de transaction (en fraction du volume),  $\Delta t$  la période entre les rebalancements et en utilisant l'hypothèse que le rendement  $\frac{\Delta S}{S}$  suit une distribution normale<sup>2</sup>. Ce résultat permet d'utiliser la formule de BSM pour calculer la valeur d'une option d'achat, en remplaçant la volatilité par la volatilité en présence de frais de transaction :

$$\bar{C}(S, K, \bar{\sigma}^2, r, T, k, \Delta t) = S\Phi(\bar{d}_1) - Ke^{-rT}\Phi(\bar{d}_1 - \bar{\sigma}\sqrt{T}) \quad (2.3)$$

Ce résultat repose sur l'hypothèse que les erreurs de couverture de la stratégie ne sont pas corrélées avec le rendement du sous-jacent et tendent vers 0 lorsque la période de rebalancement tend vers 0, et donc que les frais de transaction vont dominer les erreurs de couverture. Il est important de mentionner que même si les erreurs de couverture ne sont pas directement corrélées avec le rendement du sous-jacent, elles n'en sont pas indépendantes : elles dépendent de la variance réalisée pendant la période de couverture. Nous pouvons nous inspirer des travaux de Leland (1985) pour en faire la preuve.

Posons d'abord une approximation discrète du rendement du sous-jacent  $S$  :

---

<sup>2</sup>L'utilisation d'une distribution log-normale impliquerait une modification aux équations, mais ne modifierait pas les conclusions.

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu + \sigma z_t + \mathcal{O}(\Delta t^{3/2}) \quad (2.4)$$

où  $\mu$  représente la dérive du processus et  $\sigma$  sa volatilité. Le changement de valeur d'un portefeuille de valeur  $P$  détenant  $w$  unités du sous-jacent sur la période  $\Delta t$  est donc décrit par :

$$\Delta P = w\Delta S + r(P - wS) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (2.5)$$

où  $r$  représente le taux d'intérêt (taux simple). Nous pouvons utiliser une expansion de Taylor pour représenter le changement de valeur d'un droit contingent :

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\Delta S)^2 \quad (2.6)$$

où  $V$  représente la valeur du droit contingent, et  $\frac{\partial V}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial S}$  et  $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$  les dérivées partielles par rapport au temps et à la valeur du sous-jacent. Ainsi, la différence entre le changement de valeur du portefeuille et celui du droit contingent est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta H &= \Delta P - \Delta V \\ &= r(P - wS) - \frac{\partial V}{\partial t} + \left(w - \frac{\partial V}{\partial S}\right)\Delta S - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\Delta S)^2 + \mathcal{O}(\Delta t^{3/2}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

qui représente l'erreur de couverture sur la période  $\Delta t$ . En l'absence de coûts de transaction et avec des transactions en temps continu,  $V$  satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$rV = \frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \quad (2.8)$$

en posant les conditions aux bornes appropriées. Sous une stratégie delta-neutre, on choisit  $w = \frac{\partial V}{\partial S}$ , permettant d'éliminer tous les termes impliquant  $\Delta S$  :

$$\Delta H = rP - \left( \frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \mathcal{O}(\Delta t^{3/2}) \quad (2.9)$$

En substituant l'équation (2.8), après quelques manipulations, dans l'équation (2.9) et en sachant que  $P = V$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta H &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta S}{S} \right)^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mathcal{O}(\Delta t^{3/2}) \\ &= \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left( \sigma^2 - \left( \frac{\Delta S}{S} \right)^2 \right) + \mathcal{O}(\Delta t^{3/2}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

En ignorant les termes d'ordre plus élevé, nous obtenons la forme que prend l'erreur de couverture sur une période  $\Delta t$  :

$$\Delta H = \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left( \sigma^2 - \left( \frac{\Delta S}{S} \right)^2 \right) \quad (2.11)$$

Il est clair que le portefeuille utilisé pour répliquer l'option n'est pas autofinancé, et l'erreur de couverture  $\Delta H$  représente la contribution (positive ou négative) nécessaire à chaque période de durée  $\Delta t$  pour assurer le règlement à l'échéance. Étant donné que  $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$  représente le gamma de l'option, et est donné par  $\frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$ , où  $T = 1$  par construction, nous retrouvons la même représentation de l'erreur de couverture que Boyle et Emanuel (1980) :

$$\begin{aligned} \Delta H &= \frac{1}{2} S^2 \frac{\phi(d_1)}{S\sigma} \sigma^2 (1 - u^2) \\ &= \frac{\sigma S}{2} \phi(d_1) (1 - u^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

La différence de signe s'expliquant par le fait que Boyle et Emanuel (1980) présentent l'erreur de couverture pour un portefeuille constitué de l'achat d'une option d'achat, plutôt que la vente dans notre cas, et de sa couverture par une position delta-neutre dans le sous-jacent. Si l'on prend l'espérance de l'erreur de couverture totale, en ignorant la valeur temporelle de manière à alléger l'écriture :

$$E \left[ \sum_t \Delta H_t \right] = E \left[ \sum_t \frac{1}{2} S_t^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)_t \left( \sigma_t^2 - \left( \frac{\Delta S}{S} \right)_t^2 \right) \right] \quad (2.13)$$

Il est clair que l'erreur de couverture n'est pas indépendante de la trajectoire suivie par le sous-jacent, étant donné la dépendance au dollar-gamma,  $S_t^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)_t$ . Par contre, il est aussi clair que, sous l'hypothèse d'innovations normales et d'une variance constante, le deuxième facteur tend vers 0. En effet, la somme du carré des innovations normales suit une loi  $\chi^2$  non centrée, ou, en ignorant la dérive dont l'effet est minime, une loi  $\chi^2$  de moyenne  $\sigma^2$ . En posant une volatilité constante, nous obtenons  $\sigma_t^2 = \sigma^2$ , ce qui démontre que le deuxième facteur tend vers 0 lorsque le nombre de périodes augmente. Leland (1985) s'appuie sur ce résultat pour souligner que les frais de transaction vont en général dominer les erreurs de couverture.

Si l'on revient à l'équation (2.2), il est important de noter que le terme modifiant la volatilité permet de construire les bornes du prix de l'option en appliquant l'effet inverse pour obtenir le prix minimal :

$$\underline{\sigma} = \sigma^2 \left[ 1 - \frac{kE \left[ \left| \frac{\Delta S}{S} \right| \right]}{\sigma^2 \Delta t} \right] \quad (2.14)$$

Si le prix de l'option descend sous la valeur obtenue par la formule de BSM, un agent pourrait acheter cette option et utiliser la stratégie de réplcation pour obtenir un rendement plus élevé que le taux sans risque. La combinaison des prix  $\bar{C}$  et  $\underline{C}$  permet de déterminer la distance entre les bornes :

$$\bar{C} - \underline{C} \approx \frac{2C_0 k}{\sqrt{2\pi \Delta t}} \quad (2.15)$$

$$= \frac{2kS\phi(d_1)\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi \Delta t}} \quad (2.16)$$

où l'on peut voir que la taille des bornes (entre le prix maximal et le prix minimal) dépend de la fréquence de rebalancement, et où l'absence d'un facteur pour l'erreur de couverture repose sur l'hypothèse que celle-ci tend vers 0, comme mentionné plus haut. Il est intéressant de noter que, pour une même fréquence de rebalancement, les bornes

atteignent leur distance maximale lorsque  $d_1 = 0$ , c-à-d. lorsque l'option est approximativement à la monnaie. Ceci s'explique par le fait que le gamma de l'option, calculé avec la formule ci-dessous :

$$\Gamma = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} \quad (2.17)$$

atteint lui-aussi son maximum lorsque  $d_1 = 0$ . En effet, la sensibilité élevée du delta à la valeur du sous-jacent (donnée par le gamma) lorsque l'option est à la monnaie entraînera des rebalancements plus importants, et donc des frais de transaction plus élevés, élargissant l'erreur de couverture potentielle.

Un autre aspect intéressant que l'équation (2.16) met en lumière est la relation entre le vega de l'option, qui représente sa sensibilité par rapport à un changement de la volatilité du sous-jacent, et la largeur des bornes du prix de l'option. En effet, en supposant que le sous-jacent ne verse pas de dividendes, le vega de l'option est donné par :

$$\nu = S\phi(d_1)\sqrt{T} \quad (2.18)$$

que l'on peut insérer dans l'équation (2.16) pour obtenir :

$$\bar{C} - \underline{C} \approx \frac{2k\nu}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \quad (2.19)$$

qui montre le lien direct entre la sensibilité de l'option à la volatilité et l'incertitude sur son prix, représentée par la largeur des bornes.

### 2.1.2 Approche par la fonction d'utilité

Clelow et Hodges (1997) reprennent et étendent l'approche par la fonction d'utilité développée par Hodges et Neuberger (1989) en utilisant une fonction de frais de transaction généralisée, permettant d'inclure des frais fixes par transaction, et présente une méthode pour calculer la valeur et la stratégie de couverture optimale sous cette fonction. Contrairement à l'approche de Leland (1985), qui limite les transactions à des temps prédéterminés, Clelow et Hodges (1997) n'imposent pas de manière exogène le nombre

ou les moments où s'effectueront les rebalancements du portefeuille, mais les incluent à l'intérieur du problème d'optimisation.

L'approche originale de Hodges et Neuberger (1989) repose sur la maximisation d'une fonction d'utilité (ou, alternativement, sur la minimisation d'une fonction de perte), ce qui permet de réduire la taille des bornes maximales et minimales sur la valeur des droits contingents. L'utilisation de cette approche repose sur le fait qu'il peut être impossible ou possible mais non souhaitable de répliquer un droit contingent de manière exacte (étant donné, comme mentionné plus haut, que le nombre de transactions tend vers l'infini et qu'il devient rapidement moins coûteux de dominer la fonction de paiement). En conséquence, il est nécessaire d'avoir recours à un critère de décision pour choisir entre les stratégies alternatives ; la maximisation de l'espérance de l'utilité répond à ce besoin. Brièvement, en posant la fonction d'utilité  $U$ , la richesse finale  $w_T$ , on peut définir la fonction indirecte d'utilité comme suit :

$$J(t, S, x_0, y_0) = \max_{x,y} E_t [U(w_T)] \quad (2.20)$$

où  $x$  représente le vecteur des positions de couverture et  $y$  le vecteur des fonds investis (empruntés). Clairement, à l'échéance,  $T$ ,  $J(T, S, x_T, y_T) = U(w_T)$ . Sous cette forme, la fonction  $J$  peut être résolue de manière récursive par programmation dynamique (équation de Hamilton-Jacobi-Bellman).

En posant la dynamique du prix du sous-jacent  $S$  comme un processus de diffusion :

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dz \quad (2.21)$$

et une fonction de frais de transaction générale :

$$k(u, S) = k_c + (k_f + k_p S) |u| \quad (2.22)$$

où  $u$  représente le volume signé de transaction,  $k_c$  les frais fixes par transaction,  $k_f$  les frais fixes par unité du sous-jacent transigé et  $k_p$  les frais proportionnels à la valeur du sous-jacent, Clewlow et Hodges (1997) définissent quatre bandes de contrôle pour le

rebalancement optimal de la position de couverture, en fonction des frais de transaction ainsi que l'aversion au risque de l'agent :  $x_-(t, S, y)$ ,  $\tilde{x}_-(t, S, y)$ ,  $x_+(t, S, y)$  et  $\tilde{x}_+(t, S, y)$ .

Les bandes définies par  $x_-$  et  $x_+$  représentent le moment optimal pour le rebalancement de la position de couverture, et les bandes définies par  $\tilde{x}_-$  et  $\tilde{x}_+$  représentent la position de couverture optimale. Autrement dit, si  $x < x_-$  (la position de couverture courante est inférieure à la bande inférieure), il est optimal pour l'agent d'acheter un volume suffisant pour établir la position de couverture à  $\tilde{x}_-$  ; inversement, si  $x > x_+$ , il est alors optimal de vendre suffisamment d'unités du sous-jacent pour établir la position à  $\tilde{x}_+$ .

Cette interprétation tient lorsque les transactions sont assujetties à des frais fixes ainsi que des frais proportionnels. En l'absence de frais fixes, les bandes provoquant le rebalancement sont égales à la position optimale de couverture ( $x_+ = \tilde{x}_+$ ) ; en effet, l'écart entre les deux bandes provient de la perte d'utilité qu'entraîne les frais fixes, limitée par un rebalancement moins fréquent. D'un autre côté, en l'absence de frais proportionnels, la position de couverture optimale est unique ( $\tilde{x}_- = \tilde{x}_+$ ) ; autrement dit, lorsqu'un rebalancement s'avère nécessaire ( $x < x_-$  ou  $x > x_+$ ), il est alors optimal d'établir la position de couverture idéale sans égard au volume de transactions, puisqu'il n'y a pas de perte d'utilité liée aux frais de transactions proportionnels. Clairement, en l'absence totale de frais de transactions, la position doit être rebalancée de manière continue à sa valeur optimale :  $x_- = \tilde{x}_- = \tilde{x}_+ = x_+$ .

En plus de permettre d'obtenir une stratégie de couverture optimale, l'approche présentée permet aussi de calculer des bornes sur la valeur initiale des droits contingents, à l'instar de Leland (1985). Si l'on pose la fonction d'utilité de l'agent au temps 0 en absence de droit contingent comme étant égale à  $J(0, S, 0, 0)$ , et la valeur obtenue pour la vente d'un droit contingent égale à  $V_S$ , il est clair que l'agent ne vendra pas le droit contingent si  $J(0, S, 0, V_S) < J(0, S, 0, 0)$  ; autrement dit, si cette vente réduit son utilité. Inversement, si le prix demandé pour le droit contingent est donnée par  $V_B$ , l'agent ne sera pas intéressé à son achat si  $J(0, S, 0, -V_B) < J(0, S, 0, 0)$ . Ainsi, le prix minimal ou maximal est donné par la valeur  $V_S$  ou  $V_B$  qui permet, au minimum, à l'agent de maintenir son utilité.

Clelland et Hodges (1997) présente aussi une technique de calcul pour obtenir les bornes extérieures et intérieures, que nous ne présenterons pas en entier, qui repose sur une méthode binomiale (CRR) et l'utilisation d'une fonction d'utilité de la forme :

$$U(w_t) = -e^{-\lambda w_t} \quad (2.23)$$

où  $\lambda$  représente l'aversion au risque. Cette fonction d'utilité et la réduction du facteur  $\mu$  (équation (2.21)) au taux d'intérêt sans risque  $r$  permettent d'éliminer la dépendance des bornes sur la richesse  $y$  et de réduire la dimensionalité du problème. Il est important de remarquer que la technique de calcul présentée est assez lourde, et utilise une estimation dans le cas des frais de transaction proportionnels<sup>3</sup>, qui requiert l'enregistrement de dix paramètres à chaque pas dans l'arbre binomial.

Nous ne présentons pas ici les résultats obtenus par la stratégie présentée par Clewlow et Hodges (1997), mais ceux-ci dominent la couverture delta-neutre du modèle BSM ainsi que l'approche de Leland (1985), particulièrement lorsque la fonction de paiement n'est pas globalement convexe ou concave (il est alors difficile de choisir si la modification de la volatilité de l'approche de Leland (1985) doit se faire à la hausse ou à la baisse). La réduction des erreurs de couverture, autant en biais qu'en variance, obtenue par ces deux approches montrent qu'il est important de prendre en compte les frais de transaction lors de la construction d'une stratégie de réplique optimale.

## 2.2 Minimisation de la variance par programmation dynamique

Cette section a pour but de présenter la méthode de couverture dynamique de Basak et Chabakauri (2013). Cette méthode repose sur la minimisation de la variance de l'erreur de couverture, ce qui permet d'obtenir une mesure unique malgré l'incomplétude du marché, et qui ne dépend pas de l'aversion au risque de l'agent, contrairement à l'approche de Clewlow et Hodges (1997) présentée ci-dessus. Il est important de mentionner que, sous sa forme actuelle, elle n'inclut pas les frais de transaction dans l'objectif de minimisation. Nous reprendrons d'abord la présentation du modèle en temps continu de manière à illustrer deux problèmes importantes des méthodes traditionnelles : l'inconstance temporelle du critère de la minimisation de la variance ainsi que l'effet de l'incomplétude du marché. Nous présenterons ensuite la couverture par minimisation de la variance dynamique optimale, qui prend en compte l'inconstance temporelle, dans le cadre du modèle en temps continu, avant de passer à un modèle de couverture en temps discret (qui reflète les modèles utilisés, présentés à la section (4.2)), où le marché est incomplet, pour obtenir une mesure neutre à la couverture (« *hedge-neutral measure* ») de manière à pouvoir déterminer la valeur de réplique et la couverture optimale cohérente dans le temps.

---

<sup>3</sup>« Numerical investigation suggests that the errors introduced by the approximation are typically small (1 %), and remain bounded as the time step is decreased, for the parameter values used in this work », Clewlow et Hodges (1997), p. 1362

### 2.2.1 Modèle en temps continu

Dans cette partie, nous reprenons le développement du modèle en temps continu de Basak et Chabakauri (2013). Considérons une économie en temps continu avec un marché incomplet, où l'incertitude est représentée par l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$  sur lequel sont définis deux mouvements browniens,  $\omega$  et  $\omega_x$  dont la corrélation est  $\rho$ , et où les processus stochastiques sont adaptés à la filtration augmentée  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$  engendrée par les deux mouvements browniens.

Un agent économique est tenu de maintenir sa position dans un actif non transigeable dont le prix est défini par  $X_t$ , où l'indice représente le temps, dont le prix suit la dynamique ci-dessous :

$$\frac{dX_t}{X_t} = m(X_t, t)dt + \nu(X_t, t)d\omega_{x,t} \quad (2.24)$$

Pour réduire le risque, l'acteur peut transiger deux actifs en temps continu, un actif sans risque dont le rendement est  $r$  et un deuxième actif risqué permettant de neutraliser en partie ou en totalité le risque :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(X_t, S_t, t)dt + \sigma(X_t, S_t, t)d\omega_t \quad (2.25)$$

Dans les deux cas,  $m$  et  $\mu$  représentent le rendement stochastique moyen et  $\nu$  et  $\sigma$  leur volatilité, et sont des fonctions déterministes de  $X_t$  et  $S_t$ , respectivement. Comme le notent Basak et Chabakauri (2013), il est possible que la moyenne et la volatilité du rendement de l'actif transigeable  $S$  dépendent de la valeur de l'actif  $X$ , d'où son inclusion dans les fonctions déterministes  $\mu$  et  $\sigma$ . À titre illustratif, on peut penser à une situation où le processus  $X$  représente le prix d'une action dont l'agent ne peut se défaire, de manière à maintenir le contrôle, alors que le processus  $S$  représente le prix d'un actif de couverture, p. ex. un droit contingent sur le prix de l'action servant à la couverture.

Ci-après, nous allégerons l'écriture en référant à tous ces termes par l'indice  $t$  pour indiquer la période; de même, comme nos résultats portent sur la couverture d'une option d'échéance  $T$  et utilisent le sous-jacent comme outil de couverture, nous utiliserons les termes « option » et « sous-jacent » pour référer à l'actif non transigeable et à l'actif risqué, respectivement.

À chaque période, l'agent doit choisir une couverture  $\theta_t$ , qui représente le montant à investir dans le sous-jacent au temps  $t$ , étant donné la richesse initiale  $W_0$ . Ainsi, sa richesse suit le processus :

$$dW_t = [rW_t + \theta_t(\mu_t - r)] + \theta_t\sigma_t d\omega_t \quad (2.26)$$

Une couverture dynamique parfaite n'est possible que si la corrélation entre les deux mouvements browniens est de  $\pm 1$ , c.-à-d. si la corrélation est parfaite; dans ce cas, il n'existe qu'une seule source de risque (un seul mouvement brownien) et une position dans l'actif sans risque et l'actif transigeable permet de répliquer parfaitement l'actif non transigeable. Si la corrélation est imparfaite, le marché est alors incomplet et il est impossible d'obtenir une couverture parfaite, dynamiquement ou autrement. En choisissant la minimisation de la variance de l'erreur de couverture comme objectif, assujetti à la contrainte budgétaire (équation (2.26)), nous avons :

$$\min_{\theta} \text{var}_t [X_T - W_T] \quad (2.27)$$

où  $\theta$  représente le vecteur des couvertures  $\theta_t$  sur toute la période, c.-à-d. la stratégie de couverture. Comme le soulignent Basak et Chabakauri (2013), avant leurs travaux, il n'existait aucune formulation explicite de la couverture optimale dans un environnement dynamique. La littérature n'offrait que des couvertures statiques (possiblement répétées, mais rarement optimales, comme nous l'avons montré ci-dessus) ou, préférablement, des couvertures dynamiques minimisant la variance à une date initiale, obtenus par programmation dynamique. Ces couvertures, quoiqu'une amélioration importante par rapport à l'utilisation de couvertures statiques, peuvent rapidement devenir sous-optimales de par leur omission de l'inconstance temporelle du critère de minimisation de la variance.

## 2.2.2 Inconstance temporelle

Basak et Chabakauri (2013) qualifient les couvertures mentionnées précédemment de « contraignantes » (« *pre-commitment* ») parce qu'elles supposent que l'agent respecte la stratégie de couverture  $\theta$  (qui peut être dynamique) déterminée à la date initiale, ci-après  $t$ , pendant toute la période de couverture; une déviation de la couverture adoptée par l'agent pendant cette période minerait la réalisation de la variance minimale au temps  $t$ . En rappelant la fonction objectif de minimisation  $J_t$  de la variance à l'équation (2.27), nous pouvons utiliser la loi de la variance totale pour une date arbitraire  $t + \tau$ ,  $t \leq t + \tau \leq T$  :

$$\begin{aligned} J_t &= \min_{\theta_t} \text{var}_t [X_T - W_T] \\ &= \min_{\theta_t} \{E_t [\text{var}_{t+\tau} [X_T - W_T]] + \text{var}_t [E_{t+\tau} [X_T - W_T]]\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

où  $\theta_t$  représente la stratégie dynamique de couverture, au temps  $t$ . Autrement dit, au temps  $t$ , l'agent tente de minimiser l'espérance de la variance entre le temps  $t$  et le temps  $t + \tau$  ainsi que la variance de l'espérance future (de  $t + \tau$  à  $T$ ), qui dépendent de la stratégie de couverture adoptée dans le futur, d'où la nécessité de recourir à la programmation dynamique pour obtenir la stratégie optimale. Par contre, au temps  $t + \tau$ , nous avons la fonction objectif :

$$J_{t+\tau} = \min_{\theta_{t+\tau}} \text{var}_{t+\tau} [X_T - W_T] \quad (2.29)$$

où  $\theta_{t+\tau}$  représente la stratégie dynamique de couverture, mais au temps  $t + \tau$ . En posant l'hypothèse que la stratégie optimale au temps  $t + \tau$  est adoptée, nous obtenons :

$$J_t = \min_{\theta_t} \{E_t [J_{t+\tau}] + \text{var}_t [E_{t+\tau} [X_T - W_T]]\} \quad (2.30)$$

Donc, au temps  $t$ , l'agent tente donc non seulement de minimiser non seulement son objectif au temps  $t + \tau$ , mais aussi le deuxième terme, soit de minimiser le risque venant de la stratégie adoptée sur la période allant de  $t$  à  $t + \tau$ . Hors, au temps  $t + \tau$ , le résultat de la stratégie adoptée à la période précédente est déjà connu, et le risque a disparu. En conséquence, il adopte la stratégie optimale pour l'objectif couvrant la période  $[t + \tau, T]$ , et, comme cet objectif diffère de l'objectif à la période précédente, la stratégie optimale sera elle aussi en général différente. En d'autres termes, la stratégie optimale au temps  $t + \tau$  pour la période allant de  $[t + \tau, T]$  dépend seulement de l'information au temps  $t + \tau$ , alors que la stratégie optimale au temps  $t$  pour la même période  $[t + \tau, T]$  dépend de l'information au temps  $t$ . Hors, ce résultat enfreint le principe d'optimalité de Bellman, qui nécessite que la stratégie optimale à un temps  $t^*$  soit indépendante du point initial et de la décision initiale, et sur lequel repose l'utilisation de la programmation dynamique.

Bjork et Murgoci (2010) posent plusieurs conditions pour s'assurer de la cohérence temporelle d'un problème, incluant l'absence d'une fonction non linéaire dans la fonction objectif terminale ; par contre, il est permis d'utiliser l'espérance d'une fonction non linéaire. Hors, on sait que :

$$\text{Var} [X] = E [X^2] - (E [X])^2 \quad (2.31)$$

qui inclut une fonction non linéaire d'une espérance. Donc, un objectif de minimisation de la variance inclut par définition une fonction non linéaire. Dans le cas des stratégies « contraignantes », le problème disparaît en réduisant un problème d'optimisation dynamique à un problème d'optimisation statique, en transformant le problème de minimisation de la variance en un problème de minimisation de l'erreur quadratique ; à ce sujet, voir Schweizer (2001) pour un traitement plus complet et des exemples. Cette forme fonctionnelle respecte le principe d'optimalité de Bellman et permet de recourir à la loi de l'espérance itérée pour résoudre le problème. À titre d'exemple, Duffie et Richardson (1991) utilisent cette approche pour obtenir une forme explicite de la stratégie de couverture dans le cadre de la couverture d'un actif par des contrats à terme lorsque les deux processus suivent un mouvement brownien géométrique. Comme le montrent Basak et Chabakauri (2013), la couverture optimale ainsi obtenue inclut un terme stochastique supplémentaire par rapport à leur couverture optimale de minimisation de la variance, ce terme servant à maintenir une variance minimale au temps initial pour la période de couverture.

Il est important de souligner que le problème de constance temporelle de l'objectif dépend fortement de la forme fonctionnelle de la fonction objectif. Comme nous l'avons vu, l'objectif de minimisation de la variance est un exemple, ainsi que les formes semblables, notamment la VaR conditionnelle (voir, à ce sujet, Rudloff et al. (2014)), à cause de l'inclusion d'un terme non linéaire dans la fonction objectif. De même, Strotz (1955) démontre que seul un facteur d'actualisation ayant une forme exponentielle permet de maintenir la constance temporelle de l'objectif. Par contre, l'utilisation de l'espérance d'une fonction non linéaire permet de préserver la constance temporelle de l'objectif, comme, par exemple, sous la forme de minimisation de l'espérance de l'erreur quadratique, p. ex. Duffie et Richardson (1991), ou encore comme dans l'article de François et al. (2012), qui présentent une approche pour calculer la couverture optimale sous une forme généralisée d'une fonction de perte, permettant d'adapter celle-ci aux objectifs de l'agent, p. ex. pénaliser les pertes seulement dans le cas d'un vendeur d'options.

Dans notre cas, lorsque l'objectif est la minimisation de la variance, s'il n'est pas possible de contraindre le respect de la stratégie initiale sur toute la période, l'agent doit alors prendre en compte la stratégie qu'il adoptera dans le futur, alors qu'il aura accès à plus d'information ; plutôt que d'adopter une stratégie parmi toutes les stratégies possibles, le choix de l'agent se restreint aux stratégies qui seront effectivement respectées sur la période de couverture. Dans ce cas, la contrainte n'est pas imposée par l'agent au temps initial  $t$  ; c'est plutôt lui qui est contraint par ses actions futures. Mais il faut insister sur le fait que le temps  $t$  est arbitraire : à toutes les périodes dans le futur, l'agent devra prendre en compte la stratégie qu'il adoptera réellement dans le futur ; sachant cela, il doit

donc aussi prendre en compte cette prise en compte, et ainsi de suite. Donc, une stratégie optimale prend en compte que l'agent au temps  $T - \tau$  adopte une stratégie optimale, ce que prend en compte l'agent au temps  $T - 2\tau$  pour adopter sa stratégie, et ainsi de suite. Il est donc essentiel de prendre en compte l'inconstance temporelle (la possibilité pour l'agent de dévier de la stratégie initiale) si l'on veut obtenir une couverture optimale dans un environnement dynamique. Si l'on considère l'agent comme une suite de joueurs, et que chaque joueur adopte la stratégie qui répond le mieux aux stratégies des autres joueurs (l'agent dans le futur), on peut alors avoir recours à un équilibre de Nash parfait par sous-jeux pour obtenir la formulation explicite de la stratégie à adopter, comme le font Basak et Chabakauri (2013) et comme nous allons le voir pour le modèle en temps continu.

### 2.2.3 Couverture en temps continu

Le problème posé par l'équation (2.27) peut être résolu en employant la programmation dynamique, mais la tâche est compliquée par la non-linéarité du critère de la variance, ainsi que par son inconstance temporelle, comme nous l'avons vu ci-haut. L'approche de Basak et Chabakauri (2013) consiste à dériver une formulation récursive de la fonction objectif de l'agent, ce qui permet d'obtenir l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et d'utiliser la programmation dynamique.

Tout d'abord, on peut définir la fonction objectif  $J_t$  :

$$J(X_t, S_t, W_t, t) \equiv \text{var}_t [X_T - W_T^*] \quad (2.32)$$

où  $W_T^*$  représente la richesse au temps  $T$  sous l'hypothèse d'une couverture optimale, c.-à-d. que l'agent adopte la stratégie optimale à chaque temps  $t + \tau$ , où  $t \leq t + \tau \leq T$ . Ensuite, en posant un rebalancement de la couverture à toutes les périodes  $t + \tau$  et par la loi de la variance totale, nous obtenons une représentation récursive de la fonction  $J_t$ , semblable à l'équation (2.28) :

$$J_t = \min_{\theta_t} E_t [\text{var}_{t+\tau} [X_T - W_T^*]] + \text{var}_t [E_{t+\tau} [X_T - W_T]] \quad (2.33)$$

où,  $\text{var}_{t+\tau} [X_T - W_T^*] = J_{t+\tau}$ . Afin d'éviter de surcharger le texte, nous ne présentons ici que les résultats les plus importants. Pour la preuve complète, nous référons le lecteur à Basak et Chabakauri (2013). Tout d'abord, l'approche par programmation dynamique permet d'obtenir la couverture optimale et la variance de l'erreur de couverture à tout

temps  $t$  arbitraire :

$$\theta_t^* = \frac{\rho\nu_t}{\sigma_t} X_t \frac{\partial E_t^* [X_T e^{-r(T-t)}]}{\partial X_t} + S_t \frac{\partial E_t^* [X_T e^{-r(T-t)}]}{\partial S_t} \quad (2.34)$$

$$\text{var}_t[X_T - W_T^*] = (1 - \rho^2) E_t \left[ \int_t^T \nu_s^2 X_s^2 \left( \frac{\partial E_s^* [X_t]}{\partial X_s} \right)^2 ds \right] \quad (2.35)$$

où  $W_T^*$  représente la richesse terminale de l'agent utilisant la couverture optimale et  $E_t^*$  représente l'espérance calculée sous la mesure de probabilité  $P^*$ , définissant deux mouvements browniens  $\omega^*$  et  $\omega_x^*$  de corrélation  $\rho$ , nous permettant d'obtenir les processus suivants pour le droit contingent et le sous-jacent, respectivement :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left( m_t - \rho\nu_t \frac{\mu_t - r}{\sigma_t} \right) dt + \nu_t d\omega_{xt}^* \quad (2.36)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t d\omega_t^* \quad (2.37)$$

et où la nouvelle mesure  $P^*$  est définie par la dérivée de Radon-Nikodym :

$$\frac{dP^*}{dP} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{\mu_s - r}{\sigma_s} \right)^2 ds - \int_0^T \frac{\mu_s - r}{\sigma_s} d\omega_s} \quad (2.38)$$

Pour mettre en relief la différence causée par l'incomplétude du marché, notons qu'en situation de marché complet, c.-à-d. lorsque la corrélation entre les deux mouvements browniens est  $\pm 1$ , la stratégie de couverture optimale est donnée par :

$$\theta_t^{\text{complet}} = \frac{\rho\nu_t}{\sigma_t} X_t \frac{\partial E_t^{RN} [X_T e^{-r(T-t)}]}{\partial X_t} + S_t \frac{\partial E_t^{RN} [X_T e^{-r(T-t)}]}{\partial S_t} \quad (2.39)$$

où l'espérance est définie sous la mesure risque-neutre, qui est unique, ce qui permet de définir la valeur, elle aussi unique, du droit contingent par l'absence d'opportunité d'arbitrage. On peut voir que la structure de base de la couverture est la même dans les deux situations, et que la couverture en marché complet représente un cas particulier (lorsque la corrélation est parfaite) de l'équation générale (2.34).

En effet, lorsque la corrélation est parfaite et le marché complet, la prime de risque est la même pour les deux processus  $\left( \gamma_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} = \frac{m_t - r_t}{\nu_t} \right)$ ; les deux processus actualisés au taux sans risque sont des martingales sous la nouvelle mesure de probabilité  $P^*$ . Donc, en absence d'arbitrage, la couverture optimale permet d'éliminer entièrement la variance de l'erreur de couverture; le facteur  $(1 - \rho^2)$  de l'équation (2.35) élimine la variance. Ainsi, le paramètre  $\rho$  permet, d'une certaine manière, de mesurer l'incertitude de la couverture : plus la corrélation s'approche de 1 (ou -1), plus la couverture est efficace; inversement,

plus la corrélation s'approche de 0, moins le sous-jacent représente un outil efficace de couverture. Ainsi, la couverture optimale permet de réduire au maximum la variance de l'erreur de couverture, sans toutefois pouvoir l'éliminer complètement ( $1 - \rho^2 > 0$ ).

Pour bien illustrer la généralité de la nouvelle mesure de probabilité  $P^*$ , on peut exprimer l'espérance escomptée sous la nouvelle mesure en fonction de l'ancienne mesure :

$$E_t^* [X_T e^{-r(T-t)}] = E_t [X_T e^{-r(T-t)}] - E_t [W_T^* e^{-r(T-t)} - W_t] \quad (2.40)$$

Le deuxième terme du côté droit de l'équation représente les gains ou pertes actualisés auxquels l'agent renonce lorsqu'il minimise la variance pendant la période  $[t, T]$ , autrement dit, le coût de la couverture. Donc, comme on peut le voir, la nouvelle mesure de probabilité  $P^*$  inclut l'espérance du coût de couverture dans le calcul de la valeur du droit contingent ; c'est pourquoi Basak et Chabakauri réfèrent à elle comme à la mesure neutre à la couverture (« *hedge-neutral measure* »). Ils notent aussi que, au temps  $t$ , la valeur neutre à la couverture représente la valeur minimale d'un portefeuille autofinancé, autrement dit, la valeur du droit contingent dont l'espérance de l'erreur de couverture est nulle : en posant  $W_t = 0$ , on peut facilement voir l'égalité avec l'espérance de l'erreur de couverture  $E_t[X_T e_T^{-r(T-t)} - W_T^* e^{-r(T-t)}]$ . Ainsi, on peut obtenir une meilleure qualité de couverture en se concentrant sur la sensibilité de la valeur neutre à la couverture, de la même manière que l'on obtiendra la meilleure couverture en marché complet en utilisant la sensibilité de la valeur de la réplcation sous la mesure neutre au risque, c.-à-d. les grecques.

Comme on peut le voir, la stratégie de minimisation de la variance en marché incomplet reproduit sous une forme généralisée les résultats obtenus en marché complet. L'équation (2.35) permet d'observer l'impact de l'incomplétude du marché. D'abord, comme nous l'avons noté plus haut, le facteur  $(1 - \rho^2)$  mesure l'incomplétude du marché. Ensuite, on peut aussi noter que la qualité de la couverture diminue avec la volatilité du droit contingent ( $\nu$ ) ainsi qu'avec la sensibilité de la valeur neutre à la couverture par rapport à sa valeur au temps  $t$ ,  $\left(\frac{\partial E_t^*[X_T e^{-r(T-t)}]}{\partial X_t}\right)$ . Une interprétation de l'équation (2.34) aussi est possible, mais ressemble beaucoup à la version sous la mesure risque neutre, sauf lorsque  $\rho = 0$ , c.-à-d. en cas d'indépendance des mouvements browniens : alors que le premier terme disparaît, il est très intéressant de remarquer que le deuxième terme peut prendre une valeur différente de 0. Malgré tout, il est difficile de dire à l'avance quel sera la taille ou le signe de sa contribution, qui dépend la distribution jointe des deux processus.

### 2.2.4 Couverture en temps discret

La section précédente nous a permis de montrer que les stratégies de minimisation de la variance, lorsque nous sommes dans une situation où le marché n'est pas dynamiquement complet, divergent des stratégies sous un marché complet, et que la nouvelle mesure, baptisée mesure neutre à la couverture, permet de rétablir la cohérence temporelle et d'obtenir la stratégie optimale de couverture. La notion de marché non dynamiquement complet est beaucoup moins stricte que la seule situation où la corrélation entre les deux actifs est imparfaite ; en effet, plusieurs éléments peuvent rendre impossible une réplication parfaite, dont les frais de transaction, l'impossibilité d'observer les prix ou de transiger en temps continu, une volatilité stochastique, des sauts dans le processus du sous-jacent, etc. (à ce sujet, voir Garleanu et al. (2009)). Pour ces raisons, l'utilisation d'une approche en temps discret semble plus appropriée. De plus, les modèles en temps discret sont plus simples d'implémentation, ce qui facilite leur évaluation empirique, comme le remarquent Christoffersen et al. (2013).

Comme dans la section précédente, nous reprenons les étapes du développement de Basak et Chabakauri (2013). Nous devons d'abord modifier la contrainte budgétaire ainsi que la valeur de réplication du droit contingent pour les replacer en temps discret :

$$W_{t+\Delta t} = e^{-r\Delta t}W_t + \theta_t \left( \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} - e^{r\Delta t} \right) \quad (2.41)$$

$$G_t = E_t \left[ X_T e^{-r(T-t)} \right] - E_t \left[ W_T^* e^{-r(T-t)} - W_t \right] \quad (2.42)$$

où  $G_t$  représente la valeur de réplication du droit contingent au temps  $t$ , et reprend la forme de l'équation (2.40) du modèle en temps continu, qui donne la valeur de la stratégie de réplication autofinancée. La démarche utilisée pour obtenir la couverture optimale et la mesure neutre à la couverture utilise la même intuition de décomposer la variance totale à chaque période :

$$J_t = \min_{\theta_t} E_t \left[ \text{var}_{t+\Delta t} [X_T - W_T^*] \right] + \text{var}_t \left[ E_{t+\Delta t} [X_T - W_T] \right] \quad (2.43)$$

Comme on peut le voir, la fonction objectif ne dépend pas de la richesse au temps  $t$ , à l'instar de la modélisation en temps continu. La solution du problème de minimisation nous donne la couverture optimale :

$$\theta_t^* = \frac{\text{cov}_t \left( G_{t+\Delta t}, \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right)}{\text{var}_t \left[ \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right]} \quad (2.44)$$

Celle-ci prend donc une forme similaire à la couverture optimale en temps continu, donnée à l'équation (2.34), ainsi qu'à la couverture en cas de marché complet, à la différence que la valeur de réplication  $G_t$  inclut les erreurs de couverture. Il n'est pas possible d'utiliser la corrélation directe entre les mouvements browniens, mais il est clair que la couverture optimale dépend en grande partie de celle-ci, à l'instar de la couverture en temps continu, dont le degré d'efficacité dépend fortement de la corrélation.

La solution récursive de la fonction objectif permet d'obtenir la variance de l'erreur de couverture au temps  $t$  :

$$var_t[X_T - W_T^*] = E_t \left[ \sum_{\tau=t}^{T-\Delta t} e^{r(T-\tau-\Delta t)} var_\tau \left[ G_{\tau+\Delta t} - \theta_\tau^* \left( \frac{S_{\tau+\Delta t}}{S_\tau} \right) \right] \right] \quad (2.45)$$

L'équation (2.42) peut être transformée en une représentation récursive de la valeur de réplication :

$$G_t = e^{-r\Delta t} E_t[G_{t+\Delta t}] - E_t[W_{t+\Delta t}e^{-r\Delta t} - W_t] \quad (2.46)$$

Cette représentation récursive de la valeur de réplication et la contrainte budgétaire (2.41) permettent, après quelques manipulations, d'obtenir une version en temps discret de l'équation aux dérivées partielles en temps continu :

$$G_t = E_t \left[ \left\{ 1 + \left( E_t \left[ \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right] - \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) \frac{E_t \left[ \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right] - e^{r\Delta t}}{var_t \left[ \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right]} \right\} G_{t+\Delta t} e^{-r\Delta t} \right] \quad (2.47)$$

Par induction, l'équation précédente nous permet d'obtenir une expression analytique pour la valeur de réplication ainsi que pour le déflateur de la martingale :

$$G_t = \frac{1}{\xi_t} E_t \left[ \xi_T X_T e^{-r(T-t)} \right], \text{ où} \quad (2.48)$$

$$\xi_t = \prod_{\tau=0}^{t-\Delta t} \left\{ 1 + \left( \frac{E_\tau \left[ \frac{S_{\tau+\Delta t}}{S_\tau} \right] - \frac{S_{\tau+\Delta t}}{S_\tau}}{\sqrt{var_\tau \left[ \frac{S_{\tau+\Delta t}}{S_\tau} \right]}} \right) \left( \frac{E_\tau \left[ \frac{S_{\tau+\Delta t}}{S_\tau} \right] - e^{r\Delta t}}{\sqrt{var_\tau \left[ \frac{S_{\tau+\Delta t}}{S_\tau} \right]}} \right) \right\} \quad (2.49)$$

où, par simplification,  $\xi_0 = 1$ . Il est possible de montrer que  $\xi_t$  est une martingale et une simple manipulation algébrique permet de montrer qu'il est en de même pour le processus

$e^{-rt}\xi_t S_t$ . Finalement, nous pouvons simplifier l'expression de la couverture optimale en utilisant la valeur de réplcation :

$$\theta_t^* = S_t \frac{E_t [e^{-r\Delta t} G_{t+\Delta t}] - G_t}{E_t [e^{-r\Delta t} S_{t+\Delta t}] - S_t} \quad (2.50)$$

La valeur de réplcation du droit contingent, donnée par l'équation (2.48), reprend la structure de la valeur par absence d'opportunité d'arbitrage en marché complet. Le déflateur dépend de deux facteurs : le rendement inattendu (l'innovation) par unité d'écart-type et la pondération par le ratio de Sharpe. Donc, comme dans le cas de la mesure neutre au risque, le paramètre  $\mu_t$  (la prime de risque) du sous-jacent doit être pris en compte. Dans les deux cas, on peut l'interpréter comme l'écart entre les deux mesures (physique et neutre au risque ou à la couverture).

Si l'on compare les équations (2.42) et (2.46), on peut voir que le premier terme de l'équation (2.46) reprend l'espérance de la valeur actualisée du droit contingent, alors que le deuxième terme représente le coût de la couverture à travers le temps : ce qui justifie l'appellation du facteur  $\xi$  de déflateur neutre à la couverture (« *hedge-neutral martingale deflator* ») de Basak et Chabakauri. La composition dans le temps des erreurs de réplcation, qui met l'accent sur la variance à court terme, reflète la cohérence temporelle de l'approche utilisée.

Remarquablement, la forme prise par les équations de la valeur de réplcation et de la couverture optimale est simple à évaluer numériquement, tant pour des modèles simples que pour des modèles à plusieurs variables et/ou suivant des trajectoires non markoviennes, par simulations Monte Carlo, ou même explicitement dans certains cas simples (Basak et Chabakauri (2013) présentent deux formulations alternatives pour le modèle brownien géométrique).

# Chapitre 3

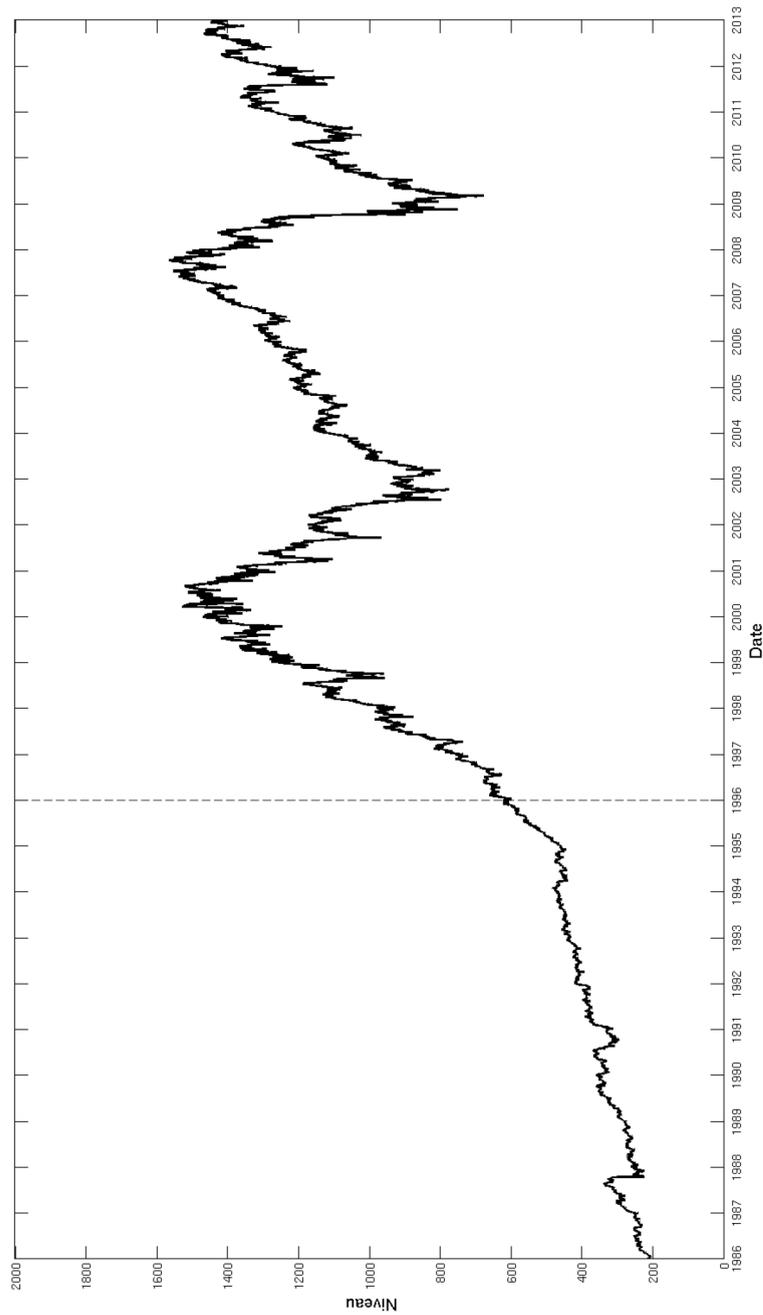
## Données

### 3.1 Indice S&P 500

Les données sur le rendement de l'indice S&P 500 proviennent de CRSP, et couvrent la période allant de janvier 1986 à décembre 2012. À titre d'approximation pour le taux d'intérêt sans risque, nous utilisons une série temporelle des taux sur des bons du Trésor sur le marché secondaire d'une échéance de 3 mois. Nous avons approximé le taux de dividende sur l'indice à l'aide de la série temporelle mensuelle construite par Shiller (<http://www.econ.yale.edu/shiller/data.htm>), en utilisant le taux annuel (transformé en temps continu) du mois précédent pour chacune des dates couvertes par nos données sur l'indice S&P 500. Les figures 3.1 et 3.2 présentent la trajectoire et les rendements de l'indice S&P 500, respectivement, et la période couverte par notre échantillon d'options (voir ci-dessous) débute à la ligne verticale pointillée.

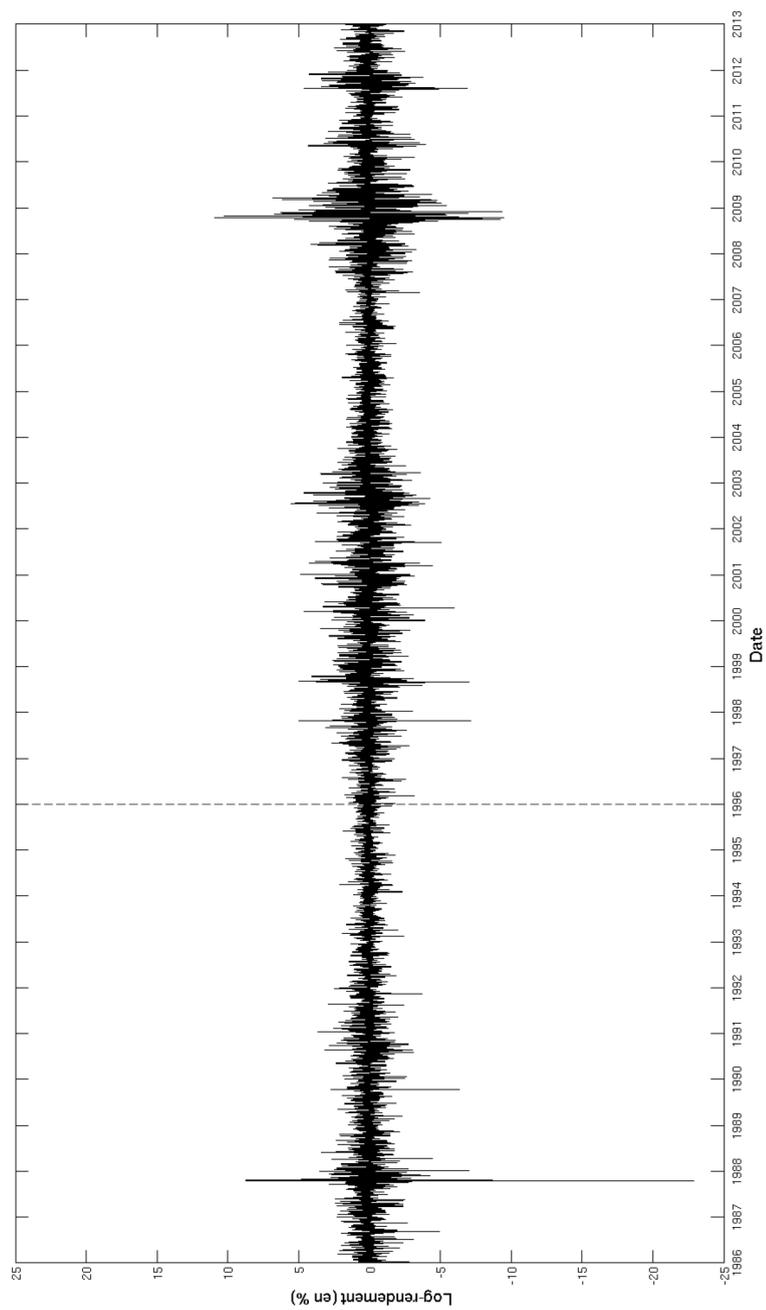
Le tableau 3.1 présente les caractéristiques principales des rendements pour des périodes allant de 1986 à 2012, qui est la période utilisée pour l'estimation des paramètres des modèles, et 1996 à 2012, soit la période couvrant notre échantillon d'options. Notre échantillon couvre plusieurs périodes importantes, soient la bulle technologique de 1997 à 2001 et la crise financière de 2007 à 2010, ainsi que la période entourant la chute de 22,6 % des cours le 19 octobre 1987. À fin de comparaison, la troisième période présentée, allant de 1991 à 2012, montre l'effet de l'inclusion de cette dernière période sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement.

FIGURE 3.1: Indice S&amp;P 500



Trajectoire de l'indice S&P 500 entre le 1<sup>er</sup> janvier 1986 et le 31 décembre 2012. La ligne pointillée représente le début de l'échantillon des options (voir la section 3.2 ci-dessous).

FIGURE 3.2: Rendements quotidiens de l'indice S&amp;P 500



Rendements quotidiens de l'indice S&P 500 entre le 1<sup>er</sup> janvier 1986 et le 31 décembre 2012. La ligne pointillée représente le début de l'échantillon des options (voir la section 3.2 ci-dessous).

TABLEAU 3.1: Caractéristiques des log-rendements quotidiens (annualisés), ex-dividendes

Période	1986 à 2012	1991 à 2012	1996 à 2012
Moyenne (%)	7,10	6,70	4,90
Écart-type (%)	19,04	18,72	20,56
Coefficient d'asymétrie	-1,28	-0,23	-0,22
Coefficient d'aplatissement	30,15	11,62	10,23

Ce tableau présente les caractéristiques des log-rendements quotidiens de l'indice S&P 500 pour différentes périodes. Les log-rendements sont donnés par le logarithme du rapport du niveau de l'indice d'une journée à l'autre (ou la différence des logarithmes des deux niveaux) :

$$R_t = \log \frac{S_{t+1}}{S_t} = \log S_{t+1} - \log S_t$$

où  $S_t$  représente le niveau de l'indice à la date  $t$ .

## 3.2 Options

Les données sur les options d'achat et de vente sur l'indice S&P proviennent de OptionMetrics. La période couverte par nos données s'étend de janvier 1996 à décembre 2012. Nous avons construit deux ensembles de données sur les options, l'un pour l'estimation des paramètres des modèles et l'autre pour l'évaluation des stratégies de couverture. Nous présentons leur construction ci-dessous, ainsi qu'un tableau récapitulatif des caractéristiques des options en fonction de leur degré de parité et de leur échéance.

Pour construire notre ensemble de données servant à l'estimation, nous n'avons utilisé que les données tombant un mercredi, ce qui permet de réduire l'effet du jour de la semaine. De plus, nous avons éliminé les options dont le volume de transactions était nul et/ou sans position ouverte. Ensuite, nous avons éliminé les options dont le prix moyen (la moyenne des prix demandé et offert) était de moins de 0,50 \$, avant d'éliminer les options dont l'échéance était de moins de sept jours ou de plus d'un an (365 jours). Ensuite, pour chaque paire de date et d'échéance, nous avons gardé les six options hors de la monnaie les plus liquides (dont le volume était le plus élevé), pour obtenir un ensemble de 33 724 options pour la période allant de janvier 1996 à décembre 2012.

Le tableau 3.2 ci-dessous présente des statistiques sur notre échantillon d'options, en fonction du degré de parité et de l'échéance. Le degré de parité est donné par  $\frac{K}{F}$ , où  $K$  représente le prix d'exercice,  $F = Se^{(r-q)T}$  le prix d'un contrat à terme sur le sous-jacent, avec  $r$  le taux d'intérêt sans risque,  $q$  le taux continu de dividende et  $T$  l'échéance de l'option. Le dernier panneau montre l'asymétrie de la volatilité, ainsi que l'effet de l'échéance,

et montre que l'échantillon est représentatif des conditions normales de marché, y compris la volatilité implicite moyenne de nos options, supérieures à la volatilité historique de l'indice (23, 10% c. 20, 56%) sur la même période.

La construction de l'ensemble des données sur les options utilisées pour l'évaluation vise à obtenir des échantillons dont l'échéance est d'environ un mois, et incluant des options de vente et d'achat à la monnaie et hors de la monnaie. Pour ce faire, nous avons limité notre choix aux options dont l'échéance tombait le troisième vendredi du mois (ou le dernier jour ouvrable précédant ce dernier). Ensuite, pour chaque mercredi suivant le troisième vendredi du mois, en commençant le 22 janvier 1997<sup>1</sup>, nous avons choisi quatre options dont l'échéance tombait le mois suivant : les options de vente et d'achat à la monnaie (dont le degré de parité était le plus proche de 1), une option de vente hors de la monnaie (dont le degré de parité était le plus proche de 0,95) et une option d'achat hors de la monnaie (dont le degré de parité était le plus proche de 1,05). De cette manière, nous avons obtenu des données quotidiennes pour 764 options, réparties sur 191 périodes, allant du 22 janvier 1997 au 21 décembre 2012 (dernière date d'exercice), et dont l'échéance varie entre 23 et 30 jours.

### 3.3 Contrats à terme

Les données sur les prix des contrats à terme sur l'indice S&P 500 utilisés proviennent de Stevens Continuous Futures<sup>2</sup>, disponible sur Quandl. L'utilisation de contrats continus permet de simplifier la méthodologie. L'enchaînement des contrats se fait le premier jour du mois de livraison du contrat avec la plus courte échéance, de manière graduelle sur cinq jours en modifiant la pondération de 20% par jour entre le contrat avec la plus courte échéance et le contrat suivant. Cette approche permet d'éviter des sauts soudains dans le prix des contrats utilisés pour la couverture. Pour alléger la méthodologie, nous faisons l'hypothèse que les transactions (achat et vente des contrats à terme) se font au prix de règlement.

---

<sup>1</sup>Bien que notre ensemble de données sur les options débute en janvier 1996, nous ne pouvons pas débiter le 24 janvier 1996, puisque cela ne nous laisserait pas suffisamment de données pour l'estimation des modèles, la méthode utilisée nécessitant une année de données sur les options.

<sup>2</sup><https://www.quandl.com/data/SCF>

TABLEAU 3.2: Statistiques de l'échantillon d'options  
(1996 à 2012)

A : Nombre d'options

		Jours < 30	30 ≤ Jours < 60	60 ≤ Jours < 90	90 ≤ Jours < 180	180 ≤ Jours < 270	270 ≤ Jours	Total
	$\frac{K}{F} < 0.9$	335	1128	1160	2143	1826	1535	8127
0.9 ≤	$\frac{K}{F} < 0.95$	775	1163	875	1200	829	587	5429
0.95 ≤	$\frac{K}{F} < 0.975$	731	875	574	700	464	360	3704
0.975 ≤	$\frac{K}{F} < 1$	1075	1220	857	804	474	321	4751
1 ≤	$\frac{K}{F} < 1.025$	917	837	559	563	407	348	3631
1.025 ≤	$\frac{K}{F} < 1.05$	522	569	379	435	224	261	2390
1.05 ≤	$\frac{K}{F} < 1.1$	233	592	510	710	467	468	2980
1.1 ≤	$\frac{K}{F}$	29	180	272	666	792	773	2712
Total		4617	6564	5186	7221	5483	4653	33724

B : Prix moyen des options (en \$)

		Jours < 30	30 ≤ Jours < 60	60 ≤ Jours < 90	90 ≤ Jours < 180	180 ≤ Jours < 270	270 ≤ Jours	Total
	$\frac{K}{F} < 0.9$	2,03	4,57	7,60	12,35	18,16	23,11	13,51
0.9 ≤	$\frac{K}{F} < 0.95$	3,37	9,56	16,47	27,18	39,54	51,02	22,80
0.95 ≤	$\frac{K}{F} < 0.975$	6,30	15,36	23,79	37,64	49,95	63,73	28,18
0.975 ≤	$\frac{K}{F} < 1$	11,52	23,44	33,67	47,20	62,93	77,18	34,24
1 ≤	$\frac{K}{F} < 1.025$	10,03	23,19	34,99	49,68	70,55	85,21	37,10
1.025 ≤	$\frac{K}{F} < 1.05$	4,25	11,52	19,29	32,66	54,40	69,04	25,38
1.05 ≤	$\frac{K}{F} < 1.1$	2,86	6,37	11,27	20,15	34,44	48,71	21,28
1.1 ≤	$\frac{K}{F}$	2,63	4,06	6,37	9,42	15,87	23,67	14,63
Total		7,08	13,52	19,30	25,78	34,38	43,39	23,69

C : Volatilité implicite moyenne (en %)

		Jours < 30	30 ≤ Jours < 60	60 ≤ Jours < 90	90 ≤ Jours < 180	180 ≤ Jours < 270	270 ≤ Jours	Total
	$\frac{K}{F} < 0.9$	42,64	34,85	31,94	31,28	29,09	28,43	31,29
0.9 ≤	$\frac{K}{F} < 0.95$	27,90	24,20	23,37	23,12	22,13	22,37	23,81
0.95 ≤	$\frac{K}{F} < 0.975$	23,52	21,15	20,81	21,57	20,11	20,80	21,46
0.975 ≤	$\frac{K}{F} < 1$	19,53	19,24	19,91	20,46	20,35	20,51	19,83
1 ≤	$\frac{K}{F} < 1.025$	16,99	18,28	19,00	20,40	20,97	20,75	18,94
1.025 ≤	$\frac{K}{F} < 1.05$	18,17	17,28	16,88	18,36	19,51	19,87	18,09
1.05 ≤	$\frac{K}{F} < 1.1$	23,27	18,32	17,69	17,81	17,96	18,27	18,39
1.1 ≤	$\frac{K}{F}$	36,79	26,04	22,22	20,00	19,08	18,94	20,23
Total		22,80	22,86	22,87	23,79	23,13	22,88	23,10

Nous avons utilisé des options d'achat et de vente sur l'indice S&P 500. Les données proviennent de OptionMetrics et couvrent la période de janvier 1996 à décembre 2012. Nous avons retenu les prix des options en date des mercredis avec un volume non nul et avec une position ouverte. Nous avons retenu les six options hors de la monnaie les plus liquides par paire de date et d'échéance (de plus de 7 jours et d'au plus 1 an). Le panneau A présente le nombre d'options par paire de degré de parité  $\left(\frac{K}{F}\right)$  et d'échéance; les panneaux B et C présentent le prix moyen (calculé comme la moyenne des prix offert et demandé) des options retenues pour chacune des paires et la volatilité implicite moyenne fournie par OptionMetrics, respectivement.

### **3.4 Indice VIX**

Les données sur l'indice de volatilité du S&P 500 (VIX) proviennent de la base de données de Yahoo! Finance sur Quandl.



## Chapitre 4

# Méthodologie

### 4.1 Choix des options

Le choix des options, à partir du mercredi suivant le troisième vendredi du mois pour une échéance tombant le troisième vendredi du mois suivant, nous permet d'obtenir un échantillon dont les échéances sont raisonnablement semblables (23 ou 30 jours). De même, la détention de ces options de la date initiale jusqu'à l'échéance permet de réduire l'impact des frais de transaction, notamment l'écart entre le prix de vente et d'achat, qui peut atteindre 5 % du coût de l'option, sur nos résultats. L'utilisation de rendements mensuels permet d'éviter les problèmes liés aux comparaisons de rendements sur de plus courtes périodes, notamment l'incomparabilité du rendement d'une semaine sur une option dont l'échéance est d'une semaine à celui d'une semaine sur une option dont l'échéance est de cinq semaines. Ainsi, ce choix d'options devrait permettre de faciliter la comparaison des résultats.

De plus, nous avons choisi d'utiliser des options à la monnaie et hors de la monnaie de manière à couvrir un éventail plus large de situations, et ainsi offrir un meilleur aperçu de la performance des méthodes de couverture utilisées. Dans le même esprit, le choix d'utiliser des options de vente et d'achat à la monnaie repose sur le fait que la distribution (sous la mesure physique) de la fonction de paiement à l'échéance est sensiblement différente entre ces deux types d'options, et que la performance d'une méthode de couverture peut différer selon le type de fonction de paiement. Comme l'approche de Basak et Chabakauri (2013) repose sur la mesure physique, cette différence pourrait se révéler être significative.

## 4.2 Choix des modèles

Cette section vise à présenter les deux modèles utilisées pour tester les approches de couverture, soient le mouvement brownien géométrique et le modèle de type GARCH de Heston et Nandi.

### 4.2.1 Mouvement brownien géométrique

Comme le MBG est bien connu, nous ne mentionnerons que notre utilisation d'une approximation d'Euler pour la discrétisation du processus, ce qui donne :

$$R_{t+1} = \log \left( \frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_t \quad (4.1)$$

où  $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\mu$  est la dérive (constante) et  $\sigma$  la volatilité (constante) du processus de rendement. La période n'est pas spécifiée, mais nous utilisons des rendements quotidiens lors de l'estimation des paramètres.

### 4.2.2 Modèle de Heston et Nandi

Le modèle de Heston et Nandi (2000) représente une version en temps discret du modèle à volatilité stochastique en temps continu de Heston (1993). Sa simplicité permet d'éviter les problèmes liés à la filtration des rendements lorsque l'on a recours à un modèle à plusieurs facteurs ou à des processus de sauts :

$$R_{t+1} = \log \left( \frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = r + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) h_t + \sqrt{h_t} z_t \quad (4.2)$$

$$\text{où } h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \left( z_{t-1} - \gamma \sqrt{h_{t-1}} \right)^2 \quad (4.3)$$

où  $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\lambda$  est la prime de risque (facteur) et  $\sigma$  la volatilité (stochastique) du processus de rendement. La structure du modèle permet de rendre compte de plusieurs caractéristiques importantes de la volatilité historique : l'autocorrélation et le retour à la moyenne ainsi que la réponse asymétrique aux chocs. Un peu d'algèbre nous permet d'obtenir la variance inconditionnelle du processus :

$$\sigma^2 = \frac{\omega + \alpha}{1 - \beta - \alpha\gamma^2} \quad (4.4)$$

Ce qui nous permet d'obtenir la persistance de la variance du processus, ainsi que la covariance entre les chocs et la variance :

$$E_{t-1} [h_{t+1}] = \sigma^2 + (\beta + \alpha\gamma^2) (h_t - \sigma^2) \quad (4.5)$$

$$Cov_{t-1} (R_t, h_{t+1}) = -2\alpha\gamma h_t \quad (4.6)$$

Ainsi, le retour à la moyenne est modéré par le facteur  $(\beta + \alpha\gamma^2)$ , reflétant la persistance des chocs sur la variance, et, lorsque les paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  sont positifs, un choc négatif aura un effet plus marqué sur la variance qu'un choc positif de même magnitude.

Comme le montrent Christoffersen et al. (2010), le passage à la mesure risque-neutre modifie les paramètres  $\lambda$  et  $\gamma$  comme suit :

$$\lambda^* = 0 \quad (4.7)$$

$$\gamma^* = \gamma + \lambda \quad (4.8)$$

Alternativement, l'utilisation d'une transformée de Esscher conditionnelle, introduite dans la littérature par Gerber et Shiu (1994), donne le même résultat. Comme on peut l'observer, le passage aux paramètres risque-neutre modifie la variance inconditionnelle et la trajectoire de la variance, mais laisse la variance initiale inchangée.

### 4.3 Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres des modèles est basée sur les rendements quotidiens de l'indice S&P 500 des dix années précédentes ainsi que sur un échantillon d'une année de prix d'options précédant chacun des mercredis contenus dans la période allant de janvier 1997 à décembre 2012. Les estimateurs sont choisis de manière à maximiser la log-vraisemblance des rendements, selon le modèle.

Il est important de souligner que notre utilisation de paramètres estimés sur des données historiques se distingue de l'approche axée sur l'utilisation de paramètres calibrés sur les données de marché, p. ex. sur la surface de volatilité, plus souvent rencontrée en pratique. Du point de vue théorique, Rebonato (2004) soulève certaines critiques par rapport à l'utilisation de la calibration sur les données de marché, sans toutefois condamner cette pratique. Sans entrer dans les détails, soulignons que son utilité repose sur deux aspects principaux, soient la possibilité de pouvoir utiliser les paramètres obtenus, p. ex. un volume et des frais de transaction suffisamment élevés et faibles, respectivement, pour pouvoir reproduire la mesure risque-neutre obtenu, ainsi que sur l'hypothèse d'efficacité du marché concerné. Par contre, du point de vue pratique, l'estimation des paramètres nous permet d'extraire la prime de risque du marché, ce qui n'est pas nécessairement possible lors de la calibration sur une surface de volatilité, et nous permet d'utiliser les mêmes paramètres pour obtenir une comparaison satisfaisante de la performance des modèles.

### 4.3.1 Mouvement brownien géométrique

L'estimation des paramètres du MBG vise à quantifier le prix du risque du marché ( $\frac{\mu-r}{\sigma}$ ) pour chaque date, et ne requière donc pas l'utilisation des données sur les options. En posant le processus de rendement :

$$R_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z_t \quad (4.9)$$

où  $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ . Étant donné la distribution normale du modèle, il est clair que les meilleurs estimateurs des paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  sont donnés par les statistiques :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T R_t, \text{ et} \quad (4.10)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T (R_t - \hat{\mu})^2 \quad (4.11)$$

où  $N$  représente le nombre de rendements quotidiens. De cette manière, nous obtenons 828 vecteurs de paramètres couvrant la période de janvier 1997 à décembre 2012, qui nous permettent d'estimer le prix du risque du marché.

### 4.3.2 Modèle de Heston et Nandi

L'estimation des paramètres pour le modèle de Heston et Nandi repose sur la maximisation de la log-vraisemblance des rendements quotidiens de l'indice S&P 500 et des prix d'options inclus dans notre ensemble de données. Nous présentons d'abord la méthode de calcul de la log-vraisemblance des rendements, ci-après  $L_R^{\mathbb{P}}$ , sous la mesure physique, avant de présenter la méthode utilisée pour les options, ci-après  $L_O^{\mathbb{Q}}$ , sous la mesure risque-neutre. De manière à empêcher l'un ou l'autre des jeux de données de dominer la fonction de log-vraisemblance, nous nous inspirons des travaux de Ornathanalai (2013) et accordons le même poids à toutes les données, en maximisant la fonction pondérée suivante :

$$L_{HN} = \frac{T + N}{2} \frac{L_R^{\mathbb{P}}}{T} + \frac{T + N}{2} \frac{L_O^{\mathbb{Q}}}{N} \quad (4.12)$$

où  $L_{HN}$  représente la log-vraisemblance,  $T$  représente le nombre de rendements quotidiens et  $N$  le nombre d'options. Notons que  $\frac{T+N}{2}$  sert de constante d'échelle et n'entre pas dans l'estimation des paramètres.

#### 4.3.2.1 Estimation de $L_R^{\mathbb{P}}$

Étant donné la structure des rendements du modèle donnée par l'équation 4.2, la fonction de densité conditionnelle des rendements quotidiens est donnée par une distribution normale :

$$p(R_t | h_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp \left\{ -\frac{(R_t - r - (\lambda - \frac{1}{2}) h_t)^2}{2h_t} \right\} \quad (4.13)$$

d'où nous obtenons la log-probabilité des rendements :

$$L_R^{\mathbb{P}}(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( \log 2\pi + \log h_t + \frac{(R_t - r - (\lambda - \frac{1}{2}) h_t)^2}{h_t} \right) \quad (4.14)$$

où  $\theta$  représente le vecteur de paramètres. Comme la variance n'est pas directement observable, nous devons la filtrer en utilisant les rendements :

$$h_{t+1} = \omega + \beta h_t + \alpha \left( z_t - \gamma \sqrt{h_t} \right)^2, \text{ où} \quad (4.15)$$

$$z_t = \frac{R_t - r - \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) h_t}{\sqrt{h_t}} \quad (4.16)$$

Afin de réduire l'influence d'un choix arbitraire de la valeur de la variance initiale, nous utilisons une année de rendements quotidiens précédant la période utilisée pour la maximisation de la log-probabilité pour amorcer la dynamique de la variance, en utilisant la variance inconditionnelle comme valeur de départ (équation (4.4)).

#### 4.3.2.2 Estimation de $L_O^{\mathbb{Q}}$

Pour l'estimation de la log-vraisemblance des prix des options, nous reprenons la fonction d'erreur l'erreur d'évaluation du prix pondérée par le vega utilisée entre autres par Carr et Wu (2007), Bakshi et al. (2008), Santa-Clara et Yan (2010) ainsi que Christoffersen et al. (2013), et qui prend la forme suivante :

$$\epsilon_i = \frac{\left( O_i^M - \hat{O}_i \right)}{\nu_i^M} \quad (4.17)$$

où  $O_i^M$  représente le prix de l'option  $i$  sur le marché,  $\hat{O}_i$  le prix estimé pour l'option  $i$  par le modèle et  $\nu_i^M$  le vega de l'option sous le modèle BSM en utilisant la volatilité implicite obtenue en inversant la formule BSM. À noter que le prix estimé de l'option  $i$  est une fonction de la date d'évaluation  $t$ , de son échéance  $T$ , du prix du sous-jacent  $S_t$ , de son prix d'exercice  $K_i$ , et des paramètres du modèle (incluant la variance au temps  $t$ ),  $\hat{O}_i = O(t_i, T_i, S_t, K_i, \Theta_t^*)$ ; nous reviendrons sur ce point ci-bas. En faisant l'hypothèse que ces erreurs suivent une distribution normale,  $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, s_\epsilon^2)$ , la log-vraisemblance est donnée par :

$$L_O^{\mathbb{Q}} = -\frac{1}{2} \sum_i^N \left( \log 2\pi + \log s_\epsilon^2 + \frac{\epsilon_i^2}{s_\epsilon^2} \right) \quad (4.18)$$

où  $s_\epsilon^2$  est donné par son estimateur  $\hat{s}_\epsilon^2 = \frac{1}{N} \sum_i^N \epsilon_i^2$ .

Comme le notent Christoffersen et al. (2013), ces erreurs représentent une approximation des erreurs sur la volatilité implicite, tout en ne nécessitant pas le calcul de la volatilité implicite des  $\hat{O}_i$  par inversion de la formule BSM à chaque étape de l'optimisation, ce qui peut devenir coûteux en temps de calcul. En effet,  $\nu$ , étant la première dérivée du prix de l'option  $O_i$ , donne une approximation linéaire de la sensibilité du prix de l'option à la volatilité du rendement du sous-jacent. En d'autres termes,

$$O_i^M - \hat{O}_i \approx \nu_i^M \left( IV_i^M - \hat{IV}_i \right) \iff \frac{O_i^M - \hat{O}_i}{\nu_i^M} \approx IV_i^M - \hat{IV}_i \quad (4.19)$$

Les erreurs basées sur la volatilité implicite offrent l'avantage de ne pas surpondérer les options dont le prix est plus élevé, que ce soit à une même date (où le prix des options à la monnaie sera plus élevé que le prix des options hors de la monnaie) ou à deux dates différentes (les prix des options seront plus élevés pendant les périodes de forte volatilité), réduisant le risque que la log-vraisemblance soit dominée par un nombre restreint de données. L'utilisation du vega plutôt que la volatilité implicite permet de maintenir cet avantage tout en minimisant le temps de calcul supplémentaire requis.

Pour calculer le prix des options sous le modèle HN,  $\hat{O}_i$ , nous avons recours à une inversion de Fourier en adoptant la simplification développée par Attari (2004), qui permet de réduire le nombre d'intégrales à évaluer numériquement de deux par option à une seule, en plus d'obtenir un dénominateur quadratique, réduisant le domaine d'évaluation et accélérant la convergence. Nous citons le résultat sans preuve, qui dépasse le cadre de ce mémoire, mais référons le lecteur intéressé à l'article original pour celle-ci. Tout d'abord, posons :

$$S_T = S_0 e^{(r-q)(T-t) + x(t,T)} \quad (4.20)$$

où  $x(t, T)$  représente le rendement aléatoire du sous-jacent pour la période de  $t$  à  $T$ . La valeur d'une option d'achat est donnée par :

$$C(t, T, S_t, K, \Theta^*) = S_t - \frac{e^{-r(T-t)}}{2} K - e^{-r(T-t)} K \times \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left( R(\phi) + \frac{I(\phi)}{\phi} \right) \cos(\phi l) + \left( I(\phi) - \frac{R(\phi)}{\phi} \right) \sin(\phi l)}{1 + \phi^2} d\phi \right] \quad (4.21)$$

où  $\Theta^*$  représente le vecteur des paramètres sous la mesure risque-neutre,  $l = \frac{Ke^{-r(T-t)}}{S_t e^{-q(T-t)}}$ ,  $R(\phi) = \Re[f(\phi; t, T)]$  et  $I(\phi) = \Im[f(\phi; t, T)]$  représentent la partie réelle et la partie imaginaire, respectivement, de la fonction caractéristique des rendements  $x(t, T)$ , donnée par :

$$f(\phi; t, T) = e^{A(\phi; t, T) + \omega B(\phi; t, T) h_{t+1}} \quad (4.22)$$

où les coefficients  $A(\phi; t, T)$  et  $B(\phi; t, T)$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} A(\phi; t, T) &= A(\phi; t+1, T) + \omega B(\phi; t+1, T) \\ &\quad - \frac{1}{2} \log(1 - 2\alpha B(\phi; t+1, T)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} B(\phi; t, T) &= -\frac{1}{2}\phi + (\beta + \alpha\gamma^2) B(\phi; t+1, T) \\ &\quad + \frac{(\phi - 2\alpha\gamma B(\phi; t+1, T))^2}{2(1 - 2\alpha B(\phi; t+1, T))} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ces deux coefficients doivent être calculés rétroactivement, avec la condition aux bornes imposant  $A(\phi; T, T) = B(\phi; T, T) = 0$ . La dérivation de la fonction caractéristique est présentée à l'annexe A.

De plus, comme nous l'avons noté ci-haut (4.2.2), la variance initiale n'est pas modifiée par le passage à la mesure risque-neutre, et la série des variances obtenues lors de l'estimation de  $L_R^{\mathbb{P}}$  nous donne les valeurs  $h_{t+1}^*$  nécessaires pour le calcul des prix des options sous notre modèle. Ainsi, nous pouvons calculer la valeur d'une option d'achat pour chaque date, échéance et prix d'exercice de notre ensemble de données sur les options, et le prix des options de vente s'obtient aisément par la parité entre les options d'achat et de vente.

#### 4.3.2.3 Algorithmes

Un des avantages de l'utilisation du critère de maximisation de la log-vraisemblance est son indépendance par rapport au système de coordonnées choisi pour effectuer l'optimisation, puisque le maximum ne dépend pas de ce dernier. Par contre, comme le souligne Zumbach (2000), pour certains choix de systèmes de coordonnées, la log-vraisemblance forme un sommet aplati plutôt qu'une parabole et il existe un sous-espace quasi unidimensionnel du système de coordonnées où se situent des solutions dégénérées, deux facteurs pouvant

compliquer la tâche de certains algorithmes d'optimisation, notamment ceux faisant appel à des expansions de Taylor de deuxième ordre.

Afin d'éviter ce type de solutions dégénérées, nous avons choisi d'utiliser un algorithme d'évolution différentielle (une métaheuristique d'optimisation stochastique) pour obtenir une première estimation du vecteur de paramètres à la première date, avant de procéder à une optimisation plus précise. Une présentation complète de l'algorithme d'évolution différentielle, proposé par Price et Storn (1997), dépasse le cadre de ce mémoire, mais, brièvement, il combine avantageusement des aspects des algorithmes génétiques et des stratégies évolutionnistes, permettant d'explorer efficacement l'espace vectoriel de solutions. Il nous permet donc d'éviter la forte dépendance sur le point de départ typique de l'estimation des modèles GARCH, et d'être raisonnablement sûrs d'obtenir les paramètres optimaux.

Comme le jeu de données change peu d'une date à l'autre (environ 5 jours de rendements de l'indice S&P 500 et 2 % (1/52) des options), nous pouvons utiliser les paramètres estimés à la date précédente comme point de départ pour appliquer l'algorithme BFGS (une simple transformation des paramètres permet de profiter des avantages d'une optimisation non contrainte). Un avantage de cette approche est que la variance anticipée du processus de rendement peut être sauvegardée en commun avec le vecteur de paramètres, ce qui permet d'éviter d'avoir à la recalculer lors de la modification des paramètres des stratégies de couverture. À l'instar du modèle MBG, nous obtenons 828 vecteurs de paramètres, couvrant la période de janvier 1997 à décembre 2012.

## 4.4 Évaluation des stratégies de couverture

Cette section vise à présenter la méthode de calcul des résultats obtenus, ainsi que les stratégies de couverture utilisées, c.-à-d. les méthodes delta-neutre ainsi que l'approche de Basak et Chabakauri (2013) appliquée aux modèles MBG et HN, lorsque la couverture est rebalancée quotidiennement.

### 4.4.1 Calcul des résultats

Afin d'évaluer la performance de chacune des méthodes de couverture (voir plus bas), nous nous basons sur un ensemble de données sur les options composé d'options de vente et d'achat, à la monnaie et hors de la monnaie, d'une échéance d'environ un mois (voir la section 4.1 pour plus de détails sur le choix des options entrant dans cet ensemble de données). Posons  $w_{i,t}$  la position de couverture prise sous la stratégie considérée au temps

$t$  pour l'option  $i$ , de valeur initiale  $V_i$ , de prix d'exercice  $K_i$  et d'échéance  $T$ . Ainsi, nous pouvons calculer le résultat cumulatif actualisé de la vente de l'option et de l'utilisation d'une stratégie de couverture comme suit :

$$W_i = V_i - e^{-rT} (S_T - K_i)^+ - \sum_{t=0}^{T-\Delta t} e^{-r(t+\Delta t)} w_{i,t} (F_{t+\Delta t} - F_t) \quad (4.25)$$

où  $r$  représente le taux sans risque (unique pour alléger l'écriture, mais qui peut être différent selon la période),  $F_t$  le prix de règlement d'un contrat à terme au temps  $t$  et le paiement à l'échéance actualisé au temps 0. Nous avons utilisé la fonction de paiement d'une option d'achat, mais le calcul pour une option de vente prend la même forme, en modifiant la fonction de paiement à l'échéance au troisième terme. L'annexe B présente la dérivation de l'équation (4.25) et montre pourquoi la position sur le marché monétaire en est absente.

Comme la valeur des options à la monnaie ou en période de forte volatilité est plus élevée, et donc que les pertes/gains absolus liés à ces options domineraient les résultats, nous pouvons calculer un rendement approximativement mensuel sur la base de la valeur initiale de l'option, comme suit :

$$R_i = \frac{W_i}{V_i} \quad (4.26)$$

Ainsi, lorsque la stratégie de couverture est parfaite, et sous l'hypothèse d'un marché complet, le rendement devrait être nul.

Nous avons choisi d'utiliser le contrat à terme comme outil de couverture pour mieux refléter la réalité. En effet, le sous-jacent à nos options est l'indice S&P 500, qui n'est pas directement négociable ; même pour des sous-jacents négociables, les contrats à terme sont souvent préférés en pratique puisqu'ils ne nécessitent pas de mise de fonds supplémentaires (au-delà d'une marge). Même si le delta d'un contrat à terme de type *futures* n'est pas égal à 1, la différence est souvent minime, surtout étant donné les courtes échéances utilisées ici ; de ce fait, nous avons préféré alléger les calculs en assumant l'égalité des deltas du sous-jacent et des contrats à terme utilisés.

Nos résultats sont obtenus en appliquant les stratégies de couverture présentées ci-dessous avec des rebalancements quotidiens de la couverture. Il est important de noter que les options sur le S&P 500 dont l'échéance tombe le troisième vendredi du mois (ou le dernier

jour ouvrable précédent) ont la particularité que la valeur de règlement est donnée par le prix de l'indice S&P 500 à l'ouverture du jour de l'échéance. Aux fins de calcul, la position de couverture adoptée le jour précédant la date d'échéance (habituellement un jeudi) est nulle, et le paiement à l'échéance est estimé être fait à la clôture des marchés le jour de l'échéance.

#### 4.4.2 Stratégies de couverture

Avant de présenter les stratégies de couverture utilisées pour calculer la couverture optimale, nous abordons d'abord le choix des paramètres pour les deux modèles considérés.

##### 4.4.2.1 Choix des paramètres

Étant donné les échéances relativement courtes des options sélectionnées (de 23 à 30 jours), nous avons choisi de suivre l'exemple de Bollen et Whaley (2004) et d'utiliser le même vecteur de paramètres pour toute la période de couverture, c.-à-d. celui donné par notre estimation à la date de vente de l'option en question. Dans le cas des modèles MBG, nous avons choisi d'utiliser le niveau de l'indice VIX comme approximation de la volatilité risque-neutre pour la période de couverture. Dans le cas des modèles HN, la variance initiale est incluse dans le vecteur de paramètres obtenus lors de l'estimation, et est donc basée sur onze années de rendements quotidiens de l'indice S&P 500, une période plus que suffisante pour éliminer un choix arbitraire. Les variances subséquentes sont obtenues en reprenant la méthode de filtration des rendements ci-haut (4.3.2).

Par contre, comme l'obtention du taux d'intérêt sans risque et du taux de dividende approximé pour chaque date  $t$  de calcul de la couverture est simple (voir le chapitre 3), les taux utilisés ne sont pas constants, mais ceux en vigueur à la date  $t$ . Pour alléger les calculs, le taux d'intérêt sans risque utilisé pour l'actualisation dans l'équation (4.25) est celui en vigueur à la date de vente de l'option  $i$ .

##### 4.4.2.2 Couverture delta-neutre

La couverture delta-neutre vise à immuniser un portefeuille (ou un droit contingent) contre les mouvements du sous-jacent en prenant une position compensatoire dans le sous-jacent Hull (1999) (ou, comme dans notre cas, un autre actif financier). Formellement, le delta d'une option de valeur  $V$  est la dérivée partielle de sa valeur par rapport au prix du sous-jacent :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (4.27)$$

En prenant une position  $-\Delta$  dans le sous-jacent, la position totale est immunisée contre de faibles mouvements dans le prix du sous-jacent. Par contre, puisque le prix du sous-jacent change avec le temps, modifiant le delta, la position doit être rebalancée périodiquement pour maintenir l'immunisation. Sous une hypothèse de continuité du processus de prix du sous-jacent et un rebalancement en temps continu, la couverture est parfaite ; c'est l'intuition derrière le modèle de Black-Scholes-Merton. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, ces hypothèses ne sont pas réalisables en pratique. Malgré tout, la stratégie de couverture delta-neutre offre une couverture efficace pour des rebalancements fréquents et est souvent utilisée en pratique, avec quelques ajustements, et représente donc une bonne base de comparaison pour les résultats de l'approche de Basak et Chabakauri.

**Modèle BSM** Sous le modèle Black-Scholes-Merton, la valeur d'une option d'achat  $C$  au temps  $t$  est donnée par (de manière à alléger l'écriture, nous omettons les indices  $t$  lorsque cela ne porte pas à confusion) :

$$C(\Theta) = e^{-r(T-t)} \left( F \Phi(d_1) - K \Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}) \right) \quad (4.28)$$

où  $\Theta$  représente le vecteur des paramètres,  $T$  l'échéance et  $d_1 = \frac{\log \frac{F}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$ . La dérivée partielle de la valeur de l'option de vente par rapport au prix du sous-jacent est donnée par :

$$\Delta_C = \Phi(d_1) \quad (4.29)$$

Par parité entre les options de vente et d'achat, le delta de l'option de vente correspondante  $P$  est donné par :

$$\Delta_P = \Phi(d_1) - 1 \quad (4.30)$$

Nous obtenons ainsi la méthode de calcul de la couverture optimale pour chaque option et à chaque date  $t$ , en utilisant les paramètres appropriés pour le calcul de  $d_1$ .

**Modèle HN** Sous le modèle HN, le delta est obtenue dans le cadre de la dérivation de la formule de la valeur d'une option d'achat (4.21), et est donné par :

$$\Delta_C = 1 + \frac{e^l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi) \frac{e^{-i(\phi+i)l}}{i(\phi+i)} d\phi \quad (4.31)$$

Et, par parité, on obtient le delta pour une option de vente :

$$\Delta_P = \frac{e^l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi) \frac{e^{-i(\phi+i)l}}{i(\phi+i)} d\phi \quad (4.32)$$

Ces deux formules nous permettent donc de calculer la couverture delta-neutre pour chaque option et à chaque date  $t$ , en utilisant les paramètres appropriés.

#### 4.4.2.3 Approche de Basak et Chabakauri

L'approche de couverture en temps discret de Basak et Chabakauri (2013) a été présentée à la section 2.2.4. Nous considérons le cas d'une option d'achat, le cas d'une option de vente s'obtenant en utilisant la fonction de paiement à l'échéance appropriée. En posant la fonction de paiement à l'échéance  $X_T = (S_T - K)^+$ , la valeur de réplication au temps  $t$  est donnée par :

$$G_t = \frac{1}{\xi_t} E_t \left[ \xi_T (S_T - K)^+ e^{-r(T-t)} \right] \quad (4.33)$$

où le déflateur  $\xi_t$  est donné par l'équation 2.49, puisqu'il ne dépend que de la trajectoire du prix du sous-jacent. Ainsi, la couverture optimale, en termes d'unités du sous-jacent, que ce soit sous le modèle GBM ou Heston et Nandi, est donnée par :

$$\theta_t^* = S_t \frac{E_t[e^{-r\Delta t} G_{t+\Delta t}] - G_t}{E_t[e^{-r\Delta t} S_{t+\Delta t}] - S_t} \quad (4.34)$$

Le calcul de la couverture optimale se fait facilement par simulation Monte Carlo. Pour ce faire, pour chaque journée où les marchés sont ouverts entre l'ouverture de la position et son échéance, 100 000 trajectoires de prix sont simulées selon les formules présentées à la section 4.2, ce qui permet d'assurer la stabilité des résultats étant donné les échéances maximales relativement courtes.

#### 4.4.2.4 Stratégie *ad hoc*

Pour fins de comparaison, nous avons aussi utilisé une stratégie que nous qualifions de *ad hoc*. Celle-ci prend la même forme que la stratégie delta-neutre avec le modèle BSM présentée ci-haut (4.4.2.2), à la différence que la volatilité utilisée lors du calcul du delta est la volatilité implicite obtenue par l'inversion de la formule de BSM étant donné le prix de l'option, pour chacune des options. D'un point de vue théorique, l'utilisation de différentes volatilités pour le même sous-jacent est profondément problématique. Par contre, du point de vue pratique, sous l'hypothèse d'une distribution normale des rendements, l'utilisation de la volatilité implicite propre à l'option est la seule manière de répliquer de manière efficace cette option, et permet donc d'obtenir la couverture optimale, comme le montrent Ahmad et Wilmott (2005).

# Chapitre 5

## Résultats

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux résultats de notre démarche. Nous débutons par la présentation des caractéristiques principales (moments, minimum et maximum) des rendements mensuels obtenus sous les différentes stratégies de couverture. Comme l'objectif d'une stratégie de couverture est de réduire le risque, notre discussion se concentrera sur les moments plus élevés de la distribution des rendements obtenus sous les différentes stratégies. Ensuite, nous examinerons les différences entre les positions de couverture prises sous les différentes stratégies, afin d'éclairer les différences des rendements.

### 5.1 Rendements

Le tableau 5.1 présentent quelques caractéristiques importantes des rendements mensuels des différentes stratégies de couverture, en plus des résultats obtenus en l'absence de couverture, pour l'ensemble des options dans notre ensemble de données.

Les caractéristiques en l'absence de stratégie de couverture sont présentées principalement à titre indicatif ; en effet, vu la non-linéarité de la fonction de paiement, nous avons effectué un test du  $\chi^2$  afin de vérifier la normalité de la distribution des rendements, et, bien que toutes les stratégies considérées satisfassent le test, on ne peut conclure positivement à la normalité des rendements obtenus en absence de couverture. Le fait n'est pas entièrement étonnant : la majorité des options (533 sur 764, soit environ 70 %) ont fini hors de la monnaie, et donnent un rendement de 100 %, le rendement maximal. Cette concentration de résultats permet aussi d'expliquer la forte asymétrie de la distribution.

TABLEAU 5.1: Caractéristiques des rendements  
(toutes les options)

	Sans couv.	Delta BSM	BC MBG	Delta HN	BC HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	29,57	23,87	23,51	26,04	23,93	25,40
Écart-type (%)	191,67	128,55	133,32	107,77	85,33	85,14
Asymétrie	-5,73	-0,06	-0,11	0,19	-0,35	0,14
Aplatissement (-3)	47,80	18,26	19,58	13,71	13,41	9,32
Minimum (%)	-2194	-1174	-1254	-749	-613	-575
Maximum(%)	100	930	991	767	540	512
Nombre d'options	764	764	764	764	764	764
Options exercées	231	231	231	231	231	231
Options non exercées	533	533	533	533	533	533

Ce tableau présente quelques caractéristiques des rendements mensuels des différentes stratégies de couverture, pour toutes les options considérées. Les résultats sont obtenus en vendant une option ayant une échéance d'environ un mois au temps 0 et en utilisant l'une des stratégies de couverture présentées jusqu'à son échéance  $T$  (ou aucune stratégie de couverture, dans le premier cas), avant d'obtenir le rendement  $R_i = \frac{W_i}{V_i}$  où  $W_i$  représente la somme des flux monétaires actualisés à la date initiale (vente de l'option  $i$ , profits et pertes et paiement à l'échéance), et  $V_i$  le prix de l'option  $i$  au temps 0. Les stratégies considérées sont : en absence de couverture (Sans couv.), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle BSM utilisant le VIX comme approximation de la volatilité (Delta BSM), la méthode de minimisation de la variance temporellement cohérente de Basak et Chabakauri appliquée à un mouvement brownien géométrique (BC MBG), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle de Heston et Nandi (Delta HN), la méthode de Basak et Chabakauri appliquée au modèle HN (BC HN) ainsi qu'une stratégie *ad hoc* reprenant la stratégie delta-neutre BSM, mais en utilisant la volatilité implicite donnée par le prix de l'option visée par la couverture (Delta *ad hoc*).

On peut tout d'abord remarquer que, pour la période de janvier 1997 à décembre 2012, la vente d'option semble avoir été une stratégie très profitable, quoique très risquée, comme le démontrent les rendements moyens observés. Il est aussi intéressant de noter que toutes les stratégies employées semblent pratiquement éliminer la forte asymétrie des rendements en absence de couverture, et de réduire la volatilité ainsi que l'aplatissement des rendements ; elles remplissent donc toutes leur objectif, quoique avec divers niveaux de réussite.

En premier lieu, on remarque qu'il y a peu de différence entre l'efficacité de la stratégie delta-neutre et la méthode de minimisation de la variance sous le modèle MBG, mais que cette dernière devient plus efficace lorsqu'on l'applique en combinaison avec le modèle HN, en réduisant davantage la volatilité des rendements que la stratégie delta-neutre utilisant le même modèle. Il est même un peu étonnant que cette combinaison de modèle et de stratégie de couverture obtienne une réduction de la volatilité similaire à la stratégie *ad hoc*, qui représente la meilleure stratégie, sous l'hypothèse de rendements suivant une

distribution normale. Mais, avant de pousser l'analyse plus loin, il peut être utile de séparer les résultats obtenus en fonction du type et du degré de parité à l'initiation afin de voir si ces performances représentent leur efficacité en général ou masquent des disparités.

## 5.2 Rendements par type d'option et par degré de parité

Les tableaux 5.2 et 5.3 ci-dessous présentent les mêmes caractéristiques des rendements mensuels qu'au tableau 5.1, mais selon le type d'option (de vente ou d'achat) et le degré de parité de l'option au moment de la vente (hors de la monnaie ou à la monnaie). Rappelons que le degré de parité est calculé comme étant  $\frac{K}{F}$ , où  $K$  représente le prix d'exercice et  $F$  le prix d'un contrat à terme de même échéance. Les options à la monnaie sont celles dont le degré de parité est proche de 1 au moment de la vente, et les options hors de la monnaie sont données par celles dont le degré de parité se rapproche de 0,95 dans le cas des options de vente et de 1,05 dans le cas des options d'achat.

Les résultats que nous obtenons sont comparables à ceux obtenus par Kim et Kim (2016), qui reprennent les travaux de Bakshi et Kapadia (2003) en utilisant un échantillon d'options sur l'indice S&P 500 plus large, couvrant la période de janvier 1996 à décembre 2014, qui correspond mieux à la période couverte par notre échantillon. Nous utilisons ces résultats comme base de comparaison parce qu'ils sont plus facilement comparables que les résultats obtenus par Badescu et al. (2014), Cao et Han (2013) et Carr et Wu (2014); en effet, ces derniers mesurent l'erreur de couverture en fonction du prix du sous-jacent (ou d'une fonction du prix du sous-jacent), alors que Kim et Kim (2016) présentent les erreurs de couverture moyennes en valeur absolue, en fonction de la valeur de l'indice ainsi que, comme nous, en fonction du prix de l'option.

Les résultats qu'ils obtiennent portent sur un portefeuille utilisant une couverture delta-neutre suite à l'achat d'une option, d'achat ou de vente, pour différentes échéances, sur l'indice S&P 500, et dont le degré de parité est donné par  $\frac{Se^{(r-q)\tau}}{K} - 1$ , soit le rapport inverse à celui que nous utilisons. Soulignons au passage que toutes les erreurs de couverture moyennes sont négatives. Nous comparons donc nos résultats à ceux obtenus pour les options d'échéance de 14 à 30 jours, et dont le degré de parité est de 0 à -7,5 % pour les options d'achat et de 0 à 7,5 % pour les options de vente. Pour les options de vente, Kim et Kim (2016) rapportent des pertes allant de -20,15 % pour les options près de la monnaie (de 0 à 2,5 % de degré de parité) à -39,32 % pour les options hors de la monnaie (5 à 7,5 % de degré de parité). Dans le cas des options d'achat, Kim et Kim (2016) rapportent des pertes, correspondant à des gains pour notre portefeuille, augmentant de -10,15 % pour les options près de la monnaie (0 à 2,5 % de degré de parité) à -61,71 % pour les options hors

de la monnaie (-5 à -7,5 % de degré de parité). Des regroupements différents d'options, une méthode différente de calcul du delta, un taux sans risque différent et l'utilisation du sous-jacent plutôt que des contrats à terme comme outil de couverture expliquent les différences entre nos résultats. La comparaison entre les écarts-types est compliquée par le fait que Kim et Kim (2016) pondère les écarts-types empiriques de l'échantillon par la racine carrée du nombre d'observations.

Il est clair que les résultats obtenus pour les options à la monnaie diffèrent de manière importante des résultats obtenus pour les options hors de la monnaie, de manière particulièrement évidente dans le cas des résultats obtenus en absence de stratégie de couverture. On observe aussi une différence importante entre la distribution des paiements à l'échéance pour les options d'achat et de vente à la monnaie, ce qui démontre que l'utilisation des deux types d'options s'avère importante dans l'analyse de l'efficacité des stratégies de couverture.

De plus, on remarque que l'adoption d'une stratégie de couverture, alors qu'elle a tendance à réduire le rendement moyen dans le cas des options de vente, a plutôt tendance à l'augmenter, quoique de manière modeste, dans le cas des options d'achat, et inverse la relation qui prévaut en absence de couverture, où le rendement moyen est supérieur pour les options de vente, lorsque l'on compare les options à la monnaie et hors de la monnaie séparément. On note aussi que les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement demeurent importants, contrairement aux options d'achat. Une explication possible de ce phénomène repose sur l'existence de sauts, principalement négatifs, dans la distribution des rendements de l'indice S&P 500, contre lesquels les stratégies de couverture offrent peu de protection. Plusieurs études paramétriques tendent à appuyer cette hypothèse, notamment Bakshi et al. (1997b) et Bates (2000); de plus, les résultats obtenus par Carr et Wu (2014) se rapprochent de leurs résultats théoriques sous le modèle de sauts avec diffusion de Merton.

Dans l'ensemble, le groupement par type et par degré de parité ne contredit pas les observations de la section précédente. Toutes les stratégies utilisées atteignent leur objectif de réduire la volatilité des positions, et, bien que, sous le modèle MBG, la stratégie delta-neutre semble donner de meilleurs résultats, la différence est mineure par rapport à la stratégie de minimisation de la variance. Par contre, cette dernière semble profiter de la modélisation plus riche des rendements et de la variance du modèle de Heston et Nandi, et son efficacité, au niveau de la réduction de la volatilité, rejoint ou surpasse celle de la stratégie *ad hoc*. Il est intéressant de noter que les pires résultats (en terme de rendement minimal, donc de perte) se produisent dans le cas des options de vente hors de la monnaie

TABLEAU 5.2: Caractéristiques des rendements  
(options de vente)

Options de vente (hors de la monnaie)						
	Sans couv.	Delta BSM	BC MBG	Delta HN	BC HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	48,39	18,09	17,95	22,90	19,50	18,14
Écart-type (%)	222,02	118,88	124,95	89,70	79,52	84,43
Asymétrie	-5,26	-6,36	-6,57	-2,97	-1,71	-2,83
Aplatissement (-3)	28,22	54,69	57,69	12,58	7,38	16,13
Minimum (%)	-1439	-1174	-1254	-529	-399	-575
Maximum(%)	100	195	192	253	287	269
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191
Options exercées	18	18	18	18	18	18
Options non exercées	172	172	172	172	172	172
Options de vente (à la monnaie)						
	Sans couv.	Delta BSM	BC MBG	Delta HN	BC HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	22,89	6,43	5,99	6,38	5,66	6,54
Écart-type (%)	141,59	30,32	31,05	34,34	27,82	29,04
Asymétrie	-2,51	-1,40	-1,53	-1,64	-1,09	-1,35
Aplatissement (-3)	6,81	3,40	3,90	3,98	1,96	3,57
Minimum (%)	-614	-132	-140	-154	-105	-115
Maximum(%)	100	66	65	56	58	63
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191
Options exercées	84	84	84	84	84	84
Options non exercées	107	107	107	107	107	107

Ce tableau présente quelques caractéristiques des rendements mensuels des différentes stratégies de couverture, pour les options de vente, selon leur degré de parité  $\left(\frac{K}{F}\right)$  au moment de la vente. Les résultats sont obtenus en vendant une option ayant une échéance d'environ un mois au temps 0 et en utilisant l'une des stratégies de couverture présentées jusqu'à son échéance  $T$  (ou aucune stratégie de couverture, dans le premier cas), avant d'obtenir le rendement  $R_i = \frac{W_i}{V_i}$  où  $W_i$  représente la somme des flux monétaires actualisés à la date initiale (vente de l'option  $i$ , profits et pertes et paiement à l'échéance), et  $V_i$  le prix de l'option  $i$  au temps 0. Les stratégies considérées sont : en absence de couverture (Sans couv.), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle BSM utilisant le VIX comme approximation de la volatilité (Delta BSM), la méthode de minimisation de la variance temporellement cohérente de Basak et Chabakauri appliquée à un mouvement brownien géométrique (BC MBG), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle de Heston et Nandi (Delta HN), la méthode de Basak et Chabakauri appliquée au modèle HN (BC HN) ainsi qu'une stratégie *ad hoc* reprenant la stratégie delta-neutre BSM, mais en utilisant la volatilité implicite donnée par le prix de l'option visée par la couverture (Delta *ad hoc*).

TABLEAU 5.3: Caractéristiques des rendements  
(options d'achat)

Options d'achat (à la monnaie)						
	Sans couv.	Delta BSM	BC MBG	Delta HN	BC HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	4,27	15,10	15,21	15,12	14,46	13,83
Écart-type (%)	117,12	32,05	32,91	37,25	30,61	32,82
Asymétrie	-1,11	-0,33	-0,40	-0,79	-0,25	-0,32
Aplatissement (-3)	0,59	1,12	1,34	1,59	0,70	1,19
Minimum (%)	-418	-87	-97	-122	-90	-87
Maximum(%)	100	105	105	104	101	102
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191
Options exercées	107	107	107	107	107	107
Options non exercées	84	84	84	84	84	84
Options d'achat (hors de la monnaie)						
	Sans couv.	Delta BSM	BC MBG	Delta HN	BC HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	42,73	55,86	54,91	59,77	56,10	63,09
Écart-type (%)	251,50	220,99	228,74	185,38	140,44	134,49
Asymétrie	-6,26	0,54	0,60	-0,02	-0,64	0,10
Aplatissement (-3)	44,14	1,43	1,55	3,60	5,15	1,21
Minimum (%)	-2194	-571	-609	-749	-613	-381
Maximum(%)	100	930	991	767	540	512
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191
Options exercées	21	21	21	21	21	21
Options non exercées	170	170	170	170	170	170

Ce tableau présente quelques caractéristiques des rendements mensuels des différentes stratégies de couverture, pour les options d'achat, selon leur degré de parité  $\left(\frac{K}{F}\right)$  au moment de la vente. Les résultats sont obtenus en vendant une option ayant une échéance d'environ un mois au temps 0 et en utilisant l'une des stratégies de couverture présentées jusqu'à son échéance  $T$  (ou aucune stratégie de couverture, dans le premier cas), avant d'obtenir le rendement  $R_i = \frac{W_i}{V_i}$  où  $W_i$  représente la somme des flux monétaires actualisés à la date initiale (vente de l'option  $i$ , profits et pertes et paiement à l'échéance), et  $V_i$  le prix de l'option  $i$  au temps 0. Les stratégies considérées sont : en absence de couverture (Sans couv.), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle BSM utilisant le VIX comme approximation de la volatilité (Delta BSM), la méthode de minimisation de la variance temporellement cohérente de Basak et Chabakauri appliquée à un mouvement brownien géométrique (BC MBG), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle de Heston et Nandi (Delta HN), la méthode de Basak et Chabakauri appliquée au modèle HN (BC HN) ainsi qu'une stratégie *ad hoc* reprenant la stratégie delta-neutre BSM, mais en utilisant la volatilité implicite donnée par le prix de l'option visée par la couverture (Delta *ad hoc*).

pour les stratégies reposant sur le MBG (et dans le cas de la stratégie *ad hoc*), alors que ce sont les options d'achat hors de la monnaie qui sont les plus problématiques en absence de couverture ou si l'on utilise le modèle HN. En fait, on peut voir que les erreurs de couverture des modèles MBG ne semblent pas privilégier les options de vente ou d'achat, puisque l'erreur de couverture maximale se trouve, quant à elle, du côté des options d'achat. En fait, ces dernières semblent représenter le plus grand défi pour toutes les stratégies de couverture utilisées.

Nous pouvons noter que les caractéristiques des rendements avec des stratégies sont relativement similaires dans le cas des options à la monnaie, notamment au niveau de leur volatilité, mais que les moments plus élevés des distributions présentent certaines différences. Les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement des options de vente à la monnaie indiquent la présence d'un risque contre lequel les stratégies étudiées semblent offrir une couverture au mieux partielle. Malgré tout, toutes les stratégies permettent de réduire la volatilité, et les rendements extrêmes (donnés par les rendements minimal et maximal) sont nettement réduits. Ceci dit, il est intéressant de noter que la stratégie de minimisation de la variance en combinaison avec le modèle HN semble mieux gérer ce risque.

Le cas des options hors de la monnaie est plus complexe. En effet, même si toutes les stratégies permettent de réduire la volatilité, avec divers niveaux de réussite, les stratégies utilisant un MBG semblent aggraver les risques non normaux dans le cas des options de vente hors de la monnaie, mais performant relativement bien dans le cas des options d'achat. Il est toutefois clair que l'utilisation d'un modèle à volatilité stochastique permet d'améliorer l'efficacité de la couverture ; en fait, l'absence de corrélation entre les chutes des cours (faisant augmenter la valeur des options de vente) et une augmentation de la volatilité est probablement la principale cause de la piètre performance des stratégies utilisant le MBG, dont la volatilité est constante (et donc non corrélée avec les rendements de l'indice).

La comparaison la plus intéressante semble être celle entre la stratégie *ad hoc* et la stratégie de minimisation de la variance temporellement cohérente utilisant le modèle HN. Lorsque l'on considère toutes les options, la stratégie de minimisation de la variance permet de réduire la volatilité des rendements presque aussi efficacement que la stratégie *ad hoc*, mais le coefficient d'aplatissement demeure problématique, indiquant une source de risque non couverte, et montre la supériorité de la stratégie *ad hoc*. Par contre, lorsque l'on examine les résultats obtenus de manière plus détaillée, une image différente apparaît.

Comme on peut le constater, mis à part le cas des options d'achat hors de la monnaie, l'efficacité de la méthode de Basak et Chabakauri (2013) à réduire la volatilité des rendements semble légèrement supérieure (ou au moins comparable) à celle de la stratégie *ad*

*hoc* ; et, dans le cas des options d'achat hors de la monnaie, leur efficacité est comparable. Par contre, au niveau des risques non normaux, indiqués par les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, il est clair que, malgré des difficultés dans le cas des options d'achat hors de la monnaie, la stratégie de minimisation de la variance est nettement supérieure dans le cas des options de vente hors de la monnaie, et que sa performance est intéressante dans le cas des options à la monnaie. Elle semble donc permettre de minimiser certains risques ignorés par les autres stratégies de couverture. Dans la prochaine section, nous allons examiner de plus près les positions prises par les stratégies de couverture étudiées afin de mettre en lumière la source de leurs différences.

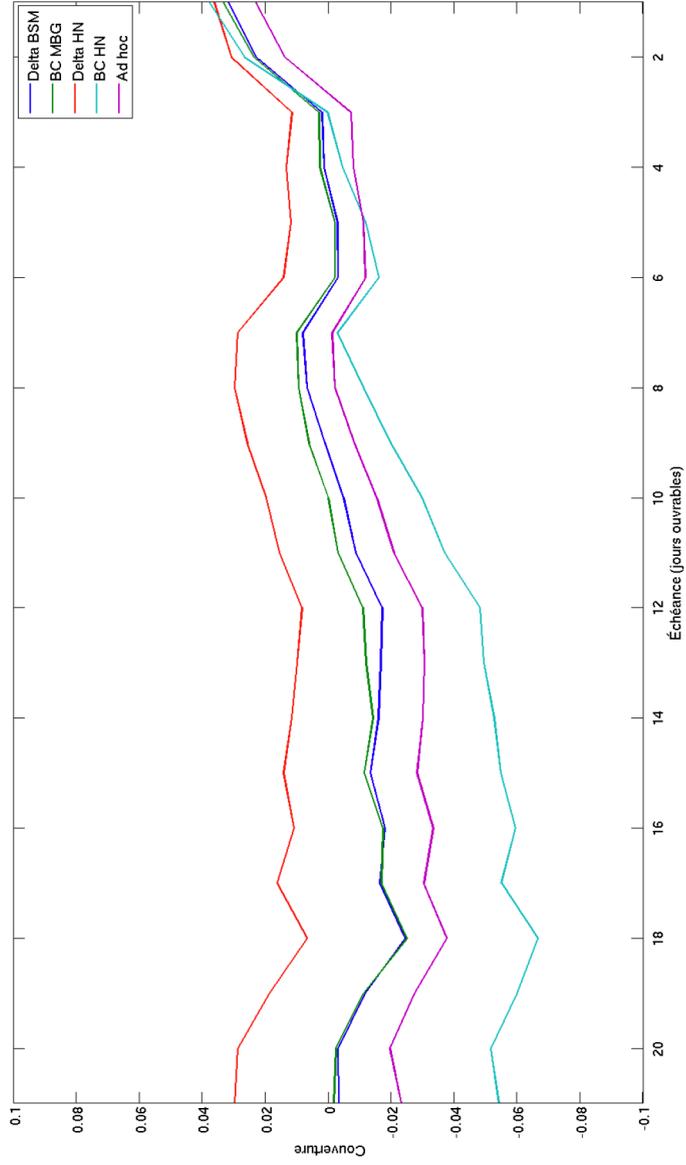
### 5.3 Positions de couverture

La figure 5.1 présente les positions de couverture moyennes des différentes stratégies pour toutes les options, en fonction du temps avant l'échéance, en jours ouvrables. Avant de passer à la figure 5.2, qui présente les mêmes résultats, mais par groupes d'options (de vente ou d'achat, à la monnaie ou hors de la monnaie), nous pouvons faire quelques observations préliminaires.

Tout d'abord, on note que, malgré des positions de couverture initiales différentes, toutes les stratégies de couverture convergent vers une position similaire lorsque l'échéance diminue. Ceci s'explique par l'hypothèse de la normalité de la distribution des rendements sous-jacente à tous les modèles étudiés (y compris la stratégie *ad hoc*) ; lorsque l'échéance restante est très courte, l'importance de la stochasticité de la volatilité du modèle HN devient très faible, pour enfin disparaître juste avant l'échéance de l'option. La différence qui subsiste dans la position de couverture juste avant l'échéance est due à la différence entre les volatilités données par les modèles.

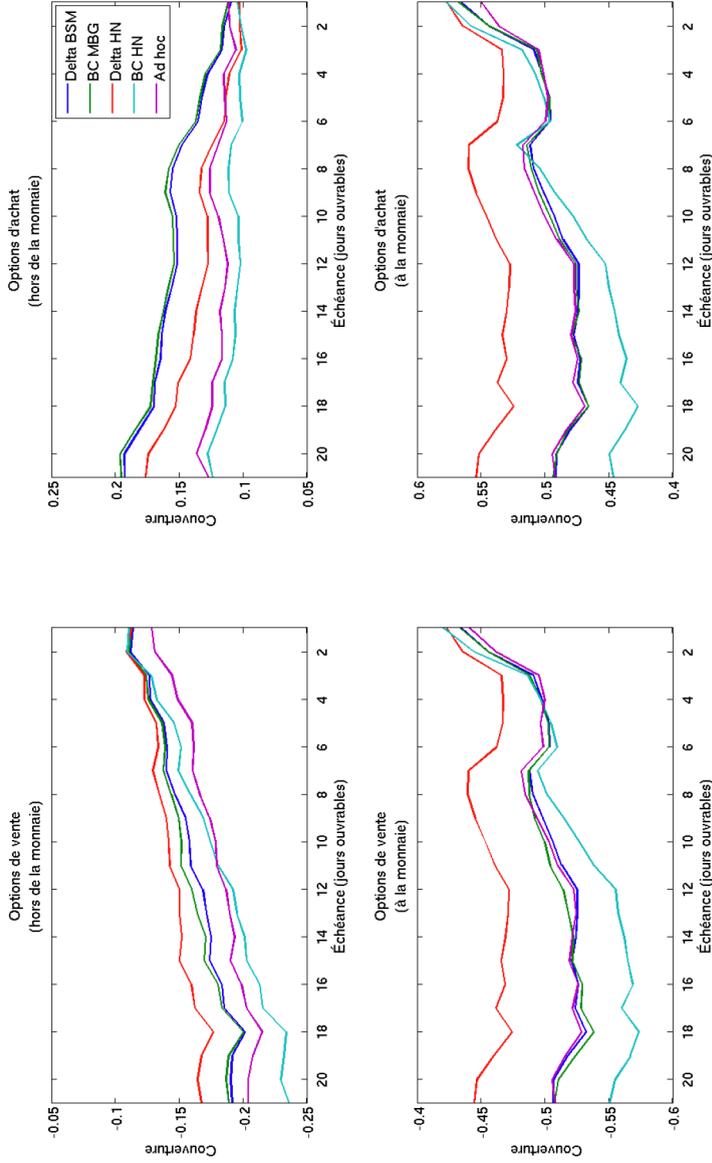
On peut aussi voir la faible différence entre les positions de couverture des stratégies utilisant le modèle MBG, ce qui explique largement les résultats semblables obtenus. Par contre, dans le cas des stratégies reposant sur le modèle HN, même si la position de couverture converge avec la diminution du temps restant avant l'échéance, on observe une position initiale très différente. En effet, alors que la stratégie delta-neutre prend en moyenne une position légèrement positive, la stratégie de Basak et Chabakauri (2013) adopte une position en moyenne négative. La comparaison entre les positions moyennes selon le type et le degré de parité des options permettra de mieux illustrer les différences entre les deux stratégies, mais, si nous anticipons sur la 5.4 plus bas, l'écart entre les deux stratégies reflète l'inclusion de l'incertitude quant aux erreurs de couverture futures,

FIGURE 5.1: Positions de couverture (moyennes) en fonction de l'échéance (toutes les options)



Moyenne des positions de couverture prises pour chacune des stratégies, en fonction de l'échéance des options (en jours ouvrables). Les stratégies utilisées sont : une stratégie delta-neutre sous le modèle BSM (Delta BSM, ligne bleue) et sous le modèle HN (Delta HN, ligne rouge), une stratégie de minimisation de la variance temporellement cohérente sous le modèle MBG (BC MBG, ligne verte) et sous le modèle HN (BC HN, ligne turquoise) ainsi qu'une stratégie *ad hoc* delta-neutre reposant sur la volatilité implicite liée au prix de l'option (Ad hoc, ligne mauve).

FIGURE 5.2: Positions de couverture (moyennes) en fonction de l'échéance et du type d'options



Moyenne des positions de couverture prises pour chacune des stratégies, en fonction de l'échéance (en jours ouvrables) et du type d'options (options de vente ou d'achat, à la monnaie ou hors de la monnaie au moment de la vente). Les stratégies utilisées sont : une stratégie delta-neutre sous le modèle BSM (Delta BSM, ligne bleue) et sous le modèle HN (Delta HN, ligne rouge), une stratégie de minimisation de la variance temporellement cohérente sous le modèle MBG (BC MBG, ligne verte) et sous le modèle HN (BC HN, ligne turquoise) ainsi qu'une stratégie *ad hoc* delta-neutre reposant sur la volatilité implicite liée au prix de l'option (Ad hoc, ligne mauve).

qui a tendance à augmenter avec la volatilité, qui elle-même augmente en présence de rendements négatifs de l'indice.

La comparaison des positions initiales moyennes des différentes stratégies indique des différences importantes dans leurs hypothèses implicites. Pour les stratégies reposant sur un MBG, la position de départ moyenne approximativement nulle s'explique aisément. En effet, rappelons que la position de couverture est donnée par le delta, soit :

$$\begin{aligned}\Delta_C &= \Phi(d_1) \\ \Delta_P &= \Phi(d_1) - 1\end{aligned}$$

où  $d_1 = \frac{\log \frac{F}{K} + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$  et où  $T$  représente l'échéance. Notre échantillon est constitué de quatre options : deux options à la monnaie, choisies pour que  $K \approx F$ , et deux options hors de la monnaie, avec  $K \approx 0,95F$  pour l'option de vente et  $K \approx 1,05F$  pour l'option d'achat. En utilisant l'approximation du logarithme  $\log x \approx x - 1$  lorsque  $x$  est petit, nous obtenons que, pour les options à la monnaie,  $\log \frac{F}{K} \approx 0$  et  $\log \frac{F}{K} \approx -0,05$  ( $\log \frac{F}{K} \approx 0,05$ ) pour l'option d'achat (de vente) hors de la monnaie.

En rappelant que l'écart-type des rendements de l'indice S&P 500 pour la période de 1996 à 2012 est de 20,56% (voir le tableau 3.1), si nous assumons une volatilité de 20,56% et une échéance de 21 jours ouvrables (pour une année de 252 jours ouvrables),  $\sigma\sqrt{T} \approx 0,0594$  et  $\frac{\sigma^2}{2}T \approx 0,0018$ . En conséquence, si l'on néglige le deuxième terme dans la formule de  $d_1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta_P^{K < F} &\approx \Phi\left(\frac{0,05}{0,0594}\right) - 1 && \approx -0,20 \\ \Delta_P^{F=K} &\approx \Phi(0) - 1 && \approx -0,50 \\ \Delta_C^{F=K} &\approx \Phi(0) && \approx 0,50 \\ \Delta_C^{K > F} &\approx \Phi\left(\frac{-0,05}{0,0594}\right) && \approx 0,20\end{aligned}$$

Si nous prenons la somme des positions, nous obtenons une position moyenne approximativement nulle, soit la position initiale de la figure 5.1 pour les stratégies reposant sur le modèle MBG, confirmant la constitution de notre échantillon d'options. Les résultats présentés à la figure 5.2, où les moyennes sont calculées suivant le type d'options et le degré de parité, confirment essentiellement cette intuition.

Avant d'examiner le modèle HN, on peut remarquer que la position initiale moyenne de la stratégie *ad hoc* est légèrement négative par rapport à celles utilisant le MBG, ce qui s'explique aisément par l'asymétrie de la volatilité implicite en fonction du degré de parité (le « smile »). En effet, alors que la position de couverture des options à la monnaie repose sur une même volatilité implicite, ce n'est pas le cas des options hors de la monnaie, alors que la volatilité implicite de l'option de vente est généralement supérieure à celle de l'option d'achat, requérant une position de couverture plus importante. Cette asymétrie explique aussi pourquoi la trajectoire des positions moyennes pour toutes les options de la stratégie *ad hoc* demeure inférieure à celles du modèle MBG. La similarité des trajectoires des options à la monnaie à la figure 5.2 provient de l'utilisation du VIX comme approximation de la volatilité du sous-jacent pour le modèle MBG ; en effet, le VIX mesure la volatilité implicite d'une option à la monnaie avec une échéance de 30 jours. Comme mentionné ci-haut, la position plus prononcée pour les options de vente hors de la monnaie par rapport aux options d'achat s'explique par le « smile » de la volatilité implicite.

Dans le cas des stratégies basées sur le modèle HN, on observe une différence importante entre la stratégie delta-neutre et la stratégie temporellement cohérente, absente de la comparaison entre les stratégies basées sur le MBG. Si l'on considère d'abord la stratégie delta-neutre, il est intéressant d'observer que la position de couverture semble très stable dans le temps comparativement aux autres stratégies, avec un biais initial positif. Si l'on se réfère aux tableaux 5.1 et 5.2, qui montrent son efficacité supérieure par rapport aux stratégies à volatilité constante, il est évident qu'une modélisation plus riche, notamment au niveau de la stochasticité de la volatilité, permet d'obtenir une meilleure couverture. De plus, lorsque l'on constate que les options d'achat sont plus susceptibles de finir dans la monnaie (107 c. 84 pour les options à la monnaie, 21 c. 18 dans le cas des options hors de la monnaie), le biais positif initial (sauf dans le cas des options d'achat hors de la monnaie) par rapport au modèle MBG explique en partie la meilleure efficacité de sa couverture. Par contre, nos résultats montrent que sa capacité à mieux modéliser les cas extrêmes (options hors de la monnaie) semble réduire son efficacité lors de la couverture d'options à la monnaie.

La figure 5.1 montre que les positions moyennes de couverture des deux stratégies utilisant le modèle HN convergent lorsque l'on s'approche de l'échéance de l'option, mais à partir d'une différence marquée au niveau de la position initiale, différence qui n'est pas présente lorsque l'on compare la stratégie de minimisation de la variance à la stratégie delta-neutre sous le modèle MBG. Comment peut-on expliquer cette différence, et, vu les résultats aux tableaux 5.1, 5.2 et 5.3, pourquoi semble-t-elle permettre à la stratégie de minimisation

de la variance d'être généralement plus efficace que la stratégie delta-neutre, lorsque le modèle inclut une volatilité stochastique ?

## 5.4 Cohérence temporelle

Dans cette section, nous allons examiner pourquoi l'introduction d'une volatilité stochastique dans notre modèle entraîne une modification de la couverture optimale lors de l'utilisation d'un critère de minimisation de la variance temporellement cohérent, en illustrant la différence entre l'impact de ce critère pour les modèles MBG et HN. Tout d'abord, rappelons que l'erreur de couverture sur une période  $(\Delta H_t)$ , sous une couverture delta-neutre avec une volatilité  $\sigma_t$  est donnée par l'équation (2.11) :

$$\Delta H_t = \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} \left( \sigma_t^2 - \left( \frac{\Delta S_t}{S_t} \right)^2 \right)$$

où  $V_t$  est la valeur du droit contingent au temps  $t$ . En conséquence, en omettant le facteur d'actualisation afin d'alléger l'écriture, l'espérance de l'erreur cumulative est donnée par l'équation (2.13) :

$$E_t \left[ \sum_t^{T-\Delta t} \Delta H_t \right] = E_t \left[ \sum_t^{T-\Delta t} \frac{1}{2} S_t^2 \left( \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} \right) \left( \sigma_t^2 - \left( \frac{\Delta S_t}{S_t} \right)^2 \right) \right]$$

Rappelons aussi que, dans la méthode de Basak et Chabakauri (2013), la valeur du droit contingent au temps  $t$ ,  $G_t$ , inclut l'espérance des erreurs entre le temps  $t$  et l'échéance du droit contingent,  $T$ , à l'équation (2.42) :

$$G_t = E_t \left[ X_T e^{-r(T-t)} \right] - E_t \left[ W_T^* e^{-r(T-t)} - W_t \right]$$

Comme expliqué dans la revue de littérature, l'inclusion de l'espérance de l'erreur de couverture dans la valeur du droit contingent modifie la couverture optimale, qui diffère maintenant de la couverture delta-neutre.

Dans le cas du modèle MBG, la variance de l'actif sous-jacent est constante, et, comme mentionné à la partie 2.1.1, le deuxième facteur dans l'espérance de l'erreur de couverture

$\left(\sigma_t^2 - \left(\frac{\Delta S_t}{S_t}\right)^2\right)$  tend vers 0. La différence entre la stratégie delta-neutre et la stratégie de minimisation de la variance provient donc essentiellement de l'effet de discrétisation, qui augmente légèrement la volatilité. Mais, comme nous l'avons vu à la section précédente, la différence est minime sur la position de couverture, et donc sur les résultats obtenus.

Il en va tout autrement dans le cas du modèle HN. En effet, ce dernier inclut par construction une corrélation entre la variance et les rendements du sous-jacent, habituellement négative. En d'autres termes, un choc négatif au rendement de l'actif sous-jacent entraîne une variance (et donc une volatilité) plus élevée à la période suivante. Comme l'erreur de couverture cumulative est directement liée au niveau de la volatilité, il est clair qu'un choc négatif entraînera aussi une augmentation de la variance de l'erreur de couverture future. On voit ainsi apparaître la raison pour laquelle la stratégie de minimisation temporellement cohérente tend à prendre une position de couverture inférieure à celle de la stratégie delta-neutre, et pourquoi cette différence diminue avec le temps : un choc négatif peu de temps après le début de la période de couverture aura un effet beaucoup plus important sur l'erreur de couverture qu'un choc négatif survenant vers la fin de la période ; la position négative dans le sous-jacent par rapport à la stratégie delta-neutre permet de se protéger contre une augmentation des erreurs de couverture en cas de choc négatif. La position de couverture anticipe donc les possibilités de l'état du monde futur, et l'évolution de la couverture.

Cette prise de position en fonction de la volatilité laisse penser que, par l'entremise de la corrélation entre les rendements du sous-jacent et de la volatilité future, la stratégie temporellement cohérente permet d'utiliser le sous-jacent comme outil de couverture contre le vega, soit la sensibilité du droit contingent à un changement de la volatilité. Pour vérifier cette possibilité, nous avons mené quelques régressions linéaires sur la différence entre les positions de couverture des deux stratégies utilisant le modèle HN, en utilisant le temps avant l'échéance et le vega des options (en utilisant la volatilité implicite correspondant au prix de l'option), dont les résultats sont présentés au tableau 5.4.

Comme on peut le voir, bien que les différences entre les trajectoires apparaissant aux figures 5.1 et 5.2 semblent dépendre principalement du temps avant l'échéance, la sensibilité de l'option à la volatilité offre une bien meilleure explication. La significativité du coefficient du facteur de l'échéance de la première régression s'explique clairement par le fait que le vega lui-même dépend de l'échéance de l'option. De plus, la figure 5.2 montre que l'écart entre les deux positions est plus important dans le cas des options à la monnaie, dont le vega est plus élevé que celles hors de la monnaie.

TABLEAU 5.4: Coefficients de régression  
(différence des positions de couverture pour le modèle HN)

	Échéance seulement	Vega seulement	Échéance et vega
$\beta_0$	-2,55E-04	0,0061**	0,0066**
(écart-type)	(7,08E-04)	(4,74E-04)	(5,63E-04)
$\beta_1$	-0,0045**		-1,27E-04
(écart-type)	(6,70E-05)		(7,20E-05)
$\beta_2$		-8,68E-04**	-8,57E-04**
(écart-type)		(7,04E-06)	(9,60E-06)
$R^2$	0,2566	0,5387	0,5388
$R^2$ ajusté	0,2565	0,5386	0,5387

Ce tableau présente les résultats d'une régression linéaire de la différence entre les positions de couverture obtenues en utilisant la stratégie de minimisation de la variance temporellement cohérente et la stratégie delta-neutre pour le modèle HN, sur le temps avant l'échéance, le vega de l'option (calculé en utilisant la volatilité implicite de liée à l'option) ou les deux :

$$w_{i,t}^{BC} - w_{i,t}^{DN} = \beta_0 + \beta_1 (T_i - t) + \beta_2 \nu_{i,t}$$

où  $w_{i,t}^{BC}$  et  $w_{i,t}^{DN}$  représente la position de couverture de la stratégie de minimisation de la variance (BC) et delta-neutre (DN), respectivement, pour l'option  $i$  au temps  $t$ ,  $T_i$  l'échéance de l'option  $i$  (la différence est en nombre de jours ouvrables), et  $\nu_{i,t}$  le vega de l'option  $i$  au temps  $t$ .

« \* » représente un résultat significatif à 5 %, et « \*\* » représente un résultat significatif à 1 %.

Dans le cadre de la couverture d'options sur l'indice S&P 500, il est clair que la possibilité d'une couverture partielle du vega par une couverture dynamique du sous-jacent (ou d'un contrat à terme sur celui-ci) n'est pas d'une grande utilité, étant donné que, grâce à la liquidité du marché, une meilleure couverture du vega peut être obtenue en utilisant d'autres options. Ceci dit, nos résultats tendent à démontrer que, lorsqu'un modèle adéquat est employé, une stratégie temporellement cohérente permet de prendre en compte plusieurs sources de risque, ce qui peut se révéler très utile dans des marchés moins liquides, où une couverture plus complète peut être difficile à réaliser, ou lorsqu'il n'existe tout simplement pas d'autres outils de couverture pour compléter la stratégie delta-neutre.

De plus, si l'on revient aux résultats présentés aux tableaux 5.2 et 5.3, que cette stratégie permet au moins en partie de réhabiliter l'utilisation de modèles plus complexes, alors que la stratégie delta-neutre, peu importe le modèle utilisé, n'est pas comparable aux résultats obtenus avec la stratégie *ad hoc*.



## Chapitre 6

# Résultats additionnels

Dans ce chapitre, nous présentons deux groupes de résultats additionnels. La section 6.1, présente les mêmes résultats qu'au chapitre précédent en incluant des frais de transaction pour les prises de position de couverture dans les contrats à terme. Puis, à la section 6.2, nous présentons les résultats obtenus lorsque l'estimation des paramètres utilisés pour les stratégies de couverture repose exclusivement sur les rendements quotidiens de l'indice S&P 500, autrement dit, sous la mesure physique.

### 6.1 Frais de transaction

Dans cette section, nous reprenons la même méthodologie qu'au chapitre précédent, mais en incluant des frais de transaction sur l'achat et la vente de contrats à terme. Comme le montrent les figures 5.1 et 5.2, la trajectoire de la position de couverture diffère selon la stratégie de couverture utilisée. À titre d'exemple, si l'on compare les stratégies utilisant le modèle HN, la stratégie delta-neutre semble maintenir une position de couverture nécessitant des rebalancements moins importants que l'approche de Basak et Chabakauri (2013), à l'exception du cas des options d'achat à la monnaie. L'inclusion de frais de transaction pourrait montrer que l'efficacité généralement supérieure de la seconde stratégie disparaît en frais de transaction. Nous tenons toutefois à souligner que les stratégies de couverture utilisées reprennent celles du chapitre précédent, et ne prennent pas en compte les frais dans l'objectif de minimisation de la variance.

Nous faisons l'hypothèse que les frais de transaction sont proportionnels au volume transigé. Par souci de simplification, nous avons adopté des frais de 0,25 \$ par unité de contrat à terme sur l'indice S&P 500, qui représente l'équivalent d'un point d'indice, soit le mouvement minimal du prix du contrat à terme et, étant donné l'importante liquidité de ces

contrats, l'écart habituel entre les cours vendeurs et acheteurs. En d'autres termes, en posant  $v$  le niveau des frais de transaction et  $\omega_t$  la position (signée) dans le contrat à terme au temps  $t$ , les frais de transaction sont données par :

$$\Upsilon_t = v \|\omega_t - \omega_{t-1}\| \quad (6.1)$$

Si l'on reprend l'équation (4.25) pour y inclure les frais de transaction  $\Upsilon_t$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} W_i = V_i - e^{-rT} (S_T - K_i)^+ - \sum_{t=0}^{T-\Delta t} e^{-r(t+\Delta t)} w_{i,t} (F_{t+\Delta t} - F_t) \\ - \sum_{t=0}^T e^{-rt} v \|\omega_t - \omega_{t-1}\| \end{aligned} \quad (6.2)$$

en posant  $\omega_{t-1} = 0$  et en rappelant que la position de couverture est fermée  $\omega_t = 0$  le jour précédant l'échéance de l'option. Le calcul du rendement reprend ensuite la même forme qu'à l'équation (4.26). Nous reprenons la même structure de présentation qu'au chapitre précédent : le tableau 6.1 présente les résultats pour l'ensemble des options, puis les tableaux 6.2 et 6.3 les résultats en fonction du type d'option et du degré de parité.

La comparaison avec les résultats sans frais de transaction au chapitre précédent ne révèle pas de différence importante, à l'exception du rendement mensuel moyen, qui a tendance à diminuer (à l'exception de l'absence de couverture), ce qui ne devrait pas nous étonner. On remarque quand même que les rendements ont tendance à diminuer de 2 à 5 % pour les différentes stratégies, sauf dans le cas des options d'achat hors de la monnaie, où la diminution est plus importante. Un fait un peu plus étonnant est que l'on remarque aussi dans certains cas une diminution de l'écart-type des rendements, mais la différence est faible. L'inclusion des frais de transaction proportionnels représentant l'écart entre les cours vendeurs et acheteurs ne modifie pas, hormis le rendements moyen, les résultats obtenus au chapitre précédent, et n'élimine pas l'efficacité supérieure de la stratégie de Basak et Chabakauri (2013) par rapport à la stratégie delta-neutre sous le modèle HN.

TABLEAU 6.1: Caractéristiques des rendements en présence de frais de transaction (toutes les options)

	Sans couv.	Delta BSM	BC MBG	Delta HN	BC HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	29,57	19,06	18,63	21,96	20,08	21,21
Écart-type (%)	191,67	127,54	132,31	107,07	85,35	84,45
Asymétrie	-5,73	-0,46	-0,51	-0,12	-0,71	-0,22
Aplatissement (-3)	44,80	19,88	21,28	13,87	14,57	10,55
Minimum (%)	-2194	-1231	-1312	-765	-663	-621
Maximum(%)	100	890	949	748	517	497
Nombre d'options	764	764	764	764	764	764
Options exercées	231	231	231	231	231	231
Options non exercées	533	533	533	533	533	533

Ce tableau présente quelques caractéristiques des rendements mensuels des différentes stratégies de couverture, pour toutes les options considérées, en présence de frais de transaction proportionnels au volume transigé (0,25 \$ par contrat à terme). Les résultats sont obtenus en vendant une option ayant une échéance d'environ un mois au temps 0 et en utilisant l'une des stratégies de couverture présentées jusqu'à son échéance  $T$  (ou aucune stratégie de couverture, dans le premier cas), avant d'obtenir le rendement  $R_i = \frac{W_i}{V_i}$  où  $W_i$  représente la somme des flux monétaires actualisés à la date initiale (vente de l'option  $i$ , profits et pertes et paiement à l'échéance), et  $V_i$  le prix de l'option  $i$  au temps 0. Les stratégies considérées sont : en absence de couverture (Sans couv.), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle BSM utilisant le VIX comme approximation de la volatilité (Delta BSM), la méthode de minimisation de la variance temporellement cohérente de Basak et Chabakauri appliquée à un mouvement brownien géométrique (BC MBG), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle de Heston et Nandi (Delta HN), la méthode de Basak et Chabakauri appliquée au modèle HN (BC HN) ainsi qu'une stratégie *ad hoc* reprenant la stratégie delta-neutre BSM, mais en utilisant la volatilité implicite donnée par le prix de l'option visée par la couverture (Delta *ad hoc*).

## 6.2 Mesure physique

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus lorsque les paramètres des différents modèles reposent sur la mesure physique, c.-à-d. en n'utilisant que les rendements quotidiens de l'indice S&P 500 des dix dernières années pour estimer les paramètres des modèles, sans prendre en compte les données fournies par les prix des options sur le marché. Dans le cas du modèle MBG, cela implique d'utiliser la volatilité estimée sur les dix dernières années plutôt que la volatilité espérée à court terme donnée par l'indice VIX. Le but de la comparaison est de voir à quel point l'efficacité de la stratégie temporellement cohérente repose sur les attentes du marché (par le biais de l'indice VIX ou des prix d'options). Nous reprenons la même structure qu'au chapitre précédent, en présentant d'abord les résultats pour toutes les options, avant de séparer ceux-ci selon le type et le degré de parité au moment de la vente. Le tableau 6.4 présente les résultats pour

TABLEAU 6.2: Caractéristiques des rendements en présence de frais de transaction (options de vente)

Options de vente (hors de la monnaie)

	Sans couv.	Delta BSM	BC MBG	Delta HN	BC HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	48,39	14,67	14,59	19,63	15,63	14,44
Écart-type (%)	222,02	122,78	129,01	91,95	81,15	86,60
Asymétrie	-5,26	-6,53	-6,72	-3,10	-1,93	-3,11
Aplatissement (-3)	28,22	57,14	59,94	13,57	8,42	18,36
Minimum (%)	-1439	-1231	-1312	-567	-438	-621
Maximum(%)	100	189	186	246	279	262
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191
Options exercées	18	18	18	18	18	18
Options non exercées	172	172	172	172	172	172

Options de vente (à la monnaie)

	Sans couv.	Delta BSM	BC MBG	Delta HN	BC HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	22,89	4,12	3,63	4,05	3,25	4,11
Écart-type (%)	141,59	30,54	31,33	34,64	27,96	29,31
Asymétrie	-2,51	-1,40	-1,54	-1,63	-1,10	-1,35
Aplatissement (-3)	6,81	3,39	3,90	3,94	1,99	3,53
Minimum (%)	-614	-135	-144	-158	-109	-119
Maximum(%)	100	64	63	53	54	61
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191
Options exercées	84	84	84	84	84	84
Options non exercées	107	107	107	107	107	107

Ce tableau présente quelques caractéristiques des rendements mensuels des différentes stratégies de couverture, pour les options de vente, selon leur degré de parité ( $\frac{K}{F}$ ) au moment de la vente, en présence de frais de transaction proportionnels au volume transigé (0,25 \$ par contrat à terme). Les résultats sont obtenus en vendant une option ayant une échéance d'environ un mois au temps 0 et en utilisant l'une des stratégies de couverture présentées jusqu'à son échéance  $T$  (ou aucune stratégie de couverture, dans le premier cas), avant d'obtenir le rendement  $R_i = \frac{W_i}{V_i}$  où  $W_i$  représente la somme des flux monétaires actualisés à la date initiale (vente de l'option  $i$ , profits et pertes et paiement à l'échéance), et  $V_i$  le prix de l'option  $i$  au temps 0. Les stratégies considérées sont : en absence de couverture (Sans couv.), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle BSM utilisant le VIX comme approximation de la volatilité (Delta BSM), la méthode de minimisation de la variance temporellement cohérente de Basak et Chabakauri appliquée à un mouvement brownien géométrique (BC MBG), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle de Heston et Nandi (Delta HN), la méthode de Basak et Chabakauri appliquée au modèle HN (BC HN) ainsi qu'une stratégie *ad hoc* reprenant la stratégie delta-neutre BSM, mais en utilisant la volatilité implicite donnée par le prix de l'option visée par la couverture (Delta *ad hoc*).

TABLEAU 6.3: Caractéristiques des rendements en présence de frais de transaction (options d'achat)

Options d'achat (à la monnaie)						
	Sans couv.	Delta BSM	BC MBG	Delta HN	BC HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	4,27	12,22	12,32	12,03	11,54	10,85
Écart-type (%)	117,12	31,85	32,68	36,89	30,36	32,60
Asymétrie	-1,11	-0,33	-0,39	-0,79	-0,24	-0,31
Aplatissement (-3)	0,59	1,12	1,35	1,64	0,71	1,19
Minimum (%)	-418	-89	-99	-125	-92	-89
Maximum(%)	100	101	101	101	97	99
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191
Options exercées	107	107	107	107	107	107
Options non exercées	84	84	84	84	84	84
Options d'achat (hors de la monnaie)						
	Sans couv.	Delta BSM	BC MBG	Delta HN	BC HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	42,73	45,25	43,96	52,14	49,91	55,43
Écart-type (%)	251,50	217,53	225,13	185,53	140,33	132,64
Asymétrie	-6,26	0,47	0,53	-0,16	-0,85	-0,03
Aplatissement (-3)	44,14	1,38	1,48	3,74	5,79	1,49
Minimum (%)	-2194	-578	-616	-765	-663	-412
Maximum(%)	100	890	949	748	517	497
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191
Options exercées	21	21	21	21	21	21
Options non exercées	170	170	170	170	170	170

Ce tableau présente quelques caractéristiques des rendements mensuels des différentes stratégies de couverture, pour les options d'achat, selon leur degré de parité  $\left(\frac{K}{F}\right)$  au moment de la vente, en présence de frais de transaction proportionnels au volume transigé (0,25 \$ par contrat à terme). Les résultats sont obtenus en vendant une option ayant une échéance d'environ un mois au temps 0 et en utilisant l'une des stratégies de couverture présentées jusqu'à son échéance  $T$  (ou aucune stratégie de couverture, dans le premier cas), avant d'obtenir le rendement  $R_i = \frac{W_i}{V_i}$  où  $W_i$  représente la somme des flux monétaires actualisés à la date initiale (vente de l'option  $i$ , profits et pertes et paiement à l'échéance), et  $V_i$  le prix de l'option  $i$  au temps 0. Les stratégies considérées sont : en absence de couverture (Sans couv.), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle BSM utilisant le VIX comme approximation de la volatilité (Delta BSM), la méthode de minimisation de la variance temporellement cohérente de Basak et Chabakauri appliquée à un mouvement brownien géométrique (BC MBG), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle de Heston et Nandi (Delta HN), la méthode de Basak et Chabakauri appliquée au modèle HN (BC HN) ainsi qu'une stratégie *ad hoc* reprenant la stratégie delta-neutre BSM, mais en utilisant la volatilité implicite donnée par le prix de l'option visée par la couverture (Delta *ad hoc*).

TABLEAU 6.4: Caractéristiques des rendements  
(mesure physique, toutes les options)

	Sans couv.	Delta BSM	BC (Q) MBG	BC (P) MBG	Delta HN	BC (Q) HN	BC (P) HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	29,57	23,87	23,72	17,76	26,04	23,93	25,01	25,40
Écart-type (%)	191,67	128,55	133,32	250,30	107,77	85,33	86,15	85,14
Asymétrie	-5,73	-0,06	-0,11	-7,55	0,19	-0,35	0,38	0,14
Aplatissement (-3)	44,80	18,26	19,58	155,68	13,71	13,41	14,06	9,32
Minimum (%)	-2194	-1174	-1254	-4592	-749	-613	-474	-575
Maximum(%)	100	930	991	1567	767	540	727	512
Nombre d'options	764	764	764	764	764	764	764	764
Options exercées	231	231	231	231	231	231	231	231
Options non exercées	533	533	533	533	533	533	533	533

Ce tableau présente quelques caractéristiques des rendements mensuels des différentes stratégies de couverture, pour toutes les options considérées. Les résultats sont obtenus en vendant une option ayant une échéance d'environ un mois au temps 0 et en utilisant l'une des stratégies de couverture présentées jusqu'à son échéance  $T$  (ou aucune stratégie de couverture, dans le premier cas), avant d'obtenir le rendement  $R_i = \frac{W_i}{V_i}$  où  $W_i$  représente la somme des flux monétaires actualisés à la date initiale (vente de l'option  $i$ , profits et pertes et paiement à l'échéance), et  $V_i$  le prix de l'option  $i$  au temps 0. Les stratégies considérées sont : en absence de couverture (Sans couv.), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle BSM utilisant le VIX comme approximation de la volatilité (Delta BSM), la méthode de minimisation de la variance temporellement cohérente de Basak et Chabakauri appliquée à un mouvement brownien géométrique (BC MBG), où Q indique l'utilisation de l'indice VIX comme approximation de la volatilité et P la mesure physique, une stratégie delta-neutre basée sur le modèle de Heston et Nandi (Delta HN), la méthode de Basak et Chabakauri appliquée au modèle HN (BC HN), avec Q (P) indiquant une estimation des paramètres incluant (excluant) les options, ainsi qu'une stratégie *ad hoc* reprenant la stratégie delta-neutre BSM, mais en utilisant la volatilité implicite donnée par le prix de l'option visée par la couverture (Delta *ad hoc*).

toutes les options. Afin de maintenir la comparabilité des résultats, les mêmes variables aléatoires sont employées pour toutes les simulations Monte Carlo utilisées lors du calcul de la couverture optimale.

Comme on peut le voir, pour le modèle HN, les rendements de la stratégie de minimisation ne semblent pas être modifiés de manière significative dans l'ensemble, même si l'on remarque que le rendement minimal est nettement amélioré, quoiqu'au prix d'une erreur positive accentuée. Le cas du modèle MBG est plus problématique ; en fait, l'extrême différence au niveau des moments est presque entièrement due au rendement minimum de -4592 % ; si celui-ci est éliminé des résultats, les caractéristiques reviennent à des valeurs plus proches des autres stratégies utilisant le même modèle. Les tableaux 6.5 et 6.6 présentent les résultats selon le type et le degré de parité initial des options.

Encore une fois, les résultats obtenus avec le modèle HN sont relativement peu modifiés par l'utilisation ou non du prix des options dans l'estimation des paramètres. Du côté du

TABLEAU 6.5: Caractéristiques des rendements  
(mesure physique, options de vente)

Options de vente (hors de la monnaie)								
	Sans couv.	Delta BSM	BC (Q) MBG	BC (P) MBG	Delta HN	BC (Q) HN	BC (P) HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	48,39	18,09	17,95	16,05	22,90	19,50	16,71	18,14
Écart-type (%)	222,02	118,88	124,95	103,51	89,70	79,52	90,27	84,43
Asymétrie	-5,26	-6,36	-6,57	-2,83	-2,97	-1,71	-2,52	-2,83
Aplatissement (-3)	28,22	54,69	57,69	11,89	12,58	7,38	9,05	16,13
Minimum (%)	-1439	-1174	-1254	-646	-529	-399	-474	-575
Maximum(%)	100	195	192	278	253	287	244	269
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191	191	191
Options exercées	18	18	18	18	18	18	18	18
Options non exercées	172	172	172	172	172	172	172	172
Options de vente (à la monnaie)								
	Sans couv.	Delta BSM	BC (Q) MBG	BC (P) MBG	Delta HN	BC (Q) HN	BC (P) HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	22,89	6,43	5,99	4,50	6,38	5,66	5,52	6,54
Écart-type (%)	141,59	30,32	31,05	33,34	34,34	27,82	26,85	29,04
Asymétrie	-2,51	-1,40	-1,53	-2,11	-1,64	-1,09	-1,25	-1,35
Aplatissement (-3)	6,81	3,40	3,90	7,86	3,98	1,96	2,81	3,57
Minimum (%)	-614	-132	-140	-175	-154	-105	-109	-115
Maximum(%)	100	66	65	63	56	58	54	63
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191	191	191
Options exercées	84	84	84	84	84	84	84	84
Options non exercées	107	107	107	107	107	107	107	107

Ce tableau présente quelques caractéristiques des rendements mensuels des différentes stratégies de couverture, pour les options de vente, selon leur degré de parité  $\left(\frac{K}{F}\right)$  au moment de la vente. Les résultats sont obtenus en vendant une option ayant une échéance d'environ un mois au temps 0 et en utilisant l'une des stratégies de couverture présentées jusqu'à son échéance  $T$  (ou aucune stratégie de couverture, dans le premier cas), avant d'obtenir le rendement  $R_i = \frac{W_i}{V_i}$  où  $W_i$  représente la somme des flux monétaires actualisés à la date initiale (vente de l'option  $i$ , profits et pertes et paiement à l'échéance), et  $V_i$  le prix de l'option  $i$  au temps 0. Les stratégies considérées sont : en absence de couverture (Sans couv.), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle BSM utilisant le VIX comme approximation de la volatilité (Delta BSM), la méthode de minimisation de la variance temporellement cohérente de Basak et Chabakauri appliquée à un mouvement brownien géométrique (BC MBG), où Q indique l'utilisation de l'indice VIX comme approximation de la volatilité et P la mesure physique, une stratégie delta-neutre basée sur le modèle de Heston et Nandi (Delta HN), la méthode de Basak et Chabakauri appliquée au modèle HN (BC HN), avec Q (P) indiquant une estimation des paramètres incluant (excluant) les options, ainsi qu'une stratégie *ad hoc* reprenant la stratégie delta-neutre BSM, mais en utilisant la volatilité implicite donnée par le prix de l'option visée par la couverture (Delta *ad hoc*).

TABLEAU 6.6: Caractéristiques des rendements  
(mesure physique, options d'achat)

Options d'achat (à la monnaie)								
	Sans couv.	Delta BSM	BC (Q) MBG	BC (P) MBG	Delta HN	BC (Q) HN	BC (P) HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	4,27	15,10	15,21	13,65	15,12	14,46	14,56	13,83
Écart-type (%)	117,12	32,05	32,91	36,08	37,25	30,61	30,55	32,82
Asymétrie	-1,11	-0,33	-0,40	-0,83	-0,79	-0,25	-0,28	-0,32
Aplatissement (-3)	0,59	1,12	1,34	2,41	1,59	0,70	0,75	1,19
Minimum (%)	-418	-87	-97	-1439	-122	-90	-81	-87
Maximum(%)	100	105	105	101	104	101	100	102
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191	191	191
Options exercées	107	107	107	107	107	107	107	107
Options non exercées	84	84	84	84	84	84	84	84
Options d'achat (hors de la monnaie)								
	Sans couv.	Delta BSM	BC (Q) MBG	BC (P) MBG	Delta HN	BC (Q) HN	BC (P) HN	Delta <i>ad hoc</i>
Moyenne (%)	42,73	55,86	54,91	36,83	59,77	56,10	63,24	63,09
Écart-type (%)	251,50	220,99	228,74	487,75	185,38	140,44	134,07	134,49
Asymétrie	-6,26	0,54	0,60	-4,20	-0,02	-0,64	0,43	0,10
Aplatissement (-3)	44,14	1,43	1,55	41,99	3,60	5,15	5,03	1,21
Minimum (%)	-2194	-571	-609	-4592	-749	-613	-434	-381
Maximum(%)	100	930	991	1567	767	540	727	512
Nombre d'options	191	191	191	191	191	191	191	191
Options exercées	21	21	21	21	21	21	21	21
Options non exercées	170	170	170	170	170	170	170	170

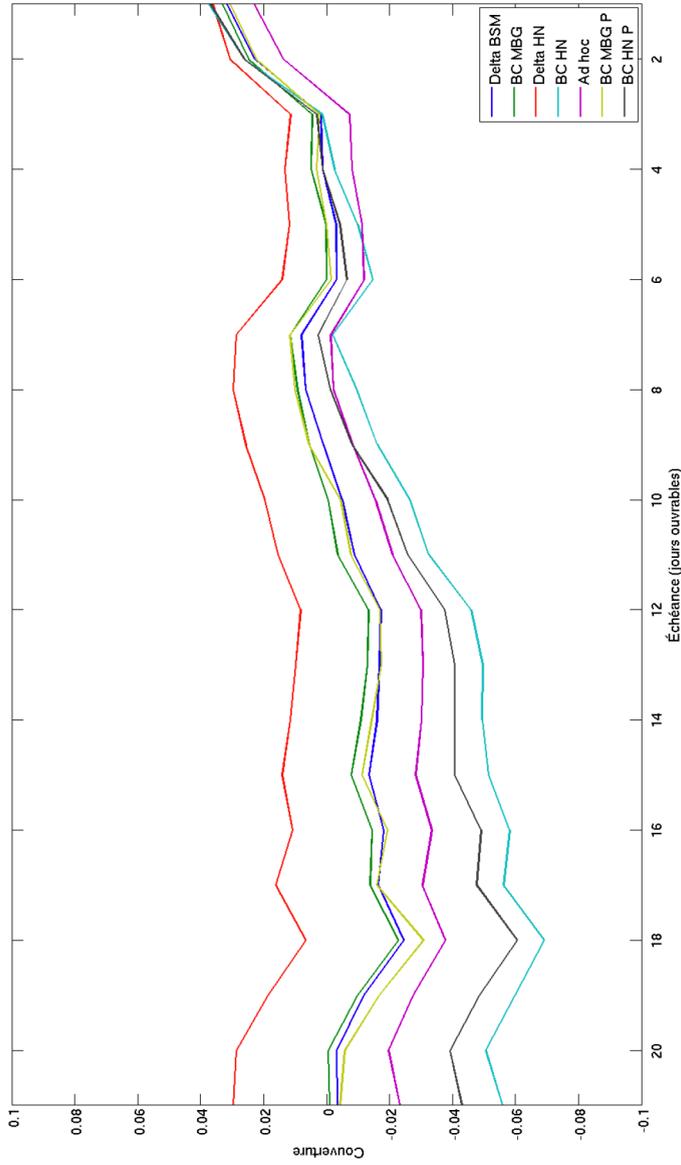
Ce tableau présente quelques caractéristiques des rendements mensuels des différentes stratégies de couverture, pour les options d'achat, selon leur degré de parité  $\left(\frac{K}{F}\right)$  au moment de la vente. Les résultats sont obtenus en vendant une option ayant une échéance d'environ un mois au temps 0 et en utilisant l'une des stratégies de couverture présentées jusqu'à son échéance  $T$  (ou aucune stratégie de couverture, dans le premier cas), avant d'obtenir le rendement  $R_i = \frac{W_i}{V_i}$  où  $W_i$  représente la somme des flux monétaires actualisés à la date initiale (vente de l'option  $i$ , profits et pertes et paiement à l'échéance), et  $V_i$  le prix de l'option  $i$  au temps 0. Les stratégies considérées sont : en absence de couverture (Sans couv.), une stratégie delta-neutre basée sur le modèle BSM utilisant le VIX comme approximation de la volatilité (Delta BSM), la méthode de minimisation de la variance temporellement cohérente de Basak et Chabakauri appliquée à un mouvement brownien géométrique (BC MBG), où Q indique l'utilisation de l'indice VIX et P la mesure physique, une stratégie delta-neutre basée sur le modèle de Heston et Nandi (Delta HN), la méthode de Basak et Chabakauri appliquée au modèle HN (BC HN), avec Q (P) indiquant une estimation des paramètres incluant (excluant) les options, ainsi qu'une stratégie *ad hoc* reprenant la stratégie delta-neutre BSM, mais en utilisant la volatilité implicite donnée par le prix de l'option visée par la couverture (Delta *ad hoc*).

modèle MBG, deux éléments ressortent : d'abord, la couverture des options de vente hors de la monnaie a été grandement améliorée par rapport aux autres stratégies, alors que les résultats pour les options d'achat hors de la monnaie illumine la source du problème observé au tableau 6.4. Mentionnons toutefois que l'élimination du résultat extrême minimal rapproche les caractéristiques principales des autres modèles MBG, hormis au niveau du coefficient d'aplatissement ajusté, qui devient 4,27, beaucoup plus proche des modèles HN.

Les figures 6.1 et 6.2 ci-dessous reprennent celles du chapitre précédent, en ajoutant les niveaux moyens de couverture pour les stratégies utilisant les estimations sous la mesure physique exclusivement.

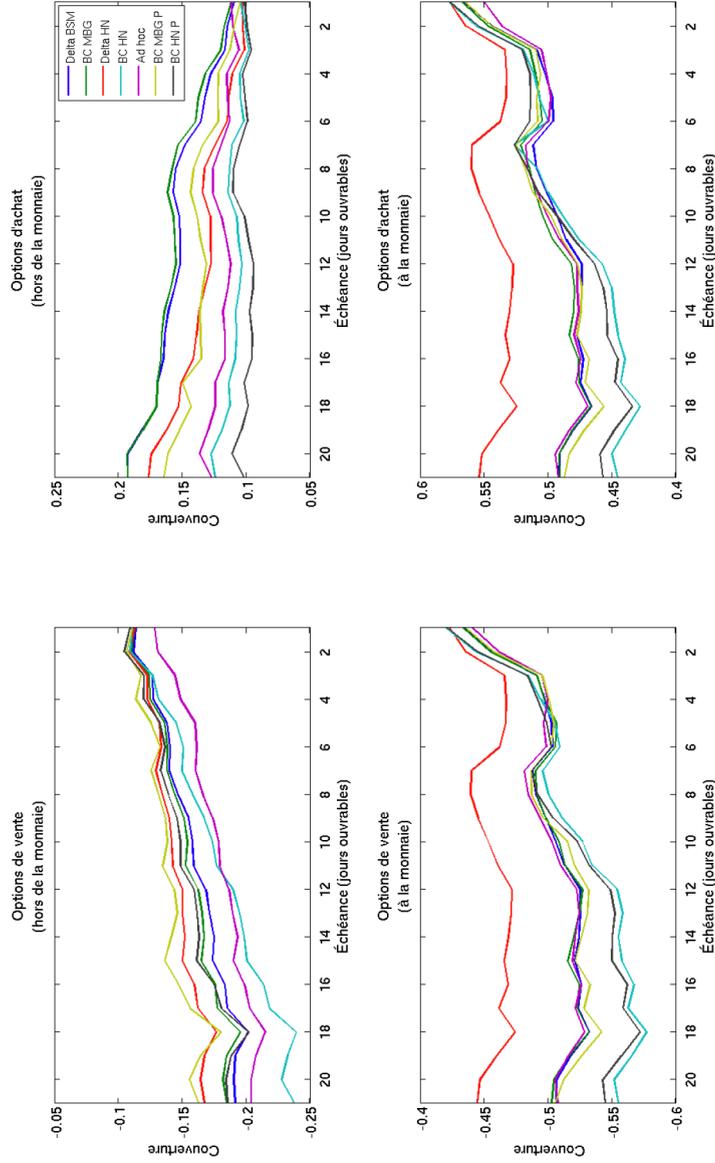
Il est intéressant de remarquer que le comportement de la stratégie de minimisation de la variance sous le modèle MBG semble refléter les positions de la stratégie delta-neutre du modèle HN lorsque les options sont hors de la monnaie, alors qu'elle suit celle de la stratégie delta-neutre du modèle MBG lorsque les options sont à la monnaie, ce qui vient en partie expliquer les résultats obtenus pour les options de vente hors de la monnaie, qui ressemblent beaucoup plus à ceux obtenus sous le modèle HN. Une piste de solution est donnée par le fait que, historiquement, la volatilité indiquée par l'indice VIX est supérieure à la volatilité réalisée ; comme la valeur des options hors de la monnaie dépend plus fortement de la volatilité, la position de couverture prise en fonction de la volatilité historique aura tendance à être moindre dans le cas de ces options. Dans le cas du modèle HN, l'explication semble aller dans la même direction : en effet, l'absence du « smile » de la volatilité implicite dans l'estimation des paramètres réduit la position de couverture des options hors de la monnaie. Comme une analyse complète et exhaustive du phénomène dépasse le cadre de ce travail, nous laissons une explication plus complète du phénomène à de futurs travaux.

FIGURE 6.1: Positions de couverture (moyennes) en fonction de l'échéance  
(mesure physique, toutes les options)



Moyenne des positions de couverture prises pour chacune des stratégies, en fonction de l'échéance des options (en jours ouvrables). Les stratégies utilisées sont : une stratégie delta-neutre sous le modèle BSM (Delta BSM, ligne bleue) et sous le modèle HN (Delta HN, ligne rouge), une stratégie de minimisation de la variance temporellement cohérente sous le modèle MBG, lorsque la volatilité est estimée par l'indice VIX (BC MBG, ligne verte) ou par les rendements de l'indice S&P 500 (BC MBG P, ligne jaune), et sous le modèle HN, lorsque l'estimation des paramètres utilisent les prix des options (BC HN, ligne turquoise) ou seulement les rendements de l'indice S&P 500 (BC HN P, ligne grise) ainsi qu'une stratégie *ad hoc* delta-neutre reposant sur la volatilité implicite liée au prix de l'option (Ad hoc, ligne mauve).

FIGURE 6.2: Positions de couverture (moyennes) en fonction de l'échéance et du type d'options (mesure physique)



Moyenne des positions de couverture prises pour chacune des stratégies, en fonction de l'échéance (en jours ouvrables) et du type d'options (options de vente ou d'achat, à la monnaie ou hors de la monnaie au moment de la vente). Les stratégies delta-neutre sous le modèle BSM (Delta BSM, ligne bleue) et sous le modèle HN (Delta HN, ligne rouge), une stratégie de minimisation de la variance temporellement cohérente sous le modèle MBG, lorsque la volatilité est estimée par l'indice VIX (BC MBG, ligne verte) ou par les rendements de l'indice S&P 500 (BC MBG P, ligne jaune), et sous le modèle HN, lorsque l'estimation des paramètres utilisent les prix des options (BC HN, ligne turquoise) ou seulement les rendements de l'indice S&P 500 (BC HN P, ligne grise) ainsi qu'une stratégie *ad hoc* delta-neutre reposant sur la volatilité implicite liée au prix de l'option (Ad hoc, ligne mauve).



## Chapitre 7

# Conclusion

Le problème de la couverture en temps discret et en marché incomplet occupe une place importante dans la littérature, même si peu de formulations explicites sont disponibles. La plupart des travaux se concentrant sur des stratégies optimales à un moment fixe, le problème de l'inconstance temporelle a reçu relativement peu d'attention. En effet, les stratégies de couverture optimales obtenues sans prendre en compte les déviations possibles ne peuvent réellement être qualifiées d'optimales, puisqu'elles ne seront pas respectées sur toute la période de couverture, et n'atteignent donc pas leur objectif, à moins d'être temporellement cohérentes.

L'approche présentée par Basak et Chabakauri (2013) se démarque par le fait qu'elle combine des formules explicites (relativement) simples à calculer ne dépendant pas directement des modèles employés, ainsi que par le fait que la stratégie de couverture est temporellement cohérente, c.-à-d. que la stratégie initiale optimale est la stratégie qui sera respectée sur toute la période de couverture. L'objectif de minimisation de la variance, sous la contrainte du respect de la stratégie pour toute la période, est atteint : par l'inclusion de l'espérance des erreurs de couverture dans l'objectif de minimisation de la variance, cette approche permet d'adopter une stratégie de minimisation de la variance locale à chaque période, et donc de minimiser la variance finale de l'erreur de couverture.

Nos résultats démontrent deux choses. D'abord, que l'approche peut facilement être mise en pratique. En effet, l'application des formules explicites se fait relativement aisément par l'utilisation de simulations Monte Carlo, ou, dans certains cas simples, notamment le MBG, peuvent potentiellement se réduire à des méthodes numériques plus rapides et plus précises. De plus, cette approche accomplit son objectif de minimisation de la variance et atteint parfois une efficacité supérieure aux approches traditionnelles, en incluant toutes

les sources de risque, y compris l'incertitude sur la stratégie de couverture future, dans la mesure neutre à la couverture utilisée pour le calcul de la couverture optimale.

À notre connaissance, les résultats obtenus dans ce mémoire représentent les premiers résultats pratiques de la mise en pratique de cette approche. L'utilisation d'options à court terme sur l'indice S&P 500 permet de replacer les résultats obtenus dans la littérature, et il serait intéressant de voir des travaux futurs sur l'efficacité de cette approche pour des options de plus longue durée, ou en utilisant d'autres modèles. Mais, comme la méthode de Basak et Chabakauri (2013) ne se limite pas à la couverture d'options, il serait souhaitable de voir sa mise en pratique sur un éventail plus large d'actifs et de droits contingents.

## Annexe A

# Fonction caractéristique des rendement (modèle HN)

Nous présentons ci-dessous la dérivation de la forme de la fonction caractéristique du rendement aléatoire, ci-après  $x(t, T)$  de l'actif sous le modèle HN en temps discret :

$$S_T = S_0 e^{(r-q)(T-t) + x(t, T)} \quad (\text{A.1})$$

La solution repose sur l'utilisation de la forme affine du modèle, dont les dynamiques de prix et de variance sous la mesure risque-neutre  $\mathbb{Q}$  sont reproduites ci-dessous :

$$R_t = \log \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = r - q - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} z_t^* \quad (\text{A.2})$$

$$h_{t+1} = \omega^* + \beta^* h_t + \alpha^* \left( z_t^* - \gamma^* \sqrt{h_t} \right)^2 \quad (\text{A.3})$$

En posant l'hypothèse que la fonction caractéristique du rendement aléatoire au temps  $t + k$  conditionnellement à son prix au temps  $t$  prend la forme affine suivante :

$$\begin{aligned} f(\phi; t, t+k) &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\phi x(t, t+k)} \right] \\ &= e^{A(\phi; t, t+k) + B(\phi; t, t+k) h_{t+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où  $\phi$  représente un nombre complexe, et  $A(\phi; t, t+k)$  et  $B(\phi; t, t+k)$  des coefficients scalaires. Nous cherchons donc la forme de ces coefficients qui donnent la solution de la fonction caractéristique du rendement aléatoire de l'actif au temps  $T$  conditionnellement au temps  $t$ . Nous pouvons utiliser la loi de l'espérance itérée de manière à obtenir :

$$\begin{aligned} f(\phi; t, T) &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\phi x(t, T)} \right] \\ &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[ E_{t+1}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\phi x(t, T)} \right] \right] \\ &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\phi x(t, t+1)} e^{A(\phi; t+1, T) + B(\phi; t+1, T) h_{t+2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

En remplaçant  $x(t, t+1)$  par sa valeur donnée par (A.2), en allégeant l'écriture, nous obtenons :

$$f(\phi; t, T) = E_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\frac{1}{2}\phi h_{t+1} + \phi \sqrt{h_{t+1}} z_{t+1} + A(\phi; t+1, T) + B(\phi; t+1, T) h_{t+2}} \right] \quad (\text{A.6})$$

Nous pouvons sortir les éléments non stochastiques de l'espérance, de manière à obtenir :

$$f(\phi; t, T) = e^{-\frac{1}{2}\phi h_{t+1} + A(\phi; t+1, T)} E_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\phi \sqrt{h_{t+1}} z_{t+1} + B(\phi; t+1, T) h_{t+2}} \right] \quad (\text{A.7})$$

Nous pouvons remplacer  $h_{t+2}$  par sa valeur donnée par l'équation (A.3) :

$$\begin{aligned} f(\phi; t, T) &= e^{-\frac{1}{2}\phi h_{t+1} + A(\phi; t+1, T)} \\ &\times E_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\phi \sqrt{h_{t+1}} z_{t+1} + B(\phi; t+1, T) \left( \omega + \beta h_{t+1} + \alpha \left( z_{t+1} - \gamma \sqrt{h_{t+1}} \right)^2 \right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

En sortant à nouveau les éléments non stochastiques de l'espérance, et en ouvrant la parenthèse, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(\phi; t, T) &= e^{A(\phi; t+1, T) + \omega B(\phi; t+1, T) + \left[ -\frac{1}{2}\phi + \beta B(\phi; t+1, T) \right] h_{t+1}} \\ &\times E_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\phi \sqrt{h_{t+1}} z_{t+1} + \alpha B(\phi; t+1, T) \left( z_{t+1}^2 - 2\gamma \sqrt{h_{t+1}} z_{t+1} + \gamma^2 h_{t+1} \right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En sortant à nouveau les éléments non stochastiques, et en réarrangeant les termes à l'intérieur de l'espérance, nous avons :

$$f(\phi; t, T) = e^{A(\phi; t+1, T) + \omega B(\phi; t+1, T) + [-\frac{1}{2}\phi + (\beta + \alpha\gamma^2)B(\phi; t+1, T)]h_{t+1}} \times E_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{(\phi - 2\alpha\gamma B(\phi; t+1, T))\sqrt{h_{t+1}}z_{t+1} + \alpha B(\phi; t+1, T)z_{t+1}^2} \right] \quad (\text{A.10})$$

Pour  $z_t$  suivant une loi normale centrée réduite, nous savons que :

$$E_t \left[ e^{az_{t+1} + bz_{t+1}^2} \right] = e^{\frac{a^2}{2(1-2b)} - \frac{1}{2} \log(1-2b)} \quad (\text{A.11})$$

En posant  $a = (\phi - 2\alpha\gamma B(\phi; t+1, T))\sqrt{h_{t+1}}$  et  $b = \alpha B(\phi; t+1, T)$ , nous obtenons :

$$f(\phi; t, T) = e^{A(\phi; t+1, T) + \omega B(\phi; t+1, T) + [-\frac{1}{2}\phi + (\beta + \alpha\gamma^2)B(\phi; t+1, T)]h_{t+1}} \times e^{\frac{(\phi - 2\alpha\gamma B(\phi; t+1, T))^2 h_{t+1}}{2(1-2\alpha B(\phi; t+1, T))} - \frac{1}{2} \log(1-2\alpha B(\phi; t+1, T))} \quad (\text{A.12})$$

En réarrangeant les termes pour regrouper les facteurs de  $h_{t+1}$  :

$$f(\phi; t, T) = e^{A(\phi; t+1, T) + \omega B(\phi; t+1, T) - \frac{1}{2} \log(1-2\alpha B(\phi; t+1, T))} \times e^{\left[ -\frac{1}{2}\phi + (\beta + \alpha\gamma^2)B(\phi; t+1, T) + \frac{(\phi - 2\alpha\gamma B(\phi; t+1, T))^2}{2(1-2\alpha B(\phi; t+1, T))} \right] h_{t+1}} \quad (\text{A.13})$$

D'où nous obtenons :

$$\begin{aligned} A(\phi; t, T) &= A(\phi; t+1, T) + \omega B(\phi; t+1, T) \\ &\quad - \frac{1}{2} \log(1 - 2\alpha B(\phi; t+1, T)) \\ B(\phi; t, T) &= -\frac{1}{2}\phi + (\beta + \alpha\gamma^2)B(\phi; t+1, T) \\ &\quad + \frac{(\phi - 2\alpha\gamma B(\phi; t+1, T))^2}{2(1 - 2\alpha B(\phi; t+1, T))} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La forme des coefficients  $A$  et  $B$  ci-dessus montre qu'ils doivent être calculés de manière récursive. Pour ce faire, la condition aux bornes  $E_T^{\mathbb{Q}} [e^{\phi x(T,T)}] = 1$  permet d'établir que  $A(\phi; T, T) = B(\phi; T, T) = 0$

## Annexe B

# Erreur de couverture actualisée

Nous présentons ici la preuve que la formule (4.25) donne bien la valeur actualisée au temps initial ( $t$ ) de l'erreur de couverture pour l'option  $i$  sous une stratégie de couverture rebalçant quotidiennement la position de couverture dans un contrat à terme  $F$ .

Soit  $V_t$  la valeur du portefeuille de couverture au temps  $t$ . Au temps initial  $t = 0$ , sa valeur est donnée par :

$$V_0 = C_0 \tag{B.1}$$

soit la valeur  $C_0$  de l'option d'achat vendue. En posant l'hypothèse que le montant  $V_t$  est investi (emprunté) au taux sans risque constant  $r$ , qu'aucun coût n'est lié à la prise de position  $w_t$  au temps  $t$  dans un contrat à terme dont le prix de règlement est de  $F_t$  et qu'aucune marge n'est demandée pour la prise de position<sup>1</sup>, après une période  $\Delta t$ , la valeur  $V_{\Delta t}$  est donnée par :

$$V_{\Delta t} = e^{r\Delta t}V_0 + \omega_0 (F_{\Delta t} - F_0) \tag{B.2}$$

Plus généralement, la valeur du portefeuille au temps  $\tau + \Delta t$  est donnée par :

$$V_{\tau+\Delta t} = e^{r\Delta t}V_\tau + \omega_\tau (F_{\tau+\Delta t} - F_\tau) \tag{B.3}$$

---

<sup>1</sup>Cette hypothèse peut être abandonnée, si la marge reçoit le taux sans risque  $r$ .

En remplaçant  $V_\tau$  dans l'équation (B.3), nous obtenons :

$$V_{\tau+\Delta t} = e^{r\Delta t} [e^{r\Delta t} V_{\tau-\Delta t} + \omega_{\tau-\Delta t} (F_\tau - F_{\tau-\Delta t})] + \omega_\tau (F_{\tau+\Delta t} - F_\tau) \quad (\text{B.4})$$

Que l'on peut réécrire comme suit :

$$V_{\tau+\Delta t} = e^{2r\Delta t} V_{\tau-\Delta t} + \sum_{k=\tau-\Delta t}^{\tau} e^{r(\tau-k)} \omega_k (F_{k+\Delta t} - F_k) \quad (\text{B.5})$$

où la forme récursive de l'équation apparaît clairement. Ainsi, en posant une échéance  $T$  pour l'option, nous avons :

$$V_T = e^{rT} V_0 + \sum_{k=0}^{T-\Delta t} e^{r(T-\Delta t-k)} \omega_k (F_{k+\Delta t} - F_k) \quad (\text{B.6})$$

La valeur de l'option au temps  $T$  est donnée par :

$$C_T = (S_T - K)^+ \quad (\text{B.7})$$

En soustrayant le paiement à l'échéance de l'option de la valeur du portefeuille de couverture à l'échéance et en actualisant leur valeur au temps  $t = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} W_0 &= e^{-rT} \left[ e^{rT} V_0 + \sum_{k=0}^{T-\Delta t} e^{r(T-\Delta t-k)} \omega_k (F_{k+\Delta t} - F_k) - (S_T - K)^+ \right] \\ &= V_0 - e^{-rT} (S_T - K)^+ - \sum_{k=0}^{T-\Delta t} e^{-r(\Delta t+k)} \omega_k (F_{k+\Delta t} - F_k) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Ce qui représente l'erreur de couverture actualisée liée à la stratégie de couverture, représentée par les positions  $\omega_k$ .

# Bibliographie

- Ahmad, R. et Wilmott, P. (2005). Which Free Lunch Would You Like Today, Sir ? : Delta Hedging, Volatility Arbitrage and Optimal Portfolios. *Wilmott Magazine*, pages 64–79.
- Attari, M. (2004). Option Pricing Using Fourier Transforms : A Numerically Efficient Simplification. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.520042>.
- Badescu, A., Elliott, R., et Ortega, J.-P. (2014). Quadratic hedging schemes for non-Gaussian GARCH models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 42 :13–32.
- Bakshi, G., Cao, C., et Chen, Z. (1997a). Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. *The Journal of Finance*, 52(5) :2003–2049.
- Bakshi, G., Cao, C., et Chen, Z. (1997b). Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. *Journal of Finance*, 52 :2003–2049.
- Bakshi, G., Carr, P., et Wu, L. (2008). Stochastic Risk Premiums, Stochastic Skewness in Currency Options, and Stochastic Discount Factors in International Economies. *Journal of Financial Economics*, 87 :132–156.
- Bakshi, G. et Kapadia, N. (2003). Delta-Hedged Gains and the Negative Market Volatility Risk Premium. *Review of Financial Studies*, 16 :527–566.
- Basak, S. et Chabakauri, G. (2013). Dynamic Hedging in Incomplete Markets : A Simple Solution. *Review of Financial Studies*, 25(6) :1845–1896.
- Bates, D. (2000). Post-'87 Crash Fears in the S&P 500 Futures Option Market. *Journal of Econometrics*, 94 :181–238.
- Bjork, T. et Murgoci, A. (2010). A General Theory of Markovian Time Inconsistent Stochastic Control Problems (document de travail). Disponible sur <http://ssrn.com/abstract=1694759>.
- Black, F. et Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654.

- Bollen, N. et Whaley, R. (2004). Does Net Buying Pressure Affect the Shape of Implied Volatility Functions? *The Journal of Finance*, 59(2) :711–753.
- Boyle, P. et Emanuel, D. (1980). Discretely Adjusted Option Hedges. *Journal of Financial Economics*, 8 :259–282.
- Brandt, M. (2003). Hedging Demands in Hedging Contingent Claims. *Review of Economics and Statistics*, 85 :119–140.
- Cao, J. et Han, B. (2013). Cross section of option returns and idiosyncratic stock volatility. *Journal of Financial Economics*, 108 :231–249.
- Carr, P. et Wu, L. (2007). Stochastic Skew in Currency Options. *Journal of Financial Economics*, 86 :213–247.
- Carr, P. et Wu, L. (2014). Static Hedging of Standard Options. *Journal of Financial Econometrics*, 12 :3–46.
- Christoffersen, P., Elkamhi, R., Feunou, B., et Jacobs, K. (2010). Option Valuation with Conditional Heteroskedasticity and Nonnormality. *Review of Financial Studies*, pages 2139–2183.
- Christoffersen, P., Heston, S., et Jacobs, K. (2013). Capturing Option Anomalies with a Variance-Dependent Pricing Kernel. *Review of Financial Studies*, 26(8) :1963–2006.
- Clelow, L. et Hodges, S. (1997). Optimal delta-hedging under transaction costs. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8-9) :1353–1376.
- Delbaen, F. et Schachermayer, W. (1994). A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. *Mathematischen Annalen*, 300(1) :463–520.
- Duffie, D. et Richardson, H. (1991). Mean-Variance Hedging in Continuous Time. *The Annals of Applied Probability*, 1 :1–15.
- François, P., Gauthier, G., et Godin, F. (2012). Optimal hedging when the underlying asset follows a regime-switching Markov process.
- Garleanu, N., Pedersen, L., et Poteshman, A. (2009). Demand-Based Option Pricing. *Review of Financial Studies*, 22(10) :4259–4299.
- Gerber, H. et Shiu, E. (1994). Option Pricing by Esscher Transforms. *Transactions of the Society of Actuaries*, 46 :99–191.
- Harrison, J. et Kreps, D. (1979). Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, 20(3) :381–408.

- Harrison, J. et Pliska, S. (1981). Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3) :215–260.
- Heston, S. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 6(2) :327–343.
- Heston, S. et Nandi, S. (2000). A Closed-Form GARCH Option Valuation Model. *Review of Financial Studies*, 13(3) :585–625.
- Hodges, S. et Neuberger, A. (1989). Optimal Replication of Contingent Claims Under Transaction Costs. *The Review of Futures Markets*, 8(2) :222–239.
- Hull, J. (1999). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall, 4<sup>e</sup> edition.
- Kim, D. et Kim, S. (2016). Delta-Hedged Gains and the Risk-Neutral Moments (article présenté à la conférence EFMA 2016).
- Leland, H. (1985). Option Pricing and Replication with Transaction Costs. *The Journal of Finance*, 40(5) :1283–1301.
- Ornthanalai, C. (2013). Lévy Jump Risk : Evidence from Options and Returns. *EFA 2009 Bergen Meetings : Journal of Financial Economics (forthcoming)*.
- Price, K. et Storn, R. (1997). Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4) :341–359.
- Rebonato, R. (2004). *Volatility and Correlation : The Perfect Hedger and the Fox*. Wiley, 2<sup>e</sup> edition.
- Rudloff, B., Street, A., et Valladao, D. (2014). Time consistency and risk averse dynamic decision models : Definition, interpretation and practical consequences. *European Journal of Operational Research*, 234 :743–750.
- Santa-Clara, P. et Yan, S. (2010). Crashes, volatility, and the equity premium : Lessons from S&P 500 options. *Review of Economics and Statistics*, 92 :435–451.
- Schweizer, M. (2001). A Guided Tour Through Quadratic Hedging Approaches. In Jouini, J., Cvitanic, J., et Musiela, M., editors, *Option Pricing, Interest Rates, and Risk Management*, pages 509–537. Cambridge University Press.
- Strotz, R. H. (1955). Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization. *The Review of Economics Studies*, 23(3) :165–180.

Zakamouline, V. (2006). Optimal Hedging of Option Portfolios with Transaction Costs (document de travail).

Zumbach, G. (2000). The Pitfalls in Fitting Garch(1,1) Processes. In Dunis, C., editor, *Advances in Quantitative Asset Management*, volume 1 of *Studies in Computational Finance*, pages 179–200. Springer US.