

HEC Montréal

Évaluation d'options européennes sous un modèle
Bad Environment Good Environment (BEGE)

Département de finance

par

Hassan CHOUEIB

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences
(M.Sc.) en ingénierie financière

19 JUILLET 2016

HEC Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Évaluation d'options européennes sous un modèle
Bad Environment Good Environment (BEGE)**

présenté par :

Hassan CHOUEIB

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Christian DORION, directeur de recherche

Fournier MATHIEU , Lecteur

Gauthier GENEVIÈVE , Lectrice

Mémoire accepté le : 19 JUILLET 2016

Résumé

Les modèles ARCH, GARCH et leurs extensions ont prouvé leur importance dans la modélisation de la volatilité conditionnelle des rendements des actifs financiers. Contrairement aux modèles à temps continu, les modèles GARCH ont l'avantage inhérent que la volatilité soit facilement estimable à partir des rendements historiques des actifs financiers. Cette propriété nous permet d'évaluer les options en utilisant les volatilités spot calculées à partir des rendements historiques, sans nécessairement avoir recours aux volatilités implicites déduites à partir des autres options contemporaines. Ainsi, il est possible d'évaluer une option uniquement à partir des observations, puisque les paramètres peuvent être facilement estimés à partir des observations discrètes des rendements.

Le modèle Bad Environment Good Environment (BEGE) est une extension des modèles standards de la famille GARCH. Le processus de rendements reçoit deux différents chocs tirés des distributions qui admettent des queues et des asymétries considérables. Le premier choc admet une asymétrie positive tandis que le deuxième admet une asymétrie négative. Les deux chocs varient avec le temps, ce qui crée de bons environnements quand la bonne distribution domine, et de mauvais environnements quand la mauvaise distribution domine. Un aspect très important du modèle est le fait que même durant les mauvais environnements, de "bons" chocs considérablement élevés peuvent se produire.

Ainsi, Le modèle BEGE utilise des innovations conditionnellement non gaussiennes pour les rendements et permet à la volatilité de répondre fort différemment aux chocs (rendements imprévus) négatifs et aux chocs positifs. Plusieurs études démontrent, à l'aide d'autres modèles, que ces propriétés sont fort importantes pour correctement évaluer les prix des options. Or, aucune étude ne se penche spécifiquement sur les propriétés du modèle BEGE dans le contexte de la tarification d'options. La contribution centrale de ce mémoire est de pallier ce vide.

En particulier, dans ce travail, nous allons évaluer la performance du modèle BEGE dans la tarification des options par rapport au modèle GJR-GARCH, que nous prenons comme modèle de référence. Nous allons également apprécier sa flexibilité à modifier le *smirk* de la volatilité en changeant les poids de la bonne et la mauvaise volatilité au temps initial.

Abstract

The models ARCH, GARCH and their extensions have proven their importance in modeling conditional volatility of returns on financial assets. Unlike continuous models, GARCH models have the inherent advantage that volatility is easily observable from the historical returns of financial assets. This property allows us to evaluate options using the spot volatility calculated using historical returns, without necessarily resort to implied volatility derived from other contemporary options. Thus, it is possible to evaluate an option only from observations, since the parameters can be easily estimated from discrete observations of assets returns.

Good Environment Bad Environment model (BEGE) is an extension of the standard models of GARCH family. The returns process receives shocks from two different distributions that admit considerable skewness and kurtosis. The first shock admits positive skewness, while the second admits negative skewness. Both shocks vary with time, creating good environments when good distribution dominates, and bad environments when bad distribution dominates. A very important aspect of the model is the fact that even during bad environments, good -considerably high- shocks may occur.

Thus, BEGE model uses non gaussian conditional innovations for the returns, and allows volatility to respond differently to positive and negative shocks. Several studies show, using other models, that those features are very important to assess options prices. However, none of these studies are inquiring into the specific characteristics of the BEGE model in the context of option pricing. The main contribution of this thesis is to fill this gap.

In particular, in this work, we will prove the performance of the BEGE model in option pricing with respect to the benchmark model GJR-GARCH, as well as its flexibility in changing the smirk of the volatility by changing the weights of the good and bad volatility at time zero.

Remerciements

Arrivé au terme de la rédaction de ce mémoire, il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma gratitude et mes remerciements à tous ceux qui, par leur enseignement, leur soutien et leurs conseils m'ont aidé à sa réalisation.

Je tiens en premier temps à remercier M. Christian Dorion, mon directeur de recherche, qui m'a honoré de sa confiance en m'acceptant au sein de ses travaux, ainsi pour son aide et ses précieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Puissent ces lignes être l'expression de ma plus profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de tout le corps professoral qui m'a encadré tout au long de cette année qu'a duré cette formation, et qui ont suffisamment enrichi mes connaissances et mes savoir-faire.

Un grand merci chaleureux et de tout mon cœur à mes parents, mon frère et ma sœur, sans qui je ne serais absolument pas où j'en suis aujourd'hui. Je les remercie sincèrement pour leur contribution, leur patience, et leur soutien inconditionnel et constant, pour m'avoir donné du courage et de l'espoir, pour être toujours présents même à distance. Je leur dois ce que je suis.

Aussi, le plus sincère merci à ma meilleure amie Maryam, pour m'avoir donné l'occasion d'avoir une véritable amie dans ma vie, pour sa gentillesse et son encouragement durant mes études.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé tout au long de ma vie.

Merci à tous et à toutes.

Note sur la propriété intellectuelle liée à ce travail

L'idée originale de ce mémoire m'a été fournie par mon directeur de mémoire, Christian Dorion, qui a aussi été très présent à travers l'évolution du projet. Initialement, j'étais inscrit en projet supervisé et devais travailler pour prof. Dorion afin d'implémenter les bases d'un article qu'il désirait écrire sur le sujet. Étant donné la charge de travail et mon intérêt pour le sujet, prof. Dorion a accepté que j'en fasse plutôt le sujet d'un mémoire. Je lui reconnais toutefois le droit d'en raffiner le contenu en un article dans lequel, le cas échéant, je ne désire pas m'impliquer.

Table des matières

Résumé	5
Abstract	6
Remerciements	7
Note sur la propriété intellectuelle reliée à ce travail	8
1 Introduction	13
2 Revue de littérature	15
2.1 Introduction	15
2.2 Les Modèles GARCH	17
2.2.1 GARCH symétriques	19
2.2.2 GARCH asymétriques	20
3 Méthodologie	23
3.1 Le modèle BEGE	23
3.1.1 Mesure physique	23
3.1.2 Mesure risque neutre	26
3.1.3 Distribution sous la mesure risque neutre	27
3.1.4 Caractéristiques sous la mesure risque neutre	28
3.2 Le modèle GJR-GARCH	32
4 Résultats empiriques	37
4.1 Données	37
4.2 Volatilité implicite	38
4.3 Maximum de vraisemblance	39
4.4 Maximum de vraisemblance conjoint	43

4.5	Tarification des Options	44
4.6	Estimation des paramètres et résultats empiriques	45
5	Conclusion	49

Table des figures

5.1	Relation entre λ_v et $\Lambda_v, v \in \{p, n\}$	60
5.2	Prix quotidien de l'indice S&P500	61
5.3	Volatilité conditionnelle du modèle BEGE et du modèle GJR-GARCH	62
5.4	Volatilités implicites des modèles BEGE et GJR-GARCH	63
5.5	In-Sample et Out-Of-Sample IVRMSE	64
5.6	Prime de risque	65
5.7	IVRMSE hebdomadaire (In-Sample)	66

Liste des tableaux

5.1	Options sur l'indice S&P500	54
5.2	Maximum de vraisemblance	55
5.3	Maximum de vraisemblance joint	56
5.4	Prime de risque	58
5.5	Erreur de tarification et de volatilité implicite suivant l'échéance et le <i>moneyness</i> (Joint Likelihood)	59

Chapitre 1

Introduction

Les fluctuations des cours des valeurs mobilières dont témoignent les marchés financiers lors de la dernière décennie ont eu des conséquences dévastatrices. Cette situation a révélé l'importance de la modélisation de la volatilité qui, à part d'être une mesure des variations des actifs, joue un rôle central dans la tarification des options. Celles-ci sont les produits financiers les plus importants et populaires pour la stabilisation, couverture et assurance d'investissements.

Le modèle de tarification de Black et Scholes (1973) fut l'une des avancées majeures de la finance moderne. Il repose sur plusieurs hypothèses, dont l'une des plus contraignantes est l'utilisation d'une volatilité constante. Or, cette hypothèse ne reflète nullement la réalité de marché et nuit grandement à la performance du modèle.

C'est à cette problématique que nombre de modèles plus contemporains ont tenté de répondre. L'un des plus éminents repose sur le modèle GARCH, introduit par Bollerslev (1986) et qui s'appuie sur les travaux de Engel (1982). Ce modèle a permis de décrire la relation entre la variance conditionnelle des aléas et les rendements de l'actif sous-jacent. Depuis l'apparition de l'article de Bollerslev, une famille de modèles GARCH a été développée et utilisée dans la littérature pour évaluer les options. Parmi ces modèles, on trouve celui de Bakaert, Engstrom et Ermolov (2015) qui propose une approche basée sur la séparation de la volatilité conditionnelle, entre une bonne volatilité, lorsqu'un bon environnement se produit, et une mauvaise volatilité, lorsqu'un mauvais environnement a lieu. Le modèle s'appelle "Bad Environment Good Environment" (BEGE).

Dans notre travail, nous nous basons sur l'article de Bakaert, Engstrom et Ermolov (2015), pour calculer les prix des options européennes écrites sur l'indice S&P500, pour

différentes échéances et différents prix d'exercice en utilisant le modèle BEGE.

Le choix du modèle a été fait grâce à ses propriétés simples et intéressantes qui captent mieux la dynamique des actifs financiers. Le modèle BEGE utilise des innovations non gaussiennes, qui admettent des *skewness* et *kurtosis* importants. Il admet aussi une flexibilité dans la modélisation de la volatilité implicite grâce à la séparation de sa volatilité conditionnelle en deux composantes (bonne et mauvaise), ainsi qu'une forme fermée pour tous ses moments.

Nous proposons donc une approche novatrice dans la tarification d'options qui se distingue par la flexibilité qu'elle introduit dans la modélisation de la volatilité implicite. En comparant la performance du modèle par rapport à un modèle de référence, nous trouvons que notre modèle performe mieux que le modèle GJR-GARCH. In-Sample, le modèle BEGE a une performance supérieure à celle du GJR-GARCH pour la majorité des périodes. Cette performance est plus faible Out-Of-Sample. Le modèle crée un environnement plus risqué en donnant plus de poids aux mauvais chocs. Conséquemment, il impose des primes de risque plus élevées. Quant à l'ajustement des séries de rendements et des options sur l'indice S&P500 année par année, la volatilité du modèle BEGE signale une augmentation de la mauvaise volatilité par rapport à la bonne volatilité surtout durant les périodes de crise.

La suite du mémoire est organisée comme suit. Dans le deuxième chapitre, nous faisons une revue de littérature sur les modèles GARCH, et la dérivation du modèle BEGE à partir de ces modèles. Dans le troisième chapitre nous représentons les modèles BEGE et GJR-GARCH sous la mesure physique, ensuite le *pricing kernel* proposé par Christoffersen, Elkamhi, Feunou and Jacobs (2009) pour passer à la mesure risque neutre, et finalement les deux modèles sous la mesure risque neutre. Dans le chapitre 4, nous présentons les données utilisées dans nos calculs, la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode du maximum de vraisemblance conjoint pour l'estimation des paramètres et les résultats empiriques de notre étude. Finalement, le dernier chapitre comporte une conclusion sur la performance du modèle.

Chapitre 2

Revue de littérature

2.1 Introduction

L'histoire des modèles ARCH a commencé avec la conjecture de Milton Friedman (1977) qui stipule que l'imprévisibilité de l'inflation est une des principales causes des cycles économiques. Son hypothèse affirme que le niveau de l'inflation n'est pas le problème, mais l'incertitude sur les prix est la raison qui empêche les entrepreneurs d'investir, ce qui conduit à une récession. Afin de remédier à cette problématique, Engel débute ses recherches dans le but d'évaluer la validité de cette conjecture. Pour Engel, ce scénario ne peut être plausible que si l'incertitude change au cours du temps. Un phénomène que les économètres appellent l'hétéroscédasticité.

Par la suite, Clive Granger introduit un test pour les modèles bilinéaires des séries temporelles, basé sur la dépendance des carrés des résidus. Il remarque une forte autocorrélation entre les carrés des résidus, même si ces derniers ne sont pas corrélés. Cette observation est significative dans les données économiques, et selon Engel, elle détecte quelque chose jusqu'alors ignoré.

Face à ces enjeux, Engel débute la construction d'un modèle qui, au lieu de prendre l'écart type de l'échantillon à court ou à long terme, pondère la variance en prenant soin de donner un plus grand poids à l'information récente. Ce modèle nommé par David Hendry s'appelle "AutoRegressive Conditional Heterskedasticity" ou modèle ARCH.

Le premier test fait par Engel (1982) porte sur l'étude de l'inflation au Royaume-Uni (qui correspond à la conjecture de Friedman). Les résultats démontrent que l'incertitude dans la

prévision de l'inflation varie au cours du temps, mais elle ne correspond aucunement au cycle économique du Royaume-Uni. Un test similaire fait par Engel (1983), portant sur les données des États-Unis, confirme l'existence d'un ARCH, mais qui ne reflète pas la présence d'un cycle économique.

Un développement très important fait par son étudiant Tim Bollerslev (1986), qui introduit le modèle ARCH généralisé (GARCH), qui étend le modèle ARCH purement autorégressif à un modèle à moyenne mobile, et une variance pondérée par trois prévisions de variance. La première correspond à la moyenne à long terme, la deuxième est la prévision faite sur la période précédente, et la troisième correspond à la nouvelle information qui n'a pas été observée durant la dernière période.

Pour mettre en évidence l'importance de ces modèles, parlons maintenant de la modélisation des séries temporelles, et les principaux défis que nous essayons de résoudre. D'abord, nous remarquons que plusieurs caractéristiques bien connues sont communes pour ces séries. Par exemple, le regroupement de la volatilité est souvent observé (i.e. les grands changements sont souvent suivis par de grands changements, de même, les petits changements sont suivis par de petits changements). Ensuite, les séries temporelles financières manifestent souvent du *leptokurtosis*, c'est à dire, la distribution des rendements admet des queues épaisses. De plus, ce qu'on appelle *Effet de Levier*, introduit par Black (1976), fait référence au fait que les changements dans les prix tendent à être négativement corrélés avec les changements de volatilité (i.e. la volatilité est plus élevée après un choc négatif, qu'après un choc positif).

Le modèle ARCH modélise la variance de ces séries, mais plusieurs recherches montrent que pour capter la dynamique de la variance conditionnelle, il faut retenir un grand nombre de retards, ce qui peut poser des problèmes d'estimation.

De là vient l'importance des modèles GARCH qui présentent une solution alternative, ayant l'avantage de retenir une structure de retards plus souple.

Les deux modèles prennent en considération les deux premières caractéristiques, mais leurs distributions sont symétriques, ce qui ne leur permet pas de capter ou l'effet de levier.

Afin de remédier à ce problème, plusieurs extensions non linéaires du modèle GARCH ont été proposées. Parmi ces modèles on trouve les modèles EGARCH, GJR-GARCH, APARCH.

Malheureusement, les modèles GARCH gaussiens ne captent pas parfaitement les larges queues qu'on trouve dans les séries temporelles à haute fréquence. Ce qui a amené à plusieurs modèles qui utilisent des distributions non gaussiennes.

Ces modèles utilisent différentes distributions, par exemple, Student-t distribution (Bol-

lerslev, 1987), Generalised Error Distribution GED (Nelson, 1991 ; Kaiser, 1996), Normal Inverse Gaussian (Stentoff, 2008)...

De plus, pour capter le *skewness*, Liu et Brorsen (1995) font appel à une distribution asymétrique stable. Mais la variance d'une telle distribution n'existe que rarement.

Beakert, Engstrom et Ermolov (2015), proposent une distribution qui modélise très bien le *skewness* et le *kurtosis* qu'on trouve dans les séries temporelles, ainsi que l'effet de levier. Cette distribution s'appelle "Bad Environment Good Environment (BEGE) distribution". Dans notre travail, nous montrons l'importance et la flexibilité du modèle BEGE dans la tarification des options, ainsi que dans la détection du "smirk" de volatilité.

Dans leur récent travail, Fenou et Okou (2016) développent un modèle d'évaluation des options, où le prix de l'actif sous-jacent dispose de deux dynamiques de variance, une à la hausse, et une seconde à la baisse, afin d'étudier l'impact de la bonne et la mauvaise volatilités sur la tarification des options. Ils considèrent une distribution χ^2 des chocs impliquant une linéarité de la fonction génératrice des cumulants, afin d'obtenir une solution analytique pour les prix à l'équilibre. Cette distribution est un cas particulier de la distribution Gamma utilisé dans le modèle BEGE, où $\chi^2(1) \sim \Gamma(1/2, 2)$.

Dans la prochaine section, nous divisons les modèles GARCH en deux sections ; symétriques et asymétriques, pour finalement introduire le modèle BEGE qui fait une partie des modèles GARCH asymétriques avec deux innovations.

2.2 Les Modèles GARCH

Soit y_t une série temporelle univariée et \mathcal{F}_{t-1} est l'information au temps $t - 1$. Nous définissons la série sous la forme :

$$y_t = \mathbb{E}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) + \varepsilon_t$$

où $\mathbb{E}(\cdot | \cdot)$ désigne l'opérateur de l'espérance conditionnelle, et ε_t le terme aléatoire, avec $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \forall t \neq s$.

Le modèle ARCH introduit par Engle (1982) prend ε_t tel que $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$, où z_t est un processus i.i.d. et $\mathbb{E}(z_t) = 0, \text{Var}(z_t) = 1$, et σ_t est une fonction positive et mesurable par rapport à l'information \mathcal{F} disponible au temps $t - 1$.

Par définition, ε_t est une série non corrélée de moyenne nulle, et de variance condition-

nelle σ_t^2 qui varie avec le temps. Plus précisément, le modèle ARCH(q) est donné par :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2.$$

Le modèle GARCH est une généralisation du modèle ARCH, sa forme généralisée est donnée par :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \varepsilon_{t-j}^2$$

où h_t est la variance conditionnelle à la date t , $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, q$, $\beta_j \geq 0$, pour $j = 1, \dots, p$, avec p, q deux entiers positifs non nuls et ε_t obéit à une $\mathcal{N}(0, 1)$.

Plusieurs extensions ont été proposées pour mieux modéliser les réactions du marché. Les modèles GARCH linéaires ont le même comportement quant aux chocs (récession, expansion, ...) positifs et négatifs. Ainsi, une mauvaise nouvelle a le même impact sur la volatilité qu'une bonne nouvelle.

Hentschel (1995) a présenté une forme générale qui regroupe les principaux modèles GARCH symétriques et asymétriques. Elle repose essentiellement sur la transformation de Box-Cox (1964) appliqué à la variance conditionnelle ainsi que sur une fonction d'innovation $f(z_t)$ qui dépend des chocs z_t :

$$h_t^\psi = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i h_{t-i}^\psi + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^\psi f(z_{t-j}),$$

où h_t est la variance conditionnelle au temps t , z_t une variable aléatoire i.i.d $\sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\psi, \alpha_0, \alpha_i, \beta_j$ sont les paramètres du modèle GARCH, et $f(z_{t-j})$ la fonction d'innovation à la date $t - j$.

La fonction d'innovation prend plusieurs formes, nous donnons à titre d'exemple les spécifications données par Christoffersen et Jacobs (2004) :

$$\begin{aligned} \text{Simple} : f(z_t) &= z_t^2 \\ \text{Leverage} : f(z_t) &= (z_t - \theta)^2 \\ \text{News} : f(z_t) &= \{|z_t - \theta| - \kappa(z_t - \theta)\}^2 \\ \text{Power} : f(z_t) &= (z_t - \theta)^{2\gamma} \\ \text{News\&Power} : f(z_t) &= \{|z_t - \theta| - \kappa(z_t - \theta)\}^{2\gamma} \end{aligned}$$

Cette fonction nous permet de regrouper les modèles GARCH les plus populaires, qui se divisent en deux catégories ; symétriques et asymétriques.

2.2.1 GARCH symétriques

Parmi les modèles symétriques les plus connus dans la littérature financière, nous trouvons le modèle GARCH standard, IGARCH, GARCH-M et TS-GARCH (aussi connu comme AVGARCH).

GARCH Classique

La dynamique des rendements de l'actif sous-jacent du modèle GARCH(p,q) standard est donnée par :

$$R_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

avec $\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$ où $\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$.

La dynamique de la variance conditionnelle h_t , du modèle GARCH(p,q) standard est donnée par :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j},$$

où,

- a. α_0 : contrôle la valeur à long terme (inconditionnelle) de la variance.
- b. Persistance : afin de préserver la stationnarité des R_t^2 , on doit avoir $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ (plus cette valeur est proche de 1, plus le processus prend du temps avant de retourner vers sa moyenne. Et si la persistance est proche de 0, le processus retourne rapidement vers sa moyenne).

La condition $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ implique que le processus est faiblement stationnaire, puisque son espérance, variance, et autocovariance sont tous finis et constants au cours du temps.

Lorsque le modèle GARCH est stationnaire, sa variance inconditionnelle est donnée par :

$$\sigma^2[h_{t+1}] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}.$$

Les modèles GARCH d'ordre supérieur apportent peu d'améliorations dans le contexte de tarification des options. Par conséquent, dans la littérature, on se sert du modèle GARCH(1,1) pour sa parcimonie.

Empiriquement, nous observons que les mauvaises nouvelles ont en général un impact plus grand sur la volatilité que les bonnes nouvelles. Pour tenir compte de cet aspect, l'introduction de l'asymétrie dans les modèles GARCH est sans doute essentielle, ce qui nous amène aux modèles GARCH asymétriques, que nous présentons dans la prochaine section.

2.2.2 GARCH asymétriques

Constatation Empirique : L'accroissement de volatilité dû à une baisse de prix est généralement supérieur à celui résultant d'une hausse de même ampleur.

L'idée derrière les modèles asymétriques est toute simple : l'effet hétéroscédastique n'est sans doute pas le même suivant que l'erreur précédente est positive ou négative. On note parmi les modèles asymétriques, ceux qui sont le plus utilisés, les modèles EGARCH, AGARCH, NGARCH et GJR-GARCH.

GJR-GARCH

Afin de prendre en compte la modification d'un coefficient selon la survenue d'un évènement, il est courant d'introduire une nouvelle explicative construite comme produit d'une indicatrice de l'évènement en question et de la variable initiale. C'est l'idée adoptée par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993) qui, partant de l'écriture GARCH(p,q) de base, arrivent à introduire le modèle suivant :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

où $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0}$ désigne la fonction indicatrice telle que $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 1$ si $\varepsilon_{t-i} < 0$ et $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 0$ sinon.

Pour ce travail nous ne considérons que le cas GJR-GARCH(1,1) tel que :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

ce que l'on peut encore écrire comme :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha^+ \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} > 0} \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha^- \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

permettant de lire directement les coefficients spécifiques afférents aux résidus positifs $\alpha^+ = \alpha_1$ ou négatifs $\alpha^- = \alpha_1 + \gamma_1$.

Le modèle GJR-GARCH capte l'effet d'asymétrie des perturbations sur la variance conditionnelle. Dans leurs études sur l'indice de la valeur pondérée par la capitalisation boursière de CRSP, Glosten, Jagannathan et Runkle [Glosten et al., 1993] trouvent que les chocs négatifs provoquent une augmentation de la variance conditionnelle plus forte que les chocs positifs. De plus, au sujet de l'impact de la variance conditionnelle sur l'espérance conditionnelle du taux de rendements excédentaires, le coefficient estimé est négatif, comme dans l'article de Nelson (1991). Cette relation négative entre les rendements conditionnels et la variance conditionnelle peut être expliquée par l'effet de levier, ou bien par la volatilité rétroactive qui suggère qu'une hausse anticipée de la volatilité accroisse le rendement exigé par les investisseurs, puisque le titre deviendra plus risqué, et ceci implique que la valeur du titre diminue immédiatement, toutes choses étant égales par ailleurs.

BEGE

Le modèle BEGE (Bad Environment Good Environment) introduit par Bekaert, Engstrom et Ermolov (2014), propose la non-normalité des innovations, et les divise en deux composantes, ω_p pour les chocs d'un bon environnement, et ω_n pour ceux d'un mauvais environnement. Les innovations sont tirées d'une distribution gamma centrée (i.e. de moyenne nulle). L'innovation totale est une combinaison linéaire des deux chocs, qui sont conditionnellement indépendants. Le modèle est le suivant,

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= \sigma_p \omega_{p,t} - \sigma_n \omega_{n,t} \\ \omega_{p,t+1} &\sim \tilde{\Gamma}(p_t, 1) \\ \omega_{n,t+1} &\sim \tilde{\Gamma}(n_t, 1) \end{aligned}$$

où $\tilde{\Gamma}(k, \theta)$ est une distribution gamma centrée.

Les paramètres de forme p_t (good environment) et n_t (bad environment) sont modélisés d'une manière analogue à h_t du modèle GJR-GARCH :

$$\begin{aligned} p_t &= p_0 + \beta_p p_{t-1} + \frac{\alpha_p^+}{2\sigma_p^2} \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} \geq 0} + \frac{\alpha_p^-}{2\sigma_p^2} \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \\ n_t &= n_0 + \beta_n n_{t-1} + \frac{\alpha_n^+}{2\sigma_n^2} \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} \geq 0} + \frac{\alpha_n^-}{2\sigma_n^2} \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \end{aligned}$$

où $\varepsilon_t = \sigma_p \omega_{p,t} - \sigma_n \omega_{n,t}$.

Une caractéristique clé du modèle se manifeste dans le fait que les dynamiques des paramètres de forme dépendent du résidu ε_t et non pas des chocs ω_p et ω_n . Cette hypothèse conserve le modèle dans la famille GARCH, dans laquelle p_t et n_t peuvent être calculés récursivement à partir des résidus passés, sans nécessairement avoir recours au filtrage des chocs ω . Il faut aussi noter que le carré des chocs est divisé par le carré du paramètre d'échelle de leurs distributions Gamma respectives. Ceci a pour but d'interpréter les coefficients α comme étant les sensibilités de la variance conditionnelle par rapport au carré des chocs.

Chapitre 3

Méthodologie

Dans ce chapitre, nous présentons une description du modèle BEGE introduit par Bekaert, Engstrom et Ermolov (2015), et du modèle GJR-GARCH de Glosten, Jagannathan et Runkle (1993), la dérivée de Radon-Nikodym proposée par Christoffersen, Elkamhi, Feunou et Jacobs (2009), et les caractéristiques des deux modèles sous la mesure risque neutre.

3.1 Le modèle BEGE

Introduit par Bekaert, Engstrom et Ermolov (2015), le modèle BEGE est une extension du modèle GARCH standard, qui propose la non-normalité des rendements, et qui offre une solution analytique pour les moments conditionnels. Le modèle détend l'hypothèse de la normalité, en divisant le terme d'innovation en deux composantes qui suivent des lois Gamma. Le paramètre de forme de chaque composante varie au cours du temps, ce qui mène à une distribution des chocs ayant une hétéroscédasticité, un *skewness* et un *kurtosis* qui varient avec le temps.

3.1.1 Mesure physique

Sous la mesure physique, le modèle BEGE s'écrit de la façon suivante

$$\begin{aligned}
R_t &= \mu_t - \gamma_t + \varepsilon_t \\
\mu_t &= r_t + \lambda_p p_t \sigma_p^2 + \lambda_n n_t \sigma_n^2 \\
\varepsilon_t &= \omega_{p,t} - \omega_{n,t} \\
p_t &= p_0 + \beta_p p_{t-1} + \frac{\alpha_p^+}{2\sigma_p^2} \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} > 0} + \frac{\alpha_p^-}{2\sigma_p^2} \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} \leq 0} \\
n_t &= n_0 + \beta_n n_{t-1} + \frac{\alpha_n^+}{2\sigma_n^2} \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} > 0} + \frac{\alpha_n^-}{2\sigma_n^2} \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} \leq 0}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

où $\omega_{v,t}$, $v \in \{n, p\}$, suivent toutes les deux une distribution Gamma Centrée, $\tilde{\Gamma}(v_t, \sigma_v)$ et sont indépendantes l'une de l'autre. Les premiers moments d'une variable $\omega \sim \tilde{\Gamma}(v_t, \sigma_v)$ sont

$$\mathbb{E}[\omega] = 0 \quad \text{Var}_{t-1}(\omega) = v_t \sigma_v^2 \quad \text{Skew}_{t-1}(\omega) = 2v_t \sigma_v^3 \quad \text{Kurt}_{t-1}(\omega) = 6v_t \sigma_v^4.$$

Le terme de correction γ_t , est tel que l'espérance de taux de rendement est μ_t . Donc

$$\begin{aligned}
\gamma_t &= \Psi_{p,t}(1) + \Psi_{n,t}(-1) \\
&= -p_t [\ln(1 - \sigma_p) + \sigma_p] - n_t [\ln(1 + \sigma_n) - \sigma_n],
\end{aligned} \tag{3.2}$$

où $\Psi_{v,t}(u)$ est la fonction génératrice des cumulants de $\omega_{v,t}$,

$$\Psi_{v,t}(u) \equiv \log \mathbb{E}_{t-1}[\exp(ux)] = -v_t (\log(1 - u\sigma_v) + u\sigma_v) \quad \text{pour } u < 1/\sigma_v. \tag{3.3}$$

Sous la spécification de l'équation (3.1), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t-1}[e^{R_t}] &= \mathbb{E}_{t-1}[\exp\{\mu_t - \gamma_t + \varepsilon_t\}] \\
&= e^{\mu_t - \gamma_t} \mathbb{E}_{t-1}[e^{\omega_{p,t}}] \mathbb{E}_{t-1}[e^{-\omega_{n,t}}] \\
&= \exp\{\mu_t - \gamma_t + \Psi_{p,t}(1) + \Psi_{n,t}(-1)\} \\
&= \exp\{r_t + \lambda_p p_t \sigma_p^2 + \lambda_n n_t \sigma_n^2\},
\end{aligned}$$

où $\lambda_p p_t \sigma_p^2 + \lambda_n n_t \sigma_n^2$ est la prime de risque du modèle que nous allons définir plus tard. Et donc, la prime de risque espérée, $\mu_t - r_t$, contient deux composants $\lambda_v v_t \sigma_v^2$, $v \in \{p, n\}$, avec $v_t \sigma_v^2$ représente la variance actuelle provenant de $\omega_{v,t}$, et λ_v est le prix de risque correspondant.

La variance conditionnelle du modèle, obtenue à partir de la fonction génératrice des cumulants, ainsi que l'asymétrie (*skewness*) et l'aplatissement (*kurtosis*) conditionnelles, sont données par

$$\begin{aligned} h_t &= p_t \sigma_p^2 + n_t \sigma_n^2 \\ s_t &= 2(p_t \sigma_p^3 - n_t \sigma_n^3) \\ k_t &= 6(p_t \sigma_p^4 + n_t \sigma_n^4) \end{aligned}$$

l'expression de l'asymétrie montre que plus la valeur de p_t est élevée, plus l'asymétrie est positive, et plus la valeur de n_t est élevée, plus l'asymétrie est négative.

On peut maintenant calculer la sensibilité des moments par rapport aux carrés des chocs, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_t}{\partial \varepsilon_t^2} &= \begin{cases} \frac{\alpha_p^+}{2} + \frac{\alpha_n^+}{2} & \text{si } \varepsilon_t > 0 \\ \frac{\alpha_p^-}{2} + \frac{\alpha_n^-}{2} & \text{si } \varepsilon_t < 0 \end{cases} \\ \frac{\partial s_t}{\partial \varepsilon_t^2} &= \begin{cases} \sigma_p \alpha_p^+ - \sigma_n \alpha_n^+ & \text{si } \varepsilon_t > 0 \\ \sigma_p \alpha_p^- - \sigma_n \alpha_n^- & \text{si } \varepsilon_t < 0 \end{cases} \quad (3.4) \\ \text{et} \\ \frac{\partial k_t}{\partial \varepsilon_t^2} &= \begin{cases} 3(\sigma_p^2 \alpha_p^+ + \sigma_n^2 \alpha_n^+) & \text{si } \varepsilon_t > 0 \\ 3(\sigma_p^2 \alpha_p^- + \sigma_n^2 \alpha_n^-) & \text{si } \varepsilon_t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or, la modélisation traditionnelle des séries financières (comme la majorité des modèles GARCH), repose essentiellement sur l'hypothèse de la normalité conditionnelle des rendements. Cette hypothèse implique que l'asymétrie et l'aplatissement conditionnels sont nuls. Cependant, les données empiriques contredisent cette affirmation. En outre, les moments d'ordre supérieur sont semblables aux deux premiers moments quant à la variation au cours du temps (Bakaert et al (1998)). Le modèle BEGE, contrairement aux modèles traditionnels, est capable de capter cette variation, comme le montre l'équation 3.4.

3.1.2 Mesure risque neutre

En suivant Christoffersen, Elkamhi, Feunou et Jacobs (2010), nous supposons que la mesure risque neutre peut être obtenue en utilisant une dérivée exponentielle affine de Radon-Nikodym

$$\xi_t \equiv \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left\{ \sum_{s=1}^t -\Lambda_p \omega_{p,s} - \Lambda_n \omega_{n,s} - \Psi_{p,s}(-\Lambda_p) - \Psi_{n,s}(-\Lambda_n) \right\}, \quad (3.5)$$

où les $\Lambda_v, v \in \{p, n\}$ sont les coefficients de la mesure martingale équivalente (MME) qui détermine l'ampleur de la prime de risque dans le modèle.

Sous la mesure risque neutre, la valeur escompter du stock doit être une martingale. Par conséquent, on a besoin de

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \Big/ \frac{B_t}{B_{t-1}} \right] \\ &= \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\xi_t}{\xi_{t-1}} \frac{S_t}{S_{t-1}} \Big/ \frac{B_t}{B_{t-1}} \right] \\ &= \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left\{ -\Lambda_p \omega_{p,t} - \Lambda_n \omega_{n,t} - \Psi_{p,t}(-\Lambda_p) - \Psi_{n,t}(-\Lambda_n) \right\} \right. \\ &\quad \left. \exp \left\{ \mu_t - r_t - \gamma_t + \omega_{p,t} - \omega_{n,t} \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ \mu_t - r_t - \Psi_{p,t}(1) - \Psi_{p,t}(-\Lambda_p) - \Psi_{n,t}(-1) - \Psi_{n,t}(-\Lambda_n) \right\} \\ &\quad \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[\exp \left\{ (1 - \Lambda_p) \omega_{p,t} - (1 + \Lambda_n) \omega_{n,t} \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ \mu_t - r_t - \Psi_{p,t}(1) - \Psi_{p,t}(-\Lambda_p) + \Psi_{p,t}(1 - \Lambda_p) \right. \\ &\quad \left. - \Psi_{n,t}(-1) - \Psi_{n,t}(-\Lambda_n) + \Psi_{n,t}(-1 - \Lambda_n) \right\} \end{aligned}$$

Alors \mathbb{Q} est une MME si et seulement si

$$\mu_t - r_t = \Psi_{p,t}(1) + \Psi_{p,t}(-\Lambda_p) - \Psi_{p,t}(1 - \Lambda_p) + \Psi_{n,t}(-1) + \Psi_{n,t}(-\Lambda_n) - \Psi_{n,t}(-1 - \Lambda_n) \quad (3.6)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_p p_t \sigma_p^2 + \lambda_n n_t \sigma_n^2 = -p_t \log \left(\frac{(1 - \sigma_p)(1 + \Lambda_p \sigma_p)}{1 - (1 - \Lambda_p) \sigma_p} \right) - n_t \log \left(\frac{(1 + \sigma_n)(1 + \Lambda_n \sigma_n)}{1 + (1 + \Lambda_n) \sigma_n} \right)$$

Ce qui est vrai seulement si Λ_p et Λ_n résolvent les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda_p &= \frac{1}{\sigma_p^2} \log \left(\frac{1 - (1 - \Lambda_p)\sigma_p}{(1 - \sigma_p)(1 + \Lambda_p\sigma_p)} \right), \\ \lambda_n &= \frac{1}{\sigma_n^2} \log \left(\frac{1 + (1 + \Lambda_n)\sigma_n}{(1 + \sigma_n)(1 + \Lambda_n\sigma_n)} \right).\end{aligned}\tag{3.7}$$

La figure 5.1 illustre la relation entre Λ_v et λ_v , présenté dans les deux graphiques supérieurs. À première vue, nous remarquons une linéarité entre Λ_v et λ_v . Cependant, cette relation présente une légère courbure comme en témoigne les deux autres graphiques. De plus, nous remarquons que Λ_p et λ_p prennent des valeurs de même signe, alors que Λ_n et λ_n prennent des valeurs de signe contraires.

3.1.3 Distribution sous la mesure risque neutre

Soit $\Psi_{p,t}^{\mathbb{Q}}(u)$ et $\Psi_{n,t}^{\mathbb{Q}}(u)$ les fonctions génératrices des cumulants sous la mesure risque neutre de $\omega_{p,t}$ et $\omega_{n,t}$ respectivement. Alors

$$\begin{aligned}\Psi_{p,t}^{\mathbb{Q}}(u) &\equiv \log \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}[\exp(u\omega_{p,t})] \\ &= \log \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[\exp\{-\Lambda_p\omega_{p,t} - \Lambda_n\omega_{n,t} - \Psi_{p,t}(-\Lambda_p) - \Psi_{n,t}(-\Lambda_n)\} \exp\{u\omega_{p,t}\}] \\ &= \Psi_{p,t}(u - \Lambda_p) - \Psi_{p,t}(-\Lambda_p) \\ &= -p_t[\log(1 - (u - \Lambda_p)\sigma_p) + (u - \Lambda_p)\sigma_p] \\ &\quad + p_t[\log(1 + \Lambda_p\sigma_p) - \Lambda_p\sigma_p] \\ &= -p_t \left[\log \left(\frac{1 - (u - \Lambda_p)\sigma_p}{1 + \Lambda_p\sigma_p} \right) + u\sigma_p \right] \\ &= -p_t \left[\log \left(1 - \frac{\sigma_p}{1 + \Lambda_p\sigma_p} u \right) + \frac{\sigma_p}{1 + \Lambda_p\sigma_p} u + \frac{\Lambda_p\sigma_p^2}{1 + \Lambda_p\sigma_p} u \right] \\ &= -p_t \left[\log \left(1 - \frac{\sigma_p}{1 + \Lambda_p\sigma_p} u \right) + \frac{\sigma_p}{1 + \Lambda_p\sigma_p} u \right] - p_t \frac{\Lambda_p\sigma_p^2}{1 + \Lambda_p\sigma_p} u\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\Psi_{n,t}^{\mathbb{Q}}(u) &= \Psi_{n,t}(u - \Lambda_n) - \Psi_{n,t}(-\Lambda_n) \\ &= -n_t \left[\log \left(1 - \frac{\sigma_n}{1 + \Lambda_n\sigma_n} u \right) + \frac{\sigma_n}{1 + \Lambda_n\sigma_n} u \right] - n_t \frac{\Lambda_n\sigma_n^2}{1 + \Lambda_n\sigma_n} u\end{aligned}$$

Les espérances conditionnelles sous la mesure risque neutre peuvent être obtenues à partir des dérivées premières

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}(\omega_{p,t}) &= \left. \frac{\partial \Psi_{p,t}^{\mathbb{Q}}(u)}{\partial u} \right|_{u=0} = \Psi'_{p,t}(-\Lambda_p) = -p_t \left[\frac{-\sigma_p}{1 + \Lambda_p \sigma_p} + \sigma_p \right] \\ \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}(\omega_{n,t}) &= \left. \frac{\partial \Psi_{n,t}^{\mathbb{Q}}(u)}{\partial u} \right|_{u=0} = \Psi'_{n,t}(-\Lambda_n) = -n_t \left[\frac{-\sigma_n}{1 + \Lambda_n \sigma_n} + \sigma_n \right].\end{aligned}$$

Pour obtenir une séquence neutre au risque, on définit les processus $\omega_{p,t}^*$ et $\omega_{n,t}^*$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\omega_{p,t}^* &= \omega_{p,t} + \frac{\Lambda_p \sigma_p^2}{1 + \Lambda_p \sigma_p} p_t \\ \omega_{n,t}^* &= \omega_{n,t} + \frac{\Lambda_n \sigma_n^2}{1 + \Lambda_n \sigma_n} n_t.\end{aligned}\tag{3.8}$$

3.1.4 Caractéristiques sous la mesure risque neutre

Soit $\Psi_{p,t}^{\mathbb{Q}*}$ et $\Psi_{n,t}^{\mathbb{Q}*}$ les fonctions génératrices des cumulants sous la mesure risque neutre des distributions neutres au risque $\omega_{p,t}^*$ et $\omega_{n,t}^*$, alors

$$\begin{aligned}\Psi_{p,t}^{\mathbb{Q}*}(u) &\equiv \log \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}[\exp(u\omega_{p,t}^*)] = \log \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}[\exp\{u[\omega_{p,t} - \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}(\omega_{p,t})]\}] \\ &= \Psi_{p,t}^{\mathbb{Q}}(u) - u\Psi'_{p,t}(-\Lambda_p) \\ &= \Psi_{p,t}(u - \Lambda_p) - \Psi_{p,t}(-\Lambda_p) - u\Psi'_{p,t}(-\Lambda_p).\end{aligned}$$

De même

$$\Psi_{n,t}^{\mathbb{Q}*}(u) = \Psi_{n,t}(u - \Lambda_n) - \Psi_{n,t}(-\Lambda_n) - u\Psi'_{n,t}(-\Lambda_n).$$

Alors les premiers moments sous la mesure risque neutre des nouveaux processus $\omega_{v,t}^*$, $v \in \{p, n\}$ sont obtenus en dérivant la fonction génératrice $\Psi_{v,t}^{\mathbb{Q}^*}(u)$ en $u = 0$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\omega_{v,t}^*) &= \Psi'_{v,t}(-\Lambda_v) - \Psi'_{v,t}(-\Lambda_v) = 0, \\ \text{Var}^{\mathbb{Q}}(\omega_{v,t}^*) &= \Psi''_{v,t}(-\Lambda_v) = \frac{v_t \sigma_v^2}{(1 + \Lambda_v \sigma_v)^2} = v_t \sigma_v^{*2}, \\ \text{Skew}^{\mathbb{Q}}(\omega_{v,t}^*) &= \Psi^{(3)}_{v,t}(-\Lambda_v) = \frac{2v_t \sigma_v^3}{(1 + \Lambda_v \sigma_v)^3} = 2v_t \sigma_v^{*3}, \\ \text{Kurt}^{\mathbb{Q}}(\omega_{v,t}^*) &= \Psi^{(4)}_{v,t}(-\Lambda_v) = \frac{6v_t \sigma_v^4}{(1 + \Lambda_v \sigma_v)^4} = 6v_t \sigma_v^{*4},\end{aligned}$$

Parsuite, sous \mathbb{Q}

$$\omega_{v,t}^* \sim \tilde{\Gamma}(v_t, \sigma_v^*) \quad , \quad v \in \{p, n\} \quad \text{et} \quad \sigma_v^* = \frac{\sigma_v}{1 + \Lambda_v \sigma_v} \quad (3.9)$$

En effet, sous la mesure risque neutre, $\omega_{v,t}^*$ admet la fonction génératrice des moments suivante :

$$\begin{aligned}\Psi_{v,t}^{\mathbb{Q}^*}(u) &= \Psi_{v,t}(u - \Lambda_v) - \Psi_{v,t}(-\Lambda_v) - u\Psi'_{v,t}(-\Lambda_v) \\ &= -v_t \left[\ln[1 - (u - \Lambda_v)\sigma_v] - \ln[1 + \Lambda_v \sigma_v] + (u - \Lambda_v)\sigma_v \right. \\ &\quad \left. + \Lambda_v \sigma_v - u\left(\sigma_v - \frac{\sigma_v}{1 + \Lambda_v \sigma_v}\right) \right] \\ &= -v_t \left[\ln \left(1 - u \frac{\sigma_v}{1 + \Lambda_v \sigma_v} \right) + u \frac{\sigma_v}{1 + \Lambda_v \sigma_v} \right] + (u - \Lambda_v)\sigma_v + \Lambda_v \sigma_v - u\sigma_v \\ &= -v_t \left[\ln \left(1 - u \frac{\sigma_v}{1 + \Lambda_v \sigma_v} \right) + u \frac{\sigma_v}{1 + \Lambda_v \sigma_v} \right] \\ &\sim \tilde{\Gamma}(v_t, \sigma_v^*)\end{aligned}$$

Notons que la variance conditionnelle sous la mesure physique est donnée par $\text{Var}^{\mathbb{P}}(\omega_{v,t}) = \Psi''_{v,t}(0)$, alors une relation entre la variance conditionnelle sous la mesure risque neutre, et la variance conditionnelle sous la mesure physique existe, et est donnée par :

$$\text{Var}^{\mathbb{Q}}(\omega_{v,t}^*) = \text{Var}^{\mathbb{P}}(\omega_{v,t}) \frac{\Psi''_{v,t}(-\Lambda_v)}{\Psi''_{v,t}(0)}.$$

Donc on peut écrire p_t^* et n_t^* en fonction de p_t et de n_t sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\text{Var}^{\mathbb{Q}}(\omega_{p,t}^*) &= \frac{1}{(1 + \Lambda_p \sigma_p)^2} \text{Var}^{\mathbb{P}}(\omega_{p,t}) \\ \text{Var}^{\mathbb{Q}}(\omega_{n,t}^*) &= \frac{1}{(1 + \Lambda_n \sigma_n)^2} \text{Var}^{\mathbb{P}}(\omega_{n,t})\end{aligned}$$

Nous remarquons que la non-normalité de la distribution BEGE, ajoute un écart entre la variance sous la mesure physique, et celle sous la mesure risque neutre. Ce phénomène est souvent observé empiriquement, où la volatilité physique des rendements est systématiquement plus faible que la volatilité neutre au risque implicite des options.

Proposition 1. *Les rendements sous la mesure risque neutre du modèle BEGE, avec le pricing Kernel défini par (3.5) sont donné par l'équation suivante :*

$$\begin{aligned}R_t &= r_t - \gamma_t^* + \omega_{p,t}^* - \omega_{n,t}^* \tag{3.10} \\ p_t &= p_0 + \beta_p p_{t-1} + \frac{\alpha_p^+}{2\sigma_p^2} (\varepsilon_{t-1}^* - \eta_{t-1})^2 \mathbb{I}_{\{\varepsilon_{t-1}^* - \eta_{t-1} \geq 0\}} + \frac{\alpha_p^-}{2\sigma_p^2} (\varepsilon_{t-1}^* - \eta_{t-1})^2 \mathbb{I}_{\{\varepsilon_{t-1}^* - \eta_{t-1} < 0\}}, \\ n_t &= n_0 + \beta_n n_{t-1} + \frac{\alpha_n^+}{2\sigma_n^2} (\varepsilon_{t-1}^* - \eta_{t-1})^2 \mathbb{I}_{\{\varepsilon_{t-1}^* - \eta_{t-1} \geq 0\}} + \frac{\alpha_n^-}{2\sigma_n^2} (\varepsilon_{t-1}^* - \eta_{t-1})^2 \mathbb{I}_{\{\varepsilon_{t-1}^* - \eta_{t-1} < 0\}},\end{aligned}$$

avec $\omega_{v,t}^*$, $v \in \{p, n\}$ sont distribués selon l'équation (3.9), et

$$\begin{aligned}\gamma_t^* &= \Psi_{p,t}^{\mathbb{Q}^*}(1) + \Psi_{n,t}^{\mathbb{Q}^*}(-1) = -p_t [\ln(1 - \sigma_p^*) + \sigma_p^*] - n_t [\ln(1 + \sigma_n^*) - \sigma_n^*] \\ \eta_t &= \Lambda_p \sigma_p \sigma_p^* p_t - \Lambda_n \sigma_n \sigma_n^* n_t,\end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}R_t &= \mu_t - \gamma_t + \omega_{p,t} - \omega_{n,t} \\ &= \mu_t - \gamma_t + \omega_{p,t}^* - \Lambda_p \sigma_p \sigma_p^* p_t - \omega_{n,t}^* + \Lambda_n \sigma_n \sigma_n^* n_t \\ &= r + \lambda_p \sigma_p^2 p_t + \lambda_n \sigma_n^2 n_t + p_t [\ln(1 - \sigma_p) + \sigma_p] + n_t [\ln(1 + \sigma_n) - \sigma_n] \\ &\quad + \omega_{p,t}^* - \Lambda_p \sigma_p \sigma_p^* p_t - \omega_{n,t}^* + \Lambda_n \sigma_n \sigma_n^* n_t \\ &= r + p_t [\ln(1 - \sigma_p) + \sigma_p + \lambda_p \sigma_p^2 - \Lambda_p \sigma_p \sigma_p^*] \\ &\quad + n_t [\ln(1 + \sigma_n) - \sigma_n + \lambda_n \sigma_n^2 + \Lambda_n \sigma_n \sigma_n^*] + \omega_{p,t}^* - \omega_{n,t}^*\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\gamma_t^* &= \Psi_{p,t}^{\mathbb{Q}^*}(1) + \Psi_{n,t}^{\mathbb{Q}^*}(-1) \\
&= \Psi_{p,t}(1 - \Lambda_p) - \Psi_{p,t}(-\Lambda_p) - \Psi'_{p,t}(-\Lambda_p) + \\
&\quad \Psi_{n,t}(-1 - \Lambda_p) - \Psi_{n,t}(-\Lambda_p) + \Psi'_{n,t}(-\Lambda_p) \\
&= -p_t \left[\ln(1 - (1 - \Lambda_p)\sigma_p) + (1 - \Lambda_p)\sigma_p - \ln(1 + \Lambda_p\sigma_p) + \Lambda_p\sigma_p - \Lambda_p\sigma_p\sigma_p^* \right] \\
&\quad - n_t \left[\ln(1 - (-1 - \Lambda_n)\sigma_n) + (-1 - \Lambda_n)\sigma_n - \ln(1 + \Lambda_n\sigma_n) + \Lambda_n\sigma_n + \Lambda_n\sigma_n\sigma_n^* \right] \\
&= -p_t \left[\ln \left(\frac{1 - (1 - \Lambda_p)\sigma_p}{1 + \Lambda_p\sigma_p} \right) + \sigma_p - \Lambda_p\sigma_p\sigma_p^* \right] \\
&\quad - n_t \left[\ln \left(\frac{1 - (-1 - \Lambda_n)\sigma_n}{1 + \Lambda_n\sigma_n} \right) - \sigma_n + \Lambda_n\sigma_n\sigma_n^* \right] \\
&= -p_t [\ln(1 - \sigma_p) + \sigma_p + \lambda_p\sigma_p^2 - \Lambda_p\sigma_p\sigma_p^*] - n_t [\ln(1 + \sigma_n) - \sigma_n + \lambda_n\sigma_n^2 + \Lambda_n\sigma_n\sigma_n^*]
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue de l'équation (3.7). □

Pour vérifier les résultats, il suffit de démontrer que l'espérance sous \mathbb{Q} de R_t est égale aux rendements sans risque r_t . On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}[e^{R_t}] &= \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}[\exp\{\mu_t - \gamma_t + \omega_{p,t} - \omega_{n,t}\}] \\
&= \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}[\exp\{\mu_t - \gamma_t + \omega_{p,t}^* - \frac{\Lambda_p\sigma_p^2}{1 + \Lambda_p\sigma_p}p_t - \omega_{n,t}^* + \frac{\Lambda_n\sigma_n^2}{1 + \Lambda_n\sigma_n}n_t\}] \\
&= \exp\{\mu_t - \Psi_{p,t}(1) - \Psi_{n,t}(-1) - \frac{\Lambda_p\sigma_p^2}{1 + \Lambda_p\sigma_p}p_t + \frac{\Lambda_n\sigma_n^2}{1 + \Lambda_n\sigma_n}n_t \\
&\quad + \Psi_{p,t}^{\mathbb{Q}^*}(1) + \Psi_{n,t}^{\mathbb{Q}^*}(-1)\} \\
&= \exp \left\{ \begin{array}{l} \mu_t - \Psi_{p,t}(1) - \Psi_{n,t}(-1) - \frac{\Lambda_p\sigma_p^2}{1 + \Lambda_p\sigma_p}p_t + \frac{\Lambda_n\sigma_n^2}{1 + \Lambda_n\sigma_n}n_t + \\ \Psi_{p,t}(1 - \Lambda_p) - \Psi_{p,t}(-\Lambda_p) - \Psi'_{p,t}(-\Lambda_p) + \Psi_{n,t}(-1 - \Lambda_n) \\ - \Psi_{n,t}(-\Lambda_n) + \Psi'_{n,t}(-\Lambda_n) \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\Psi'_{p,t}(-\Lambda_p) = -\frac{\Lambda_p \sigma_p^2}{1 + \Lambda_p \sigma_p} p_t,$$

et

$$\Psi'_{n,t}(-\Lambda_n) = -\frac{\Lambda_n \sigma_n^2}{1 + \Lambda_n \sigma_n} n_t.$$

Alors, en utilisant l'équation (3.6), nous obtenons

$$\mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}[e^{R_t}] = \exp \left\{ \begin{array}{l} \mu_t - \Psi_{p,t}(1) - \Psi_{n,t}(-1) - \frac{\Lambda_p \sigma_p^2}{1 + \Lambda_p \sigma_p} p_t + \frac{\Lambda_n \sigma_n^2}{1 + \Lambda_n \sigma_n} n_t \\ + \Psi_{p,t}(1 - \Lambda_p) - \Psi_{p,t}(-\Lambda_p) + \frac{\Lambda_p \sigma_p^2}{1 + \Lambda_p \sigma_p} p_t + \Psi_{n,t}(-1 - \Lambda_n) \\ - \Psi_{n,t}(-\Lambda_n) - \frac{\Lambda_n \sigma_n^2}{1 + \Lambda_n \sigma_n} n_t \end{array} \right\} \\ = \exp\{r_t\}.$$

3.2 Le modèle GJR-GARCH

Le modèle GJR-GARCH est un cas particulier du modèle BEGE, qui admet un seul choc suivant une loi normale. Tel que proposé par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993), et en ajoutant un terme de correction afin de pouvoir tarifier des options, le modèle s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R_t &= \mu_t - \gamma_t + \varepsilon_t = \mu_t - \gamma_t + \sqrt{h_t} z_t \quad \text{où } z_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \mu_t &= r + \lambda \sigma_t^2 = r + \lambda h_t \\ h_t &= \omega + \beta h_{t-1} + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{\varepsilon_{t-1} \geq 0\}} + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}}. \end{aligned}$$

La fonction génératrice des cumulants Ψ_t est donnée par :

$$\Psi_t(u) \equiv \log \mathbb{E}_{t-1}[\exp(ux)] = \frac{1}{2} h_t u^2,$$

alors le terme de correction γ_t sera

$$\gamma_t = \Psi_t(1) = \frac{1}{2}h_t$$

et le modèle devient

$$\begin{aligned} R_t &= r + (\lambda - \frac{1}{2})h_t + \sqrt{h_t}z_t \\ h_t &= \omega + \beta h_{t-1} + \alpha^+ h_{t-1} z_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{z_{t-1} \geq 0\}} + \alpha^- h_{t-1} z_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{z_{t-1} < 0\}} \end{aligned}$$

La variance inconditionnelle σ^2 est définie par

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\equiv \mathbb{E}[h_t] = \mathbb{E}[\omega + \beta h_{t-1} + \alpha^+ h_{t-1} z_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{z_{t-1} \geq 0\}} + \alpha^- h_{t-1} z_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{z_{t-1} < 0\}}] \\ &= \omega + \beta \mathbb{E}[h_{t-1}] + \alpha^+ \mathbb{E}[h_{t-1}] \mathbb{E}[z_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{z_{t-1} \geq 0\}}] + \alpha^- \mathbb{E}[h_{t-1}] \mathbb{E}[z_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{z_{t-1} < 0\}}] \\ &= \omega + \beta \sigma^2 + \frac{1}{2} \alpha^+ \sigma^2 + \frac{1}{2} \alpha^- \sigma^2 \\ \Leftrightarrow \omega &= \frac{\sigma^2}{1 - \beta - \frac{1}{2}(\alpha^+ + \alpha^-)} \end{aligned}$$

la deuxième égalité est due à l'indépendance entre h_t et z_t , et la troisième est par symétrie de la loi normale.

En utilisant ce résultat, nous pouvons réécrire le processus h_t sous la forme :

$$\begin{aligned} h_t &= \sigma^2 (1 - \beta - \frac{1}{2}(\alpha^+ + \alpha^-)) + \beta h_{t-1} + \alpha^+ h_{t-1} z_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{z_{t-1} \geq 0\}} \\ &\quad + \alpha^- h_{t-1} z_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{z_{t-1} < 0\}} \\ \Leftrightarrow h_t - \sigma^2 &= (\beta + \frac{1}{2}(\alpha^+ + \alpha^-))(h_{t-1} - \sigma^2) + \alpha^+ h_{t-1} (z_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{z_{t-1} \geq 0\}} - \frac{1}{2}) \\ &\quad + \alpha^- h_{t-1} (z_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{z_{t-1} < 0\}} - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

En calculant l'espérance des deux cotés de l'équation précédente, nous obtenons

$$\mathbb{E}[h_t - \sigma^2] = (\beta + \frac{1}{2}(\alpha^+ + \alpha^-)) \mathbb{E}[h_{t-1} - \sigma^2] = \pi (h_{t-1} - \sigma^2),$$

avec $\pi = \beta + \frac{1}{2}(\alpha^+ + \alpha^-)$ correspond à la persistance de la variance.

Pour passer à la mesure risque neutre, nous appliquons la même méthodologie introduite précédemment, avec la même dérivée de Radon-Nikodym, mais cette fois avec un seul choc, on obtient la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$\Psi_t(1 - \Lambda) - \Psi_t(-\Lambda) - \Psi_t(1) + \Phi_t \sigma_t^2 = 0$$

où $\Phi_t = \frac{\mu_t - r}{\sigma_t^2}$. Cette condition est toujours satisfaite si $\mu_t = r - \Psi_t(1 - \Lambda) + \Psi_t(-\Lambda) + \Psi_t(1)$, alors

$$\begin{aligned} R_t &= \mu_t - \gamma_t + \varepsilon_t \\ &= r - \Psi_t(1 - \Lambda) + \Psi_t(-\Lambda) + \Psi_t(1) - \gamma_t + \varepsilon_t \\ &= r + \Lambda \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \varepsilon_t \end{aligned}$$

qui est la construction initiale du modèle, avec $\lambda = \Lambda$ une prime de risque affine.

Sous la mesure risque neutre, la fonction caractéristique est donnée par

$$\begin{aligned} \Psi_t^{\mathbb{Q}}(u) &= \Psi_t(u - \Lambda) - \Psi_t(-\Lambda) \\ &= \frac{1}{2}(u - \Lambda)^2 h_t - \frac{1}{2} \Lambda^2 h_t, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^* &= \varepsilon_t - \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{Q}}[\varepsilon_t] \\ &= \varepsilon_t - \Psi_t'(-\Lambda) \\ &= \varepsilon_t + \mu_t - r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathbb{Q}}(\varepsilon_t) &= \text{Var}^{\mathbb{P}}(\varepsilon_t) \frac{\Psi_t''(-\Lambda)}{\Psi_t''(0)} \\ &= \text{Var}^{\mathbb{P}}(\varepsilon_t). \end{aligned}$$

Contrairement au modèle BEGE, la variance du modèle GJR-GARCH reste la même sous les deux mesures. Un résultat dû à la normalité des chocs. Par suite, le modèle GJR-

GARCH sous la mesure risque neutre s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}R_t &= \mu_t - \frac{1}{2}h_t + \varepsilon_t \\ &= \mu_t - \frac{1}{2}h_t + \varepsilon_t^* - \mu_t + r \\ &= r - \frac{1}{2}h_t + \varepsilon_t^* \quad \text{où } \varepsilon_t^* \sim \mathcal{N}(0, h_t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}h_t &= \omega + \beta h_{t-1} + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{\varepsilon_{t-1} \geq 0\}} + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}} \\ &= \omega + \beta h_{t-1} + \alpha^+ (\varepsilon_{t-1}^* - \lambda h_{t-1})^2 \mathbb{I}_{\{\varepsilon_{t-1}^* - \lambda h_{t-1} \geq 0\}} \\ &\quad + \alpha^- (\varepsilon_{t-1}^* - \lambda h_{t-1})^2 \mathbb{I}_{\{\varepsilon_{t-1}^* - \lambda h_{t-1} < 0\}}\end{aligned}$$

Chapitre 4

Résultats empiriques

Tout d'abord, nous allons utiliser le maximum de vraisemblance sur les rendements de l'indice S&P500, afin d'estimer les paramètres des modèles, BEGE et GJR-GARCH. Ces paramètres vont servir comme paramètres initiaux dans l'estimation du maximum de vraisemblance joint sur les rendements et les options de l'indice. Nous utilisons les derniers estimateurs pour tarifier des options vanilles sur l'indice S&P500. La première section décrit les données de l'indice. La deuxième définit la volatilité implicite et ses erreurs d'estimation. La troisième contient la méthodologie de tarification des options. La quatrième explique le maximum de vraisemblance. La cinquième élabore le maximum de vraisemblance joint. Et la dernière section contient les résultats empiriques et les statistiques des deux modèles.

4.1 Données

Nous utilisons les rendements journaliers de l'indice S&P500, de 3 juillet 1962 jusqu'à 31 décembre 2013, afin d'estimer les paramètres des modèles. Pour ce qui est des options, les données comportent 5 588 724 options, couvrant une période allant janvier 1996 à août 2014. Plusieurs filtres ont été appliqués sur les options. D'abord, nous prenons seulement les options négociées les mercredis (le jour le moins influencé par l'effet week-end). Ensuite, nous éliminons les options avec une échéance plus petite qu'une semaine, et plus grande qu'un an. Les options ayant un bid-ask spread plus grand que 10% du prix ont été aussi éliminées. Cela nous donne finalement un échantillon de 31 972 options.

Les prix historiques de l'indice S&P500 ainsi que les rendements quotidiens de l'indice

sont représentés dans la figure 5.2. Les rendements extrêmes observés lors de l'écrasement des marchés boursiers en 2008-2009, ainsi que durant le Black-Monday en 1987 dominent la figure. Les périodes de faible volatilité avant l'année 1987, et au milieu des années 1990 et au milieu des années 2000 sont aussi évidentes, comme le sont les périodes de forte volatilité du début et de la fin des années 1990, et au début des années 2000.

Les volatilités conditionnelles des modèles sont données par la figure 5.3. Les deux modèles détectent bien les périodes de forte volatilité mentionnées ci-haut. Mais le modèle BEGE donne plus d'importance à ces périodes que le modèle GJR-GARCH, comme le montre la troisième sous-figure, qui illustre la différence entre les volatilités des deux modèles.

Le tableau 5.1 représente le nombre d'options européennes sur l'indice S&P500, en fonction de l'échéance et du rapport K/S (Moneyness), où K est le prix d'exercice, et S est la valeur de l'indice. Les options sont divisées en deux sections, les options d'achat (Call), et les options de vente (Put).

4.2 Volatilité implicite

La volatilité implicite d'une option peut être définie comme la volatilité qui égalise le prix selon la formule de Black et Scholes, avec le prix du marché de l'option. C'est une autre façon (plus descriptive que le prix) pour coter les options. En 1985, Rubinstein était le premier à documenter un *smile* de volatilité (symétrique) pour les options du marché boursier américain. Mais après la crise en 1987, la volatilité implicite, comme fonction du prix d'exercice, est plus asymétrique et a un *skew* vers la gauche.

La figure 5.4 montre la flexibilité du modèle BEGE à décrire la forme du *smile* de volatilité selon les poids donnés à p_t et n_t . La figure contient 9 graphiques, pour trois échéances (1 mois, 3 mois et 9 mois) et trois volatilités (15%, 20% et 25%) en fonction du *moneyness*. Nous considérons trois versions du modèle BEGE, qui dépendent des pondérations données à p_t et n_t . La première lorsque les pondérations sont égales ($h_0 = 0.5 \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2} + 0.5 \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2}$), la deuxième donne plus de poids à p_t ($h_0 = 0.9 \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2} + 0.1 \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2}$), et la troisième donne plus de poids à n_t ($h_0 = 0.1 \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2} + 0.9 \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2}$), où σ est la volatilité annuelle qui prend les 3 valeurs données ci-haut. L'augmentation du poids donné à n_t exerce une translation du *smirk* vers le bas. Par contre, l'augmentation du poids donné à p_t exerce une translation du *smirk* vers le haut. L'idée ici est que le modèle BEGE, lorsque le poids de p_t est plus élevé, a besoin de

plus de volatilité pour avoir le même prix comparé au cas lorsque les poids de p_t et n_t sont égaux, et moins de volatilité lorsque le poids de n_t est plus élevé. La différence entre les trois versions est plus élevée lorsque la volatilité augmente, et lorsque l'échéance est plus petite. Cette caractéristique est unique pour le modèle BEGE, qui est dû à la séparation des volatilités, et dont l'importance se manifeste lorsqu'un mauvais environnement se produit.

Pour analyser la performance de la volatilité implicite, nous calculons les valeurs du IVRMSE (Implied Volatility Root Mean Square Error), et RIVRMSE (Implied Volatility Relative Root Mean Square Error) données par :

$$IVRMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i,t} \left(IV_{i,t}^{Model} - IV_{i,t}^{Market} \right)^2}$$

$$RIVRMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i,t} \left(\frac{IV_{i,t}^{Model} - IV_{i,t}^{Market}}{IV_{i,t}^{Market}} \right)^2}$$

où la sommation est faite sur les contrats observés au temps t . Ces méthodes pénalisent de façon croissante les erreurs, contrairement aux autres modèles classiques de calcul des erreurs.

Les statistiques de ces erreurs sont présentées dans la table 5.5. Les erreurs sont calculées en fonction des échéances et des *moneyness* des options. Nous constatons que le modèle BEGE domine pour toutes les échéances et tous les *moneyness*. Par contre, la différence entre les erreurs des deux modèles est plus importante pour de grandes échéances, et les Puts hors monnaie.

4.3 Maximum de vraisemblance

Pour le modèle GJR-GARCH, la procédure d'estimation consiste à rechercher les valeurs des paramètres θ en supposant que $(R_t | R_{t-1}, \dots)$ est une gaussienne de moyenne $\mu_t(\theta) = \mathbb{E}(R_t | R_{t-1})$ et variance $h_t(\theta)$, où $\theta = \{\lambda, \omega, \beta, \alpha^+, \alpha^-\}$

$$R_t = r + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)h_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \mathbb{E}_{t-1}[R_t] = r + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)h_t$$

$$h_t = \text{Var}_{t-1}[R_t] = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_t > 0} + \alpha^- \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_t < 0}.$$

La fonction de vraisemblance est alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta|R_1, \dots, R_T) &= f(R_1 \dots R_T) \\ &= f_{R_1}(R_1) \times \prod_{t=2}^T f_{R_t|R_{t-1} \dots R_1}(R_t|R_{t-1} \dots R_1).\end{aligned}$$

Les distributions de $R_2|R_1, \dots, R_T|R_{T-1} \dots R_1$ sont normales avec différentes moyennes et variances. Or, la distribution inconditionnelle de R_1 est inconnue. Ainsi, nous allons seulement maximiser la fonction de vraisemblance conditionnelle, donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}f(R_2 \dots R_T|R_1; \theta) &= \prod_{t=2}^T f_{R_t|R_{t-1} \dots R_1}(R_t|R_{t-1} \dots R_1) \\ &= \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}\right),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= R_t - r - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)h_t \\ h_t &= w + \beta h_{t-1} + \alpha^+ \varepsilon_t^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_t > 0} + \alpha^- \varepsilon_t^2 \mathbb{I}_{\varepsilon_t < 0}.\end{aligned}$$

Pour faciliter le calcul, et en utilisant la monotonie de la fonction \log , la log-vraisemblance est plus agréable à considérer. Le problème revient à calculer

$$\begin{aligned}\log f(R_2 \dots R_T|R_1; \theta) &= \log \mathcal{L}(\theta|R_1, R_2, \dots, R_T) \\ &= -\frac{T-1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \log(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T T \frac{\varepsilon_t^2}{h_t}.\end{aligned}$$

Parsuite, la solution de maximisation est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \arg \max_{\theta} \log \mathcal{L}(\theta|R_1 \dots R_T) \\ &= \arg \max_{\theta} \left\{ -\frac{(T-1)}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \log(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right\}.\end{aligned}$$

Il s'agit alors de déterminer les valeurs des paramètres qui définissent la variance conditionnelle h_t ainsi que la valeur de la prime de risque du marché λ qui maximisent la fonction log-vraisemblance.

Même si l'estimation de maximum de vraisemblance conditionnelle est très bien établie pour les modèles GARCH gaussiens, l'évaluation de la fonction de vraisemblance du modèle BEGE n'est pas aussi simple. Soit u une variable aléatoire qui suit une densité BEGE, alors u s'écrit sous la forme $u = \omega_p - \omega_n$, où ω_p et ω_n sont des distributions Gamma centrées, avec les paramètres (p_t, σ_p) et (n_t, σ_n) respectivement.

Nous reprenons intégralement l'approche de Bekaert, Engstrom et Ermolov (2015). Ces derniers montrent que la densité du modèle BEGE admet une forme analytique qu'on peut dériver à partir de l'équation de Bayes suivante :

$$\begin{aligned} f_{\text{BEGE}}(u) &= \int_{\omega_p} f_u(u|\omega_p) f(\omega_p) d\omega_p \\ &= \int_{\omega_p} f_{\text{BEGE}}(u|\omega_p) df_{\omega_p} \\ &= \int_{\omega_p} f_{\omega_n}(\omega_p - u) df_{\omega_p}, \end{aligned}$$

mais l'évaluation de cette fonction nécessite plusieurs intégrations numériques en chaque point, et donc on trouve qu'une évaluation numérique de la densité BEGE est plus rapide et stable lorsqu'on utilise une représentation alternative :

$$F_{\text{BEGE}}(u) = 1 - \int_{\omega_p} F_{\text{BEGE}}(\omega_p - u) df_{\omega_p}$$

où $F_{\text{BEGE}}(\cdot)$ est la distribution cumulative du modèle. À partir de cette représentation, on peut dériver la densité BEGE par une simple approximation de différence finie. Pour plus de détails sur la méthodologie, consultez l'appendice A de Bekaert, Engstrom et Ermolov (2015).

Le tableau 5.2 contient les résultats de l'estimation des deux modèles, en utilisant les rendements quotidiens de l'indice S&P 500, de juillet 1962 jusqu'au décembre 2013.

Les erreurs de l'estimation sont calculées à partir de la matrice d'informations de Fisher. Nous calculons d'abord le gradient (∇f) et la matrice Hessienne (H_f) de la fonction objective, appliquée aux estimateurs, en utilisant les options de la fonction `fmincon` de Matlab.

L'erreur est ensuite donnée par :

$$StdErr = \sqrt{diag((-H)^+ \times A \times (-H)^+)}$$

$$A = \nabla f_\theta \times (\nabla f_\theta)^T$$

où M^+ et M^T représentent le pseudo-inverse et le transposé de la matrice M respectivement.

Pour le modèle GJR-GARCH, la variance inconditionnelle est $\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\beta-\frac{1}{2}(\alpha^++\alpha^-)}$, avec des contraintes sur β , α^+ et α^- pour que la variance reste positive. Nous estimons la valeur de σ^2 , ensuite nous calculons la valeur de ω , pour cela l'erreur standard de l'estimation de ω ne sera pas reportée. Nous trouvons que la valeur de α^+ est plus petite que la valeur de α^- , ce qui revient à dire que les chocs négatifs ont plus d'impact sur la volatilité que les chocs positifs. La corrélation β a une valeur d'environ 92%, ce qui reflète le fait que la variance aujourd'hui est très affectée par la variance de la journée précédente.

Pour le modèle BEGE, nous trouvons que la valeur de β_p est plus grande que la valeur de β_n , ce qui veut dire que les bons environnements sont plus persistants que les mauvais environnements. La bonne volatilité répond de la même manière aux bons et mauvais chocs, ce fait se traduit par les valeurs de $\alpha_{p,p}$ et $\alpha_{p,n}$ qui sont du même signe, et pas très différentes l'une de l'autre. $\alpha_{n,n}$ est beaucoup plus grand que $\alpha_{n,p}$, par conséquent, la mauvaise volatilité est presque seulement affectée par les mauvais chocs, et donc, la queue négative de la distribution des rendements augmente considérablement suite à des chocs négatifs. Ce résultat, surtout dans le contexte de la gestion de risque, est une caractéristique très importante que les modèles gaussiens ne pourront jamais établir.

Nous constatons aussi que les valeurs de λ_p et λ_n sont positives, ce qui donne une valeur positive de Λ_p , et une valeur négative pour Λ_n (figure 5.1), qui a comme effet d'augmenter l'impact des valeurs négatives des bons chocs ($-\Lambda_p\omega_{p,t}$), ainsi que l'impact des mauvais chocs qui sont toujours associés par un signe "-" -et donc négatifs - ($-\Lambda_n\omega_{n,t}$).

Vu que les deux modèles n'admettent pas le même nombre de paramètres, la comparaison de leurs maximums de vraisemblance n'est pas vraiment descriptive. Pour ce faire, nous reportons le critère d'information d'Akaike (AIC), et le critère d'information Bayésien (BIC) définis par :

$$AIC = 2k - 2 \ln(L)$$

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(L)$$

où k est le nombre des paramètres du modèle, n est le nombre des données dans l'échantillon, et L est la vraisemblance de chaque modèle. Le modèle à choisir sera celui qui aura le plus petit AIC ou BIC. Les deux critères reposent sur un compromis entre la qualité de l'ajustement et la complexité du modèle, en pénalisant les modèles ayant un plus grand nombre de paramètres, qui augmente nécessairement la vraisemblance du modèle. Le critère d'Akaike pénalise moins fortement le nombre des paramètres que le BIC, mais dans les deux cas nous trouvons que le modèle BEGE performe mieux le modèle GJR-GARCH.

4.4 Maximum de vraisemblance conjoint

Pour mettre en évidence la capacité du modèle à capter la différence des distributions sous la mesure physique et risque neutre, nous devrions estimer les deux distributions en utilisant le même ensemble des paramètres. Mais la littérature de tarification des options contient peu d'études sur le sujet, en raison de la description explicite du lien entre la distribution physique et la distribution risque neutre.

Nous utilisons une approche basée sur les travaux de Santa Clara et Yan (2010), Christoffersen, Heston et Jacobs (2009), et Christoffersen, Heston et Jacobs (2013) pour estimer les paramètres avec une fonction de vraisemblance jointe. La méthode est essentiellement basée sur l'estimation des paramètres par une fonction de vraisemblance avec deux composantes, la première à base des options L^O , et la deuxième à base des rendements L^R . La fonction de vraisemblance des rendements a été présentée dans la section précédente. Pour celle basée sur les options, nous définissons d'abord les erreurs d'évaluation des options pondérées par le Vega -la dérivée par rapport à la volatilité- de Black Scholes (BSV), comme étant,

$$Err_i = \frac{C_i^{Mkt} - C_i^{Mod}}{BSV_i^{Mkt}}$$

où C_i^{Mkt} est le prix du marché, C_i^{Mod} est le prix obtenu à l'aide du modèle (cf. Section 4.5), et BSV_i^{Mkt} est le Vega Black Scholes de l'option par rapport à la volatilité implicite du marché. En supposant que ces erreurs sont indépendantes et distribuées normalement, nous obtenons une fonction de vraisemblance qui s'écrit comme :

$$\ln L^O \propto -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \ln(s_{Err}^2) + \frac{Err_i^2}{s_{Err}^2} \right\},$$

où $s_{Err}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Err_i^2$. Les erreurs Vega-pondérées sont une approximation des erreurs de la volatilité implicite, et donc ont les mêmes propriétés statistiques. Mais l'avantage de ces erreurs est dans le fait que nous n'avons pas besoin de calculer l'inverse de la formule de Black Scholes à chaque pas de l'optimisation, qui coûte très cher lorsque l'estimation est grande.

Par indépendance des observations, la fonction conjointe peut s'écrire comme le produit des deux fonctions de vraisemblance. En appliquant le log, cette dernière est équivalente à la somme des deux fonctions de log-vraisemblance. Le problème revient donc à maximiser la fonction objective suivante :

$$\max_{\Theta, \Theta^*} \ln L^R + \ln L^O$$

ou bien

$$\max_{\Theta, \Theta^*} \frac{p+q}{2} \left(\frac{\ln L^R}{p} + \frac{\ln L^O}{q} \right) \quad (4.1)$$

où Θ désigne les paramètres physiques et Θ^* désigne les paramètres sous la mesure risque neutre. p et q représentent les longueurs des séries temporelles des rendements et des options respectivement.

4.5 Tarification des Options

Les deux modèles que nous avons utilisé n'admettent pas des solutions analytiques pour la tarification des options. Raison pour laquelle nous avons recours à la simulation Monte Carlo pour calculer les prix des options. Ces prix sont utilisés d'abord dans l'estimation conjointe afin de calculer les erreurs d'évaluation des options présentées dans la section précédente, ensuite dans la tarification des options de l'indice S&P 500.

Le prix du Call européen calculé par une simulation Monte Carlo admet la formule suivante :

$$\begin{aligned} C_{t,T} &= \exp[-r(T-t)] \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left(\text{Max}(S_T - X, 0) \right) \\ &\approx \exp[-r(T-t)] \frac{1}{MC} \sum_{i=1}^{MC} \left[\text{Max} \left(S_t \exp \left(\sum_{\tau=1}^{T-t} R_{i,t+\tau}^* \right) - X, 0 \right) \right] \end{aligned}$$

où C est le prix du call calculé à la fermeture de la journée t , pour une maturité T , S est le prix de l'actif sous-jacent, X est le prix d'exercice, et $R_{i,t+\tau}^*$ représentent les log-rendements simulés sous la mesure risque neutre.

Ensuite, nous utilisons la méthode *Empirical Martingal Simulation* de Duan et Simonato (1997) pour améliorer les trajectoires simulées. De plus, nous utilisons les mêmes variables aléatoires pour toutes les périodes, en simulant pour la période la plus lointaine, et ensuite tronquer pour les périodes les plus petites, et c'est pour assurer que les résultats ne sont pas biaisés par la simulation Monte Carlo.

Pour analyser la performance de la tarification des options, nous calculons les valeurs des erreurs des moindres carrés RMSE (Root Mean Squared Error), et RRMSE (Relative Root Mean Squared Error) données par :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i,t} \left(C_{i,t}^{Model} - C_{i,t}^{Market} \right)^2}$$

$$RRMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i,t} \left(\frac{C_{i,t}^{Model} - C_{i,t}^{Market}}{C_{i,t}^{Market}} \right)^2}$$

Dans le tableau 5.5, nous présentons les erreurs de tarification des deux modèles par rapport à l'échéance et le *moneyness* des options.

Nous remarquons que le modèle BEGE surperforme toujours son modèle de référence. La différence entre les erreurs des deux modèles est plus remarquable pour les petites échéances. Pour les Calls hors monnaie, les deux modèles admettent des erreurs élevées, mais reste que l'erreur du modèle BEGE est beaucoup plus petite.

4.6 Estimation des paramètres et résultats empiriques

Afin d'obtenir nos estimateurs, nous allons utiliser l'équation (4.1) de la section précédente. La première étape consiste à décomposer notre base de données en 19 années (les deux modèles n'admettent pas des solutions analytiques pour la tarification des options, raison pour laquelle une seule estimation ne pourrait pas être gérable). À chaque estimation, nous prenons les rendements et nous y ajoutons une fenêtre d'options. La première fenêtre est composée des options de la première année, et les rendements des 10 années qui la précèdent, la deuxième celles de la deuxième année, ainsi que 10 ans de rendements, et

ainsi de suite. Les paramètres initiaux sont ceux estimés à partir des rendements, puisqu'ils contiennent déjà assez d'informations.

Le panneau A de la table 5.3 représente les estimateurs du modèle GJR, les erreurs de volatilité implicite IVRMSE (In-Sample et Out-Of-Sample), ainsi que le rapport du IVRMSE entre le modèle BEGE et le modèle GJR-GARCH. Le panneau B représente les estimateurs du modèle BEGE, ainsi que le IVRMSE (In-Sample et Out-of-Sample).

Pour les résultats In-Sample du IVRMSE, nous remarquons qu'en moyenne, le modèle BEGE surperforme le modèle GJR-GARCH. Cette performance est observée à travers la majorité des périodes. Le modèle GJR-GARCH domine seulement durant les années 1999 et 2007.

Le panneau B contient les estimateurs du modèle BEGE, ainsi que le IVRMSE. Les valeurs des paramètres sont proches des paramètres estimés avec les rendements, et peuvent être interprétés de la même façon. Sauf pour les années 1999 et 2008, où les valeurs de $\alpha_{p,p}$ sont négatives. Ceci peut être vu comme un équilibrage de la volatilité conditionnelle, qui peut exploser en raison des valeurs élevées de $\alpha_{n,p}$ et $\alpha_{n,n}$. Il faut aussi noter que ces deux périodes marquent le début des crises asiatiques en 1999, et la crise financière de 2008. Ce qui explique la dominance de la mauvaise volatilité durant ces périodes. En 1999, la valeur de $\alpha_{p,p}$ est négative, et celle de $\alpha_{p,n}$ est positive, ce qui indique que la bonne volatilité de cette année est sensible seulement aux mauvais chocs. De même pour la mauvaise volatilité. En 2008, le résultat est similaire, mais cette fois, les valeurs de $\alpha_{p,p}$ et $\alpha_{p,n}$ sont toutes les deux négatives, tandis que les celles de $\alpha_{n,p}$ et $\alpha_{n,n}$ sont positives. Ce qui revient à dire que la volatilité conditionnelle de cette année est affectée seulement par la mauvaise volatilité.

Le tableau 5.5 présente le In-Sample IVRMSE en fonction de l'échéance et du *money-ness*. Nous reportons le RMSE, IVRMSE, RRMSE et RIVRMSE pour les deux modèles, en utilisant les paramètres du tableau 5.3. Nous remarquons que les quatre types d'erreurs sont plus bas pour le modèle BEGE, et c'est en fonction du *money-ness* et de l'échéance (dernière ligne de chaque panneau). Il est clair que les améliorations ont tendance à être plus grandes pour des petites échéances, et les options hors monnaie.

Le IVRMSE (In-Sample) hebdomadaire est illustré dans la figure 5.7. l'erreur est calculée avec les données de chaque année, ensuite concaténée pour chaque semaine. La dominance du modèle BEGE est évidente pour toutes les périodes, sauf pour quelques valeurs au début de l'année 1999, à la fin de l'année 2007 et au début de l'année 2008.

Nous reportons les valeurs de la prime de risque annuelle dans la table 5.4, ainsi que la première sous-figure de la figure 5.6, et les valeurs hebdomadaires de la prime de risque dans la deuxième sous-figure. La prime du modèle BEGE est plus élevée pour toutes les périodes,

sauf pour l'année 1999. Durant les autres périodes, la prime du modèle BEGE est plus que deux fois celle du modèle GJR-GARCH. Les deux composantes (positive et négative) de la volatilité conditionnelle du modèle BEGE sont aussi données dans la table 5.4. La composante négative est plus grande en moyenne que la composante positive (dernière colonne du tableau). Elle augmente d'une façon significative durant les années 2007 et 2008, qui marquent le début de la crise financière. Ces derniers résultats sont dans la même veine que la conclusion de Bakaert, Engstrom et Ermolov (2015), où "le modèle BEGE crée un environnement plus risqué, en donnant plus de poids aux mauvais chocs, ce qui amène les investisseurs à payer des primes de risque plus élevées, et des demandes d'épargne de précaution plus importantes".

Chapitre 5

Conclusion

Ce mémoire introduit un modèle de tarification des options, qui admet une flexibilité unique quant à la détection du *smirk* de volatilité. Le modèle "bad environment good environment (BEGE)" comporte deux chocs qui suivent une distribution Gamma, et qui mènent à une hétéroskedasticité, un *skweness* et un *kurtosis* qui varient au cours du temps. Dans notre étude empirique sur l'indice S&P500, nous avons trouvé que le modèle BEGE surperforme son modèle de référence, soit le modèle GJR-GARCH.

Afin de comparer la performance des deux modèles quant à l'ajustement des séries de rendements, nous avons eu recours aux critères d'AIC et BIC qui nous ont illustré la supériorité du modèle BEGE. Une deuxième étape importante de notre étude est l'effet de l'ajout des options dans l'estimation du maximum de vraisemblance. Le modèle BEGE présenté dans le cadre de ce mémoire n'admet pas une formule fermée servant à la tarification des options vanilles. Cela représente un coût de calcul important dans la procédure d'estimation jointe. Pour contourner ce problème, nous proposons une structure affine du modèle BEGE, qui admet une forme fermée avec le *pricing kernel* proposé dans le chapitre 3. Mais l'élaboration de ce modèle ne fait pas partie de ce mémoire, à cause du défi de filtration que représente la séparation des chocs. L'ajout de l'information contenue dans les options nous a permis de réduire l'erreur quadratique de la volatilité implicite IVRMSE. Nous avons calculé l'IVRMSE pour comparer la performance des deux modèles tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de l'échantillon. Nous constatons que le modèle BEGE possède en moyenne une IVRMSE plus petite que le modèle GJR dans les deux cas.

Ensuite, nous avons effectué une étude approfondie de la flexibilité du modèle BEGE à détecter le *smirk* de volatilité. Pour y parvenir, nous avons étudié l'impact de la variation

de la volatilité de départ par rapport à l'échéance des contrats d'options. La variation des poids de la bonne et la mauvaise volatilité qui intervient dans l'expression de la volatilité initiale conduisent à trois versions du modèle BEGE. Nous constatons qu'une augmentation du poids affilié à la mauvaise volatilité initiale résulte en une translation ascendante du *smirk* de la volatilité. L'effet de cette augmentation est plus important pour les échéances de courtes durées.

Enfin, nous avons étudié la prime de risque reportée par chaque modèle, et avons trouvé que le modèle BEGE amène à une prime de risque plus élevée, qui reflète l'importance donnée aux mauvais chocs, qui créent un environnement plus risqué que celui du modèle GJR-GARCH.

Bibliographie

- [Bekaert and Engstrom, 2009] Bekaert, G. and Engstrom, E. (2009). Asset return dynamics under bad environment good environment fundamentals. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- [Bekaert et al., 2015] Bekaert, G., Engstrom, E., and Ermolov, A. (2015). Bad environments, good environments : A non-gaussian asymmetric volatility model. *Journal of Econometrics*, 186(1) :258–275.
- [Black and Scholes, 1973] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, pages 637–654.
- [Bollerslev, 1986] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3) :307–327.
- [Christoffersen et al., 2010a] Christoffersen, P., Dorion, C., Jacobs, K., and Wang, Y. (2010a). Volatility components, affine restrictions, and nonnormal innovations. *Journal of Business & Economic Statistics*, 28(4) :483–502.
- [Christoffersen et al., 2010b] Christoffersen, P., Elkamhi, R., Feunou, B., and Jacobs, K. (2010b). Option valuation with conditional heteroskedasticity and nonnormality. *Review of Financial studies*, 23(5) :2139–2183.
- [Christoffersen et al., 2012a] Christoffersen, P., Feunou, B., Jacobs, K., and Meddahi, N. (2012a). The economic value of realized volatility : Using high-frequency returns for option valuation. In *AFA 2013 San Diego Meetings Paper*.
- [Christoffersen et al., 2006] Christoffersen, P., Heston, S., and Jacobs, K. (2006). Option valuation with conditional skewness. *Journal of Econometrics*, 131(1) :253–284.
- [Christoffersen et al., 2009] Christoffersen, P., Heston, S., and Jacobs, K. (2009). The shape and term structure of the index option smirk : Why multifactor stochastic volatility models work so well. *Management Science*, 55(12) :1914–1932.

- [Christoffersen et al., 2013] Christoffersen, P., Heston, S., and Jacobs, K. (2013). Capturing option anomalies with a variance-dependent pricing kernel. *Review of Financial Studies*, 26(8) :1963–2006.
- [Christoffersen and Jacobs, 2004] Christoffersen, P. and Jacobs, K. (2004). Which garch model for option valuation ? *Management science*, 50(9) :1204–1221.
- [Christoffersen et al., 2012b] Christoffersen, P., Jacobs, K., and Ornathanalai, C. (2012b). Dynamic jump intensities and risk premiums : Evidence from s&p500 returns and options. *Journal of Financial Economics*, 106(3) :447–472.
- [Christoffersen et al., 2008] Christoffersen, P., Jacobs, K., Ornathanalai, C., and Wang, Y. (2008). Option valuation with long-run and short-run volatility components. *Journal of Financial Economics*, 90(3) :272–297.
- [Dorion, 2013] Dorion, C. (2013). Option valuation with macro-finance variables. *Available at SSRN 1609769*.
- [Duan et al., 2006] Duan, J., Gauthier, G., Simonato, J., and Sasseville, C. (2006). Approximating the gjr-garch and egarch option pricing models analytically. *Journal of Computational Finance*, 9(3) :41.
- [Duan et al., 2007] Duan, J., Ritchken, P., and Sun, Z. (2007). Jump starting garch : Pricing options with jumps in returns and volatilities. *RMI working paper*, (7).
- [Duan et al., 1995] Duan, J.-C. et al. (1995). The garch option pricing model. *Mathematical finance*, 5(1) :13–32.
- [Duan et al., 1997] Duan, J.-C., Gauthier, G., and Simonato, J.-G. (1997). *An analytical approximation for the GARCH option pricing model*. École des hautes études commerciales, Groupe de recherche en finance.
- [Durham et al., 2015] Durham, G., Geweke, J., and Ghosh, P. (2015). A comment on christoffersen, jacobs, and ornathanalai (2012),dynamic jump intensities and risk premiums : Evidence from s&p 500 returns and options. *Journal of Financial Economics*, 115(1) :210–214.
- [Engle, 2004] Engle, R. (2004). Risk and volatility : Econometric models and financial practice. *The American Economic Review*, 94(3) :405–420.
- [Engle, 1982] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 987–1007.

- [Feunou and Okou, 2016] Feunou, B. and Okou, C. (2016). Good volatility, bad volatility and option pricing. *Bad Volatility and Option Pricing (March 2, 2016)*.
- [Glosten et al., 1993] Glosten, L. R., Jagannathan, R., and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, 48(5) :1779–1801.
- [Hentschel, 1995] Hentschel, L. (1995). All in the family nesting symmetric and asymmetric garch models. *Journal of Financial Economics*, 39(1) :71–104.
- [Heston, 1993] Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies*, 6(2) :327–343.
- [Heston and Nandi, 2000] Heston, S. L. and Nandi, S. (2000). A closed-form garch option valuation model. *Review of Financial Studies*, 13(3) :585–625.
- [Longstaff and Schwartz, 2001] Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (2001). Valuing american options by simulation : a simple least-squares approach. *Review of Financial studies*, 14(1) :113–147.
- [Nelson, 1991] Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns : A new approach. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 347–370.
- [Santa-Clara and Yan, 2010] Santa-Clara, P. and Yan, S. (2010). Crashes, volatility, and the equity premium : Lessons from s&p 500 options. *The Review of Economics and Statistics*, 92(2) :435–451.

TABLE 5.1 – Options sur l'indice S&P500

Moneyness	Mat. \leq 2 mois		2 mois $<$ Mat. \leq 6 mois		Mat. $>$ 6 mois	
	Call	Put	Call	Put	Call	Put
$K/S \leq 0.94$	575	0	1862	0	2763	0
$0.94 < K/S \leq 0.97$	870	0	1141	0	673	106
$0.97 < K/S \leq 1$	1210	257	1128	628	555	733
$1 < K/S \leq 1.03$	0	1675	0	1877	0	1054
$1.03 < K/S \leq 1.06$	0	1146	0	1345	0	798
$K/S > 1.06$	0	2323	0	4870	0	4383

Nombre des contrats d'options vanilles (puts et calls), suivant l'échéance (Mat.) et le rapport K/S (Moneyness).

TABLE 5.2 – Maximum de vraisemblance

Paramètres	GJR-GARCH	StrErr	BEGE	StdErr
λ_p	1.2845	(2.3753e-3)	3.7024	(0.001837)
ωp_0	7.33e-7		0.0045	(1.4156e-5)
σ_p			0.0019	(1.0375e-5)
β_p	0.9238	(1.1795e-4)	0.9643	(5.5001e-5)
$\alpha_{p,p}$	0.0229	(6.4503e-5)	0.0271	(1.9371e-5)
$\alpha_{p,n}$			0.0379	(7.7526e-5)
λ_n			3.6273	(0.001528)
n_0			0.1252	(7.0743e-6)
σ_n			0.0036	(7.4419e-6)
β_n			0.8374	(1.8912e-5)
$\alpha_{n,p}$			-0.0201	(3.1901e-4)
$\alpha_{n,n}$	0.1166	(1.7014e-4)	0.2774	(1.4211e-4)
$\sqrt{252\sigma_p^2\bar{p}_t}$			0.1119	
$\sqrt{252\sigma_n^2\bar{n}_t}$			0.1219	
Log-Likelihood	43757.90		44015.17	
# parameters	5		12	
AIC	-87505.63		-88006.33	
BIC	-87468.28		-87916.69	

Éstimation du maximum de vraisemblance des rendements quotidiens de l'indice S&P500, 1962-2013. Les colonnes 2 et 4 représentent les erreurs d'estimation obtenues à partir de la matrice d'Information de Fisher.

TABLE 5.3 – Maximum de vraisemblance joint

Panneau A : modèle GJR-GARCH

Année	λ	ω	Estimateurs			IVRMSE		BEGE/GJR		Nb d'obs
			β	α^+	α^-	In-S	Out-S	In-S	Out-S	
1996	1.2845 (3.1E-11)	7.391e-7	0.9238 (4.2E-11)	0.0229 (1.0E-10)	0.1165 (1.8E-11)	0.0279	NA	0.7742	NA	1527
1997	1.2724 (2.2E-12)	5.440e-7	0.9238 (2.3E-12)	0.0291 (1.6-11)	0.1139 (5.4E-12)	0.0419	0.0359	0.7375	0.9666	1581
1998	1.3070 (1.2E-11)	-5.907e-7	0.9238 (1.7E-11)	0.0481 (1.1E-11)	0.1147 (5.8E-12)	0.0977	0.0611	0.4974	0.8020	1610
1999	2.0894 (0.0042)	5.028e-5	0.9661 (0.0093)	-0.9852 (9.2E-4)	0.1729 (0.0054)	0.0440	0.0708	1.4273	0.9964	1674
2000	1.2095 (0.13)	1.009e-5	0.9135 (0.009)	0.0097 (1.3E-4)	-0.0134 (4.1E-3)	0.0663	0.0452	0.4434	1.8856	1482
2001	1.1600 (6.8E-05)	8.892e-6	0.9227 (0.08852)	-0.055 (3.2E-05)	0.0539 (3.4E-06)	0.0571	0.0767	0.8389	0.3807	1545
2002	1.2826 (2.7E-06)	2.0622e-8	0.9238 (2.5E-06)	0.0304 (4.2E-06)	0.1216 (6.3E-06)	0.0408	0.0830	0.7696	0.7169	1623
2003	1.2844 (0.013)	7.3303e-7	0.9238 (0.028)	0.0229 (0.079)	0.1166 (0.0304)	0.0629	0.0314	0.8537	0.9076	1606
2004	1.2845 (1.1E-08)	7.322e-7	0.9238 (5.9E-08)	0.0229 (8.6E-08)	0.1166 (1.9E-08)	0.0204	0.0539	0.8333	0.9481	1638
2005	1.2844 (2.4E-10)	7.360e-7	0.9238 (1.8E-08)	0.0229 (3.7-09)	0.1165 (5.4E-09)	0.0224	0.0224	0.9553	0.9464	1631
2006	1.2844 (1.0E-08)	7.249e-7	0.9238 (8.5E-09)	0.0231 (8.3E-09)	0.1165 (4.2E-08)	0.0228	0.0229	0.7851	0.9607	1617
2007	1.4193 (3.2E-11)	4.4597e-6	0.9251 (2.7E-11)	-0.0552 (2.8E-11)	0.1270 (2.2-11)	0.0479	0.0314	1.1586	0.8569	1604
2008	1.2856 (1.3E-07)	7.2872e-7	0.9238 (2.4E-07)	0.0230 (6.2E-07)	0.1166 (4.6E-07)	0.1287	0.0920	0.6045	1.8326	1831
2009	1.2854 (1.1E-05)	7.0626e-7	0.9238 (7.8E-06)	0.0232 (1.4E-05)	0.1168 (1.0E-05)	0.1597	0.0561	0.3532	2.0125	1836
2010	1.1963 (1.0E-07)	9.1187e-6	0.9237 (1.4E-07)	-0.0539 (7.2E-08)	0.0468 (1.0E-08)	0.1043	0.0956	0.4219	0.4613	1890
2011	1.2845 (1.0E-09)	7.383e-7	0.9238 (2.4-10)	0.0229 (1.3E-09)	0.1165 (3.7E-10)	0.0566	0.1266	0.7544	0.3381	1854
2012	1.2843 (3.0E-06)	7.199e-7	0.9238 (2.2E-05)	0.0230 (5.8E-06)	0.1167 (4.1E-06)	0.0489	0.0487	0.5828	1.7823	1924
2013	1.2845 (1.5E-11)	7.3314e-7	0.9238 (1.0E-10)	0.0229 (1.8E-11)	0.1166 (6.3E-11)	0.0216	0.0216	0.7454	1.5324	2087
2014	1.2845 (6.4E-08)	7.3355e-7	0.9238 (3.2E-08)	0.0229 (4.3E-08)	0.1166 (1.0E-07)	<u>0.0277</u>	<u>0.0278</u>	<u>0.6895</u>	<u>0.7230</u>	<u>1413</u>
Total						0.0569	0.05488	0.6681	0.9826	31973

Panneau B : modèle BEGE

Année	Estimateurs											IVRSME		
	λ_p	p_0	σ_p	β_p	$\alpha_{p,p}$	$\alpha_{p,n}$	λ_n	η_0	σ_n	β_n	$\alpha_{n,p}$	$\alpha_{n,n}$	In-S	Out-S
1996	3.7009 (7.5E-11)	4.51e-3 (1.9E-11)	1.89e-3 (2.4E-10)	0.964 (1.1E-10)	0.025 (1.0E-10)	0.036 (7.8E-13)	3.6261 (1.2E-12)	0.1250 (6.3E-11)	3.64e-3 (4.2E-10)	0.837 (1.4E-10)	-0.019 (1.7E-10)	0.2749 (1.7E-10)	0.0217	NA
1997	3.7024 (8.6E-09)	4.51e-3 (8.6E-09)	1.89e-3 (3.7E-08)	0.964 (2.4E-08)	0.027 (4.3E-07)	0.038 (1.2E-08)	3.6272 (7.0E-09)	0.1252 (5.5E-10)	3.64e-3 (4.6E-08)	0.837 (2.1E-08)	-0.020 (7.6E-09)	0.2775 (5.0E-09)	0.0309	0.0347
1998	3.7023 (4.9E-09)	4.51e-3 (5.2E-09)	1.89e-3 (3.6E-08)	0.964 (1.0E-08)	0.027 (1.4E-08)	0.038 (1.0E-08)	3.6273 (5.0E-09)	0.1252 (1.7E-08)	3.64e-3 (2.8E-09)	0.837 (1.7E-08)	-0.020 (1.5E-08)	0.2774 (9.4E-09)	0.0486	0.0490
1999	3.7941 (2.5E-09)	4.51e-3 (1.2E-09)	1.88e-3 (6.3E-09)	0.964 (9.0E-09)	-0.06 (1.1E-08)	0.1338 (4.4E-09)	3.6120 (1.6E-09)	0.1313 (2.3E-10)	3.63e-3 (5.5E-09)	0.850 (1.7E-10)	-0.17 (3.2E-09)	0.4081 (6.9E-10)	0.0628	0.0553
2000	3.7024 (2.5E-16)	4.51e-3 (1.8E-15)	1.89e-3 (3.8E-15)	0.964 (1.3E-16)	0.027 (2.1E-15)	0.038 (2.1E-16)	3.6273 (9.2E-17)	0.1252 (3.0E-15)	3.64e-3 (1.7E-15)	0.837 (2.3E-15)	-0.020 (2.4E-15)	0.2774 (2.6E-15)	0.0294	0.1335
2001	3.7412 (2.2E-16)	4.50e-3 (9.4E-16)	1.89e-3 (3.9E-16)	0.964 (5.5E-16)	0.079 (6.7E-16)	-0.01 (5.3E-16)	3.7042 (1.4E-16)	0.1259 (7.7E-16)	3.63e-3 (4.2E-16)	0.837 (6.7E-17)	-0.062 (1.7E-15)	0.3763 (5.3E-16)	0.0479	0.0292
2002	3.7014 (3.0E-18)	4.51e-3 (4.1E-18)	1.89e-3 (4.5E-18)	0.964 (2.5E-18)	0.026 (1.5E-17)	0.037 (4.7E-18)	3.6267 (4.3E-18)	0.1251 (3.3E-18)	3.64e-3 (1.3E-17)	0.837 (3.7E-17)	-0.020 (4.1E-18)	0.2775 (4.4E-18)	0.0314	0.0595
2003	3.6521 (3.2E-3)	4.32e-3 (8.1E-4)	1.91e-3 (6.09E-3)	0.961 (4.2E-3)	0.123 (3.1E-3)	-0.01 (1.4E-2)	3.5899 (2.4E-4)	0.1216 (2.4E-3)	3.19e-3 (2.3E-3)	0.793 (3.8E-3)	-0.108 (7.7E-4)	0.2628 (2.9E-3)	0.0537	0.0285
2004	3.7023 (4.8E-11)	4.51e-3 (5.1E-10)	1.89e-3 (2.6E-11)	0.964 (3.7E-10)	0.027 (6.2E-11)	0.038 (1.0E-10)	3.6273 (1.3E-10)	0.1252 (6.0E-11)	3.64e-3 (3.8E-10)	0.837 (1.5E-10)	-0.020 (6.0E-11)	0.2774 (6.0E-10)	0.0170	0.0511
2005	3.7024 (3.4E-08)	4.51e-3 (1.2E-07)	1.89e-3 (5.5E-08)	0.964 (2.1E-07)	0.027 (3.5E-07)	0.038 (3.8E-07)	3.6273 (9.0E-08)	0.1252 (7.2E-09)	3.64e-3 (1.8E-07)	0.837 (1.3E-07)	-0.020 (1.6E-07)	0.2774 (1.3E-07)	0.0214	0.0212
2006	3.7046 (1.2E-16)	4.51e-3 (4.9E-16)	1.89e-3 (1.1E-15)	0.964 (9.6E-16)	0.042 (6.9E-17)	0.022 (6.4E-16)	3.6212 (2.0E-16)	0.1258 (1.5E-16)	3.64e-3 (1.6E-15)	0.836 (1.3E-15)	-0.015 (2.1E-16)	0.2651 (1.3E-16)	0.0179	0.0220
2007	4.6085 (6.3E-5)	4.56e-3 (7.7E-3)	1.90e-3 (1.7E-3)	0.360 (3.4E-3)	0.041 (2.0E-3)	0.039 (1.3E-3)	4.9999 (7.6E-4)	0.5254 (3.5E-3)	3.64e-3 (8.9E-4)	0.805 (7.0E-3)	-0.012 (9.1E-3)	0.2733 (1.2E-2)	0.0555	0.0269
2008	3.0290 (7.0E-09)	4.55e-3 (1.7E-08)	1.88e-3 (1.0E-08)	0.959 (5.3E-09)	-0.99 (1.8E-09)	-0.2 (2.6E-08)	3.1671 (1.4E-08)	0.1046 (1.1E-08)	3.67e-3 (5.1E-08)	0.777 (3.8E-08)	0.421 (1.4E-08)	0.2770 (2.2E-08)	0.0778	0.1686
2009	3.7024 (1.4E-11)	4.51e-3 (6.9E-12)	1.89e-3 (1.4E-11)	0.964 (1.2E-11)	0.027 (9.4E-13)	0.038 (3.2E-11)	3.6273 (3.5E-12)	0.1252 (4.8E-11)	3.64e-3 (9.1E-12)	0.837 (1.9E-11)	-0.021 (1.6E-11)	0.2774 (3.4E-11)	0.0564	0.1129
2010	3.7023 (6.9E-16)	4.51e-3 (1.2E-14)	1.89e-3 (8.8E-15)	0.964 (1.1E-14)	0.027 (1.9E-14)	0.038 (4.4E-15)	3.6274 (2.6E-15)	0.1252 (4.4E-15)	3.64e-3 (1.0E-14)	0.837 (8.8E-15)	-0.020 (9.0E-15)	0.2774 (7.2E-15)	0.0440	0.0441
2011	3.7024 (3.8E-15)	4.51e-3 (1.3E-15)	1.89e-3 (4.1E-15)	0.964 (5.5E-15)	0.027 (3.0E-15)	0.038 (2.0E-14)	3.6273 (7.9E-16)	0.1252 (6.1E-15)	3.64e-3 (1.6E-14)	0.837 (2.4E-14)	-0.020 (1.9E-14)	0.2774 (8.5E-16)	0.0427	0.0428
2012	3.6980 (1.9E-15)	4.51e-3 (3.5E-14)	1.89e-3 (1.2E-14)	0.964 (1.3E-14)	0.034 (2.0E-14)	0.044 (2.0E-14)	3.6303 (1.8E-15)	0.1243 (5.8E-15)	3.64e-3 (2.4E-14)	0.837 (1.7E-14)	-0.020 (2.8E-14)	0.2707 (1.6E-14)	0.0285	0.0381
2013	3.7024 (1.5E-13)	4.51e-3 (2.6E-13)	1.89e-3 (7.2E-13)	0.964 (1.2E-13)	0.027 (4.6E-13)	0.038 (3.1E-13)	3.6273 (3.1E-13)	0.1252 (1.1E-13)	3.64e-3 (8.5E-13)	0.837 (2.4E-13)	-0.020 (7.5E-14)	0.2774 (3.9E-14)	0.0161	0.0331
2014	3.6970 (2.2E-13)	4.50e-3 (3.7E-13)	1.89e-3 (3.2E-13)	0.964 (1.0E-12)	0.008 (4.1E-13)	0.042 (1.0E-12)	3.6282 (5.8E-14)	0.1239 (8.7E-13)	3.64e-3 (1.1E-12)	0.836 (7.5E-13)	-0.010 (4.1E-13)	0.2999 (6.5E-13)	0.0191	0.0201
Total													0.0380	0.0539

TABLE 5.4 – Prime de risque

Année	Prime de risque %		Ratio	Volatilité (BEGE)		Ratio
	BEGE	GJR	BEGE/GJR	Nég.	Pos.	- / +
1996	5.1577	1.9335	2.6675	9.0014	7.6379	1.1785
1997	11.001	4.0962	2.6855	12.656	11.741	1.0779
1998	14.677	5.6409	2.6018	14.405	13.840	1.0408
1999	11.689	8.9115	1.3117	12.555	12.522	1.003
2000	16.596	3.4108	4.8657	15.504	14.525	1.0674
2001	17.978	3.6669	4.9027	17.526	13.498	1.2983
2002	22.727	8.7170	2.6072	17.925	17.227	1.0405
2003	12.161	4.2049	2.8922	8.3499	16.222	0.5147
2004	4.8941	1.7505	2.7959	8.6489	7.6407	1.1320
2005	4.3927	1.5750	2.7890	8.3564	7.0543	1.1846
2006	4.0346	1.4355	2.8105	7.8572	6.9687	1.1275
2007	8.5516	4.4478	1.9226	12.795	2.8204	4.5364
2008	51.074	21.751	2.3481	34.175	14.675	2.3289
2009	31.634	10.298	3.0720	18.906	22.380	0.8448
2010	11.738	3.4936	3.3599	12.843	12.417	1.0343
2011	19.147	7.1137	2.6915	17.015	15.214	1.1184
2012	7.375	2.2223	3.3186	9.1414	10.872	0.8408
2013	4.8097	1.7194	2.7973	8.4018	7.7612	1.0825
2014	<u>4.4174</u>	<u>1.7195</u>	<u>2.5690</u>	<u>5.7146</u>	<u>4.9687</u>	<u>1.1501</u>
Total	13.898	5.1636	2.6915	13.251	11.578	1.2948

Primes de risque des modèles BEGE ($\sum_{t=1}^T (\lambda_p \sigma_p^2 p_t + \lambda_n \sigma_n n_t), T = 252 \text{ jours}$) et GJR ($\sum_{t=1}^T \lambda h_t, T = 252 \text{ jours}$) en fonction des années d'estimation jointe. Ainsi que la différence entre la volatilité positive ($\sum_{t=1}^T \sigma_p^2 p_t, T = 252 \text{ jours}$) et négative ($\sum_{t=1}^T \sigma_n^2 n_t, T = 252 \text{ jours}$) du modèle BEGE.

TABLE 5.5 – Erreur de tarification et de volatilité implicite suivant l'échéance et le moneyness (Joint Likelihood)

	<u>BEGE</u>	<u>GJR</u>	<u>BEGE</u>	<u>GJR</u>
Échéance (jours)	RRMSE		RIVRMSE	
0 < échéance ≤ 45	0.4779	0.6323	0.1516	0.2113
45 < échéance ≤ 91	0.4513	0.5785	0.1491	0.2020
91 < échéance ≤ 182	0.4908	0.5572	0.1490	0.1939
182 < échéance ≤ 365	0.5299	0.5326	0.1565	0.1861
Totale	0.4875	0.5751	0.1515	0.1983
	RMSE		IVRMSE	
0 < échéance ≤ 45	2.9917	3.8276	0.0334	0.05166
45 < échéance ≤ 91	4.4731	5.7216	0.0329	0.0501
91 < échéance ≤ 182	6.3364	7.7971	0.0341	0.0487
182 < échéance ≤ 365	10.174	11.424	0.0358	0.0456
Totale	5.9938	7.1925	0.0341	0.0490
Moneyness	RRMSE		RIVRMSE	
S/K ≤ 0.96	0.7783	0.8999	0.1826	0.2087
0.96 < S/K ≤ 0.98	0.2924	0.3692	0.1525	0.1845
0.98 < S/K ≤ 1.02	0.1674	0.2042	0.1332	0.1627
1.02 < S/K ≤ 1.06	0.2058	0.2681	0.1172	0.1549
S/K > 1.06	0.4389	0.5151	0.1320	0.1905
Totale	0.3766	0.4513	0.1435	0.1803
	RMSE		IVRMSE	
S/K ≤ 0.96	7.7637	8.7799	0.0311	0.0362
0.96 < S/K ≤ 0.98	7.3537	8.5480	0.0278	0.0345
0.98 < S/K ≤ 1.02	7.1903	8.4576	0.0278	0.0351
1.02 < S/K ≤ 1.06	6.3510	7.9679	0.0274	0.0377
S/K > 1.06	6.0520	7.2532	0.0387	0.0602
Totale	6.9421	8.2013	0.0306	0.0408

RRMSE, RIVRMSE, RMSE et IVRMSE pour les deux modèles en fonction de l'échéance et le Moneyness, calculées par des paramètres estimés à partir des rendements et des options

FIGURE 5.1 – Relation entre λ_v et Λ_v , $v \in \{p, n\}$

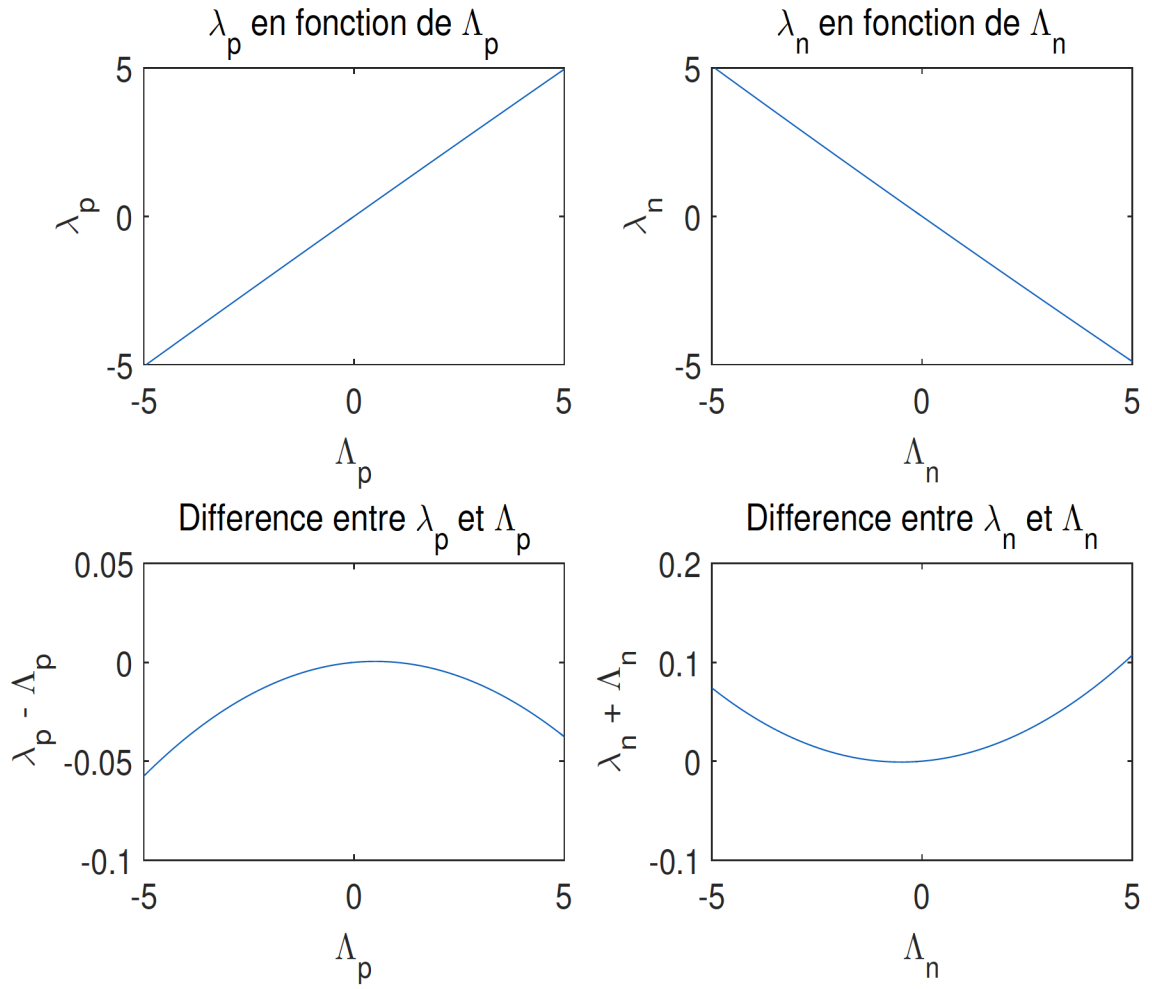


FIGURE 5.2 – Prix quotidien de l'indice S&P500

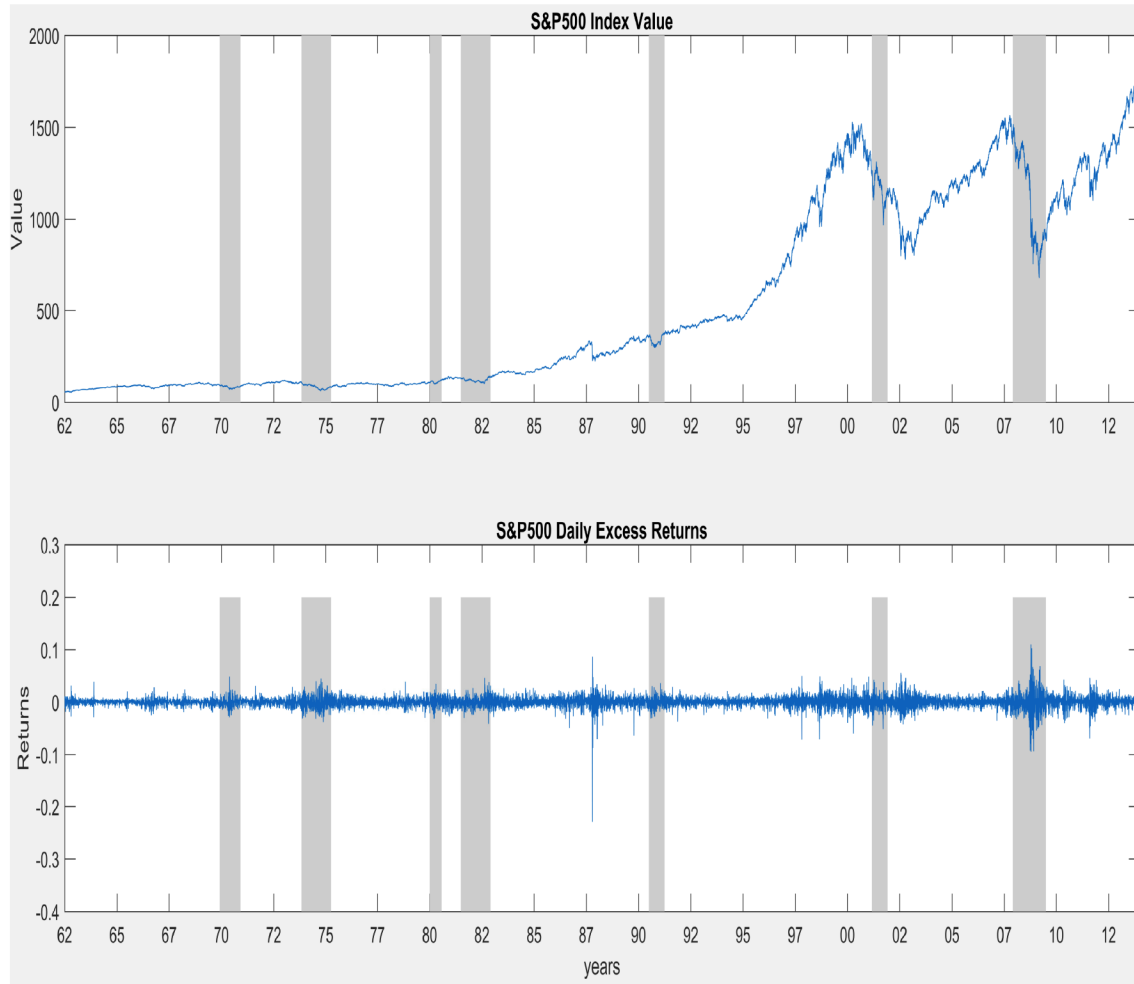
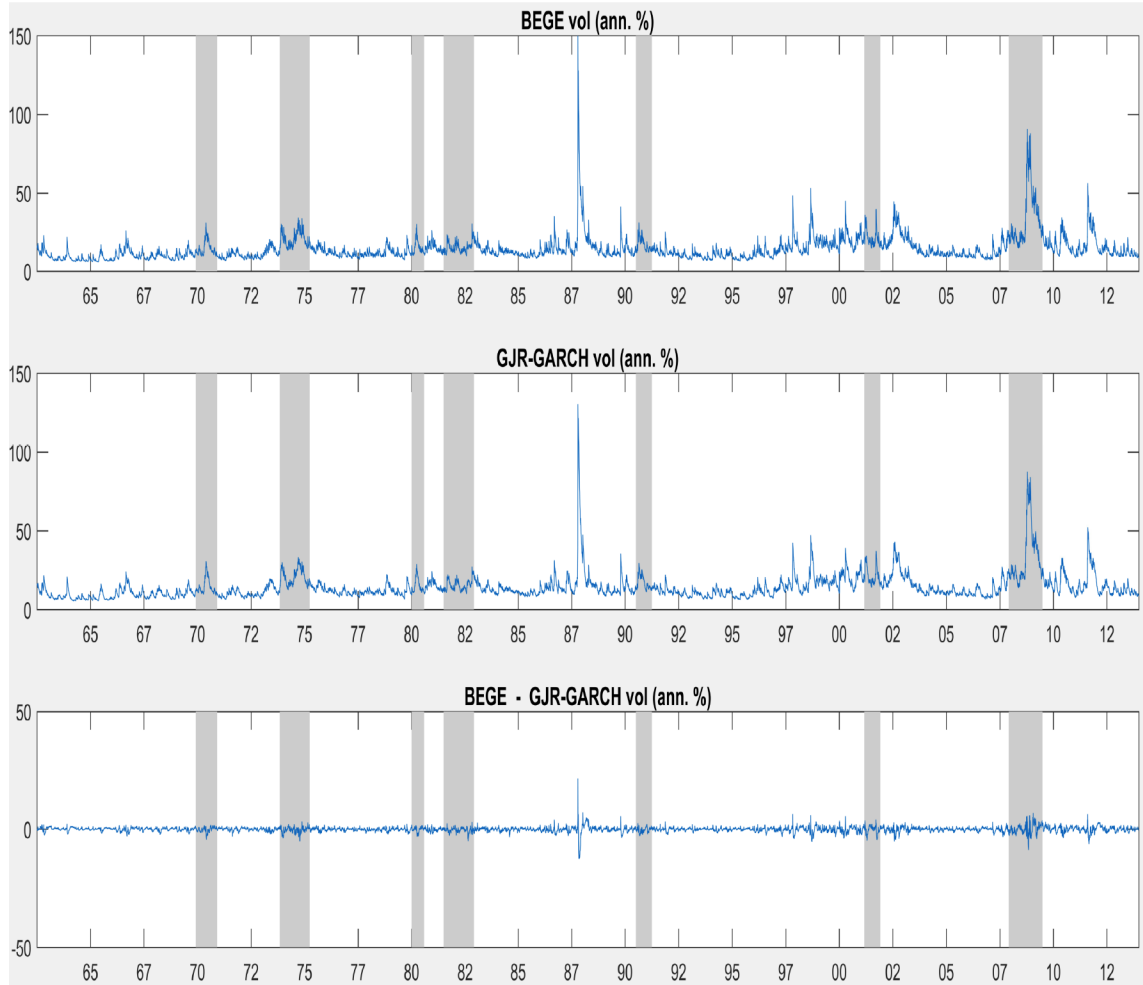
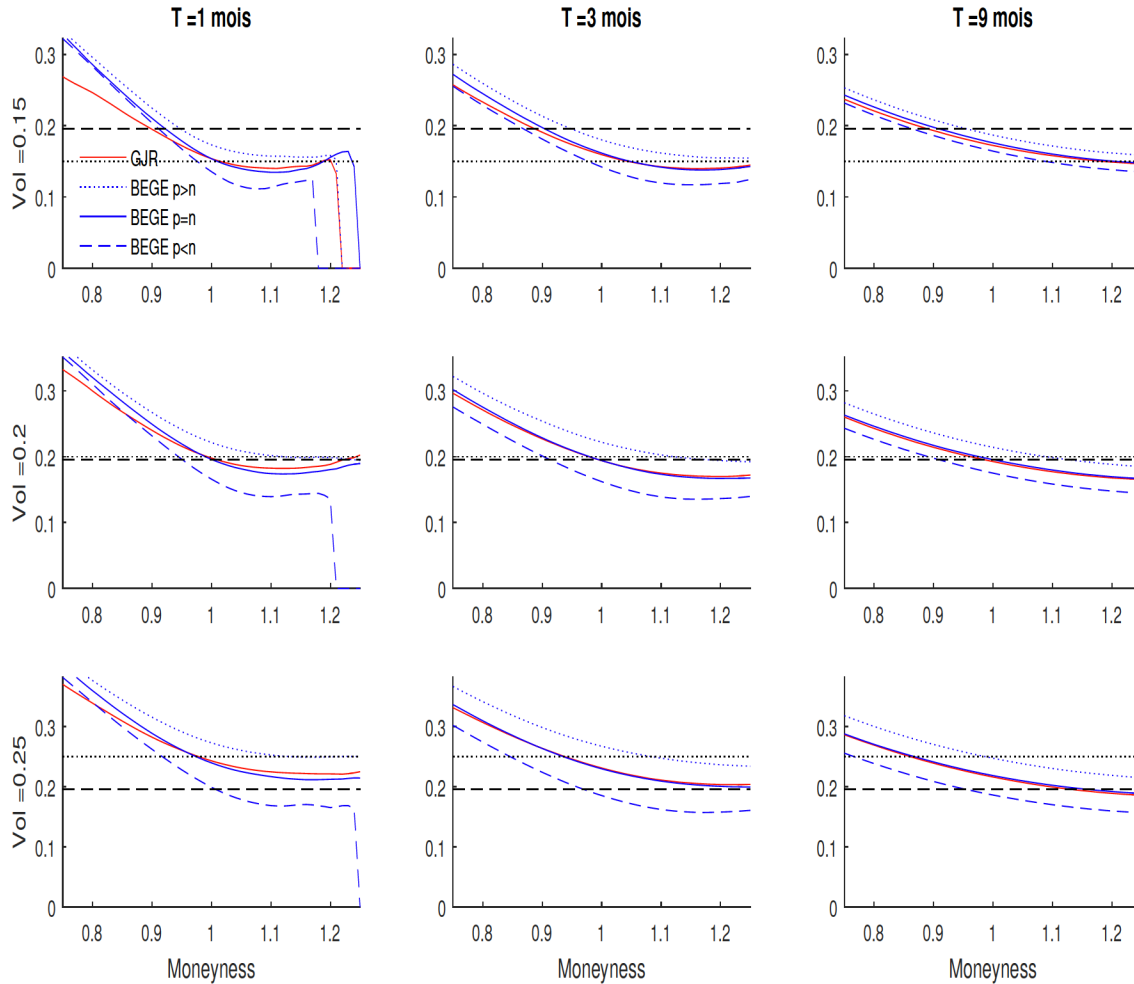


FIGURE 5.3 – Volatilité conditionnelle du modèle BEGE et du modèle GJR-GARCH



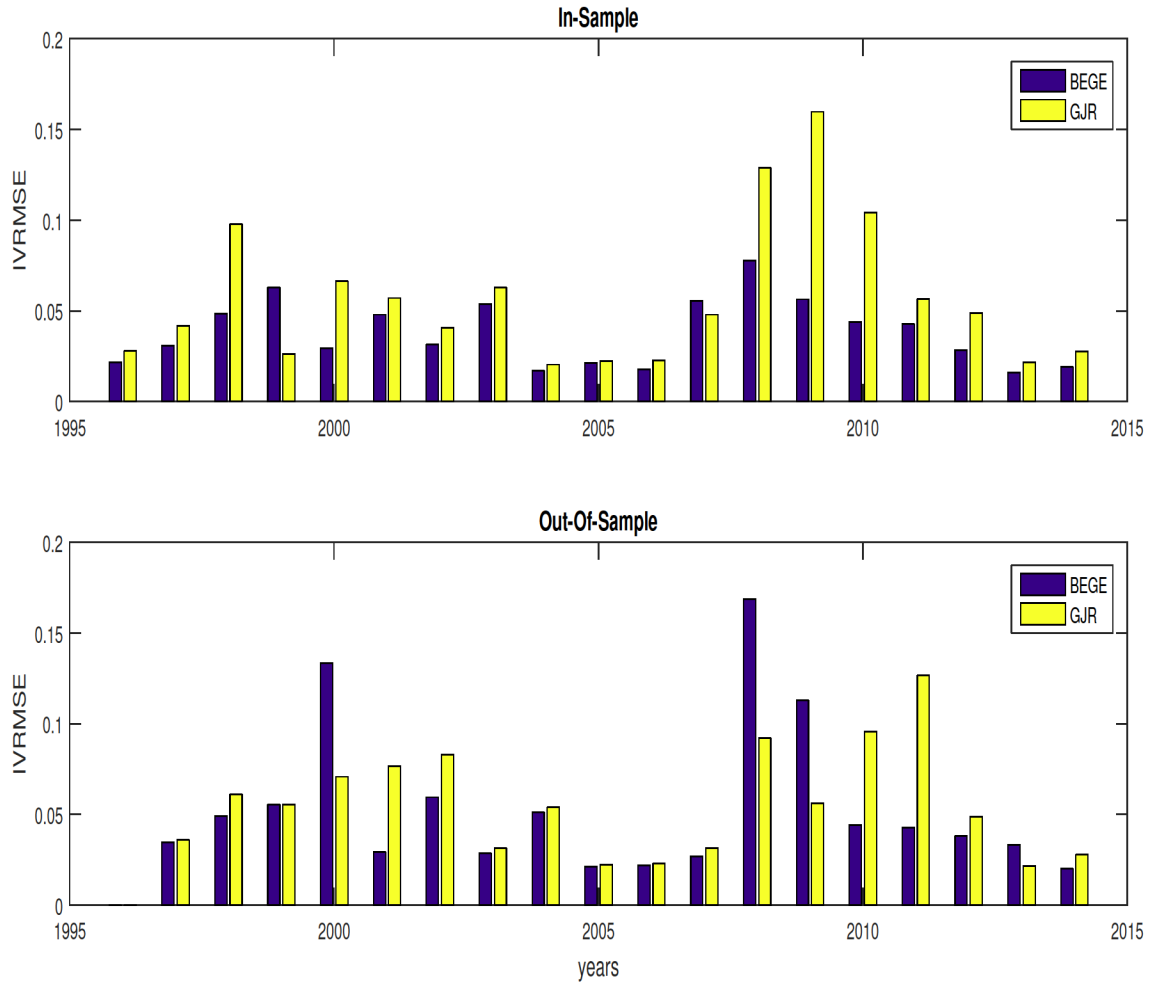
La volatilité physique du modèle GJR-GARCH, ainsi que le modèle BEGE-GJR, pour la période allant de 1962 jusqu'à décembre 2013.

FIGURE 5.4 – Volatilités implicites des modèles BEGE et GJR-GARCH



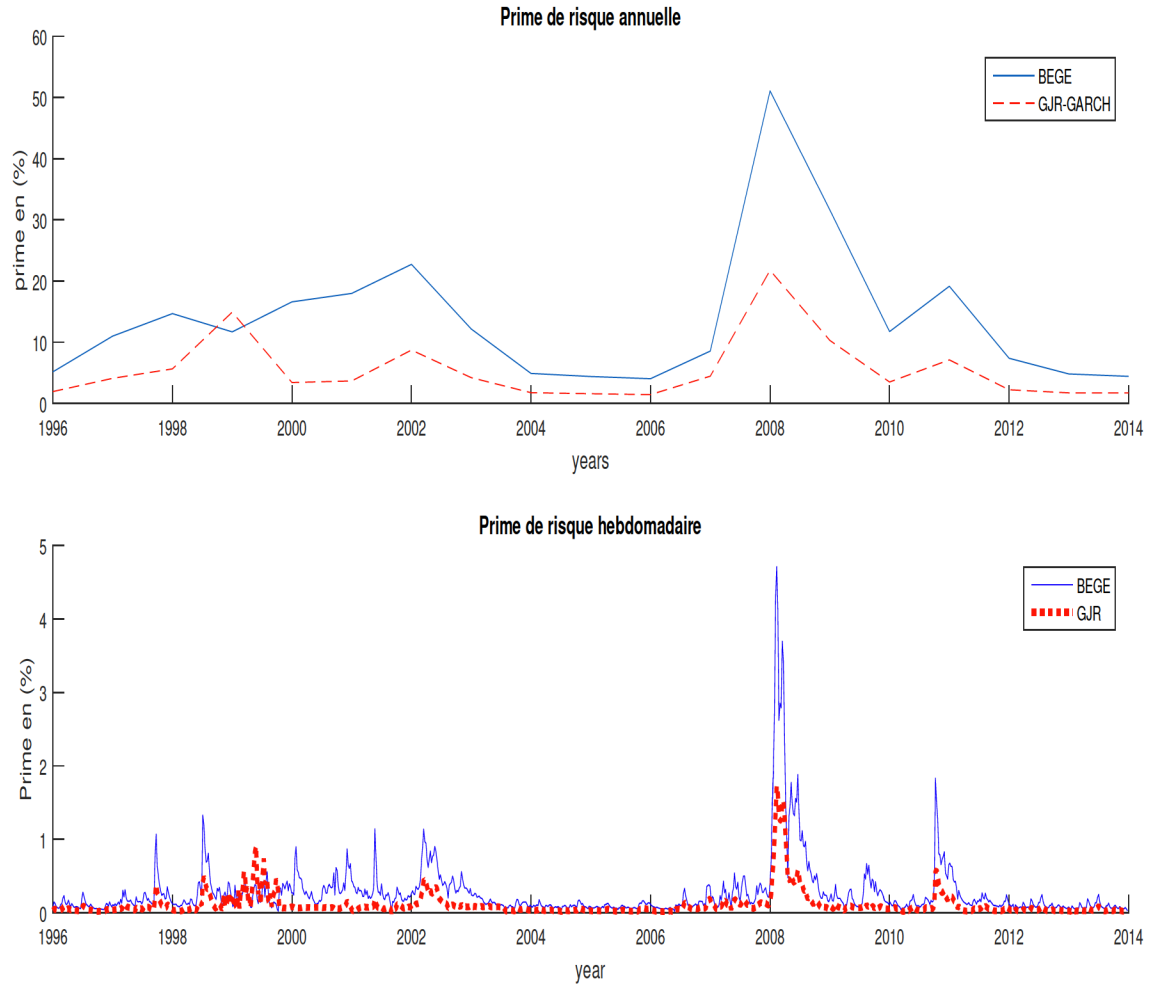
La volatilité implicite du modèle GJR-GARCH (solid red), et 3 versions du modèle BEGE selon les pondérations données à p_t et n_t . La première pour $h_0 = 0.9 \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2} + 0.1 \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2}$ (dotted blue), la deuxième pour $h_0 = 0.5 \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2} + 0.5 \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2}$ (solid blue), et la dernière correspond à $h_0 = 0.1 \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2} + 0.9 \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2}$ (dashed blue). Où " σ " est la volatilité annuelle qui prend les valeurs 15%, 20% et 25%. Les deux lignes horizontales respésentent la volatilité inconditionnelle du modèle GJR-GARCH (dashed black) et la volatilité initiale donnée aux modèles (dotted black) respectivement.

FIGURE 5.5 – In-Sample et Out-Of-Sample IVRMSE



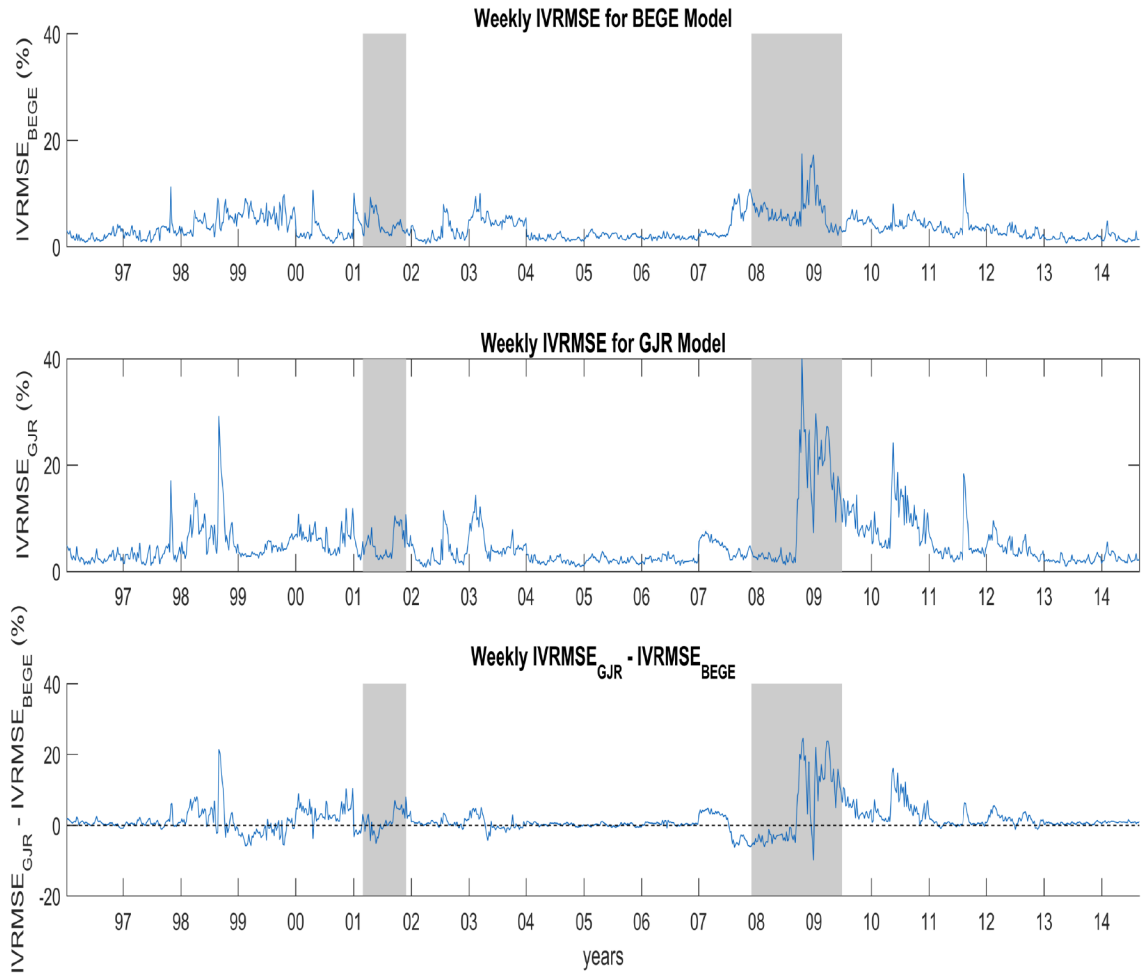
In-Sample et out-of-Sample IVRMSE pour les modèles BEGE (bleu) et GJR-GARCH (jaune), en fonction des années d'estimation du joint-likelihood.

FIGURE 5.6 – Prime de risque



L'évolution de la prime de risque annuelle ($T = 252 \text{ jours}$) et hebdomadaire ($T = 5 \text{ jours}$) des modèles BEGE ($\sum_{t=1}^T (\lambda_p \sigma_p^2 p_t + \lambda_n \sigma_n n_t)$) et GJR ($\sum_{t=1}^T \lambda h_t$) entre les années 1996 et 2014.

FIGURE 5.7 – IVRMSE hebdomadaire (In-Sample)



Racine carrée de l'erreur quadratique moyenne hebdomadaire de la volatilité implicite IVRMSE en (%) pour le modèle BEGE (figure 1), et du modèle GJR-GARCH (figure 2). Ainsi que la différence entre les deux (figure 3).