HEC MONTRÉAL

Évaluation de produits dérivés multidimensionnels

par

Marouen Baccouche

Sciences de la gestion

(Ingénierie Financière)

Mémoire présenté en vue de l'obtention

du grade de maîtrise ès sciences

(M. Sc.)

Octobre 2016

Résumé

La tarification des options est un domaine très important de la finance computationnelle. Lorsque les options dépendent de plusieurs actifs sous-jacents, la résolution du problème d'évaluation avec les méthodes d'évaluation classiques demeure difficile à cause de la malédiction de la dimension. Bien que sa convergence soit lente, la simulation Monte-Carlo est généralement utilisée pour calculer le prix et les sensibilités de ce type de produit.

L'objectif de ce mémoire est de déterminer si une technique de réduction de dimension, nommée 'Analyse en composante principale', pourrait être combinée avec la programmation dynamique afin de calculer le prix et les sensibilités des options paniers européennes et américaines. Plusieurs expériences numériques ont été établies sous différentes conditions afin d'examiner l'efficience de notre méthode.

Pour l'évaluation des options européennes, les prix et les sensibilités obtenus par la simulation Monte-Carlo sont utilisés comme références. Pour le cas des options américaines, nos références sont les prix et les sensibilités calculés avec la méthode de simulation-régression et les prix donnés par Kovalov, Linetsky et Marcozzi (2007).

Les résultats obtenus montrent que notre méthode est précise et beaucoup plus rapide que les autres méthodes proposées dans la littérature.

Mots clés : Programmation dynamique, Analyse en composante principale, Simulation Monte-Carlo , Simulation-régression, Option panier européenne, Option panier américaine, Expansion asymptotique, Sensibilités des options, Équation de diffusion de la chaleur.

Table des matières

Introduction **6**

1 Revue de littérature **8**
1.1 Évaluation des options 8
1.2 Les options panier et la malédiction de la dimension 9
1.3 Évaluation d'une option panier Européenne 9
1.4 Option panier Américaine 12

2 Modèle **14**
2.1 Équation de Black et Scholes 14
2.2 Analyse en composante principale 15
2.3 Dérivation Mathématique 16
2.4 Expansion asymptotique 18

3 Solution par programmation dynamique **20**
3.1 Problème à une dimension 20
3.2 Problème à deux dimensions 21
3.3 Détermination de la loi de probabilité 22
3.4 Interpolation 24
3.4.1 Interpolation cubique 24
3.4.2 Interpolation bicubique : 25

4 Calcul des sensibilités (Delta et Gamma) **27**
4.1 Delta 27
4.2 Gamma 29

5 Résultats Numériques **31**
5.1 Option panier européenne : 31
5.1.1 Prix d'options et temps de calcul 32
5.1.2 Sensibilités de l'option européenne 33
5.2 Option panier de type américain 35
5.2.1 Prix d'options 35
5.2.2 Temps de calcul 35
5.3 Analyses 36
5.3.1 Absence de dividende 36

5.3.2 Variation des valeurs des paramètres 37
5.3.2.1 Variation de la corrélation 37
5.3.2.2 Variation de la volatilité 38
5.3.2.3 Variation de l'échéance 38
5.3.2.4 Variation du prix d'exercice 39
5.3.2.5 Commentaires 39

Conclusion **40**

Annexe **44**

Liste des tableaux

1.1 Effet de la variation de la corrélation ρ sur le prix d'une option panier d'achat (source Krekel et al., WILMOTT magazine 2004). Les paramètres utilisés pour obtenir les prix sont : Maturité= 5 ans, Strike =100 \$, Volatilité=40%, Nombre d'actif= 4, Pondération= 1/4, Facteur d'actualisation =1 , Prix actif= 100\$. 11

2.1 Approximation du prix d'une option panier à 5 actifs par un problème de 1 à 4 facteurs (source : Reisinger et Wittum (2007)) . . 18

5.1 Paramètres de l'option panier DAX : Source (Reisinger et Wittum 2007) 31
5.2 Valeur d'une option panier (Call et Put) sur le DAX (5 actifs) . . 32
5.3 Sensibilités pour l'option panier d'achat européenne 33
5.4 Sensibilités pour l'option panier de vente européenne 34
5.5 Prix d'une option de vente américaine sur un panier de 2 à 6 actifs 35
5.6 Temps de calcul d'une option de vente américaine sur un panier de 2 à 6 actifs en Secondes 36
5.7 Prix d'un put et d'un call américain : exemple de la section 5.1 . . 36
5.8 Effet de la corrélation sur le prix d'une option de vente américaine 37
5.9 Effet de la volatilité sur le prix d'une option panier de vente américaine 38
5.10 Effet de l'échéance sur le prix d'une option panier de vente américaine 38
5.11 Effet du prix d'exercice sur le prix d'une option panier de vente américaine 39

Remerciements

L'élaboration de ce mémoire a été possible grâce à la contribution de plusieurs personnes à qui je suis reconnaissant.

Je voudrais adresser ma gratitude, particulièrement, à ma directrice de mémoire, Michèle Breton, pour sa patience, sa disponibilité, son soutien moral et financier et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter mes pensées. Merci Michèle !

Un grand merci aussi pour ma famille, mes amis et collègues pour leur support moral.

Introduction

Les produits financiers dérivés constituent des outils essentiels à la gestion des risques, et leur utilisation n'a cessé de croître au cours des quatre dernières décennies. Par ailleurs, on assiste également à une offre de produits financiers de plus en plus complexes, pour lesquels les seules approches d'évaluation envisageables sont des algorithmes numériques. L'évaluation de produits financiers dérivés, surtout lorsque ces produits présentent des caractéristiques spéciales (dépendance historique, possibilité d'exercice anticipé, multiples actifs sous-jacents, etc.) est à l'origine du développement de nombreux résultats mathématiques et méthodes numériques, mais demeure cependant un défi important, autant pour les chercheurs que pour les professionnels des marchés financiers.

Dans le cas particulier où ces produits dépendent de plusieurs actifs sous-jacents, ou sont sujets à plusieurs sources de risque, le problème d'évaluation devient encore plus complexe, à cause de ce qu'on appelle « la malédiction de la dimension ». La malédiction de la dimension s'explique par le fait que l'ensemble des états du monde possibles qu'il faut envisager lors de l'évaluation explose lorsqu'il y a plusieurs actifs sous jacents ou plusieurs sources d'incertitude : le « volume » des possibles est la multiplication des possibilités dans chacune des dimensions.

Pour contourner le problème de la dimensionnalité, l'une des contributions importantes est celle de Reisinger et Wittum (2007). Dans cet article, les auteurs combinent une technique de réduction de dimension, l'analyse en composante principale, avec une technique numérique d'évaluation de produits dérivés, la méthode des différences finies, dans le but d'évaluer une option européenne sur un panier d'actifs sous-jacents. La technique proposée par ces auteurs permet de transformer un problème ayant n dimensions en un problème ayant une seule dimension et n-1 problèmes à 2 dimensions. Cependant, la technique proposée ne permet pas d'évaluer d'autres types de dérivés, notamment par exemples des options avec possibilité d'exercice anticipé.

Mon projet de recherche consiste à utiliser une approche similaire afin de mettre au point une méthode permettant d'évaluer des dérivés exotiques, notamment des options avec possibilité d'exercice anticipé, écrits sur plusieurs actifs sous-jacents. Pour ce faire, je propose de combiner l'analyse en composante principale avec la programmation dynamique. En effet, la programmation dynamique est particulièrement efficace pour l'évaluation de produits exotiques de type Bermudien lorsque le nombre de facteurs de risque est limité. Je compte montrer qu'en décomposant le vecteur d'état en composantes principales et en effectuant un changement de variables, on peut transformer un problème de grandes dimensions en plusieurs problèmes de dimension réduite, pouvant être résolus très efficacement par la programmation dynamique.

Mon projet de mémoire comporte plusieurs volets. Outre les développements théoriques menant à la décomposition et les essais numériques permettant d'évaluer la précision de l'évaluation, je compte montrer comment on peut calculer la sensibilité du produit dérivé à des changements dans la valeur des actifs sous-jacents et déterminer une stratégie de couverture pour des produits multidimensionnels.

Le mémoire se présente comme suit. Le premier chapitre propose une revue de la littérature pertinente. Le chapitre 2 présente les développements théoriques permettant de réduire la dimension du problème d'évaluation d'un produit dérivé écrit sur plusieurs actifs sous-jacents avec possibilité d'exercice anticipé. Le chapitre 3 montre comment les problèmes réduits peuvent être résolus par la programmation dynamique. Le chapitre 4 présente les développements permettant d'évaluer la sensibilité du produit (les « grecques »). Le chapitre 5 fait état de divers essais numériques confirmant l'efficacité de l'approche. Le chapitre 6 est une conclusion.

Chapitre 1

Revue de littérature

1.1 Évaluation des options

En 1900, le mathématicien français Louis Bachelier a abordé, pour la première fois, l'évaluation d'une option financière en proposant un modèle où le prix de l'actif sous-jacent est décrit par un mouvement brownien. Depuis, un grand nombre de travaux se sont intéressés à l'évaluation des produits financiers dérivés, et plus particulièrement à celle des options.

Une option est un contrat qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (option d'achat ou « call ») où bien de vendre (option de vente ou « put ») une certaine quantité de l'actif sous-jacent à un prix prédéterminé et à une date future. L'actif sous-jacent peut être un actif physique (i.e. une commodité) ou un actif financier (i.e. un titre d'une entreprise). Les options dites européennes ne peuvent être exercées qu'à l'échéance du contrat, alors que les options dites américaines peuvent être exercées à n'importe quelle date avant cette échéance ; les options de type bermudien peuvent être exercées à certaines dates déterminées dans le contrat, avant l'échéance.

L'évaluation des options financières, et leur stratégie d'exercice optimale lorsqu'elles offrent des possibilité d'exercice anticipé, est l'un des domaines important de la finance mathématique. La valeur d'une option financière dépend généralement d'au moins cinq facteurs, dont deux fixés dans le contrat (l'échéance et le prix d'exercice) et trois reliés aux conditions du marché (le prix et la volatilité de l'actif sous-jacent et le taux d'intérêt), auxquels il faut ajouter la date d'exercice lorsque cette date est à la discrétion du détenteur.

1.2 Les options panier et la malédiction de la dimension

Les options paniers sont des produits dérivés portant sur plusieurs actifs sous-jacents ; elles confèrent à leur détenteur le droit d'acheter ou de vendre un panier composé d'une quantité déterminée de chacun de ces actifs à un prix fixé à l'avance. Par construction, ces options représentent généralement un outil avantageux de couverture de positions risquées sur plusieurs actifs, puisque transiger une seule option panier plutôt qu'un portefeuille d'options sur chacun des actifs réduit le coût de transaction. Cependant, le problème de l'évaluation des options financières se complique lorsque leur valeur dépend de plusieurs variables exogènes. Dans le cas des produits dérivés qui dépendent de plusieurs actifs sous-jacents (comme l'option panier), les méthodes numériques d'évaluation sont sujettes à ce qu'on appelle « la malédiction de la dimension » . La malédiction s'explique par le fait que l'ensemble des états du monde possibles qu'il faut envisager lors de l'évaluation explose lorsqu'il y a plusieurs sources d'incertitude. Par exemple, si on considère 10 facteurs de risque, dont chacun peut prendre 100 valeurs différentes, le nombre de possibilités à considérer lors de l'évaluation est égal à10^{20} ; l'énumération de ces possibilités en un temps raisonnable dépasse les capacités de calcul disponibles actuellement.

1.3 Évaluation d'une option panier Européenne

Dans le cadre le plus simple du modèle de Black et Scholes (1973), l'hypothèse est que le prix de chacun des actifs sous-jacents est un mouvement brownien géométrique ; selon ce modèle, la distribution du rendement de chacun des actifs est lognormale, et par conséquent la distribution du rendement du panier est une somme de lognormales. L'obstacle principal à l'élaboration d'une forme analytique pour l'évaluation de ce type d'option est le fait que la distribution d'une somme de lognormales n'est pas lognormale. Plusieurs méthodes numériques classiques peuvent être utilisées pour l'évaluation d'une option panier Européenne, dont la simulation de Monte-Carlo, les méthodes de treillis ou les méthodes de différences finies. Cependant, ces méthodes sont onéreuses en temps de calcul lorsque le nombre d'actifs sous-jacents est élevé. Plusieurs approximations ont été proposées dans la littérature pour l'évaluation d'options panier européennes.

Beisser (1999) propose une adaptation de la méthode proposée par Rogers et Shi (1995) pour l'évaluation des options asiatiques ; ainsi, Beisser (1999) utilise la distribution conditionnelle et l'inégalité de Jensen afin d'évaluer le prix d'une option panier d'achat, en approximant le prix de cette option par une somme pondérée de prix d'options européennes artificielles.

Gentle (1993) propose une approximation du gain terminal de l'option panier, une moyenne arithmétique, par une moyenne géométrique. Du fait que la moyenne géométrique de variables lognormales est une lognormale, cette approche permet d'appliquer directement la formule de Black et Scholes (1973) pour l'évaluation de l'option panier.

Lévy (1992) approxime plutôt la distribution du gain terminal par une distribution lognormale en faisant la correspondance des deux premiers moments avec ceux de la distribution de la somme des prix pondérés. Cette méthode peut être comparée à celle de Gentle (1993) en remarquant que selon l'approximation de Gentle (1993), seul le premier moment des deux distributions coïncident.

Ju (2002) propose également une approximation analytique en considérant une expansion de Taylor jusqu'à l'ordre 6 du ratio de la fonction caractéristique de la moyenne arithmétique pondérée par rapport à l'approximation de la variable aléatoire lognormale, au voisinage d'une volatilité nulle.

Milevsky et Posner (1998) utilisent plutôt la distribution gamma inverse comme approximation de la distribution de la valeur du panier. La motivation du choix de cette distribution est le fait que la distribution d'une somme de variables lognormales corrélées converge vers la distribution gamma inverse lorsque le nombre de variables tend vers l'infini. La distribution gamma inverse est choisie de sorte que les deux premiers moments de la distribution correspondent avec ceux de la distribution de la moyenne arithmétique des lognormales.

Milevsky et Posner (1998 b) proposent également l'utilisation des distributions de la famille de Johnson (1949) pour approximer la distribution de la moyenne arithmétique, en faisant correspondre les quatre premiers moments des distributions.

Les six méthodes décrites plus haut sont des approximations analytiques du prix d'une option panier européenne. La précision de ces approximations est variable selon la valeur des paramètres ; par ailleurs, aucune de ces méthodes n'est utilisable dans tous les cas, comme le montrent les résultats rapportés au tableau 1.

ρ	Beisser	Gentle	Ju	Lévy	MP (1998)	MP (1998b)	Monte Carlo	Écart-type
0.1	20.12	15.36	21.77	22.06	20.25	21.36	21.62	(0.0319)
0.3	24.21	19.62	25.05	25.17	22.54	24.91	24.97	(0.0249)
0.5	27.63	23.78	28.01	28.05	24.50	27.98	27.97	(0.0187)
0.7	30.62	27.98	30.74	30.75	26.18	30.74	30.72	(0.0123)
0.8	31.99	30.13	32.04	32.04	26.93	32.04	32.03	(0.0087)
0.95	33.92	33.41	33.92	33.92	27.97	33.92	33.92	(0.0024)

Tableau 1.1 – Effet de la variation de la corrélation ρ sur le prix d'une option panier d'achat (source Krekel et al., WILMOTT magazine 2004). Les paramètres utilisés pour obtenir les prix sont : Maturité= 5 ans, Strike =100 \$, Volatilité=40%, Nombre d'actif= 4, Pondération= 1/4, Facteur d'actualisation =1 , Prix actif= 100\$.

L'examen de ce tableau montre que la précision des approximations numériques dépend de la corrélation entre les composantes du panier, et qu'aucune de ces approximations n'est toujours valable. Seule la méthode de Milevsky et Posner (1998 b) permet d'obtenir des prix proches de ceux obtenus par simulation de Monte-Carlo. Cependant, comme le montre Ju (2002), cette méthode n'est pas précise pour les produits de longue échéance. Le recours aux méthodes numériques reste alors un mal nécessaire.

La simulation de Monte-Carlo, la méthode des différences finies, les méthodes de treillis et la programmation dynamique sont les approches numériques les plus communes pour l'évaluation de produits dérivés. Toutes ces méthodes deviennent lourdes en temps d'exécution lorsque la dimension de l'espace d'état augmente (malédiction de la dimension), ce qui représente un défi particulier pour l'évaluation des options panier.

Reisinger et Wittum (2007) abordent l'évaluation de l'option panier par le biais de techniques de réduction de la dimension. Dans cet article, les auteurs combinent une technique de réduction de dimension (l'analyse en composante principale) avec une technique numérique d'évaluation de produits dérivés (la méthode des différences finies) pour évaluer une option européenne sur un panier d'actifs sous-jacents. La technique proposée dans Reisinger et Wittum (2007) permet de transformer un problème de dimension n en un problème de dimension 1 et $(n-1)$ problèmes de dimension 2. Ainsi, si on considère 10 facteurs de risque dont chacun peut prendre 100 valeurs possibles, le nombre d'opérations requises passe de 10^{20}à 190100, ce qui représente la différence entre un problème insoluble et un problème qu'on peut résoudre.

Dans ce mémoire, nous présentons une adaptation de l'approche proposée par Reisinger et Wittum (2007) qui permet d'évaluer les options panier européennes de façon très efficace.

1.4 Option panier Américaine

Un pourcentage important des options négociées sont de type Américain, c'est à dire que l'option peut être exercée avant l'échéance du contrat, la date étant à la discrétion du détenteur de l'option. L'évaluation d'options permettant l'exercice anticipé demeure un problème difficile en général. Dans le cas des options panier de type américain, le modèle mathématique d'évaluation présente deux particularités par rapport aux options américaines portant sur un seul actif :

— les prix des actifs qui constituent le panier sont corrélés
— le lemme d'Itô multivarié doit être appliqué.

Par ailleurs, l'évaluation numérique de produits dérivés est encore plus complexe lorsque le modèle contient plusieurs sources de risque. En effet, la simulation de Monte-Carlo, bien que simple à programmer, ne permet pas d'évaluer directement la stratégie optimale d'exercice du fait de sa construction vers l'avant. Par ailleurs, les approches qui parcourent l'espace d'état à partir d'un principe d'induction à rebours (treillis, différences finies, programmation dynamique) souffrent de la malédiction de la dimension, c'est-à-dire que le nombre d'opérations qu'elles requièrent augmente de façon exponentielle avec la dimension de l'espace d'état.

Lorsque la dimension du problème ne dépasse pas quatre, il existe des extensions de la méthode de treillis de Cox, Ross et Rubinstein (1979) permettant d'évaluer les options de type américain. Il existe aussi des extensions (par exemple Clewlow et Strickland 1998) de la méthode des différences finies permettant de traiter des problèmes multidimensionnels.

Broadie et Glasserman (1997) résument l'application de la simulation Monte-Carlo pour l'évaluation des produits dérivés multidimensionnels de type américain en trois approches fondamentales. La première est basée sur une paramétrisation de la barrière d'exercice, permettant la maximisation du gain espéré en se restreignant aux stratégies appartenant à une famille décrite par ces paramètres. La deuxième catégorie est fondée sur la recherche d'une borne supérieure et inférieure pour le prix de l'option, permettant d'encadrer la valeur de l'option. La troisième technique est la programmation dynamique, qui permet de déterminer la stratégie d'exercice optimale, alors que la simulation est utilisée pour évaluer le gain espéré associé à cette stratégie. Dans cette dernière catégorie, on retrouve Tilley (1993), qui utilise des techniques de regroupement à l'intérieur de la simulation, Longstaff et Schwartz (2001), qui approximent la valeur espérée par régression polynomiale, et Barraquand et Martineau (1995) qui utilisent des techniques d'agrégation d'état pour réduire la dimension du problème et utilisant la valeur intrinsèque de l'option comme variable d'état ; la précision de cette technique est cependant limitée par la nécessité de présenter la stratégie d'exercice comme une fonction d'une seule variable d'état. Broadie et Glasserman (1997) montrent que de dernier algorithme ne converge pas vers la valeur de l'option, témoignant ainsi que la valeur intrinsèque ne peut être le seul facteur de décision.

Kovalov et al. (2007) développent une méthode pour l'évaluation des produits dérivés multidimensionnels de type américain basée sur l'approximation de l'inéquation variationnelle différentielle partielle par une équation différentielle partielle non linéaire avec un terme de pénalité possédant un Jacobien continu. Cette technique donne des résultats précis en un temps d'exécution relativement faible.

Pour nos essais numériques, nous utiliseront les algorithmes de Kovalov et al (2007) et de Longstaff et Schwartz (2001) comme valeurs de comparaison quant au temps de calcul et à la précision obtenue pour l'évaluation d'options panier de type américain.

Chapitre 2

Modèle

2.1 Équation de Black et Scholes

La formule de Black et Scholes (1973) pour l'évaluation de la valeur d'une option européenne sous l'hypothèse que l'évolution de l'actif sous-jacent est décrite par un mouvement Brownien géométrique est l'équation aux dérivées partielles parabolique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS\frac{\partial u}{\partial S} = ru$$

où :

- r représente le taux sans risque
- σ est la volatilité du prix de l'actif sous-jacent
- S est le prix de l'actif sous-jacent
- u est la valeur de l'option.

Cette équation est résolue en fixant une condition aux bornes qui est généralement le gain de l'option à l'échéance.

Dans le cadre du modèle de Black et Scholes (1973), nous considérons une option portant sur d d'actifs sous-jacents, dont l'évolution de chacun est décrite par un mouvement Brownien géométrique. Notons $u\left(t, S^1, S^2, \ldots, S^d\right)$ la valeur de cette option à l'instant t, qui dépend du prix de chacun des actifs. La corrélation entre deux actifs S^i et S^j est notée ρ_{ij}. Soit r, le taux sans risque. La volatilité de l'actif

S^i est égale à σ_i et $V = (\sigma_{ij})_{1 \le i,j \le d}$ représente la matrice de variance-covariance.

L'EDP décrivant le prix d'une option écrite sur plusieurs actifs sous-jacents devient alors :

$$\mathcal{L}_{BS}u := \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j S^i S^j \frac{\partial^2 u}{\partial S^i \partial S^j} - r\sum_{i=1}^{d} S^i \frac{\partial u}{\partial S^i} + ru \tag{2.1}$$

Afin de calculer le prix du produit dérivé multidimensionnel, il faut résoudre l'EDP précédente en tenant compte de la condition aux bornes. Dans le cas d'une option panier de vente de type européen, la condition aux bornes est la suivante :

$$u(T,S) = u\left(T, S^1, S^2, \ldots, S^d\right) = g(S) := \max\left(K - \sum_{i=1}^{d} \mu_i S^i; 0\right) \tag{2.2}$$

où μ_i représente la pondération de l'actif S^i dans le panier, K représente le prix d'exercice, T est l'échéance et $S = \left(S^1, S^2, \ldots, S^d\right)$.

Une option de vente qui peut être exercée à n'importe quel moment avant l'échéance satisfait le système de complémentarité linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}u &\le 0 \\ u &\ge g \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}u\right)(u-g) &= 0 \end{aligned}$$

2.2 Analyse en composante principale

L'analyse en composante principale permet de réduire la dimension d'un ensemble de données, tout en conservant autant que possible de variabilité existant dans les données. En d'autres termes, il s'agit de minimiser la perte d'information à la suite d'une réduction de la dimension. L'analyse en composantes principales est une technique extrêmement utilisée en statistiques depuis son introduction dans Pearson (1901). Cette technique permet d'obtenir un ensemble de variables orthogonales (non corrélées) appelées composantes principales. Quelques unes de ces composantes principales, qui contiennent le plus grand pourcentage de variabilité existant dans l'ensemble original de données, sont identifiées et utilisées pour caractériser les données. Cette approche est à la fois géométrique et statistique. Elle est géométrique puisqu'on représente les variables dans un nouvel espace selon des directions d'inertie maximale ; elle est également statistique puisqu'on cherche des axes orthogonaux permettant d'expliquer au mieux la variance des données. Pour plus de détails, voir Jolliffe (1986).

Dans le cadre de l'évaluation d'options panier, il s'agit d'effectuer une analyse en composante principale en utilisant la matrice de variance-covariance $V = (\sigma_{ij})_{1\le i,j\le d}$. On obtient alors d valeurs et vecteurs propres : $(\lambda_i)_{1\le i\le d}$ et $(q_i)_{1\le i\le d}$.

Soit Q la matrice des vecteurs propres : $Q = (q_1, q_2, ..., q_d)$ où $q_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots q_{id})^T = (q_{ij})_{1\le j\le d}$ est un vecteur colonne, où les valeurs propres sont indexées en ordre décroissant ($\lambda_1$correspond à la valeur propre la plus élevée et son vecteur propre correspondant est q_1).

La matrice des vecteurs propres vérifie les identités suivantes :

$$Vq_i = \lambda_i q_i \tag{2.3}$$

$$Q^TQ = QQ^T = I_{d\times d} \tag{2.4}$$

$$Q^TVQ = diag\,(\lambda_i) := \Lambda \tag{2.5}$$

2.3 Dérivation Mathématique

Soit le résultat d'une analyse en composantes principales de la matrice V et soit :

- $\tau = T - t$
- $b_i = \sum_{j=1}^{d} q_{ij}\left(r - \frac{\sigma_j^2}{2}\right)$
- $b = (b_i)_{i=1\dots d}$: un vecteur colonne
- $S = \left(S^1, S^2, \dots S^d\right)^T$

On effectue le changement de variable suivant proposé par Reisinger (2008) :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = Q^T \ln(S) + b\tau \tag{2.6}$$

On applique le changement de variable (2.6) à l'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes pour le cas multidimensionnel (2.1). l'EDP devient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - ru. \tag{2.7}$$

L'équation (2.7) est connue en physique sous le nom d'équation de diffusion de chaleur multidimensionnelle. Afin de calculer le prix du produit dérivé, il suffit de résoudre cette équation en tenant compte des conditions aux bornes. Dans le cas de l'option panier européenne, cette condition devient :

$$u\left(0, x^T\right) = \max\left(K - \sum_{i=1}^{d} \mu_i \exp(\sum_{j=1}^{d} q_{ij} x_j), 0\right) \tag{2.8}$$

Le théorème de Feynman-Kac permet d'obtenir la solution du système (2.7)−(2.8).

Rappel : Théorème de Feynman-Kac

Soit $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ et soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ admettant un minimum sur $\mathbb{R}$. La fonction $u(t,x) = \mathbb{E}_x[f(x_t)\exp\left(-\int_0^t g(x_s)ds\right)]$ est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u - gu & , t \succ 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) & , x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal.

Dans notre cas, on a :

— $\mathcal{A}u = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
— $g(x) = r$
— $f(x) = u(0,x) =$condition initiale

La solution de l'équation aux dérivées partielles est alors :

$$u^* (\tau, x) = \exp(-r\tau)\, \mathbb{E}_x^Q \left[u\left(0, x^T\right)\right] \tag{2.9}$$

Par exemple, dans le cas de l'option panier de vente européenne, la solution est :

$$u^* (\tau, x) = \exp(-r\tau)\, \mathbb{E}_x^Q \left[\max\left(K - \sum_{i=1}^{d} \mu_i \exp(\sum_{j=1}^{d} q_{ij} x_j^T), 0\right)\right] \tag{2.10}$$

2.4 Expansion asymptotique

Le prix du produit dérivé à l'instant t exprimé par $u^* (\tau, x)$ est la solution de l'EDP suivante (en tenant compte des conditions aux bornes) :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - ru.$$

Reisinger et Wittum (2007) montrent que la solution du problème à d dimensions n'améliore pas énormément le résultat du problème à une où deux dimensions.

Nombre de facteur	1	2	3	4	5
Prix $U(S_0, T)$	0.1806	0.1796	0.1777	0.1764	0.1758
Erreur relative	2.7%	2.2%	1.1%	0.38%	—

Tableau 2.1 – Approximation du prix d'une option panier à 5 actifs par un problème de 1 à 4 facteurs (source : Reisinger et Wittum (2007))

Les résultats de ce tableau montrent que l'ajout de composantes n'améliore pas significativement les résultats, car la décroissance dans le spectre est lente. Dans le cas de l'option panier, lorsque la surface du gain terminal à l'échéance est suffisamment régulière, Reisinger et Wittum (2007) proposent l'approximation linéaire suivante :

$$u(\tau, x, \lambda) = u^{(1)}(\tau, x) + \sum_{j=2}^{d} \lambda_j \frac{\partial u}{\partial \lambda_j}(\tau, x, \lambda)\,|_{\lambda=\lambda_1} + O(\left\|\lambda - \lambda^{(1)}\right\|^2) \tag{2.11}$$

où λ_1 est la valeur propre la plus élevée.

$u^{(1)}(\tau, x)$ est la solution de l'EDP à une seule dimension :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - ru \tag{2.12}$$

$\frac{\partial u}{\partial \lambda_j}$ peut être approximé par l'identité suivante tirée de l'approche des différences finies :

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda_j}\left(\tau, x, \lambda\right)|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{u^{(1,j)}\left(\tau, x\right) - u^{(1)}\left(\tau, x\right)}{\lambda_j} + O(\lambda_j^2) \tag{2.13}$$

et $u^{(1,j)}\left(\tau, x\right) = u\left(\tau, x, \lambda^{(1,j)}\right)$ est la solution de l'EDP à deux dimensions suivante pour j allant de 2 à d :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\lambda^{(1,j)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} - ru \tag{2.14}$$

avec :

$$\lambda^{(1,j)} = \begin{cases} \lambda_i & , i = 1 \; ou \; i = j \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{2.15}$$

On insère l'équation (2.13) dans l'équation (2.11) et on obtient :

$$u\left(\tau, x, \lambda\right) = u^{(1)}\left(t, x\right) + \sum_{j=2}^{d} \left(u^{(1,j)}\left(t, x\right) - u^{(1)}\left(t, x\right)\right) + O(\left\|\lambda - \lambda^{(1)}\right\|^2). \tag{2.16}$$

Le prix de l'option est donc obtenu par la combinaison des prix obtenus par la résolution des EDP à une dimension et à deux dimensions. Plutôt que de résoudre un problème à d dimensions, il suffit de résoudre un problème à une seule dimension (qui est relié à la valeur du spectre la plus elevée) et $(d-1)$ problèmes à deux dimensions (qui est la solution de l'EDP à deux dimensions de l'équation (2.14)). Pour un problème contenant 30 facteurs de risque et 100 états possible pour chaque facteur de risque, plutôt que d'effectuer 10^{60} opérations, on résout un problème à une dimension (100 opérations) et 29 problèmes à deux dimensions : $29 * 10^2 * 10^2 = 290000$ opérations, c'est-à-dire un total de 290100 opérations.

Chapitre 3

Solution par programmation dynamique

Dans ce chapitre, nous montrons comment résoudre les EDP (2.12)et (2.14) (problème à une et à deux dimensions) à l'aide de la programmation dynamique, plutôt qu'à partir de différences finies comme dans Reisinger et Wittum (2007).

3.1 Problème à une dimension

L'équation(2.12)(problème à une dimension) est résolue sur une grille discrète pour les dates d'exercice et pour les valeurs de la variable d'état par le programme dynamique suivant :

$$\begin{cases} u^{(1)}(t_M, x_1) & = f(x_1) \\ u^{(1)}(t_{m-1}, x_1) & = \max\left(f(x_1)\,;\, \exp(-r\triangle t)\,\mathbb{E}_{x_1}\left[u\left(t_m, X_1^{new}\right)\right]\right) \\ u^{(1)}(0, x_1) & = \exp(-r\triangle t)\,\mathbb{E}_{x_1}\left[u\left(t_1, X_1^{new}\right)\right] \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

- $t_k = \frac{T}{M}k = \triangle t\, k$ pour $k \in \{0, 1, \ldots M\}$: une grille pour le temps
- M représente le nombre de dates d'exercice d'une option bermudienne (dans le cas d'une option européenne, $M = 1$).
- X_1^{new} est une variable aléatoire représentnat les valeurs possibles de X_1à la prochaine date
- $f(x_1)$ est le gain terminal à l'échéance, calculé en supposant une seule va-

riable X_1 correspondant à l'axe qui contient le plus d'information, les autres variables étant supposées constantes.
— $\mathbb{E}_x$ est l'espérance conditionnelle sous la mesure risque neutre sachant que la valeur de la variable aléatoire X_1 est égale à x.

Puisque la variable d'état est continue, le calcul de l'espérance mathématique d'une fonction qui n'est connue que sur une grille discrète de points est réalisé en effectuant une interpolation par spline cubique (la technique d'interpolation est décrite avec plus de détails dans la section (3.4.1)).

3.2 Problème à deux dimensions

L'équation(2.14)(problème à deux dimensions) sur une grille discrète pour les dates d'exercice et pour les valeurs de chacune des deux variables d'état par le programme dynamique suivant :

$$\begin{cases} u^{(1,j)}(t_M, x_1, x_j) & = f\left(x_1, x_j\right) \\ u^{(1,j)}\left(t_{m-1}, x_1, x_j\right) & = \max\left(f\left(x_1, x_j\right); \exp\left(-r\triangle t\right)\mathbb{E}_{(x_1,x_j)}\left[u\left(t_m, X_1^{new}, X_j^{new}\right)\right]\right) \\ u^{(1,j)}\left(0, x_1, x_j\right) & = \exp\left(-r\triangle t\right)\mathbb{E}_{(x_1,x_j)}\left[u\left(t_1, X_1^{new}, X_j^{new}\right)\right] \end{cases} \tag{3.2}$$

où :

— $f\left(x_1, x_j\right)$ est le gain terminal à l'échéance calculé en fonction de deux variables, la première correspondant à l'axe contenant le plus d'information, la deuxième étant une des autres variables, et toutes les autres étant supposées constantes.
— $\mathbb{E}_{(x,y)}$ est l'espérance conditionnelle sous la mesure risque neutre sachant que la valeur de la variable aléatoire X_1 est égale à x et la valeur de la deuxième variable aléatoire est égale à y.

Le calcul de l'espérance mathématique d'une fonction de deux variables qui n'est connue que sur une grille discrète de points est réalisé en effectuant une interpolation par spline bicubique (voir sections (3.4.1)et (3.4.2)).

3.3 Détermination de la loi de probabilité

Afin de résoudre les deux programmes dynamiques précédents, il faut calculer les espérances conditionnelles apparaissant dans les équations (3.1) et (3.2). Le calcul de ces espérances passe par la détermination de la loi conditionnelle de la variable multidimensionnelle x définie par l'équation (2.6).

Rappelons que l'évolution du vecteur de prix $S_t = \left(S_t^1, S_t^2, \ldots, S_t^d\right)$ est décrite par le modèle de Black et Scholes multidimensionnel.

Soit A la décomposition de Cholesky de la matrice V de variance-covariance, telle que A est une matrice triangulaire inférieure ($V = AA^T$). Soit $Z \sim N(0, I_{d\times d})$. Soit $\sigma = (V_{ii})_{1\le i\le d}$ un vecteur qui contient la volatilité de chaque actif.

La variation du vecteur S_t peut alors s'éxprimer par :

$$S_{t+\triangle t} = S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\triangle t + \sqrt{\triangle t} AZ\right). \tag{3.3}$$

Rappelons l'expression de x :

$$x^t = \begin{pmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ \vdots \\ x_d^t \end{pmatrix} = Q^T \ln(S_t) + b\tau$$

En utilisant l'identité (2.4) on peut écrire :

$$Q.x^t = Q.Q^T \ln(S_t) + Qb\tau = \ln(S_t) + \left(r - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \vdots \\ \sigma_d^2 \end{pmatrix}\right)\tau \tag{3.4}$$

On peut écrire aussi que :

$$Q.x^{t+\triangle t} = \ln(S_{t+\triangle t}) + \left(r - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \vdots \\ \sigma_d^2 \end{pmatrix}\right)(\tau - \triangle t) \tag{3.5}$$

La soustraction :(3.5)-(3.4) donne :

$$\begin{aligned}
Q.\left(x^{t+\triangle t}-x^{t}\right) &= \ln\left(\frac{S_{t+\triangle t}}{S_t}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\triangle t \\
&= \left(r-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_1^2\\ \sigma_2^2\\ \vdots\\ \sigma_d^2\end{pmatrix}\right)\triangle t+\sqrt{\triangle t}AZ-\left(r-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_1^2\\ \sigma_2^2\\ \vdots\\ \sigma_d^2\end{pmatrix}\right)\triangle t \\
&= \sqrt{\triangle t}AZ
\end{aligned}$$

et donc :

$$Q.\left(x^{t+\triangle t}-x^{t}\right)=\sqrt{\triangle t}AZ \tag{3.6}$$

En utilisant l'identité (2.4) une deuxième fois, on obtient :

$$x^{t+\triangle t}=x^{t}+\sqrt{\triangle t}Q^{T}AZ \tag{3.7}$$

Par conséquent on peut déjà conclure que $x^{t+\triangle t}\left|x^{t}=x\right.$est une loi normale d'espérance x.

Pour la variance de $x^{t+\triangle t}\left|x^{t}=x\right.$, on utilise l'identité (2.5) :

$$\begin{aligned}
Var\left(x^{t+\triangle t}\left|x^{t}=x\right.\right) &= \triangle t.\mathbb{E}\left[Q^{T}AZ.\left(Q^{T}AZ\right)^{T}\right] \\
&= \triangle t.Q^{T}\mathbb{E}\left[AZ.Z^{T}A^{T}\right]Q \\
&= \triangle t Q^{T}\Sigma Q \\
&= \triangle t\,\Lambda
\end{aligned}$$

et par conséquent, on peut conclure que la loi conditionnelle du vecteur $x^{t+\triangle t}\left|x^{t}=x\right.$ est une loi normale d'espérance x et de variance $\triangle t\Lambda$:

$$x^{t+\triangle t}\left|x^{t}=x\right.\sim\mathcal{N}\left(x,\triangle t\Lambda\right) \tag{3.8}$$

La loi conditionnelle de chaque composante du vecteur x est alors :

$$x_j^{t+\triangle t}\left|x_j^{t}=x\right.\sim\mathcal{N}\left(x,\triangle t\lambda_j\right) \tag{3.9}$$

3.4 Interpolation

Cette section indique comment réaliser une interpolation de la fonction valeur qui permette le calcul de l'espérance mathématique à partir de la loi de probabilité de X afin de résoudre les programmes dynamiques (3.1) et (3.2).

3.4.1 Interpolation cubique

Le programme dynamique (3.1) fait intervenir le terme $\mathbb{E}_{x_1}\left[u\left(t_m, X_1^{new}\right)\right]$.
Soit $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ une grille équidistante de point pour l'axe x_1. Supposons que les valeurs discrètes $u\left(t_m, a_i\right)$ sont connues sur la grille. La fonction continue $u\left(t_m, x_1\right)$ est obtenue en interpolant ces valeurs discrètes à l'aide d'une spline cubique[1] (Breton et De Frutos 2012), de sorte que :

$$u\left(t_m, x_1\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{d=0}^{3} c_{id}\left(x_1\right)^d 1_{[a_i, a_{i+1})}. \tag{3.10}$$

On a alors :

$$\mathbb{E}_{x_1}\left[u\left(t_m, X_1^{new}\right)\right] = \sum_{i=0}^{n} \sum_{d=0}^{3} c_{id} \mathbb{E}_{x_1}\left[\left(X_1^{new}\right)^d 1_{[a_i, a_{i+1})}\right]. \tag{3.11}$$

Les coefficients c_{id} peuvent être obtenus, par exemple, à l'aide de la commande 'CSAPI' de Matlab. Pour calculer l'espérance conditionnelle, il suffit de calculer $\mathbb{E}_{x_1}\left[\left(X_1^{new}\right)^d 1_{[a_i, a_{i+1})}\right]$ pour $d = 0, \ldots, 3$.
Soit :

- $\phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) d\varepsilon$: la loi normale cumulative.
- $A_i = \frac{a_i - x_1}{\sqrt{\lambda_1 \triangle t}}$.

On obtient (les détails de calcul se trouvent à l'annexe) :

$$\mathbb{E}_{x_1}\left[1_{[a_i, a_{i+1})}\right] = \phi\left(A_{i+1}\right) - \phi\left(A_i\right) \tag{3.12}$$

1. Une spline cubique est une fonction polynomiale par morceaux de degré trois qui est continue et dont les dérivées première et deuxième sont également continues. La spline interpole les valeurs de la fonction dans les noeuds.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_1}\left[\left(X_1^{new}\right)1_{[a_i,a_{i+1})}\right] &= x_1\left(\phi\left(A_{i+1}\right)-\phi\left(A_i\right)\right)\\
&+\sqrt{\tfrac{\lambda_1\triangle t}{2\pi}}\left(\exp\left(-\tfrac{A_i^2}{2}\right)-\exp\left(-\tfrac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_1}\left[\left(X_1^{new}\right)^2 1_{[a_i,a_{i+1})}\right] &= \left(x_1+\lambda_1\triangle t\right)\left(\phi\left(A_{i+1}\right)-\phi\left(A_i\right)\right)\\
&+2x_1\sqrt{\tfrac{\lambda_1\triangle t}{2\pi}}\left(\exp\left(-\tfrac{A_i^2}{2}\right)-\exp\left(-\tfrac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right)\\
&+\tfrac{\lambda_1\triangle t}{\sqrt{2\pi}}\left(A_i\exp\left(-\tfrac{A_i^2}{2}\right)-A_{i+1}\exp\left(-\tfrac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_1}\left[\left(X_1^{new}\right)^3 1_{[a_i,a_{i+1})}\right] &= \left(x_1^3+3x_1\lambda_1\triangle t\right)\left(\phi\left(A_{i+1}\right)-\phi\left(A_i\right)\right)\\
&+\sqrt{\tfrac{\lambda_1\triangle t}{2\pi}}\left(3x_1^2+2\lambda_1\triangle t\right)\left(\exp\left(-\tfrac{A_i^2}{2}\right)-\exp\left(-\tfrac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right)\\
&+\tfrac{3x_1\lambda_1\triangle t}{\sqrt{2\pi}}\left(A_i\exp\left(-\tfrac{A_i^2}{2}\right)-A_{i+1}\exp\left(-\tfrac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right)\\
&+\lambda_1\triangle t\sqrt{\tfrac{\lambda_1\triangle t}{2\pi}}\left(A_i^2\exp\left(-\tfrac{A_i^2}{2}\right)-A_{i+1}^2\exp\left(-\tfrac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

3.4.2 Interpolation bicubique :

Le programme dynamique (3.2) fait intervenir le terme $\mathbb{E}_{(x_1,x_j)}\left[u\left(t_m,X_1^{new},X_j^{new}\right)\right]$. Soit $a_0<a_1<\ldots<a_n$ une grille équidistante de points pour la variable $x_1$et $b_0<b_1<\ldots<b_p$ une grille équidistante pour la variable x_j. Supposons que les valeurs discrètes $u\left(t_m,a_i,b_j\right)$ sont connues sur la grille. La fonction continue $u\left(t_m,x_1,x_j\right)$ est obtenue en interpolant ces valeurs discrètes à l'aide d'une spline bicubique (de Boor 1962).

$$
u\left(t_m,x_1,x_j\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{d=0}^{3}\sum_{k=0}^{3}c_{dk}\left(x_1\right)^d\left(x_j\right)^k 1_{[a_i,a_{i+1})}1_{[b_j,b_{j+1})}\right)
\tag{3.16}
$$

Les axes $x_1$et x_j étant orthogonaux, selon le principe de l'analyse en composante principale, le calcul de l'espérance conditionnelle est simplifié du fait de l'indépendance entre x_1 et x_j. On obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(x_1,x_j)}\left[u\left(t_m,X_1^{new},X_j^{new}\right)\right] &= \textstyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p}\sum_{d=0}^{3}\sum_{k=0}^{3}c_{dk}\\
&\mathbb{E}_{x_1}\left[\left(X_1^{new}\right)^d 1_{[a_i,a_{i+1})}\right]\mathbb{E}_{x_j}\left[\left(X_j^{new}\right)^k 1_{[b_j,b_{j+1})}\right]
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Le calcul des coefficients c_{dk} peut se faire, par exemple, à l'aide de la commande 'CSAPI' de Matlab. L'ajustement des coefficients doit être fait selon de Boor (1962).

Le calcul de $\mathbb{E}_{x_1}\left[(X_1^{new})^d\,1_{[a_i,a_{i+1})}\right]$ est obtenu comme dans la section (3.4.1). Pour calculer $\mathbb{E}_{x_j}\left[\left(X_j^{new}\right)^k 1_{[b_j,b_{j+1})}\right]$, il suffit de remplacer dans les résultats de la section (3.4.1) les variables : λ_1 par λ_j, x_1 par x_j et a_i par b_j.

Chapitre 4

Calcul des sensibilités (Delta et Gamma)

Cette section présente le développement permettant d'obtenir les grecques (Delta et Gamma) d'une option panier selon notre modèle.

4.1 Delta

Le Delta d'une option est défini comme la sensibilité du prix de l'option aux changements dans le prix de son actif sous-jacent. Soit $\triangle^{(i)}$ la sensibilité de la valeur de l'option panier à un changement du prix de l'actif i.

$$\begin{aligned}
\triangle^{(i)} &= \frac{\partial u}{\partial S^i} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S^i} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial S^i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial S^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_d}{\partial S^i} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial S^i}.
\end{aligned}$$

On a également :

$$x_j = \sum_{k=1}^{d} q_{jk} \ln\left(S^k\right) + b_j \tau$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial S^i} = \frac{q_{ji}}{S^i}$$

et par conséquent :

$$\triangle^{(i)} = \sum_{j=1}^{d} \frac{q_{ji}}{S^i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \tag{4.1}$$

Afin d'écrire le Delta d'une façon matricielle, on définit la matrice Υ d la façon suivante :

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{S^1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{S^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{S^d} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

et par conséquent :

$$\triangle = \begin{pmatrix} \triangle^{(1)} \\ \triangle^{(2)} \\ \vdots \\ \triangle^{(d)} \end{pmatrix} = \Upsilon Q \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_d} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Le terme $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ peut être calculé numériquement en se basant sur l'approximation de u par des splines cubiques et bicubiques. Cependant, l'expression de la dérivée dépend de la composante considérée. En effet :

— Si $i = 1$ alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{d} \left(\frac{\partial u^{(1,j)}}{\partial x_1} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} \right) \tag{4.4}$$

— Si $i \neq 1$ alors

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u^{(1,i)}}{\partial x_i} \tag{4.5}$$

4.2 Gamma

Le Gamma d'une option est défini comme la sensibilité du Delta à un changement du prix du sous-jacent. Soit $\Gamma^{(i)}$ le gamma de l'option panier par rapport à l'actif i.

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(i)} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \left(S^i\right)^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial S^i}\left(\frac{\partial u}{\partial S^i}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S^i}\left(\triangle^{(i)}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S^i}\left(\sum_{j=1}^{d}\frac{q_{ji}}{S^i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\
&= \frac{-1}{\left(S^i\right)^2}\sum_{j=1}^{d} q_{ji}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{S^i}\sum_{j=1}^{d} q_{ji}\frac{\partial^2 u}{\partial S^i \partial x_j}.
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial S^i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial S^i}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\triangle^{(i)}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{d}\frac{q_{ki}}{S^i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \\
&= \frac{1}{S^i}\sum_{k=1}^{d} q_{ki}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}
\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\Gamma^{(i)} = \frac{\partial^2 u}{\partial \left(S^i\right)^2} = \frac{1}{\left(S^i\right)^2}\sum_{j=1}^{d}\left(q_{ji}\sum_{k=1}^{d} q_{ki}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - q_{ji}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right). \tag{4.6}$$

Le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ peut être calculé numériquement à partir de l'approximation u par des splines cubiques et bicubiques. Cependant, l'expression de la dérivée dépend de la composante considérée. Soit la matrice $D = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right)_{j,k=1\ldots D}$. On a alors :

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1^2} + \sum_{j=2}^{d} \left(\frac{\partial u^{(1,j)}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1^2}\right) & \frac{\partial u^{(1,2)}}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \ldots & \frac{\partial u^{(1,d)}}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \frac{\partial u^{(1,2)}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u^{(1,2)}}{\partial x_2^2} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{\partial u^{(1,d)}}{\partial x_1 \partial x_d} & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial^2 u^{(1,d)}}{\partial x_d^2} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Le terme $\frac{\partial u}{\partial x_j}$est calculé selon les équations (4.4) et (4.5).

Chapitre 5

Résultats Numériques

5.1 Option panier européenne :

Pour fins de comparaison, nous utilisons l'exemple traité dans Reisinger et Wittum (2007). Il s'agit d'une option panier sur le DAX (indice allemand), basée sur 5 actifs. Les paramètres utilisés pour son évaluation sont les suivants :

- $r = 5\%$
- $K = 100$
- $M = 1$
- $T = 0.25$

et les caractéristiques des actifs sous-jacents sont présentés dans le tableau 5.1.

Actif	S^0	σ	ρ_{ij}					μ_i
1	100	0.518	1.00	0.79	0.82	0.91	0.84	38.1%
2	100	0.648	0.79	1.00	0.73	0.80	0.76	6.5%
3	100	0.623	0.82	0.73	1.00	0.77	0.72	5.7%
4	100	0.57	0.91	0.80	0.77	1.00	0.90	27%
5	100	0.53	0.84	0.76	0.72	0.90	1.00	22.7%

Tableau 5.1 – Paramètres de l'option panier DAX : Source (Reisinger et Wittum 2007)

Pour les options européennes, le point de comparaison (benchmark) est obtenu par une simulation de Monte-Carlo comportant $N = 10^6$ tirages.

5.1.1 Prix d'options et temps de calcul

Le gain terminal à l'échéance de l'option d'achat (Call) est :

$$u(0,x) = \max\left(\sum_{i=1}^{d}\mu_i \exp(\sum_{j=1}^{d} q_{ij}x_j) - K, 0\right) \tag{5.1}$$

alors que le gain terminal de l'option de vente (Put) est :

$$u(0,x) = \max\left(K - \sum_{i=1}^{d}\mu_i \exp(\sum_{j=1}^{d} q_{ij}x_j), 0\right) \tag{5.2}$$

Les résultats obtenus pour 50 points d'interpolations sont présentés dans le tableau 5.2.

	Méthode	u	Écart-type	Erreur absolue	Erreur relative	Temps de calcul (en s)
Call	1D ACP	10.4503	–	0.4961	4.7475%	0.1360
	Expansion asymptotique	10.9258	–	0.0207	0.1890%	1.5024
	Monte-Carlo	10.9464	±0.0416	–	–	33.0472
Put	1D ACP	9.7362	–	0.0571	0.5865%	0.1268
	Expansion asymptotique	9.6845	–	0.0053	0.0552%	1.4935
	Monte-Carlo	9.6791	±0.0312	–	–	32.8551

Tableau 5.2 – Valeur d'une option panier (Call et Put) sur le DAX (5 actifs)

La valeur identifiée par 1D ACP dans le tableau 5.2 représente le prix obtenu en se basant uniquement sur l'axe qui contient le plus d'information, c'est-à-dire le prix $u^{(1)}$.

On remarque bien que les prix obtenus sont bien situés dans l'intervalle de confiance de la simulation de Monte-Carlo. On constate aussi que le temps de calcul de notre méthode (Expansion asymptotique) est beaucoup plus rapide que la simulation Monte-Carlo. En outre, la simulation de Monte-Carlo ne permet d'obtenir que des estimés ponctuels, alors que notre méthode caractérise le prix de l'option pour tous les états du monde et toutes les dates d'exercice. Pour cette raison, notre méthode domine nettement la simulation pour le calcul des prix et des sensibilités (delta et gamma).

5.1.2 Sensibilités de l'option européenne

Les tableaux 5.3 et 5.4 présentent les résultats (Delta et Gamma) correspondant au même exemple. Les résultats comparatifs par simulation de Monte-Carlo sont obtenus à l'aide de la commande 'basketsensbyls' de Matlab.

		Actif	Expansion Asymptotique	Monte Carlo	Écart-type
Call	Delta	1	0.2147	0.2161	±0.0465
		2	0.0388	0..379	±0.0014
		3	0.0332	0.0326	±0.0010
		4	0.1557	0.1562	±0.0243
		5	0.1278	0.1285	±0.0164
	Gamma	1	0.0015	0.0024	±0.0115
		2	$9.535.10^{-5}$	$9.2576.10^{-5}$	$\pm 5.0752.10^{-5}$
		3	$1.0784.10^{-4}$	$1.2633.10^{-4}$	$\pm 3.977.10^{-4}$
		4	0.0013	0.0026	±0.0066
		5	0.0014	0.0018	±0.0001

Tableau 5.3 – Sensibilités pour l'option panier d'achat européenne

		Actif	Expansion Asymptotique	Monte Carlo	Écart-type
Put	Delta	1	-0.1659	-0.1649	± 0.0274
		2	-0.0264	-0.0271	$\pm 7.6433.10^{-4}$
		3	-0.0240	-0.0244	$\pm 6.2266.10^{-4}$
		4	-0.1145	-0.1140	± 0.0131
		5	-0.0988	-0.0986	± 0.0098
	Gamma	1	0.0020	0.0025	± 0.0031
		2	$-3.8111.10^{-5}$	$-3.2277.10^{-5}$	$\pm 3.9974.10^{-5}$
		3	$-6.4062.10^{-4}$	$-6.3139.10^{-4}$	$\pm 1.0952.10^{-4}$
		4	0.0012	0.0019	± 0.0035
		5	0.0011	0.0009	± 0.00066

Tableau 5.4 – Sensibilités pour l'option panier de vente européenne

L'examen de ces tableaux montre que les sensibilités obtenues sont très proche de celles fournies par la commande prédéfinie de Matlab, et sont bien à l'intérieur des intervalles de confiance.

Par ailleurs, il est important de soulinger que le calcul des sensibilités par la commande prédéfinie de Matlab 'basketsensbyls' nécessite plus d'une heure (pour un échantillon de $N = 10^6$) pour chacun des éléments du panier, alors que notre approche ne nécessite que quelques secondes pour tous les éléments du panier. Ces résultats semblent indiquer que le calcul des sensibilités est précis, et beaucoup plus efficace à partir de notre approche que par simulation. Le temps de calcul est suffisamment court pour qu'on puisse établir des stratégies de couverture rapidement et efficacement.

On peut conclure alors que notre méthode est la plus rapide et la plus adéquate pour évaluer et couvrir des options panier européennes.

5.2 Option panier de type américain

Pour les options de type américain, les points de comparaison (benchmark) sont les résultats présentés dans Kovalov et al. (2007), ainsi que les résultats obtenus par simulation-régression (Longstaff et Schwatz 2001) utilisant des polynômes de Laguerre de degré 3 et $N = 10^6$ tirages.

5.2.1 Prix d'options

Kovalov et al. (2007) évaluent une option panier de vente américaine comportant de 2 à 6 actifs également pondérés. Les valeurs des paramètres sont $S_i = K = 100$, $T = 0.25$, $r = 3\%$, $\rho_{ij} = 0.5$ pour $i \neq j$, $\sigma_i = 20\%$. Le nombre de dates d'exercice possibles est $M = 63$. Les résultats obtenus pour 50 points d'interpolations sur chaque axe x_i sont présentés au tableau 5.5.

Nombre d'actifs	2	3	4	5	6
Expansion Asymptotique	3.1350	2.9445	2.8378	2.7738	2.7316
Kovalov et al.	3.13955	2.94454	2.84019	2.77193	2.71838
Longstaff-Schwartz	3.1376	2.9378	2.8428	2.7744	2.7328
Écart-type	± 0.0075	± 0.0071	± 0.0068	0.0067	0.0066

Tableau 5.5 – Prix d'une option de vente américaine sur un panier de 2 à 6 actifs

L'examen des résultats du tableau 5.5 montre que les prix obtenus par notre méthode (expansion asymptotique) sont proches de ceux obtenus par Kovalov et al. (2007) et apparatiennent bien à l'intervalle de confiance obtenu par simulation-régression (Longstaff et Schwartz 2001). Par ailleurs, dans le cas de $n = 6$ actifs, notre prix est dans l'intervalle de confiance alors que ce n'est pas le cas pour le prix de Kovalov et al.(2007).

5.2.2 Temps de calcul

Considérons le même exemple que la partie 5.2.1 afin de comparer le temps de calcul des différentes méthodes discutées.

Nombre d'actifs	2	3	4	5	6
Expansion Asymptotique	43.3466	46.7428	48.1545	50.1057	48.9448
Kovalov et al.	55.03	20.86	7932.63	559.79	26299.28
Longstaff-Schwartz	61.4699	62.7165	76.2502	80.1059	87.4178

Tableau 5.6 – Temps de calcul d'une option de vente américaine sur un panier de 2 à 6 actifs en Secondes

On constate que, tout comme la simulation, le temps de calcul de l'expansion asymptotique ne dépend pas de la dimension du panier, alors que pour la méthode de Kovalov, le temps de calcul explose dès que le nombre d'actif dépasse 3. Par ailleurs, la simulation de Monte-Carlo ne permet d'obtenir que des estimés ponctuels, alors que notre méthode caractérise le prix de l'option pour tous les états du monde et toutes les dates d'exercice. Pour cette raison, notre méthode domine nettement la simulation pour le calcul des sensibilités (delta et gamma).

On peut conclure alors que notre méthode est la plus rapide et la plus adéquate pour évaluer et couvrir des options panier américaines lorsque le nombre d'actifs est elevé.

5.3 Analyses

5.3.1 Absence de dividende

Revenons à l'exemple de la section 5.1 et calculons les prix d'un put et d'un call américain en prenant $M = 63$ dates d'exercice.

	Expansion Asymptotique	Monte-Carlo	Écart-type
Call	10.9258	10.9174	± 0.0313
Put	9.7661	9.7472	± 0.0215

Tableau 5.7 – Prix d'un put et d'un call américain : exemple de la section 5.1

On remarque bien que le prix d'un call américain est le même que le prix d'un call européen. Ceci vérifie bien l'identité de Black (1975) qui postule qu'en absence de dividende, le détenteur d'un call n'a aucun intérêt à exercer son option américaine avant la échéance. D'où le prix d'un call américain doit être égal à un call européen.

Pour l'option put, le prix d'une américaine obtenu est supérieur à celui d'une européenne. Cette différence représente la prime d'exercice anticipé.

5.3.2 Variation des valeurs des paramètres

Considérons une option panier sur 4 actifs également pondérés, dont les paramètres sont les suivants :
$S_i = K = 100$ pour $i = 1 \ldots 4$, $T = 0.25$, $r = 3\%$, $\rho_{ij} = 0.5$ pour $i \neq j$, $\sigma_i = 20\%$.
On prend $M = 63$ lorsque $T = 3$ mois.

Les sections suivantes présentent les résultats obtenus en faisant varier successivement chacun des paramètres par rapport au cas de base.

5.3.2.1 Variation de la corrélation

Corrélation ρ_{ij}	Expansion Asymptotique	Monte-Carlo	Écart-type
0.1	1.9452	1.9723	±0.0048
0.3	2.4186	2.4156	±0.0059
0.5	2.8378	2.8428	±0.0068
0.7	3.1855	3.1920	±0.0077
0.9	3.5226	3.5155	±0.0084

Tableau 5.8 – Effet de la corrélation sur le prix d'une option de vente américaine

Le tableau 5.8 présente les prix obtenus pour différentes valeurs de la corrélation entre les actifs. On constate que les prix obtenus par la méthode d'expansion asymptotique sont toujours dans l'intervalle de confiance de la simulation de Monte-Carlo, sauf lorsque la corrélation est très faible. Il s'agit d'un résultat attendu, car lorsque la corrélation est trop faible, le premier axe obtenu par Analyse en Composantes Principales ne contient pas suffisamment d'information. Par exemple, pour $\rho_{ij} = 0.1$, le premier axe ne contient que 32.5% de l'information.

5.3.2.2 Variation de la volatilité

Volatilité σ_i	Expansion Asymptotique	Monte-Carlo	Écart-type
0.1	1.2895	1.2906	± 0.0032
0.2	2.8378	2.8428	± 0.0068
0.3	4.3994	4.3975	± 0.0104
0.4	5.9656	5.9699	± 0.0138
0.5	7.5241	7.5165	± 0.0171

Tableau 5.9 – Effet de la volatilité sur le prix d'une option panier de vente américaine

Le tableau 5.9 présente les prix obtenus pour différentes valeurs de la volatilité des actifs. Lorsque la volatilité augmente, le prix de l'option panier de vente américaine augmente également. On constate que tous les prix appartiennent bien à l'intervalle de confiance de la simulation.

5.3.2.3 Variation de l'échéance

Échéance T	Possibilité d'exercice	Expansion Asymptotique	Monte-Carlo	Std
0.25	journalière	2.8378	2.8428	± 0.0068
0.5	journalière	3.8516	3.8510	± 0.0090
1	mensuelle	5.1024	5.1028	± 0.0123
3	mensuelle	7.6632	7.6578	± 0.0173
5	mensuelle	8.9197	8.9481	± 0.0198

Tableau 5.10 – Effet de l'échéance sur le prix d'une option panier de vente américaine

Le tableau 5.10 présente les prix obtenus pour différentes valeurs de l'échéance. Nous constatons que le prix obtenu n'est pas dans l'intervalle de confiance fourni par la simulation-régression. Il est difficile de conclure à ce sujet, puisqu'il est connu que la simulation-régression n'est pas très précise pour les options ayant une longue échéance.

5.3.2.4 Variation du prix d'exercice

Prix d'exercice K	Expansion Asymptotique	Monte-Carlo	Écart-type
90	0.2615	0.2608	± 0.0020
95	1.0310	1.0335	± 0.0043
100	2.8378	2.8428	± 0.0068
105	5.9154	5.9190	± 0.0084
110	10.1033	10.1007	± 0.0072

Tableau 5.11 – Effet du prix d'exercice sur le prix d'une option panier de vente américaine

Le tableau 5.11 présente les prix obtenus pour différentes valeurs du prix d'exercice. Les prix obtenus sont toujours dans l'intervalle de confiance.

5.3.2.5 Commentaires

Cette étude permet de constater que la méthode que nous proposons est robuste et fournit des résultats précis dès lors que la corrélation entre les actifs sous-jacents est suffisamment élevée. Les prix obtenus sont dans l'intervalle de confiance des simulations de Monte-Carlo. L'intérêt de la méthode que nous proposons est qu'elle permet de calculer les prix d'options et leur sensibilité aux mouvements des prix des actifs sous-jacents, autant pour les options européennes qu'américaines, en quelques secondes. Cette méthode est plus performante que toutes celles analysées dans le tableau 1.1 puisqu'aucune de ces approximations n'est toujours valable lorsqu'on varie d'autres paramètres.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons traité la problématique de l'évaluation des options paniers de type américain et européen. Les méthodes d'évaluation numérique telles que les arbres, treillis, différences finies ou programmation dynamique souffrent de la malédiction de la dimension, ce qui en rend l'utilisation difficile pour les options paniers, qui font intervenir généralement un grand nombre d'actifs sous-jacents. Par ailleurs, la simulation de Monte-Carlo ne peut être utilisée pour les options permettant un exercice anticipé qu'au prix d'une approximation de la stratégie d'exercice.

Présentement, la méthode la plus utilisés pour évaluer une option panier de type américain est la simulation-régression. Il s'agit d'une approche de programmation dynamique où la valeur de continuation est approximée à partir de trajectoires simulées, et cette méthode est actuellement la moins lourde en temps de calcul pour ce type de produit. Dans ce mémoire, nous proposons une nouvelle méthode permettant d'évaluer les options panier en réduisant la dimension du problème, ce qui permet de le traiter par une méthode balayant tout l'espace d'état. Cette méthode permet également de calculer les sensibilités de l'option de façon très efficace.

L'approche que nous proposons est basée sur une technique de réduction de dimension (l'analyse en composante principale) couplée avec la programmation dynamique. Elle permet d'évaluer des dérivés exotiques, notamment des options avec possibilité d'exercice anticipé, écrits sur plusieurs actifs sous-jacents. En termes d'efficacité, cette méthode est beaucoup plus rapide que les autres méthodes proposées dans la littérature, et beaucoup plus rapide que la simulation-régression. Elle permet de transformer un problème de dimension n à $(n-1)$ problèmes de dimension 2 et un problème de dimension un. En termes de précision et de fiabilité, nous avons analysé notre méthode en l'appliquant à un éventail varié de valeurs des paramètres, pour constater sa robustesse, sauf dans les cas de très faible corrélation où l'analyse en composante principale ne permet pas d'isoler un facteur dominant.

Dans l'industrie, le calcul des sensibilités des options paniers se fait généralement par simulation de Monte Carlo. Il s'agit d'une approche extrêmement lourde en temps de calcul lorsqu'il s'agit d'une option américaine, alors que notre méthode permet de calculer les sensibilités en quelques secondes.

Pour conclure, la limite la plus importante de l'approche que nous proposons est qu'elle se situe dans le cadre du modèle de Black et Scholes (1973), où les paramètres comme la volatilité ou le taux sans risque sont considérés constants, ce qui ne représente pas adéquatement la réalité des marchés financiers. Une avenue intéressante de recherche consisterait en une adaptation de cette approche au cas où l'évolution de ces paramètres serait décrite par des fonctions déterministes du temps. Une deuxième avenue de recherche serait de déterminer le changement de variable adéquat dans le cas où on considère des mouvements browniens géométriques avec sauts. Comme dernière amélioration, on pourrait adapter cette méthode au cas où les titres financiers présentent des changements de régimes. Pour les deux dernières extensions proposées, il suffit de trouver le changement de variable adéquat permettant de passer d'une équation de Black et Scholes multidimensionnelle à une équation de chaleur multidimensionnelle. L'expansion asymptotique reste valable et la programmation dynamique peut encore être utilisée pour la solution des problèmes de dimension réduite.

Bibliographie

[1] Barraquand, J. et D. Martineau, 1995, « Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities », Journal of Financial and Quantitative Analysis 30, 383-405.

[2] Beisser, J., 1999, « Another Way to Value Basket Options », Working paper, Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

[3] Black, F.,1975, « Fact and Fantasy in the Use of Options », Financial Analysts Journal 31, 36-41.

[4] Black, F. et M. Scholes, 1973, « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », Journal of Political Economy 81, 637-654.

[5] Breton, M. et J. de Frutos, 2012, « Approximation of Dynamic Programs », In Handbook of Computational Finance, Springer, 633-649.

[6] Broadie, M. et P. Glasserman, 1997, « Monte Carlo Methods for Pricing High-Dimensional American Options : An Overview », In Monte Carlo Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management , Risk Books, 149-161.

[7] Boor, C. DE., 1962, « Bicubic spline interpolation », J. Math. and Phys., Vol. 41, p. 212.

[8] Clewlow, L. et C. Strickland, 1998, « Implementing Derivatives Models », John Wiley & Sons, Chichester, UK.

[9] Cox,J., S. Ross et M. Rubinstein, 1979, « Option Pricing : A Simplified Approach ». Journal of Financial Economics 7, 229-263.

[10] Gentle, D., 1993, « Basket Weaving », RISK, 51-52.

[11] Glasserman, P., 2004, « Monte Carlo Methods in Financial Engineering », Springer.

[12] Johnson, N.L., 1949, « Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation », Biometrika 36, 149-176.

[13] Jolliffe I.T., 1986, « Principal Component Analysis », Springer-Verlag.

[14] Ju, E., 2002, « Pricing Asian and Basket Options Via Taylor Expansion » , Journal of Computational Finance 5 (3) , 79-103.

[15] Kovalov, P., V. Linetsky et M. Marcozzi, 2007, « Pricing Multi-Asset American Options : A Finite element Method of Lines with Smooth Penalty », SIAM Journal of Scientific Computing 33, 209-237.

[16] Krekel, M., J. De Kock, R. Korn, et T. K. Man, 2004, « An Analysis of Pricing Methods for Baskets Options », Wilmott 3 , 82-89.

[17] Lévy, E., 1992, « Pricing European average rate currency options », Journal of International Money and Finance 11, 474-491.

[18] Longstaff, F. et E. Schwartz, 2001, « Valuing American Option by Simulation : A Simple Least Squares Approach », Review of Financial Studies 14, 113-147.

[19] Milevsky, M.A. et S.E. Posner, 1998 « A Closed-Form Approximation for Valuing Basket Options », Journal of Derivatives, 54-61.

[20] Milevsky, M.A. et S.E. Posner, 1998b « Valuing Exotic Options by Approximating the SPD with Higher Moments", Journal of Financial Engineering 7(2), 54-61.

[21] Pearson, K., 1901, « On lines and planes of closest fit to systems of points in space », Philosophical Magazine 2, 559-572.

[22] Reisinger, C., 2004, « Numerische Methoden f¨ur hochdimensionale parabolische Gleichungen am Beispiel von Optionspreisaufgaben ». PhD thesis, Ruprecht-Karls- Universitat, Heidelberg,

[23] Reisinger, C. et G. Wittum, 2007, « Efficient hierarchical approximation of high-dimensional option pricing problems », SIAM Journal of Scientific Computing, 29, 440-458.

[24] Rogers, L.C.G. et Z. SHI, 1995, « The Value of an Asian Option », Journal of Applied Probability 32, 1077-1088.

[25] Tilley, J. A., 1993, « Valuing American Options in a Path Simulation Model » , Transactions of the Society of Actuaries 45, 83-104.

Annexe

On fournit dans cette annexe le calcul des espérances conditionnelles de la section3.4.
On a $x_j^{t+\triangle t} \left| x_j^t = x \right. \sim \mathcal{N}\left(x, \triangle t.\lambda_j\right)$.
Soit $A_i = \frac{a_i - x_j}{\sqrt{\lambda_1 \triangle t}}$

Calcul de $\mathbb{E}_{x_j}\left[1_{[a_i,a_{i+1})}\right]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_j}\left[1_{[a_i,a_{i+1})}\right] &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j\triangle t}} \exp\left(-\frac{(x-x_j)^2}{2\lambda\triangle t}\right) dx \\
&= \int_{A_i}^{A_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right) d\epsilon \\
&= \phi\left(A_{i+1}\right) - \phi\left(A_i\right)
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathbb{E}_{x_j}\left[\left(x_j^{new}\right)1_{[a_i,a_{i+1})}\right]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_j}\left[\left(x_j^{new}\right)1_{[a_i,a_{i+1})}\right] &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j\triangle t}}\left(x_j^{new}\right)\exp\left(-\frac{\left(x-x_j\right)^2}{2\lambda\triangle t}\right)dx \\
&= \frac{\sqrt{\lambda_j\triangle t}}{\sqrt{2\pi\lambda_j\triangle t}}\int_{A_i}^{A_{i+1}}\left(x_j+\sqrt{\lambda_j\triangle t}\epsilon\right)\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)d\epsilon \\
&= \frac{x_j}{\sqrt{2\pi}}\int_{A_i}^{A_{i+1}}\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)d\epsilon \\
&+ \sqrt{\frac{\lambda_j\triangle t}{2\pi}}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\epsilon\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)d\epsilon \\
&= x_j\left(\phi\left(A_{i+1}\right)-\phi\left(A_i\right)\right)+\sqrt{\frac{\lambda_j\triangle t}{2\pi}}\left[-\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)\right]_{A_i}^{A_{i+1}} \\
&= x_j\left(\phi\left(A_{i+1}\right)-\phi\left(A_i\right)\right) \\
&+ \sqrt{\frac{\lambda_j\triangle t}{2\pi}}\left(\exp\left(-\frac{A_i^2}{2}\right)-\exp\left(-\frac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathbb{E}_{x_j}\left[\left(x_j^{new}\right)^2 1_{[a_i,a_{i+1})}\right]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_j}\left[\left(x_j^{new}\right)^2 1_{[a_i,a_{i+1})}\right] &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j\triangle t}}\left(x_j^{new}\right)^2 \exp\left(-\frac{(x-x_j)^2}{2\lambda\triangle t}\right) dx \\
&= \frac{\sqrt{\lambda_j\triangle t}}{\sqrt{2\pi\lambda_j\triangle t}} \int_{A_i}^{A_{i+1}} \left(x_j+\sqrt{\lambda_j\triangle t}\epsilon\right)^2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right) d\epsilon \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_i}^{A_{i+1}} \left(x_j^2+2x_j\sqrt{\lambda_j\triangle t}\epsilon+\lambda_j\triangle t\epsilon^2\right) \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right) d\epsilon \\
&= x_j^2\left(\phi\left(A_{i+1}\right)-\phi\left(A_i\right)\right) \\
&+ 2x_j\sqrt{\frac{\lambda_j\triangle t}{2\pi}}\left(\exp\left(-\frac{A_i^2}{2}\right)-\exp\left(-\frac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right) \\
&+ \frac{\lambda_j\triangle t}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_i}^{A_{i+1}} \epsilon^2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right) d\epsilon \\
&= \left(x_j^2+\lambda_j\triangle t\right)\left(\phi\left(A_{i+1}\right)-\phi\left(A_i\right)\right) \\
&+ 2x_j\sqrt{\frac{\lambda_j\triangle t}{2\pi}}\left(\exp\left(-\frac{A_i^2}{2}\right)-\exp\left(-\frac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right) \\
&+ \frac{\lambda_j\triangle t}{\sqrt{2\pi}}\left(A_i\exp\left(-\frac{A_i^2}{2}\right)-A_{i+1}\exp\left(-\frac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathbb{E}_{x_j}\left[\left(x_j^{new}\right)^3 1_{[a_i,a_{i+1})}\right]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_j}\left[\left(x_j^{new}\right)^3 1_{[a_i,a_{i+1})}\right] &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j\triangle t}}\left(x_j^{new}\right)^3 \exp\left(-\frac{\left(x-x_j\right)^2}{2\lambda\triangle t}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A_i}^{A_{i+1}}\left(x_j+\sqrt{\lambda_j\triangle t}\epsilon\right)^3 \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right) d\epsilon \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A_i}^{A_{i+1}}\left(x_j^3+3x_j^2\sqrt{\lambda_j\triangle t}\epsilon\right. \\
&+ \left. 3x_j\lambda_j\triangle t\epsilon^2+\left(\lambda_j\triangle t\right)^{\frac{3}{2}}\epsilon^3\right)\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right) d\epsilon \\
&= \left(x_j^3+3x_j\lambda_j\triangle t\right)\left(\phi\left(A_{i+1}\right)-\phi\left(A_i\right)\right) \\
&+ \sqrt{\frac{\lambda_j\triangle t}{2\pi}}\left(3x_j^2+2\lambda_j\triangle t\right)\left(\exp\left(-\frac{A_i^2}{2}\right)-\exp\left(-\frac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right) \\
&+ \frac{3x_j\lambda_j\triangle t}{\sqrt{2\pi}}\left(A_i\exp\left(-\frac{A_i^2}{2}\right)-A_{i+1}\exp\left(-\frac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right) \\
&+ \lambda_j\triangle t\sqrt{\frac{\lambda_j\triangle t}{2\pi}}\left(A_i^2\exp\left(-\frac{A_i^2}{2}\right)-A_{i+1}^2\exp\left(-\frac{A_{i+1}^2}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$