

HEC MONTRÉAL

Extraction systématique de l'information contenue dans la structure à terme du VIX dans le cadre d'une stratégie d'allocations d'actifs dynamique.

Par

Laurent Boukobza

Sciences de la gestion

Ingénierie Financière

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du grade de maîtrise ès sciences en gestion  
(M.Sc.)

Sous la direction de

**Nicolas A. Papageorgiou, Ph.D.**

Février 2016

©Laurent Boukobza, 2016



## Remerciements

En premier lieu je tiens à remercier mon directeur de recherche Nicolas Papageorgiou pour le soutien et la pédagogie dont il a fait preuve tout au long de ce travail. Sa vision pratique et sa connaissance de notre domaine m'ont encouragé à appliquer une démarche rigoureuse et scientifique dans le cadre d'une recherche plus empirique que théorique. Ce processus m'a été utile dans la transition entre l'enseignement reçu à HEC Montréal et le monde du travail.

Laure a été d'un soutien indéfectible. Ses conseils et son point de vue extérieur m'ont aidé à prendre du recul sur ce travail, à clarifier mon texte et mes idées. Je la remercie énormément et m'estime très chanceux de l'avoir à mes côtés.

Finalement les gens avec qui j'ai étudié et qui sont devenus mes amis. L'esprit d'entraide, et de travail avec des collègues a créé des liens solides et de bons souvenirs sans lesquels ma formation n'aurait pas été aussi complète.

Je me dois également de souligner la persévérance de mes parents qui ont incessamment posé la même question "...Et ton mémoire ?" – Je suis heureux à l'issue de cette étape de ne plus entendre cette question.

# Sommaire

Le but de ce mémoire est d'établir que l'analyse du VIX, de sa structure à terme ainsi que l'évolution de cette dernière renferme de l'information qui peut être extraite de manière systématique et utilisée dans une stratégie d'allocation dynamique d'actifs pour améliorer la performance et diminuer le risque d'un portefeuille.

Pour arriver à cela nous avons créé un processus basé sur la reconnaissance du niveau de *stress* dans le marché suite à l'analyse de la forme et l'évolution de la structure à terme du VIX. L'indicateur que nous avons développé renvoie un signal qui par extension, sera appliqué à l'allocation des actifs dans un portefeuille. Les actifs sont stratégiquement réalloués en fonction du signal renvoyé.

Sur la période allant de 2005 à 2014 inclusivement, le portefeuille affiche un rendement annualisé de 86% supérieur à celui de l'indice d'actions S&P500 avec une volatilité des rendements journaliers réduite de plus de 40% et un événement de chute maximale (*Maximum Drawdown*) de 70% inférieur à celui observé pour le S&P500.

# Table des matières

<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>I</b>
<b>SOMMAIRE</b>	<b>II</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>III</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b>	<b>V</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	<b>VI</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>1 REVUE DE LITTÉRATURE</b>	<b>7</b>
1.1 LA DISTANCE MULTIDIMENSIONNELLE.....	8
1.2 LES INDICATEURS BASÉS SUR LA MESURE DE DISTANCE.....	9
1.3 L'INFORMATION CONTENUE DANS LA STRUCTURE À TERME DU VIX.....	11
1.4 L'ACCROISSEMENT DE LA PRISE EN COMPTE DU STRESS DE MARCHÉ.....	13
<b>2 LE VIX ET LA STRUCTURE DU TERME DU VIX</b>	<b>16</b>
2.1 PRÉSENTATION DU VIX.....	16
2.2 PRÉSENTATION DES CONTRATS À TERME SUR LE VIX.....	20
2.3 CONSTRUCTION DE LA STRUCTURE À TERME DU VIX.....	22
2.4 MISE EN CORRESPONDANCE DES CHANGEMENTS DE LA STRUCTURE À TERME DE LA VOLATILITÉ AVEC LES CHANGEMENTS OBSERVÉS DANS LE MARCHÉ.....	26
<b>3 CRÉATION D'UN INDICATEUR DE STRESS DE MARCHÉ</b>	<b>28</b>
3.1 MISE EN CONTEXTE ET ANALYSE DU RAISONNEMENT SOUS-JACENT.....	28
3.2 FONCTIONNEMENT ET UTILISATION DE L'INDICATEUR.....	30
3.3 CONSTRUCTION DE L'INDICATEUR.....	32
3.4 LES DIFFÉRENTES CONFIGURATIONS DÉFINIES.....	34
3.5 L'INDICATEUR DE STRESS QUE NOUS AVONS DÉVELOPPÉ.....	39
3.6 LES INDICATEURS EXISTANTS.....	40
<b>4 PRÉSENTATION DES DONNÉES</b>	<b>44</b>
4.1 PRÉSENTATION DES DONNÉES.....	44
4.2 LES INDICATEURS EXISTANTS.....	48
<b>5 RÉSULTATS</b>	<b>50</b>
5.1 TRANSACTIONS : RÈGLES ET EXPOSITION DU PORTEFEUILLE.....	53
5.2 TESTS DE ROBUSTESSE SUR LA PERFORMANCE EN MODIFIANT PLUSIEURS PARAMÈTRES DE L'INDICATEUR ...	54

5.2.1 TEST 1 : MODIFICATION : 1 <sup>ERE</sup> COMPOSANTE DE LA FORMULE EST NEUTRALISEE.....	56
5.2.2 TEST 2 : MODIFICATION : 2 <sup>EME</sup> COMPOSANTE DE LA FORMULE NEUTRALISEE.....	57
5.2.3 TEST 3 : MODIFICATION : 1 <sup>ERE</sup> ET 2 <sup>EME</sup> COMPOSANTES DE LA FORMULE NEUTRALISEES .....	60
5.2.4 TEST 4 : MODIFICATION : 2 <sup>EME</sup> COMPOSANTE – LT 1 AN DEVIENT LT 6 MOIS ET CT RESTE 2 SEMAINES .....	62
5.2.5 TEST 5 : MODIFICATION : 2 <sup>EME</sup> PARTIE – LT 1 AN DEVIENT LT 6 MOIS ET CT 2 SEMAINES DEVIENT 1 SEMAINE .....	64
5.2.6 TEST 6 : MODIFICATION APORTEES – 3 <sup>EME</sup> PARTIE – 2 <sup>EME</sup> DECILE AU LIEU DE 1 <sup>ER</sup> DECILE .....	66
5.2.7 TEST 7 : MODIFICATION APORTEES – 3 <sup>EME</sup> PARTIE – 1 <sup>ER</sup> DECILE SUR 5 MOIS AU LIEU DE 6 MOIS.....	68
5.2.8 TEST 8 : COMPARAISON ENTRE LA STRATÉGIE D’ALLOCATION D’ACTIFS ET LE RATIO D’ABSORPTION.....	70
5.3 TESTS STATISTIQUES .....	74
<b>CONCLUSION</b>	<b>83</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>85</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>93</b>

## Liste des Figures

Figure 2-1 Comparaison entre l'ancienne et la nouvelle méthode de calcul du VIX.....	19
Figure 2-2 Augmentation du nombre de 'positions ouvertes' sur le VIX depuis 2004.....	21
Figure 2-3 Structure à terme du VIX en janvier 2013 .....	22
Figure 2-4 Structure à terme du VIX en janvier 2009 .....	23
Figure 2-5 Structure à terme du VIX en janvier 2007 .....	24
Figure 2-6 Impact d'un choc de volatilité sur les contrats à terme en fonction de leur échéance .....	25
Figure 3-1 Distribution de la Partie 1 .....	32
Figure 3-2 Distribution de la Partie 2 .....	33
Figure 3-3 Distribution de la Partie 3 .....	37
Figure 3-4 Arbre de décision en fonction de la forme initiale de la structure à terme et son évolution .....	38
Figure 3-5 Distribution du Delta non-contraint .....	39
Figure 3-6 Distribution de l'exposition (Delta contraint à 1) .....	39
Figure 3-7 Comparaison des rendements entre l'intégralité de la distribution et les 10% les plus turbulents .....	41
Figure 4-1 L'indice Obligataire 10 ans de Barclays de Juin 2004 à Décembre 2014.....	45
Figure 4-2 Le S&P 500 de Juin 2004 à Décembre 2014 .....	46
Figure 4-3 le VIX de Juin 2004 à Décembre 2014 .....	46
Figure 4-4 Rendements des actions et des obligations de Juin 2004 à Décembre 2014 vis-à-vis le VIX .....	47
Figure 4-5 Contrats à terme sur le VIX de maturité 1 à 6 mois vis-à-vis leur sous-jacent de Juin 2004 à Décembre 2014.....	48
Figure 4-6 Distribution de l'indice de turbulence de Juin 2004 à Juillet 2011.....	49
Figure 4-7 Distribution du <i>ratio d'absorption</i> de Juin 2004 à Avril 2013.....	49
Figure 5-1 Performance de la Stratégie d'allocation dynamique d'actifs .....	50
Figure 5-2 Exposition (limitée à 1) du portefeuille à l'indice d'actions. ....	54
Figure 5-3 Test de Robustesse 1 .....	56
Figure 5-4 Test de Robustesse 2 .....	58
Figure 5-5 Test de Robustesse 3 .....	60
Figure 5-6 Test de Robustesse 4 .....	62
Figure 5-7 Test de Robustesse 5 .....	64
Figure 5-8 Test de Robustesse 6 .....	66
Figure 5-9 Test de Robustesse 7 .....	68
Figure 5-10 Performance comparée au <i>ratio d'absorption</i> .....	70
Figure 7-1 Indicateurs existants optimisés sur 26 semaines .....	87
Figure 7-2 Comparaison de L'Indicateur avec le <i>ratio d'absorption</i> optimisé sur 26 semaines .....	88
Figure 7-3 Indicateurs existants optimisés sur 38 semaines .....	89
Figure 7-4 Comparaison de L'Indicateur avec le <i>ratio d'absorption</i> optimisé sur 38 semaines .....	90
Figure 7-5 Indicateurs existants optimisés sur 52 semaines .....	91
Figure 7-6 Comparaison de L'Indicateur avec le <i>ratio d'absorption</i> optimisé sur 52 semaines .....	92

## Liste des Tableaux

Tableau 2-1 impact d'un choc de volatilité sur les contrats à terme en fonction de leur échéance ..	24
Tableau 2-2 Corrélations entre les rendements journaliers du SP500 et ceux du VIX .....	26
Tableau 3-1 Règles de décision basées sur l'indice de risque systémique .....	43
Tableau 5-1 Statistiques descriptives du portefeuille d'allocation dynamique d'actifs .....	51
Tableau 5-2 Comparaison de la performance aux indices de référence .....	52
Tableau 5-3 Nombre et amplitude des transactions dans l'allocation dynamique d'actifs .....	53
Tableau 5-4 Mesures de performance du premier test de robustesse .....	56
Tableau 5-5 Mesures de performance du deuxième test de robustesse .....	58
Tableau 5-6 Mesures de performance du troisième test de robustesse .....	60
Tableau 5-7 Mesures de performance du quatrième test de robustesse .....	62
Tableau 5-8 Mesures de performance du cinquième test de robustesse .....	64
Tableau 5-9 Mesures de performance du sixième test de robustesse .....	66
Tableau 5-10 Mesures de performance du septième test de robustesse .....	68
Tableau 5-11 Mesures de performance de la stratégie d'allocation d'actifs vs. le <i>ratio d'absorption</i>	70
Tableau 5-12: T-test unilatéral droit .....	79
Tableau 5-13: F-test .....	79
Tableau 5-14: White Reality Check .....	79

# Introduction.

Depuis la crise financière de 2008 le risque de marché est suivi de très près. Les acteurs de marché qui choisissent encore de privilégier les stratégies d'investissement à rendement absolu sont de plus en plus rares. En effet les gestionnaires ne peuvent plus se permettre de faire abstraction de la tolérance au risque de leurs clients puisqu'ils sont soumis à une régulation de plus en plus stricte notamment en termes de connaissance du client et d'appréciation de la convenance des produits et stratégies utilisées. Nous discuterons plus loin des nouvelles régulations apparues telles que le *Dodd Frank Act*, et les accords de Bâle III encadrant les activités propres des institutions financières ainsi que leur solidité. Ces régulations ont pour but de mieux protéger les investisseurs et le public face au risque opérationnel qu'ils encourent en confiant la gestion de leurs actifs à une tierce partie.

Il existe de multiples définitions et formes de risque qui ne font pas l'objet de ce travail. Nous nous concentrons sur le risque de marché et la propagation d'un choc à l'ensemble du système que Plihon (2006) définit comme «un mécanisme qui propage d'un marché à l'autre les déséquilibres apparus sur l'un d'entre eux (...) et explique la contagion d'un marché à l'autre qui se superpose à la contagion internationale».

Edwards (1999) se penche sur les fonds de couverture et analyse particulièrement le défaut de Long-Term Capital Management (LTCM) suite au défaut de la Russie et l'intervention de la Réserve Fédérale américaine pour éviter un effet d'entraînement à l'ensemble de l'économie américaine et ultimement à l'intégralité du monde financier. Selon les publications du Fonds Monétaire International (FMI)<sup>1</sup>, au moment de la chute de LTCM la corrélation entre les rendements des marchés d'équités du Brésil, Argentine, Mexique et Chili est passée de 40% en moyenne à plus de 80%, symptôme certain d'une propagation du choc initial à l'ensemble des autres marchés.

Forbes et Rigobon (2001) analysent les phénomènes de propagation et définissent la contagion comme «une augmentation significative dans les liens entre les marchés après un choc sur un marché unique».

---

<sup>1</sup>“Early Warning System Models: The next step forward” – IMF Publication:  
<https://www.imf.org/External/Pubs/FT/GFSR/2002/01/pdf/chp4and5.pdf>

À l'échelle globale, la gestion du risque est donc devenue un enjeu majeur pour les organismes publics soucieux de la stabilité globale de l'économie. Ces derniers surveillent particulièrement la vélocité et la magnitude de la propagation des chocs à l'ensemble de l'économie. En effet, la marge de manœuvre des institutions financières quant à la nature et le type d'investissements, de placements et d'émissions que ces dernières peuvent effectuer a été grandement réduite. Par exemple, le *Dodd-Frank Act* contient une règle ayant pour objet de limiter la capacité des banques américaines à faire certains types d'investissements spéculatifs qui ne servent pas les intérêts de leurs clients (communément appelée la *Volcker Rule*, du nom de Paul Volcker, l'ancien président de la réserve fédérale des États-Unis l'ayant proposée). À l'international, le comité de Bâle a publié les accords de Bâle III qui imposent aux institutions financières pouvant présenter un risque systémique de se soumettre à des *stress tests* afin de démontrer qu'elles ont la capacité financière de faire face à des conditions économiques difficiles sans avoir à faire appel à de l'argent public pour assurer leur survie (les *bail-out* dont il a beaucoup été question). En outre, les normes de fonds propres applicables aux institutions financières ont fait l'objet d'une refonte majeure : de nouveaux outils, tels que les fonds propres d'urgence en cas de non-viabilité (ou *Non Viability Contingent Capital, NVCC*) et la dette dite *Bail-in* (qui n'est pas encore en vigueur au Canada) permettent la conversion d'instruments de fonds propres ou d'autres instruments de dette en actions ordinaires en cas de non-viabilité de l'émetteur. Le détail de ces mécanismes est accessible publiquement sur le site Bureau du Surintendant des Institutions Financières et constitue une lecture indispensable à la compréhension des marchés en 2016.

La crise financière de 2008 a été un douloureux rappel que la stabilité des marchés financiers a des implications plus larges que la sauvegarde de l'argent des investisseurs, allant jusqu'à la remise en cause du fonctionnement de notre système économique au complet. Le FMI aborde donc le sujet de la mesure du risque systémique comme outil de réponse à la crise financière de 2008<sup>2</sup> et comme indicateur avancé de chocs de marché. Le FMI utilise dans le cadre des prêts accordés plusieurs indicateurs de vulnérabilité ayant pour point de départ la propagation des difficultés dans un secteur de l'économie aux autres en conjonction avec les systèmes d'alerte précoce (SAP)<sup>3</sup>: «Les SAP sont utilisés par les organismes financiers

---

<sup>2</sup> Global Financial Stability Report – April 2009 <http://www.imf.org/external/pubs/ft/gfsr/2009/01/pdf/text.pdf>

<sup>3</sup> "Indicateurs de vulnérabilité" IMF, Fiche technique Avril 2003  
<https://www.imf.org/external/np/exr/facts/fre/vulf.htm>

internationaux, les banques centrales et les analystes du secteur privé pour leur permettre d'estimer les probabilités de crises financières»<sup>4</sup>. Comme le soulignent Kritzman et al. (2010) «Nous ne devrions pas anticiper que plus de risque systémique va nécessairement engendrer une dégradation ou de la turbulence financière. C'est simplement une indication de la fragilité du marché dans le sens où un choc est plus à même de se propager rapidement et plus amplement quand les sources de risque sont étroitement imbriquées».

Le même changement d'approche est intervenu à l'échelle des organismes privés dans le marché : la gestion de portefeuille moderne a évolué afin de gérer le risque de marché tout en sacrifiant le moins possible de rendement. Dès lors, les mesures de risque ont pris une place prépondérante dans l'analyse de portefeuille et la majorité des institutions offrent maintenant des solutions construites autour de cibles de risque plutôt que de rendement.

La banque JP Morgan avec son indice Efficiente™ est un exemple concret de cette réalité avec une solution qui offre une réallocation mensuelle stratégique des actifs en fonction de la combinaison d'actifs ayant offert le meilleur rendement sur les 6 mois précédents avec une contrainte de volatilité réalisée à 5%. Il est intéressant de constater qu'une des hypothèses sous-jacentes à ce modèle est la corrélation négative entre rendements et volatilité, propriété que nous exploiterons largement tout au long de ce travail. En 2014 JP Morgan était le numéro un aux États-Unis en termes de volume d'émission de produits structurés avec approximativement 7 milliards de dollars investis dans des solutions ayant cet indice comme sous-jacent.

Notre recherche s'intègre dans ce courant en essayant non pas de surperformer le marché en terme absolu mais relativement au risque. En effet, les hypothèses sous-jacentes à la construction de notre stratégie et les règles de décision qui y sont associées entraînent naturellement une sous performance de notre indicateur lorsque le marché des actions présente une faible volatilité et des rendements associés élevés. Si les marchés présentaient constamment un tel profil, notre travail n'aurait aucune raison d'être – de même que les mesures de risque en général. Malheureusement pour les investisseurs, les marchés n'affichent pas toujours des rendements positifs et le risque associé n'est pas négligeable. Nous insisterons donc sur ce point tout au long de notre travail : L'indicateur n'est pas modélisé de manière à battre le marché des actions, ici le S&P500, lorsque ce dernier affiche

---

<sup>4</sup> "Early Warning System Models: The next step forward" – IMF Publication: <https://www.imf.org/External/Pubs/FT/GFSR/2002/01/pdf/chp4and5.pdf>

32.39% de rendement en 2013, mais plutôt afin de minimiser l'impact d'une année comme 2008 durant laquelle l'indice a perdu 37% de sa valeur.

Nous utilisons l'information contenue dans les contrats à terme sur le VIX afin de réduire l'impact que les chocs adverses sur le marché des actions ont sur un portefeuille virtuel exposé au marché des actions et des titres à revenu fixe. Le raisonnement se décompose en deux temps : premièrement nous extrayons l'information sur le comportement futur du VIX contenue dans sa structure à terme. Dans un deuxième temps nous utilisons la relation existante entre le VIX (construit à partir des options sur les actions du S&P500) et le marché des actions pour anticiper les mouvements futurs de ce dernier à partir de l'information extraite de la structure à terme du VIX.

Pour construire notre indicateur nous sommes partis des SAP (discutés ci-dessus) pour ensuite analyser la structure des indicateurs de stress de marché développés par les banques ou firmes de recherche privées. Tous ces travaux cherchent à atteindre le même *Graal* : la capacité à prévoir un choc de marché futur à partir des données disponibles aujourd'hui. Nous avons choisi de ne pas développer ou présenter les travaux tels que ceux du FMI ou de certaines banques centrales qui font entrer dans la construction de leur indicateur plusieurs dizaines de variables, principalement car ces indicateurs ne sont pas répliquables sans accès à des données propres à ces organismes. De plus ces indicateurs théoriques sont problématiques quant à l'analyse des résultats et les implications sur un portefeuille d'un indicateur ayant des dizaines de composantes.

Nous avons également pris en compte plusieurs indicateurs développés dans une optique de gestion de portefeuille par les départements de gestion du risque de banques privées. La construction et les résultats des quatre indicateurs suivants ont retenu notre attention mais nous avons rencontré les mêmes difficultés quant à leur réplification sans l'accès à des données propres à chacune de ces firmes: Le *Global Risk Demand Index* développé par Morgan Stanley, le *Macro Risk Index* de CitiGroup, le *Absorption Ratio* de State Street et le *Turbulence Index* de Windham Capital. Nous avons également brièvement comparé notre indicateur au *ratio d'absorption* développé par Kritzman (2011) car ce dernier a développé cet indicateur sur la base de la distance multivariée des observations par rapport à la série à laquelle elles appartiennent. Dans le cadre de ce travail nous avons eu accès avec autorisation aux données de cet indicateur de la part de State Street jusqu'en 2013. L'indicateur ici développé se base également sur une mesure de distance : la volatilité. Au chapitre 3, nous

présentons également les conclusions de Kritzman (2011) quant à la persistance dans le temps d'évènements extrêmes.

De toutes ces informations nous avons créé un outil simple à comprendre, répliquable avec des données publiques dans l'optique de valider empiriquement notre hypothèse de départ : l'information contenue dans la structure à terme du VIX apporte des renseignements sur le comportement futur des actions de l'indice d'actions S&P500. Comme nous le verrons dans le chapitre 5 il est possible d'imaginer une infinité de variantes de l'indicateur qui amélioreraient telle ou telle mesure de performance du portefeuille tout en conservant la même idée fondamentale sous-jacente.

Le chapitre 1 expose les résultats de Carr et Wu (2006) qui valident théoriquement l'hypothèse que de l'information pertinente sur le comportement futur de la volatilité peut être extraite de sa structure à terme sous la mesure risque-neutre.

Le chapitre 2 détaille la construction du VIX, la construction de sa structure à terme et met en évidence la corrélation historique négative entre les rendements journaliers de l'indice S&P500 et ceux du VIX. De l'information pertinente quant aux comportements futurs du S&P500 peut être extraite de la structure à terme du VIX, et plus particulièrement de l'évolution de la forme de cette structure à terme.

Le chapitre 3 détaille le développement de l'indicateur et chaque composante est analysée de manière indépendante aux autres. L'indicateur renvoie un signal en fonction du *stress* mesuré dans le marché des actions tel qu'interprété par l'évolution de la structure à terme du VIX. Ce signal, que nous appelons *Delta*, s'interprète comme l'allocation suggérée de notre portefeuille virtuel au marché des actions représentant l'actif risqué. Si l'allocation suggérée dans les actions est inférieure à 1 alors le reste du portefeuille (*1-Delta*) est exposé à l'indice obligataire (Barclays Obligations Américaines à échéance 7-10 ans) représentant l'actif sans risque.

Le chapitre 4 est descriptif et présente les données utilisées pour construire l'indicateur ainsi que le portefeuille théorique que nous utilisons.

Le chapitre 5 expose les résultats : les rendements, les rendements ajustés pour le risque ainsi que l'évènement de chute maximale (*Maximum Drawdown*) enregistrés sur la période considérée. Nous comparons les performances du portefeuille virtuel à celles de l'indice

obligataire, du S&P500, ainsi qu'un portefeuille passif rebalancé quotidiennement de manière à être investi à 60% dans les actions et à 40% dans les obligations. Dans cette section nous effectuerons également des tests de robustesse sur les différentes composantes de l'indicateur afin d'explorer l'impact d'un changement sur son efficacité. Nous testons également la significativité statistique des résultats obtenus par rapport aux indices d'équités et d'obligations via différents tests statistiques dont le *White Reality Check* présenté par White (2000) qui utilise la méthode de ré-échantillonnage stationnaire introduite par Politis et Romano (1994).

Le chapitre 5 reprend les principaux résultats Snedecor et Cochran (1989) pour le *T-test*, ceux de Politis et Romano (1994) pour le *bootstrap* stationnaire, et les annexes présentent les tests de notre indicateur face aux indicateurs sur lesquels nous ne nous sommes pas attardés.

# Chapitre 1

## Revue de Littérature

Dans cette partie nous exposons les différents éléments qui permettent de structurer le raisonnement à la base de ce travail. La notion de distance d'une observation par rapport à la série à laquelle elle appartient n'est pas nouvelle et Mahalanobis (1936) a appliqué ce concept à la mesure des dimensions des crânes humains. L'utilisation de la mesure de distance développée par ce dernier s'est faite principalement en statistique appliquée et l'application au monde financier n'est venue que bien plus tard. Stöckl et Hanke (2014) abordent les nombreux défis associés à la gestion de risque financier et qui proviennent de variables aléatoires multivariées. Ces derniers mettent en évidence l'utilité de la mesure de distance multivariée dans «l'analyse et les prévisions de réalisation similaires de ces variables aléatoires». Kritzman et Li (2010) utilisent aussi la mesure de Mahalanobis pour qualifier ce qu'ils appellent la turbulence financière et qu'ils définissent comme «une occurrence inhabituelle multivariée dans les marchés financiers».

La mesure de distance utilisée dans ce travail pour la construction de notre indicateur est la volatilité. À toute fin pratique nous utilisons le VIX, représentant la volatilité implicite 30 jours sur les S&P500, la structure à terme de cette mesure, et accordons une importance particulière à l'évolution de sa forme et l'information qu'elle contient. Les résultats de Carr et Wu (2006) donnent une base théorique à la démonstration empirique qui est effectuée.

Finalement la prévalence des indicateurs de stress et leur importance grandissante dans les marchés financiers sont mises en lumière. Anne D'Hancock (2012) analyse également ce phénomène et constate que la majeure partie des travaux effectués sur le pouvoir prédictif de l'information incluse dans la structure à terme du VIX en relation avec le comportement futur des marchés provient d'entités privées dans le but d'être offerts à leurs clients comme un outil de gestion du risque.

## 1.1 La distance multidimensionnelle

Kritzman et Al. (2010) concentrent leurs efforts pour faire avancer les recherches sur ce qu'ils définissent comme le risque systémique pour l'école de gestion du MIT, la *Sloan School of Management*. La mesure du risque systémique implicite appelée le *ratio d'absorption* correspond à la fraction de la variance totale d'un actif qui est expliquée, absorbée, par un nombre fixe de vecteurs propres lors d'une l'analyse en composante principale. La question de la corrélation entre les classes d'actifs et donc la contagion d'un choc adverse sur une partie de l'économie à son ensemble a fait l'objet de nombreux travaux dans lesquels l'analyse en composante principale a été utilisée. Forbes et Rigobon (2001) mettent en lumière le même phénomène : en période de chute des marchés la corrélation entre les différentes classes d'actifs augmente et l'effet de la diversification diminue.

Les phénomènes de propagation sont cependant asymétriques et se font ressentir principalement en période de déclin: Cappiello et al. (2006), Hong et al. (2007) mettent l'emphase sur l'asymétrie de l'amplitude de l'impact d'un choc négatif sur l'augmentation de la corrélation entre les classes d'actifs et leur performance en opposition aux chocs positifs.

La version de la recherche de Kritzman et al. (2010) publiée en 2011 dans *The Journal of Portfolio Management* vient combler la mesure mathématique de la turbulence financière introduite par Chow et al. (1999). Les résultats associés présentent une certaine façon de mesurer la turbulence dans les marchés financiers qui prend ses origines dans la mesure de Mahalanobis (1927,1936). Ce dernier a introduit une mesure multidimensionnelle qui prend en compte la corrélation et la covariance d'une donnée avec la série à laquelle elle appartient dans le calcul de sa distance à la moyenne. La distance de Mahalanobis est définie telle que : «la distance multidimensionnelle, mesurée en écart-type, d'une donnée par rapport à la moyenne de la série à laquelle elle appartient et s'exprime comme suit :

$$D_M(x) = \sqrt{(x - \mu)^T S^{-1} (x - \mu)} \quad (1.1)$$

Où  $x$  est une observation d'un groupe d'observations dont la moyenne est  $\mu$  et  $S$  la matrice de covariance. La distance de Mahalanobis est en ce sens différente des tests simples de

distance univariée qui échoueraient à identifier des observations qui n'obéissent pas à la distribution de la série considérée».

## 1.2 Les indicateurs basés sur la mesure de distance

Kritzman et Li (2010) partent de cette mesure et introduisent le *ratio d'absorption* qui donnera naissance au *Windham Systemic Risk Index* développé par Kritzman chez Windham Capital Management en 2010.

Le *ratio d'absorption* est défini comme mesurant la proportion de la variance totale des rendements d'un actif absorbée par un nombre fixe de vecteurs propres.

Pour ce faire, il faut considérer la matrice de covariance des rendements : le premier vecteur propre est une combinaison linéaire des pondérations des actifs qui explique la plus grande partie de la variance totale de l'actif. Le deuxième vecteur propre doit être orthogonal au premier et est une combinaison linéaire des pondérations des actifs qui explique la plus grande portion de la variance résiduelle de l'actif. Le troisième vecteur propre est lui aussi une combinaison linéaire des pondérations des actifs et orthogonal aux deux premiers vecteurs propres. À son tour il doit expliquer la plus grande partie de la variance résiduelle de l'actif.

Le procédé continue autant de fois que nécessaire pour arriver au nombre de vecteurs propres fixe et prédéterminé pour mesurer le pourcentage de la variance totale absorbée.

Kritzman et Li (2011) ont prouvé que la caractérisation statistique de la turbulence financière coïncide fortement avec des périodes qualifiées de turbulentes sur les marchés financiers durant lesquelles une plus grande partie de la variance est absorbée par le même nombre de vecteurs propres.

$$d_t = (y_t - \mu) \Sigma^{-1} (y_t - \mu)' \quad (1.2)$$

Où :

$d_t$  la distance par rapport à la moyenne multivariée.

$y_t$  les séries de rendements.

$\mu$  le vecteur des moyennes de rendements des séries  $y_t$ .

$\Sigma$  la matrice de variances-covariances des rendements  $y_t$ .

Christoffersen et Diebold (1997) concluent que si la volatilité fluctue de manière prévisible, alors la gestion du risque associé à la détention de portefeuilles non-linéaires peut être améliorée grâce aux prévisions de chocs de volatilité. Cependant Bennett et Gil (2012) mettent en évidence que la prédictibilité de la volatilité diminue fortement à mesure que l'horizon se rallonge et les processus de gestion de risque à plus long terme deviennent moins efficaces.

La modélisation de la volatilité implique de nombreuses hypothèses. Notre démonstration se voulant empirique, nous utilisons le VIX ainsi que la structure à terme de cette mesure dans notre modèle de manière à minimiser les hypothèses nécessaires à la construction de l'indicateur de signal avancé présenté au chapitre 3.

Le VIX est certainement la mesure de volatilité la plus connue et la plus suivie de l'univers financier. Les premiers travaux sur une mesure de volatilité ont été entrepris par Benner et Galai (1989) suite au krach boursier de 1987 et ont abouti à la création du *Sigma Index*. Cet indice a été développé dans le but d'offrir une protection quant à l'exposition des portefeuilles aux marchés des actions. Whaley (1993) part du raisonnement appliqué lors de stratégies de couverture du portefeuille à partir d'options de vente ou d'achat (*Delta Hedging*) et l'applique à la volatilité du portefeuille. Nous détaillerons étape par étape la construction du VIX au chapitre 2.

Le VIX a évolué pour atteindre sa forme finale en 2004. Les ajustements apportés à la manière de définir le VIX par Rattray et Shah (2003) ont intégré les résultats théoriques avancés par Carr et Madan (1998) et Demeterfi et al. (1999). Ces résultats reproduisent la variance réalisée par un portefeuille d'options européennes et ont abouti à la création du VIX et des contrats à terme tel que nous les connaissons. Nous présentons ci-dessous les résultats de Carr et Wu (2006) en ce qui concerne la détermination des prix des contrats à terme sur le VIX suite à l'analyse comparative de l'ancienne et la nouvelle version du VIX. Le *Chicago Board of Options Exchange* (CBOE) rend disponible les données sur le VIX ainsi que les données sur les contrats à terme du VIX. Il est à noter que les contrats à terme sur le VIX sont calculés à partir de prix théoriques et ajustés selon un certain facteur qui «reflète la concavité de la fonction racine carrée utilisée pour extraire la volatilité de la variance»<sup>5</sup>. Cette méthode de

---

<sup>5</sup> <http://cfe.cboe.com/education/vixprimer/features.aspx>

calcul et d'ajustement vient du fait qu'il n'y a pas de coût de portage associé à une position dans un contrat à terme sur le VIX permettant de déduire la juste valeur du contrat. Cette relation est normalement présente dans les contrats à terme sur d'autres actifs.

La structure à terme du VIX n'est disponible qu'à partir de 2004 lorsque les contrats à terme sur le VIX sont mis en marché. L'analyse de l'information contenue dans la forme de la structure à terme et plus précisément de l'évolution de la forme de cette dernière est la pierre angulaire de notre travail : La structure à terme du VIX renferme-t-elle de l'information qui permet de détecter des indices ou des signaux avancés de prédisposition des marchés à une propagation systémique de chocs ?

### 1.3 L'information contenue dans la structure à terme du VIX

Heynen et al. (1994) passent en revue plusieurs modèles pour expliquer la relation entre la volatilité à court terme et celle à long terme. Ils concluent alors que le *EGARCH(1,1)* offre les meilleurs résultats. Ci-dessous, nous présentons ici les résultats tirés de Carr et Wu (2006) qui se penchent sur la détermination des prix des contrats à terme du VIX sous la mesure risque-neutre à partir des options sur le S&P500. *A Tale of Two Indices* est consacré à la comparaison approfondie entre la nouvelle et l'ancienne méthode de calcul du VIX et fait référence en la matière. Les résultats présentés ci-dessous sont tirés de cet article et nous reproduisons ici seulement la partie de leur travail qui traite de notre hypothèse de départ quant à l'information contenue dans la structure à terme du VIX.

Carr et Wu (2006) démontrent que sous l'hypothèse de non-arbitrage et maintien de marché continu, les prix des contrats à terme sur le VIX,  $F_t^{VIX}$  sont une martingale sous la mesure risque-neutre Q :

$$F_t^{VIX} = E_t^Q [F_{T_1}^{VIX}] = E_t^Q [VIX_{T_1}] \quad (1.3)$$

Les limites d'évaluation des contrats à terme sur le VIX qui sont observables à partir des options sur le S&P 500 sous-jacent sont obtenues à partir deux hypothèses simplificatrices :

- Le VIX est calculé à partir d'une série d'options dont l'échéance est  $T_2 > T_1$  et  $T_2 - T_1 = 30/365$  au lieu de deux séries d'options – et sur un continuum de prix d'options plutôt que sur un nombre discret de prix d'options.
- Le S&P 500 a une dynamique continue et les taux d'intérêt sont déterministes.

La première hypothèse implique que le VIX est donné par :

$$VIX_{T_1} = \sqrt{\frac{2}{(T_2 - T_1)B_{T_1}(T_2)}} \int_0^\infty \frac{O_{T_1}(K, T_2)}{K^2} dK \quad (1.4)$$

Où  $B_{T_1}(T_2)$  donne la valeur temps  $T_1$  d'un zéro coupon arrivant à échéance en  $T_2$ .

La deuxième hypothèse implique que l'égalité entre le VIX au carré et la valeur espérée de la variance sous la mesure risque-neutre est exacte.

$$VIX_{T_1} = \sqrt{E_{T_1}^Q RV_{T_1, T_2}} \quad (1.5)$$

En substituant l'équation (1.3) dans l'équation (1.5) nous avons les contrats à terme sur le VIX tels que :

$$F_t^{VIX} = E_t^Q \sqrt{E_{T_1}^Q RV_{T_1, T_2}}, \quad t \leq T_1 < T_2 \quad (1.6)$$

Ensuite, la concavité de la racine carrée et l'inégalité de Jensen génèrent les frontières inférieures et supérieures pour les contrats à terme sur le VIX.

$$E_t^Q \sqrt{RV_{T_1, T_2}} \leq F_t^{VIX} < \sqrt{E_{T_1}^Q RV_{T_1, T_2}} \quad (1.7)$$

La frontière inférieure est le taux futur du swap de volatilité  $L_t \equiv E_t^Q \sqrt{RV_{T_1, T_2}}$  qui peut être approximé par une option au prix d'exercice (*at the money*) dans le futur. Pour la preuve de cette démonstration se référer à Carr et Wu (2006) Annexe A.

La frontière supérieure est le taux swap futur de la variance - en points de pourcentage de volatilité tel que  $U_t \equiv \sqrt{E_{T_1}^Q RV_{T_1, T_2}}$  peut être déterminé à partir des prix sur un continuum d'options aux deux maturités  $T_1$  et  $T_2$ .

$$\begin{aligned}
U_t^2 &= E_{T_1}^Q RV_{T_1, T_2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \left[ E_t^Q(T_2 - t)RV_{t, T_2} - E_t^Q(T_1 - t)V_{t, T_1} \right] \\
&= \frac{2}{(T_2 - T_1)} \int_0^\infty \left[ \frac{O_t(K, T_2)}{B_t(T_2)} - \frac{O_t(K, T_1)}{B_t(T_1)} \right] \frac{dK}{K^2} \quad (1.8)
\end{aligned}$$

L'ampleur des frontières est déterminée par la variance sous la mesure risque neutre de la volatilité future réalisée :

$$U_t^2 - L_t^2 = E_t^Q(RV_{T_1, T_2}) - \left( E_t^Q \sqrt{RV_{T_1, T_2}} \right)^2 = VAR_t^Q \left( \sqrt{RV_{T_1, T_2}} \right) \quad (1.9)$$

Lorsque le prix au marché des contrats à terme sur le VIX est disponible nous pouvons le combiner avec les taux swap futurs de variance pour déterminer la variance sous la mesure risque neutre du VIX dans le futur :

$$\begin{aligned}
VAR_t^Q(VIX_{T_1}) &= VAR_t^Q \left( \sqrt{E_{T_1}^Q [RV_{T_1, T_2}]} \right) \\
&= E_t^Q [RV_{T_1, T_2}] - \left( E_t^Q \sqrt{E_{T_1}^Q [RV_{T_1, T_2}]} \right)^2 = U_t^2 - (F_t^{VIX})^2 \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Des travaux de Carr et Wu (2006) nous obtenons donc que les contrats à terme sur le VIX offrent de l'information économiquement pertinente à propos des niveaux futurs du VIX mais également à propos de la variance sous la mesure risque-neutre du VIX futur. Cette information peut être alors utilisée pour établir la valeur des options sur le VIX.

Le résultat que nous voulons souligner est la validation théorique de notre raisonnement : les contrats à terme sur le VIX donnent de l'information pertinente sur les niveaux futurs du VIX.

#### 1.4 L'accroissement de la prise en compte du stress de marché

Une étude non-exhaustive des différents indicateurs de marché développés aussi bien par les organismes publics que privés permet de mieux réaliser l'étendue et l'importance que les indicateurs et les mesures de stress de marché ont dans la pratique financière et économique actuelles. Ces différents outils tiennent de nos jours une place de choix dans les modèles de

risque, les stratégies d'allocations d'actifs et les mécanismes de surveillance des marchés financiers. Rose et Spiegel (2009) passent en revue plusieurs indicateurs, certains plus théoriques et d'autres plus pratiques. Tous cherchent un même résultat : anticiper, ou au moins réagir rapidement, à un choc de marché qui se propagerait à l'ensemble du système. Dans la même recherche, les auteurs mettent en lumière qu'aucun des différents facteurs, sauf le niveau d'augmentation des marchés pré-crise, n'est capable de prédire l'ampleur de la correction suivant un choc.

Historiquement une mesure largement suivie (et souvent incorporée dans la construction de nouveaux indicateurs de stress de marché) était l'amplitude des écarts de taux d'intérêts entre les différents risques de crédit (*credit spread*). La récente crise financière a montré que cette mesure ne reflète pas de manière fidèle le stress ressenti dans le marché pouvant provenir de causes extérieures au crédit. La Réserve Fédérale américaine de St. Louis ainsi que celle de Cleveland ont développé leurs propres indicateurs de stress de marché : le *St. Louis Financial Stress Index* construit à partir d'une analyse en composante principale. Oet et al. (2008) ont développé le *Cleveland Financial Stress Index*.

Schwert (2011) étudie la volatilité enregistrée sur les marchés lors d'évènements majeurs. L'auteur met en relation les niveaux de volatilité observés avec le taux de chômage et l'économie réelle. Une des contributions majeures de cette publication est la mise en lumière de la réaction des acteurs de marché face aux annonces répétées de l'ampleur de la crise. À aucun moment durant la crise de 2008 les conditions de l'économie réelle étaient proches d'être aussi mauvaises que celles observées durant la *Grande Dépression*. Pourtant les niveaux de volatilité observés étaient similaires. Il est donc important de garder à l'esprit que la réponse des acteurs de marché à un choc n'est pas toujours rationnelle et peut dans bien des cas mettre à mal nos modèles. Cet aspect de notre domaine a été décrit et analysé de manière approfondie par la finance comportementale. Naoui et Khaled (2010) se sont attardés sur la réponse des acteurs de marché au choc de 2008 et la crise résultante dans leur article *Apport de la finance comportementale à l'explication de la volatilité excessive des prix des actifs financiers*.

Rappelons ici que l'objet de ce mémoire est d'interpréter et d'utiliser de manière empirique l'information contenue dans le VIX et principalement dans la structure à terme du VIX. Anne Hancock (2012) note que très peu de recherches académiques se sont concentrées sur

l'interprétation et l'utilisation empirique de l'information contenue dans la structure à terme du VIX. La majorité des recherches et développements faits sur le sujet sont le fruit du travail de département de recherche d'institutions financières privées qui utilisent une approche empirique et obtiennent des résultats et conclusions similaires aux nôtres pour la construction et la commercialisation de produits financiers dans le marché.

## Chapitre 2

### Le VIX et la structure du terme du VIX

#### 2.1 Présentation du VIX

Introduit en 1993 par le *Chicago Board of Options Exchange* (CBOE) le VIX mesure la volatilité implicite des options 30 jours sur le S&P500. Le VIX est une mesure principale des attentes du marché quant à la volatilité des options listées sur les actions du S&P500.

À partir de 1987 les premiers travaux sur un indice de volatilité sont menés par Benner et Galai (1989) qui définissent ce qui sera premièrement appelé le *Sigma Index*. Le *Sigma Index* est utilisé dans différentes stratégies permettant d'offrir une protection (*hedge*) aux investisseurs quant à leur exposition au marché. Une des raisons fondamentales de ce besoin vient du krach d'octobre 1987, durant lequel la volatilité observée a permis de mettre en lumière la relation inverse entre la volatilité et les rendements du marché des actions – cette relation est importante dans notre travail et nous détaillons cette relation plus loin.

Suite à l'explosion des volumes observés sur les dérivés d'actions dans les marchés de gré à gré dans les années 1990 le *American Stock Exchange* (AMEX) qui est devenu le *New York Stock Exchange* (la Bourse de New York) annonce, dans le *International Financing Review* une étude de faisabilité sur l'implémentation de produits transigeables tels que des options ou contrats à terme sur la volatilité. Ces produits devaient être basés sur le *Sigma Index* et permettre aux investisseurs le souhaitant de contrebalancer l'impact de chocs de volatilité sur leur portefeuille.

Début 1993, le CBOE lance un indice de volatilité en temps réel sur sa plateforme, qui n'est pas le *Sigma Index* mais qui est l'aboutissement des travaux de Whaley (1993). Ce dernier part du *Delta Hedging* avec des options de vente ou d'achat pour appliquer un raisonnement similaire au *Véga* d'un portefeuille. Whaley (1993) cherche alors à neutraliser ce risque de la

même façon, d'où la nécessité d'avoir des options transigeables sur la volatilité. Le raisonnement présenté ci-dessous se retrouve sur le site internet du CBOE<sup>6</sup>.

La formule initiale du VIX est construite à partir de la volatilité implicite dérivée des 8 options d'achat et de vente des titres sélectionnés les plus proches de la date considérée et les options d'achat et de vente du mois subséquent sur le *OEX* (S&P100).

La formule originale du VIX était

$$VIX = \sigma_1 \left( \frac{N_{t_2} - 22}{N_{t_2} - N_{t_1}} \right) + \sigma_2 \left( \frac{22 - N_{t_1}}{N_{t_2} - N_{t_1}} \right) \quad (2.1)$$

Où

$\sigma_1$  : Volatilité implicite au prix d'exercice interpolée des options de vente et d'achat les plus proches.

$\sigma_2$  : Volatilité implicite au prix d'exercice interpolée des options de vente et d'achat du mois subséquent.

$N_{t_1}$  : Nombre de jours ouvrables avant l'expiration du contrat le plus proche.

$N_{t_2}$  : Nombre de jours ouvrables avant l'expiration du deuxième contrat le plus proche.

22 : le nombre de jours ouvrables dans un mois.

En 2003, la formule du VIX a été retravaillée par Rattray et Devesh (2003) pour Goldman, Sachs & Co en collaboration avec le CBOE.

Parmi les changements majeurs entre la nouvelle et l'ancienne version du VIX, les options considérées pour calculer la volatilité implicite ne sont plus celles sur l'*OEX* (S&P100) mais sur le S&P500. Un autre changement important est la fin du recours aux interpolations qui sont remplacées par les prix d'options directement observés pour calculer le VIX : ce changement est majeur car la seule donnée exogène devient le taux d'intérêt sans risque 1 mois. De plus toutes les options avec une offre d'achat à toutes les maturités sont considérées.

La nouvelle formule du VIX s'exprime comme suit:

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[ \frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (2.2)$$

$$VIX = \sigma \times 100 \quad (2.3)$$

<sup>6</sup> <https://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf>

$T$  : Temps à maturité.

$F$  : Niveau *forward* de l'indice, dérivé du prix des options sur l'indice.

$K_0$  : Premier prix d'exercice en dessous du niveau *forward* de l'indice.

$K_i$  : Prix d'exercice de la  $i^{\text{ème}}$  option hors de la monnaie.

$\Delta K_i$  : Intervalles entre les prix d'exercice

$R$  : Taux sans risque à échéance

$Q(K_i)$  : Point médian entre le cours acheteur et le cours vendeur pour chaque option avec prix d'exercice  $K_i$ .

Le premier ensemble de prix d'options utilisés renferme des options dont l'échéance est de moins de 30 jours. Le deuxième ensemble de prix d'options contient des options dont l'échéance est de plus de 30 jours.

Le temps jusqu'à échéance de chaque sous-ensemble est calculé en minutes à partir du moment de calcul du jour courant. Il est ensuite exprimé en année selon l'équation:

$$T_i = \frac{N_{T_i}}{M_y} = \frac{(M_c + M_s + M_0)}{M_y} \quad (2.4)$$

$N_{T_i} = M_c + M_s + M_0$  : nombre de minutes jusqu'à l'échéance du sous-ensemble d'options  $i$

$M_y$  : Nombre de minutes dans l'année ( $365 \times 24 \times 60 = 525\,600$  minutes)

$M_c$  : Nombre de minutes du moment du calcul jusqu'à minuit du jour considéré

$M_s$  : Nombre de minutes de minuit jusqu'à 8:30 am le jour suivant (510 minutes)

$M_0$  : Nombre de minutes du jour suivant jusqu'à l'échéance

Le calcul s'effectue par la suite en trois étapes que Hancock (2012) reprend :

1<sup>ère</sup> étape : le calcul de  $F$ , le niveau futur de l'indice pour chacun des deux sous-ensembles.

$$F = K + e^{rT} \times |Call - Put| \quad (2.5)$$

2<sup>ème</sup> étape : Calcul de la volatilité de chacun des deux sous-ensembles  $T_1$  et  $T_2$

$$\sigma_1^2 = \frac{2}{T_1} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT_1} Q(K_i) - \frac{1}{T_1} \left[ \frac{F_1}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (2.6)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{2}{T_2} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT_2} Q(K_i) - \frac{1}{T_2} \left[ \frac{F_2}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (2.7)$$

3<sup>ème</sup> étape : Interpoler  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  pour obtenir  $\sigma_{30 \text{ jours}}$

$$\sigma_{VIX} = 100\% \times \sqrt{T_1 \sigma_1^2 \left( \frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 \sigma_2^2 \left( \frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \times \left( \frac{N_{365}}{N_{30}} \right)} \quad (2.8)$$

$N_{30}$  : Nombre de minutes en 30 jours (43 200)

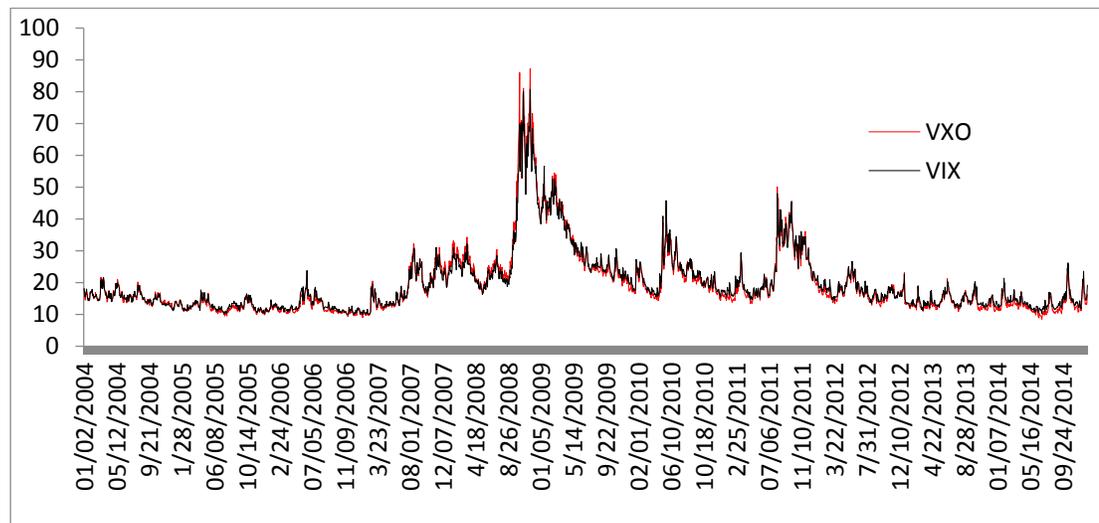
$N_{365}$  : Nombre de minutes en 365 jours (525 600)

$N_{T_1}$  : Nombre de minutes dans le premier ensemble

$N_{T_2}$  : Nombre de minutes dans le deuxième ensemble

Le graphique ci-dessous montre les différences obtenues entre l'ancienne et la nouvelle méthode de calcul. Carr et Wu (2006) font une analyse comparative très détaillée de la différence entre les deux indices.

Figure 2-1 Comparaison entre l'ancienne et la nouvelle méthode de calcul du VIX



Source : CBOE

C'est à partir de la méthode de calcul du VIX définie par Rattray et Shah (2003) que seront développés les produits utilisant les propriétés (de retour à la moyenne) du VIX dans des stratégies de couverture ou de gestion de risque de portefeuille. Ces produits font

aujourd'hui partie intégrante de la finance et des marchés tels que nous les comprenons et le VIX est devenu un des indicateurs de marché les plus suivis.

## 2.2 Présentation des contrats à terme sur le VIX

Les contrats à terme sur le VIX sont apparus en 2004 sur la plateforme du CBOE. Ils sont les plus connus et furent perçus comme révolutionnaires; l'Eurex a cependant été la première plateforme à lister des contrats à terme sur la volatilité : VOLAX.

Les contrats à terme sur le VIX sont disponibles jusqu'à une maturité de 9 mois. Pour les fins de notre recherche nous avons travaillé avec les contrats 6 mois. Dans la section Résultats au chapitre 5 nous effectuons plusieurs tests de robustesse dont un remplace les contrats à terme 6 mois par ceux ayant une échéance 5 mois dans la construction de notre indicateur.

La nature même des contrats à terme permet aux investisseurs d'exprimer aujourd'hui leur vue sur une donnée, ici le VIX, dans le futur. La différence fondamentale entre les contrats à terme sur le VIX et ceux sur le S&P500 par exemple, vient du fait que le VIX est calculé en fonction de la valeur théorique au milieu de l'écart entre le prix acheteur et le prix vendeur (écart *bid-ask*) sur actions. Cette valeur peut ne pas représenter un vrai prix de transaction disponible pour les contrats à terme sur le VIX. La valeur donc accordée aux contrats à terme sur le VIX représente le niveau actuel du VIX mais reflète également les attentes et craintes, rationnelles ou non, des acteurs du marché. Les options sur le S&P500 peuvent ne pas être disponibles au prix théorique et le prix des contrats à terme sur le VIX est dérivé de la façon suivante :

*«La juste valeur des contrats à terme sur le VIX est la racine carrée de la variance anticipée moins un facteur d'ajustement qui reflète la concavité de la fonction racine carrée utilisée pour extraire la volatilité de la variance.»<sup>7</sup>*

$$\text{Juste valeur des contrats à terme sur le VIX} = 100 \sqrt{\left(\frac{365}{30}\right) (P_t - \text{var}_t [F_T])} \quad (2.9)$$

---

<sup>7</sup> <http://cfe.cboe.com/education/vixprimer/features.aspx>

$P_t$  : prix forward de la variance *dé-annualisée* dans les 30 jours après l'expiration du contrat à terme

$-var_t [F_T]$  : l'ajustement pour la concavité soustrait la variance des prix des contrats à terme à expiration.

Détermination de  $P_t$  :

$$P_t = P_{far} - P_{near} \quad (2.10)$$

$$P_{far} = e^{rt_2} P_{(t+30\text{jours})options} \quad (2.11)$$

Déterminé à partir d'options hors de la monnaie sur le S&P500

$r$  : taux du marché monétaire

$t_2$  : temps de  $t_0$  à  $t + 30\text{jours}$  (exprimé comme une fraction de l'année)

$P_{near}$  : une extrapolation de  $P_t$  et  $P_{t+30}$ .

Alors :

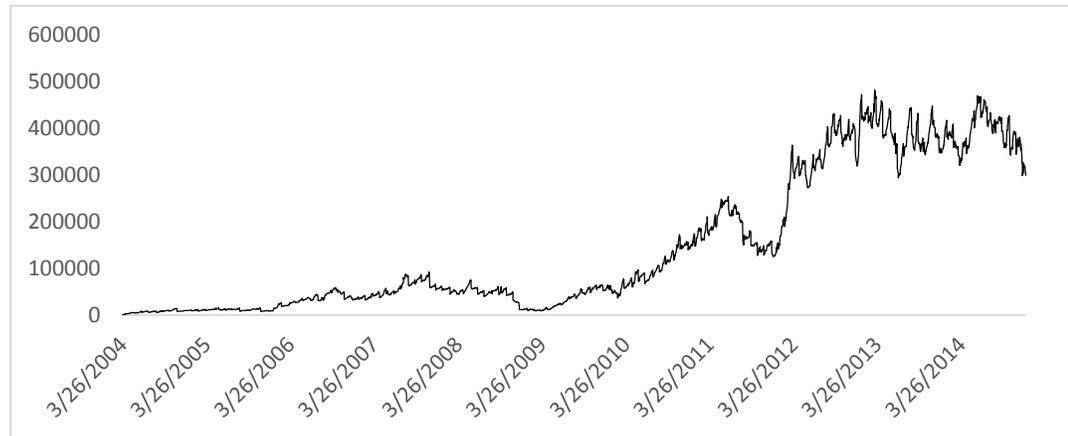
$$P_t = P_{far} - P_{near} = \frac{N_{t+30} - N_t}{N} (e^{rt_2} P_{(t+30\text{jours})options} - e^{rt_1} P_{t\ options}) \quad (2.12)$$

$N$  : Nombre de jours entre expiration des options sur le S&P500 au mois  $t$  et  $N_{t+30}$ .

$N_t$  : Date d'expiration du contrat à terme.

$N_{t+30}$  : Date d'expiration du contrat à terme + 30 jours.

Figure 2-2 Augmentation du nombre de 'positions ouvertes' sur le VIX depuis 2004



Source : CBOE

La figure ci-dessus illustre le constat de Bennett (2014) : les contrats à terme sur le VIX sont devenus plus liquides suite à l'augmentation de l'activité dans le secteur des produits structurés faisant appel aux produits transigeables sur la volatilité.

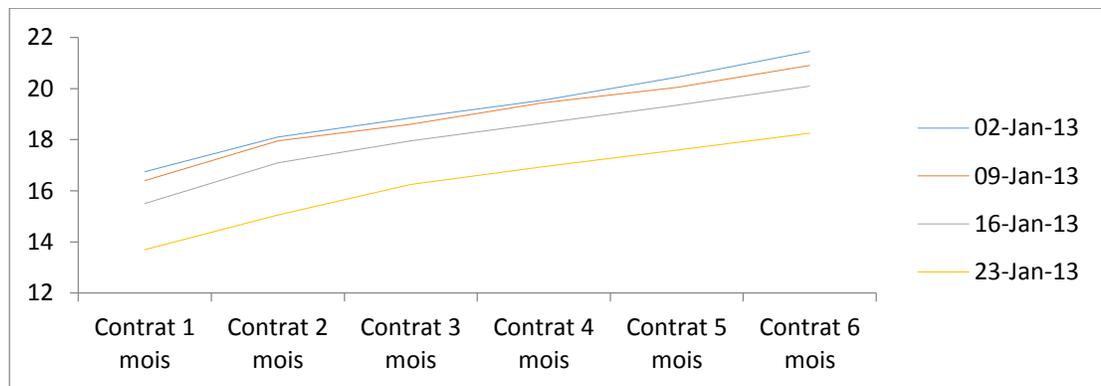
### 2.3 Construction de la structure à terme du VIX

La structure à terme du VIX est construite à partir des contrats à terme vus dans la section précédente aux différentes maturités possibles allant de 1 à 9 mois sur le VIX. Rappelons brièvement les définitions des trois différentes formes qu'une structure à terme peut prendre.

Contango : Situation dans laquelle la valeur des contrats à terme plus éloignés est plus élevée que la valeur des contrats à plus court terme. Le fait que les contrats plus éloignés soient plus chers ne veut pas forcément dire que les investisseurs s'attendent à ce que le prix du sous-jacent sera effectivement plus élevé dans le futur. Ce phénomène vient du fait que les contrats à terme sur le VIX sont construits en pondérant les options sur le VIX en fonction du temps à maturité. Le modèle de Black, Scholes et Merton établit que le prix de l'option lui-même dépend entre autre du temps à échéance et cette valeur temps est d'autant plus importante que la maturité est éloignée.

Dans le cas du VIX, le *contango* est la forme observée en temps normal, soit la majorité du temps. Le *contango* reflète le coût de portage associé à la détention du VIX ainsi que la propension des marchés à la hausse. La volatilité à court terme ne vient pas compenser l'effet de la maturité plus courte des contrats à terme plus proches de leur date d'expiration.

Figure 2-3 Structure à terme du VIX en janvier 2013

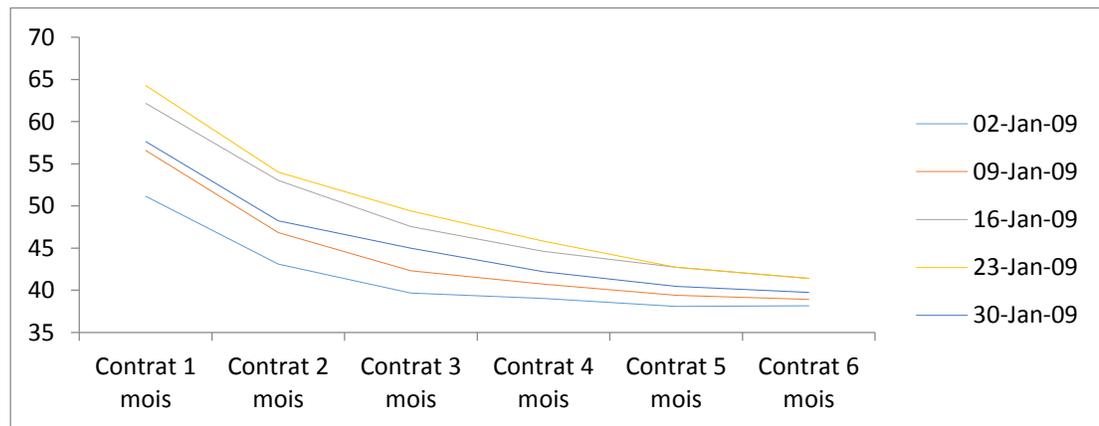


Source : Bloomberg

Dans le cas d'un choc de volatilité, souvent synonyme d'un évènement adverse sur le marché, assez important pour contrebalancer l'effet du temps et renverser la structure à terme de la volatilité, nous observons alors une structure à terme dite en *backwardation*.

**Backwardation** : Cette configuration est observée quand les contrats à terme les plus proches de leur échéance ont une valeur plus élevée que ceux plus éloignés. Inversement au *contango*, dans le cas de la structure à terme du VIX, cette forme est observée lors d'évènements spéciaux tels que des chocs de volatilité qui auront beaucoup d'impact sur les contrats à terme les plus proches. L'effet se fait ressentir de manière plus atténuée au fur et à mesure que l'on parcourt la structure à terme. Les contrats les plus proches connaissant les plus fortes variations de leurs prix, ces derniers deviennent alors plus chers que ceux à plus long terme, le choc de volatilité contrebalançant la valeur temps plus importante dans les options sous-jacentes à plus long terme. La forme de la structure à terme est inversée par rapport au *contango*.

**Figure 2-4 Structure à terme du VIX en janvier 2009**



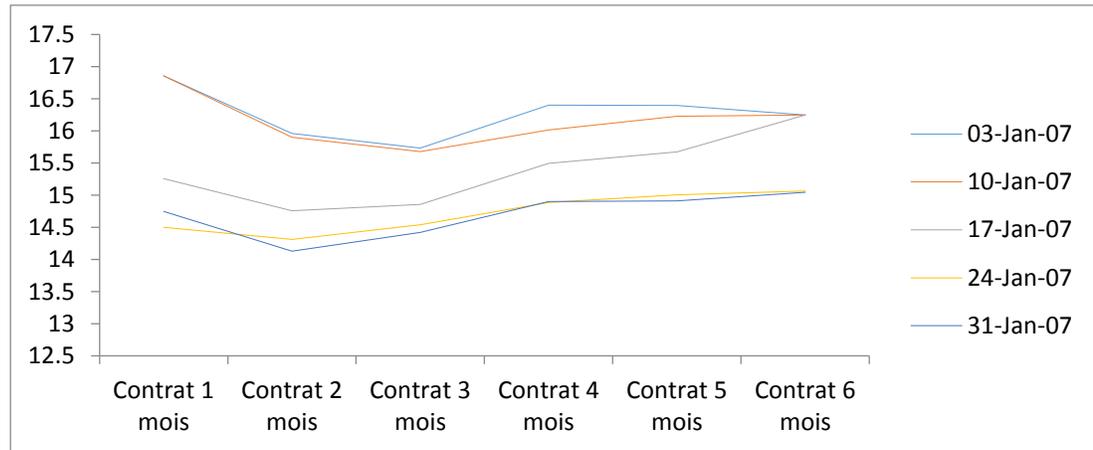
Source : Bloomberg

La structure à terme du VIX est par définition dynamique. Lors d'une inversion de cette structure suite à un choc ou à l'inverse lors d'un retour vers sa forme naturelle, la structure à terme du VIX passe par une phase transitoire dans laquelle elle se retrouve à être définie comme *plate*.

**Plate** : Une forme *plate* de la structure à terme peut paraître difficile à interpréter. Dans le cas de la structure à terme du VIX, une forme *plate* est souvent un état transitoire entre les deux formes décrites ci-dessus et rarement un état d'équilibre. Si toutefois il advenait que la structure à terme du VIX se stabilise en forme *plate*, l'information à en tirer serait que les investisseurs s'attendent à ce que la volatilité dans le futur soit plus faible que celle observée car la valeur temps dans les options à plus long terme reflétées dans les contrats à terme plus

longs est plus importante. Donc si les prix des contrats à plus long terme sont les mêmes que ceux plus proches cela signifie que la portion volatilité influant sur le prix des options à plus long terme est moins importante.

Figure 2-5 Structure à terme du VIX en janvier 2007



Source : Bloomberg

Bennett et Gil (2012) démontrent que « l'impact d'un choc est reflété en fonction de la racine carrée du temps à maturité du contrat à terme »<sup>8</sup> : plus les contrats à terme ont une maturité éloignée, plus leur valeur est influencée par le temps que par les niveaux actuels du VIX. Cette relation tend à s'inverser au fur et à mesure que l'échéance se rapproche. Ci-dessous est illustrée la répercussion d'un choc de volatilité sur la valeur des contrats à terme en fonction de leur échéance.

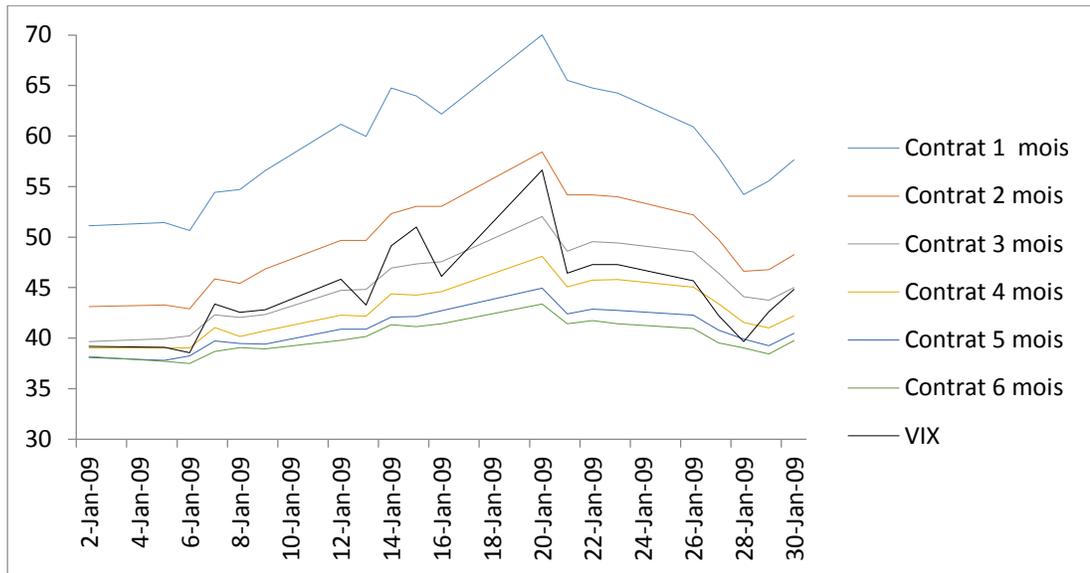
Tableau 2-1 impact d'un choc de volatilité sur les contrats à terme en fonction de leur échéance

	S&P500	VIX	CONTRAT 1 MOIS	CONTRAT 2 MOIS	CONTRAT 3 MOIS	CONTRAT 4 MOIS	CONTRAT 5 MOIS	CONTRAT 6 MOIS
<b>02-JAN</b>	1499.16	39.19	51.12	43.11	39.65	39.03	38.07	38.16
<b>20-JAN</b>	1296.63	56.65	70.02	58.43	52.05	48.09	44.94	43.38
<b>IMPACT</b>	-13.51%	44.6%	36.96%	35.53%	31.25%	23.22%	18.05%	13.67%

Source : Bloomberg

<sup>8</sup> <http://cfe.cboe.com/education/TradingVolatility.pdf>

Figure 2-6 Impact d'un choc de volatilité sur les contrats à terme en fonction de leur échéance



Source : Bloomberg

Dans le cas d'un choc de marché, comme dans la quasi-totalité des périodes de forte turbulence, la forme de la structure à terme tend à s'inverser et à passer de *contango* à *backwardation*. Dans cette situation les contrats à terme les plus fortement impactés sont ceux dont l'échéance est la plus proche.

Le tableau 2-1 ci-dessus illustre l'impact du choc de marché en janvier 2009 sur le VIX et les contrats à terme sur le VIX. Cette analyse illustre la diminution de l'impact de ce choc avec l'éloignement de l'échéance du contrat à terme.

Ce phénomène ainsi que la réaction des contrats à terme sont ce que nous voulons utiliser : notre raisonnement prend appui autant sur la forme de la structure à terme du VIX que sur l'évolution de cette dernière, la signification de cette évolution et l'information que nous pouvons en extraire<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> <http://cfe.cboe.com/education/vixprimer/Historical.aspx>

## 2.4 Mise en correspondance des changements de la structure à terme de la volatilité avec les changements observés dans le marché

Tel qu'abordé précédemment la corrélation entre les rendements journaliers du marché des actions et ceux de la volatilité est historiquement négative et imparfaite. Le tableau 2-2 illustre l'amplification de cette corrélation négative en période de rendements négatifs sur le marché des actions. Un choc important sur le marché des actions peut entraîner un choc de volatilité : l'amplification est souvent due à la panique chez les acteurs de marché qui peuvent réagir de manière exagérée.

Tableau 2-2 Corrélations entre les rendements journaliers du SP500 et ceux du VIX

Année	Jours positifs SP500	Jours négatifs SP500	Corrélation journées positives	Corrélation journées négatives	Corrélation globale
2004*	86	62	-0.296	-0.539	-0.693
2005	142	110	-0.633	-0.752	-0.825
2006	142	109	-0.69	-0.785	-0.818
2007	137	114	-0.639	-0.798	-0.838
2008	128	125	-0.727	-0.73	-0.837
2009	141	111	-0.413	-0.704	-0.754
2010	145	107	-0.686	-0.823	-0.845
2011	138	114	-0.691	-0.823	-0.855
2012	135	115	-0.558	-0.65	-0.776
2013	149	103	-0.66	-0.753	-0.824
2014	148	104	-0.71	-0.757	-0.849

\*2004 n'est pas une année complète.

Source : CBOE, Bloomberg

Cette illustration des différentes formes de la structure à terme du VIX ainsi que de sa réaction à un fort déclin sur le marché des actions nous permet de mettre en lumière la relation inverse qui existe entre la performance du SP500 et la valeur du VIX (souvent appelé *Fear Index*).

Dans cette partie nous avons détaillé le raisonnement et la construction de l'indice de volatilité. Par la suite l'emphase a été mise sur la construction de la structure à terme du VIX, les différentes formes qu'elle peut adopter et les circonstances qui y sont associées. L'analyse des changements de la structure à terme en relation avec les mouvements observés sur le

marché des actions révèle de l'information quant aux attentes et anticipations des acteurs de marché. Cette information s'interprète à travers la corrélation historique négative entre les mouvements du VIX et ceux du marché des actions, accentuée en période de forts déclin sur les marchés.

Le chapitre suivant détaillera la construction de l'indicateur développé à partir des propriétés vues dans ce chapitre. L'indicateur analyse la structure à terme du VIX dans l'optique d'utiliser systématiquement l'information contenue dans la forme et l'évolution de cette dernière dans le cadre d'une stratégie d'allocation dynamique d'actifs.

## Chapitre 3

### Création d'un indicateur de stress de marché

#### 3.1 Mise en contexte et analyse du raisonnement sous-jacent

Dans ce chapitre nous développons un indicateur qui permet d'analyser la structure à terme du VIX ainsi que son évolution dans le temps. Le but est d'extraire l'information implicite contenue dans la structure à terme du VIX présentée dans le chapitre précédent. Une fois les règles de décision mises en place selon les paramètres établis et l'indicateur construit, ce dernier renvoie un signal associé à des règles systématiques de transaction.

L'idée sous-jacente est la mise à profit de l'information sur le comportement futur des marchés identifiable dans la volatilité observée aujourd'hui aussi bien que dans sa structure à terme.

Tel que détaillé dans le chapitre 2, le VIX est construit à partir des options sur le S&P500. Par conséquent un choc sur le S&P500 impacte directement le VIX via les options qui rentrent dans sa composition.

De cette relation nous voulons dans un premier temps extraire de manière systématique l'information contenue dans la structure à terme du VIX et son évolution. La seconde étape est l'utilisation de cette information dans une stratégie d'allocations dynamique d'actifs. Nous avons établi dans l'introduction que l'utilisation de cette information dans un contexte de transaction n'a pas pour objectif de maximiser le rendement de la stratégie mise en place. Nous voulons valider que de l'information contenue dans la structure à terme du VIX peut être utilisée dans la gestion du risque d'un portefeuille afin de minimiser ou d'éviter l'impact d'un choc de marché sur notre portefeuille. L'objectif est la validation de cette hypothèse et nous détaillons ci-dessous la manière dont nous avons choisi de procéder. En ce sens le 3<sup>ème</sup> test de robustesse au chapitre 5 est important car il mesure uniquement l'impact de la partie 3 de la formule, l'*Indicateur VIX*. Les résultats présentés au chapitre 5 suggèrent que

l'utilisation de cette information peut être optimisée selon l'application. En effet les résultats des différents tests de robustesse ouvrent la voie sur de nombreuses avenues de recherche quant à l'utilisation de l'indicateur (ou une variante de ce dernier) dans une stratégie de gestion de risque. Nous n'avons pas voulu orienter l'utilisation de l'indicateur pour maximiser une mesure en particulier mais nous sommes concentrés sur le travail en amont qui a permis de valider que de l'information quant au comportement futur du S&P500 est effectivement contenue dans la structure à terme du VIX. Le portefeuille virtuel de référence est constitué de seulement deux actifs : un indice d'actions représenté par le S&P500, et un indice obligataire représenté par l'indice obligataire Barclays 7 à 10 ans.

Notre indicateur étant développé à partir de l'information contenue dans la structure à terme de la volatilité implicite du S&P500 (le VIX), nous utilisons le S&P500 comme la composante en équité du portefeuille de référence. La composante obligataire est représentée par les obligations 10 ans du gouvernement américain. Les taux 10 ans ont une importance particulière via leur impact direct sur le marché immobilier américain à travers les taux hypothécaires et sont vus par beaucoup comme un baromètre de l'économie. Mishkin (1990a, 1990b) souligne le caractère unique de cette mesure dans ses travaux sur la relation entre la courbe des taux d'intérêt et l'économie américaine. Le choix particulier de l'indice obligataire Barclays 7 à 10 ans comme *proxy* des obligations 10 ans du gouvernement américain est détaillé dans le chapitre 4.

L'information véhiculée par le VIX et sa structure à terme donne de l'information sur le comportement futur de ce dernier, et par extension sur celui du S&P500. L'indicateur que nous avons développé déduit de cette information l'exposition adéquate au marché des actions, ce que nous avons défini comme le *Delta*.

Pour ce faire nous avons intégré plusieurs propriétés des données avec lesquelles nous travaillons : la première est la corrélation négative entre les rendements journaliers du S&P500 et ceux du VIX. Cette relation a été mise en évidence au chapitre 2, tableau 2-2 Corrélation entre les rendements journaliers du SP500 et ceux du VIX. Nous utilisons également les propriétés de persistance de la turbulence sur la base des travaux de Kritzman et Li (2010). Ces derniers mettent statistiquement en lumière la persistance de la turbulence financière suite à un choc s'inscrivant dans les 10% d'évènements les plus turbulents de la distribution selon la distance multivariée.

Dans la section suivante l'indicateur est décomposé en trois parties distinctes. De cette façon l'analyse de l'information extraite est raffinée pour prendre en compte aussi bien le niveau observé du VIX, sa moyenne court terme, sa moyenne long terme, la forme de la structure à terme et l'évolution de cette structure à terme. La mise en relation de ces différents paramètres permet d'avoir une réponse dynamique adaptable à chaque configuration.

Nous utilisons plusieurs fenêtres de temps dans la construction de l'indicateur et qualifions de long terme (LT12) une période de 12 mois roulants. Les observations étant journalières, après une période d'optimisation d'un an la série comporte déjà 252 données et chaque nouvelle observation s'intégrera dans le contexte contemporain de l'année qui vient de s'écouler. Le chapitre 5 présente les résultats d'une version de notre indicateur avec long terme défini comme 6 mois (LT6).

Nous utilisons également une période de 2 semaines roulantes que nous qualifions de court terme (CT). La période de 2 semaines représente 10 observations, en référence aux conclusions de Kritzman et Li (2010) quant à la persistance de la turbulence à la suite du choc initial mentionnées précédemment.

D'autres fenêtres de temps seront testées au chapitre 5 et nous discuterons dans la conclusion de la possibilité de changement et d'optimisation de ces fenêtres.

### 3.2 Fonctionnement et utilisation de l'indicateur

L'indicateur est composé de trois parties distinctes. Chacune des trois parties contrôle indépendamment la réponse à un aspect différent du niveau du VIX, de la forme de la structure à terme du VIX et de son évolution. La mise en interaction de ces trois parties définit le *Delta* qui est la proportion de notre portefeuille que l'indicateur suggère d'allouer aux actions.

Commençons par souligner que la partie 3 est binaire. En effet soit cette partie indique 0 et dans ce cas-là le niveau des deux premières parties n'importe pas, *Delta* sera égal à 0.

Dans le deuxième cas la partie 3 indique  $\frac{VIX_{t-1}}{VIX_{t-2}}$  qui, comme nous pouvons le constater à la figure 3.3 ci-dessous, sera en pratique très souvent proche de 1. Les niveaux respectifs de la partie 1 et 2 joueront alors une grande importance dans la valeur que *Delta* prendra.

Si *Delta* est supérieur à 1 nous prenons la décision de le limiter à 1. La raison pour laquelle nous mettons cette contrainte est que *Delta* représente l'exposition du portefeuille de référence au marché des actions. En effet nous ne voulons pas dépasser une exposition supérieure à 100%. Le but n'étant pas de maximiser les rendements mais plutôt de réduire le risque de marché, nous ne voulons pas utiliser de levier ou bien vendre à découvert l'indice obligataire pour financer le levier. La solution de normaliser le *Delta* par rapport à sa valeur maximale observée dans le passé posait le problème majeur de re-normalisation à posteriori du *Delta* lorsqu'un nouveau maximum apparaît.

Suite aux discussions avec le Directeur de cette recherche et l'analyse des résultats présentés dans le chapitre 5, nous avons décidé d'opter pour la troncature du *Delta* à 1. Nous présentons la distribution du *Delta* non contraint à la figure 3.5 à des fins indicatives.

La construction même de notre indicateur ne permettant pas de valeur négative, notre exposition au marché des actions ne peut pas être inférieure à zéro, par conséquent le problème inverse d'allocation dans l'indice obligataire supérieure à 100% n'est pas abordé.

Un *Delta* quotidien est généré par l'indicateur et les actifs de la journée suivante sont alloués en fonction du *Delta*.

Notre modèle d'allocation d'actifs peut être résumé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 &Portefeuille_{t+1} = \\
 &Portefeuille_t * (Delta_t * \text{Équités} + (1 - Delta_t) * \text{Indice Obligataire}) \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Afin que l'indicateur ne soit pas trop sensible à des perturbations mineures nous avons posé une condition quant au changement du *Delta* nécessaire pour déclencher une transaction et donc une réallocation des actifs. La variation du *Delta* par rapport à sa valeur précédente doit être supérieure à 5% sinon l'allocation d'actifs reste la même que la journée précédente. Le tableau 5-3 décrit le nombre et l'amplitude moyenne des transactions.

### 3.3 Construction de l'indicateur

$$\text{Partie 1} : \frac{\frac{1}{\ln(VIX_{t-1})}}{\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{\ln(VIX_i)}} \quad (3.2)$$

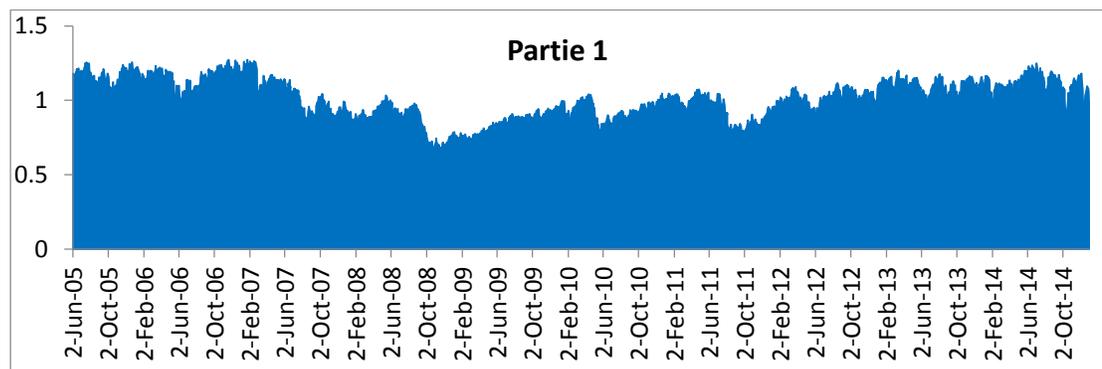
La forme de  $1/\ln(x)$  fait en sorte que plus le VIX est élevé, plus  $1/\ln(VIX)$  est faible.

Lorsque le VIX est plus élevé que sa moyenne historique cette partie est inférieure à 1 et tend à faire diminuer l'exposition cible dans le S&P500. L'inverse est observé si le VIX est inférieur à sa moyenne historique.

À noter que la moyenne historique est calculée sur une fenêtre qui augmente à chaque observation. L'impact de chaque observation diminue donc de façon marginale à mesure que le temps passe : la moyenne historique du VIX représente de plus en plus une moyenne que l'on peut qualifier de long terme. À l'inverse, le numérateur n'est impacté que par le niveau observé du VIX à l'observation précédente et permet donc une grande réactivité et l'intégration d'éventuels chocs de volatilité sur du très court terme (1 jour).

De cette manière nous tenons compte d'éventuels chocs soudains sur le S&P500. La corrélation négative entre le VIX et le S&P500 fait en sorte que le VIX réagit instantanément.

Figure 3-1 Distribution de la Partie 1



$$\text{Partie 2 : } \frac{\frac{1}{N_{LT12}} \times \sum_{i=1}^{i=t_{LT12}-1} VIX_i}{\frac{1}{N_{CT}} \times \sum_{i=1}^{i=t_{CT}-1} VIX_i} \quad (3.3)$$

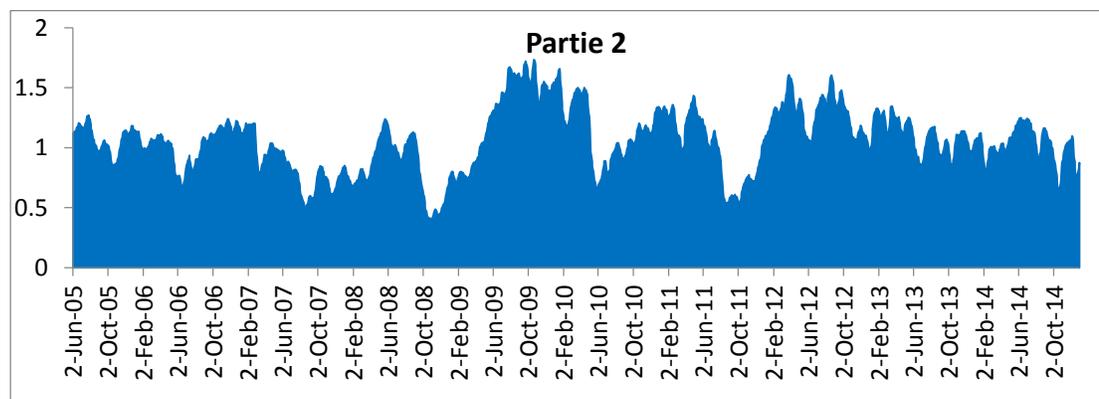
Nous considérons ici la moyenne LT12 sur la moyenne CT du VIX.

Cette partie situe dans quelle configuration de marché nous nous trouvons et permet d'identifier si une augmentation de la volatilité n'a été qu'un choc ou si une tendance se dessine.

Là encore une diminution de ce ratio causée par une augmentation de la moyenne à court terme entraîne une diminution de l'exposition du portefeuille au marché des actions. En effet les variations sont majoritairement dues aux variations de la moyenne à court terme, la moyenne à long terme calculée sur 252 valeurs étant beaucoup plus inerte.

Dans cette partie un choc de volatilité d'une seule journée viendra affecter cette valeur pour les deux semaines suivantes et risque donc de biaiser l'exposition au S&P500 à la baisse. La première partie de la formule étant plus réactive à très court terme a pour effet de contrebalancer la partie 2 si le choc initial n'a pas persisté.

Figure 3-2 Distribution de la Partie 2



### 3.4 Les différentes configurations définies

$$\text{Partie 3 : } \frac{1}{VIX_{t-2}} \times \text{Indicateur VIX} \quad (3.3)$$

L'*Indicateur VIX* dans la troisième partie est la composante cruciale et centrale de l'indicateur développé. C'est cette partie qui prend en compte la forme de la structure à terme du VIX au moment de l'observation ainsi que son évolution dans le temps. Nous établissons alors les règles de décision en fonction de chacune des configurations suivantes pour la structure à terme du VIX et l'évolution de sa forme. Nous décrivons ci-dessous comment la partie 3 est binaire, prenant soit la valeur  $\frac{VIX_{t-1}}{VIX_{t-2}}$ , soit 0. Nous avons précisé plus tôt que  $\frac{VIX_{t-1}}{VIX_{t-2}}$  est très proche de 1 car un choc de volatilité au temps t-1 ferait en sorte que  $\frac{VIX_{t-1}}{VIX_{t-2}}$  serait alors égal à 0. Dans les autres situations ce ratio renvoie de l'information qui différencie dans quel sens se fait l'évolution de la structure à terme en fonction de la valeur du VIX de la journée qui vient de passer ( $VIX_{t-1}$ ) sur sa valeur précédente ( $VIX_{t-2}$ ).

- Structure à terme *plate*

$$|VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1}| < 1er\ Décile . |VIX_6^{LT12:t-1} - VIX_1^{LT12:t-1}| \quad (3.4)$$

La valeur absolue de la différence entre la valeur des contrats à terme 6 mois et 1 mois est comprise dans les 10% d'observations les plus faibles de cette valeur au cours de la dernière année. Théoriquement cette règle permettrait au modèle de s'adapter si la structure à terme passait plus de 90% des observations en *contango* ou en *backwardation* de manière accentuée et donc de considérer une structure comme *plate* relativement aux valeurs observées sur la dernière année. En pratique les 10% des observations pour lesquelles la structure à terme est définie comme *plate* pour les fins de l'indicateur, la structure est très proche d'être *plate* en termes absolus.

**1<sup>ère</sup> sous situation :**

$$VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1} < 95\% \text{ moyenne } VIX_6^{t-2semaines:t-1} - VIX_1^{t-2semaines:t-1} \quad (3.5)$$

La structure à terme évolue de *plate* vers *backwardation*.

En *backwardation* les contrats à terme avec une échéance plus proche ont une valeur supérieure à ceux à plus long terme. Cette sous situation est caractérisée par la valeur des contrats 6 mois moins 1 mois inférieure à 95% de la moyenne de cette mesure sur les deux dernières semaines. Cela implique que la valeur des contrats à terme 1 mois a augmenté, soit de manière absolue, soit relativement à la valeur des contrats à 6 mois. La règle de décision établie à 95% de la moyenne 2 semaines laisse 5% de marge pour s'assurer que le changement observé n'est pas du bruit. Le tableau 2-1 expose la relation entre l'amplitude de la réaction des contrats à terme et leur maturité à échéance.

Dans cette configuration le portefeuille n'est pas exposé aux actions, *Indicateur VIX* = 0 donc *Delta* = 0.

**2<sup>ème</sup> sous situation :**

$$VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1} \geq 95\% \text{ moyenne } VIX_6^{t-2\text{semaines}:t-1} - VIX_1^{t-2\text{semaines}:t-1} \quad (3.6)$$

La structure à terme évolue de *plate* vers *contango*.

Dans cette configuration la valeur des contrats à terme avec une maturité plus proche a diminué, soit de manière absolue, soit de manière relative à la valeur des contrats à terme 6 mois.

L'indicateur interprète cette situation comme une diminution du stress ressenti dans la marché et expose donc le portefeuille aux actions : *Indicateur VIX* =  $VIX_{t-1}$  donc *Partie 3*  $\frac{VIX_{t-1}}{VIX_{t-2}}$  et *Delta* est différent de 0.

- Structure à terme en *contango*

$$|VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1}| \geq 1er \text{ Decile} \cdot |VIX_6^{LT12:t-1} - VIX_1^{LT12:t-1}| \text{ et } VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1} \geq 0 \quad (3.7)$$

La valeur absolue de la différence entre la valeur des contrats à terme 6 mois et 1 mois ne fait pas partie des 10% d'observations les plus faibles de cette valeur au cours de la dernière année. La structure n'est donc pas définie comme *plate*. La différence entre la valeur des

contrats à terme 6 mois et 1 mois est positive, les contrats à plus long terme ayant une valeur supérieure à ceux à court terme, la structure à terme du VIX est en *contango*.

**1<sup>ère</sup> sous situation :**

$$VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1} < 95\% \text{ moyenne } VIX_6^{t-2\text{semaines}:t-1} - VIX_1^{t-2\text{semaines}:t-1} \quad (3.8)$$

La structure à terme évolue de moins en moins en *contango*.

En effet même si la structure à terme du VIX est en *contango*, les contrats à terme à échéance plus proche ont augmenté en termes relatifs ou absolus de manière significative. De ce fait l'écart observé entre la valeur des contrats à terme 1 mois et 6 mois est inférieur à 95% de la moyenne 2 semaines de cet écart.

La mesure du VIX augmente, l'*Indicateur VIX* interprète ça comme une augmentation du stress ressenti dans le marché et protège le portefeuille en ne l'exposant pas au marché des actions : Partie 3 = 0 donc *Delta* = 0.

**2<sup>ème</sup> sous situation :**

$$VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1} \geq 95\% \text{ moyenne } VIX_6^{t-2\text{semaines}:t-1} - VIX_1^{t-2\text{semaines}:t-1} \quad (3.9)$$

La structure à terme reste en *contango*, voire même accentue cette forme.

La valeur de l'écart observé est supérieure ou égale à au moins 95% de la moyenne 2 semaines de cet écart entre la valeur des contrats à terme 1 mois et 6 mois.

L'*Indicateur VIX* perçoit cette configuration comme un signe positif en ce qui concerne la stabilité sur le marché des actions et nous voulons donc que le portefeuille y soit exposé.

Indicateur VIX =  $VIX_{t-1}$  donc Partie 3 =  $\frac{VIX_{t-1}}{VIX_{t-2}}$  et donc *Delta* est différent de 0.

- Structure à terme en *Backwardation*

$$|VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1}| \geq 1er \text{ Decile} . |VIX_6^{LT12:t-1} - VIX_1^{LT12:t-1}| \text{ et } VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1} < 0 \quad (3.10)$$

**1<sup>ère</sup> sous situation :**

$$VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1} < 95\% \text{ moyenne } VIX_6^{t-2\text{semaines}:t-1} - VIX_1^{t-2\text{semaines}:t-1} \quad (3.11)$$

La structure à terme est toujours autant en *backwardation* ou accentue la *backwardation*

Le modèle voit cette situation comme une période où la volatilité est élevée et ne montre pas de signe d'amélioration. Même si certaines journées dans de telles périodes peuvent offrir des rendements positifs, la tendance générale reste très incertaine. Tel que mentionné plus haut, nous ne cherchons pas à capturer au maximum les journées positives dans le marché des actions mais plutôt à limiter l'impact sur le portefeuille de référence des journées négatives sur le marché des actions.

En situation d'incertitude l'indicateur n'expose pas le portefeuille au marché des actions  $\text{Partie3} = 0$  et donc  $\text{Delta} = 0$ .

**2<sup>ème</sup> sous situation :**

$$VIX_6^{t-1} - VIX_1^{t-1} \geq 95\% \text{ moyenne } VIX_6^{t-2\text{semaines}:t-1} - VIX_1^{t-2\text{semaines}:t-1} \quad (3.12)$$

La structure à terme en *backwardation* transite vers une structure *plate*

Là encore les contrats à terme 1 mois ont diminué par rapport à la valeur des contrats 6 mois. Les niveaux anticipés du VIX sont plus faibles que les niveaux actuels. Cette configuration est interprétée par l'indicateur comme une reprise du marché des actions suite à une correction (plus ou moins longue et sévère).

Nous voulons participer à la reprise et exposer le portefeuille à la tendance haussière sur le marché des actions. *Indicateur VIX* =  $VIX_{t-1}$  donc  $\text{Partie 3} = \frac{VIX_{t-1}}{VIX_{t-2}}$  et  $\text{Delta}$  est différent de 0.

**Figure 3-3 Distribution de la Partie 3**

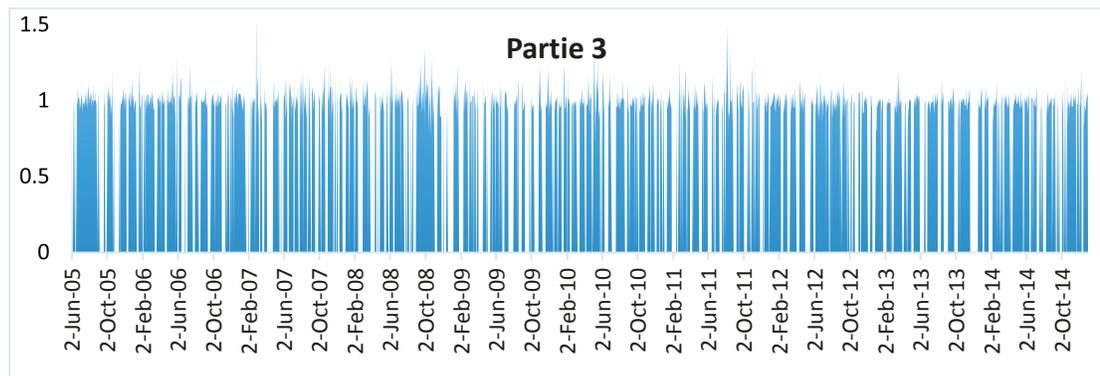
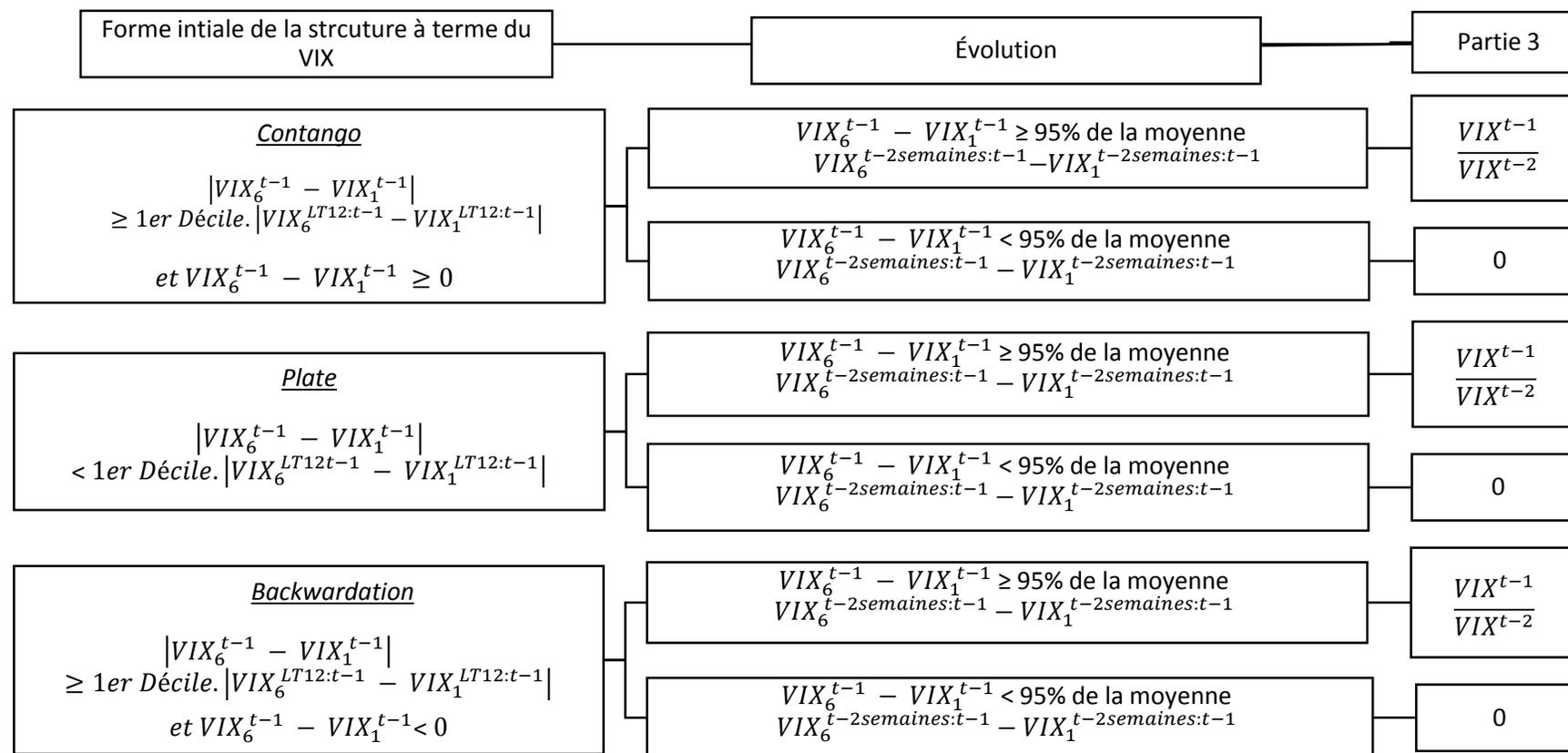


Figure 3-4 Arbre de décision en fonction de la forme initiale de la structure à terme et son évolution



### 3.5 L'indicateur de stress que nous avons développé

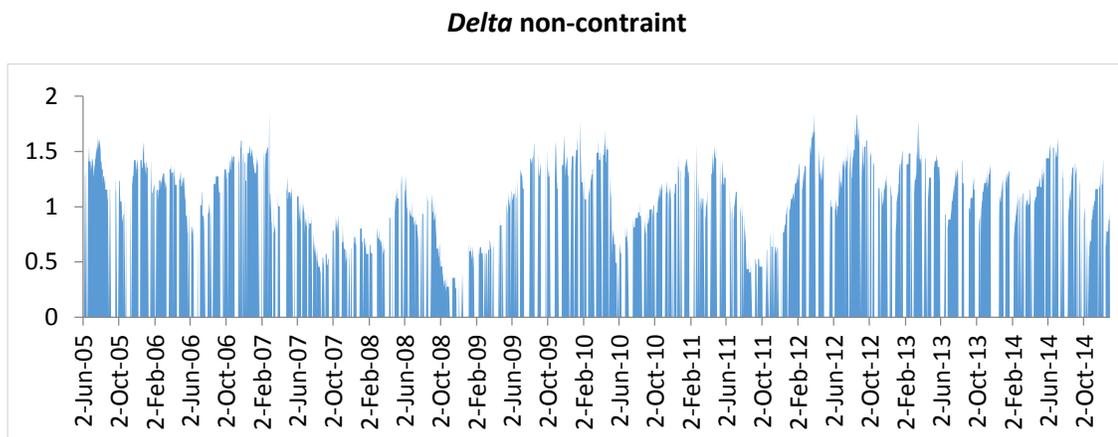
La mise en relation des trois parties décrites ci-dessus renvoie la formule générale de l'indicateur :

(3.13)

$$\Delta_t = \frac{\frac{1}{\ln(VIX_{t-1})}}{\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{\ln(VIX_i)}} \times \frac{\frac{1}{N_{LT12}} \times \sum_{i=1}^{t_{LT12}-1} VIX_i}{\frac{1}{N_{CT}} \times \sum_{i=1}^{t_{CT}-1} VIX_i} \times \frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}}$$

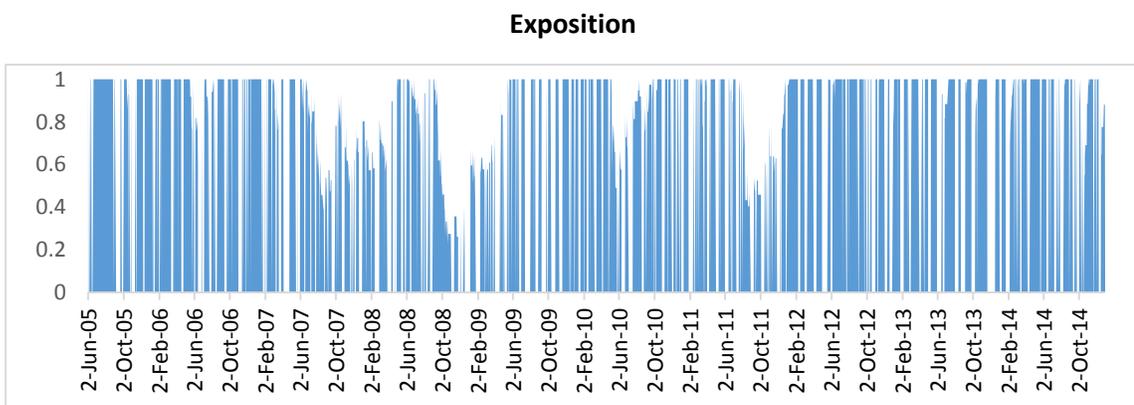
\*Défini à la section 3.1, LT12 : 12 mois (252 observations), LT6 : 6 mois (126 observations) et CT : 2 semaines (10 observations)

Figure 3-5 Distribution du *Delta* non-contraint



Tel que nous l'avons énoncé en début de chapitre, nous limitons l'exposition au marché des actions à 1 de manière à ne pas utiliser de levier.

Figure 3-6 Distribution de l'exposition (*Delta* contraint à 1)



### 3.6 Les indicateurs existants

- L'indice de turbulence financière

Cet indice a été développé par Mark Kritzman, professeur en Ingénierie Financière au *Massachusetts Institute of Technology*, pour State Street.

Kritzman et Li (2010) basent leur mesure sur la distance des observations de rendements ajustés par leur covariance par rapport à leur moyenne multivariée de la série dans un espace multidimensionnel. Le concept est assez intuitif et se comprend aisément une fois la terminologie définie.

Les auteurs définissent la turbulence comme les rendements ayant des comportements statistiquement inhabituels par rapport à leur moyenne historique. Les comportements inhabituels et l'anormalité résultent d'événements extrêmes qui modifient la volatilité ou d'un changement soudain dans la corrélation existante entre les actifs d'un portefeuille. Cette mesure n'est pas sans rappeler la mesure de distance développée par Mahalanobis (1936).

$$d_t = (y_t - \mu) \Sigma^{-1} (y_t - \mu)' \quad (3.14)$$

Où :

$d_t$  : la distance par rapport à la moyenne multivariée.

$y_t$  : les séries de rendements.

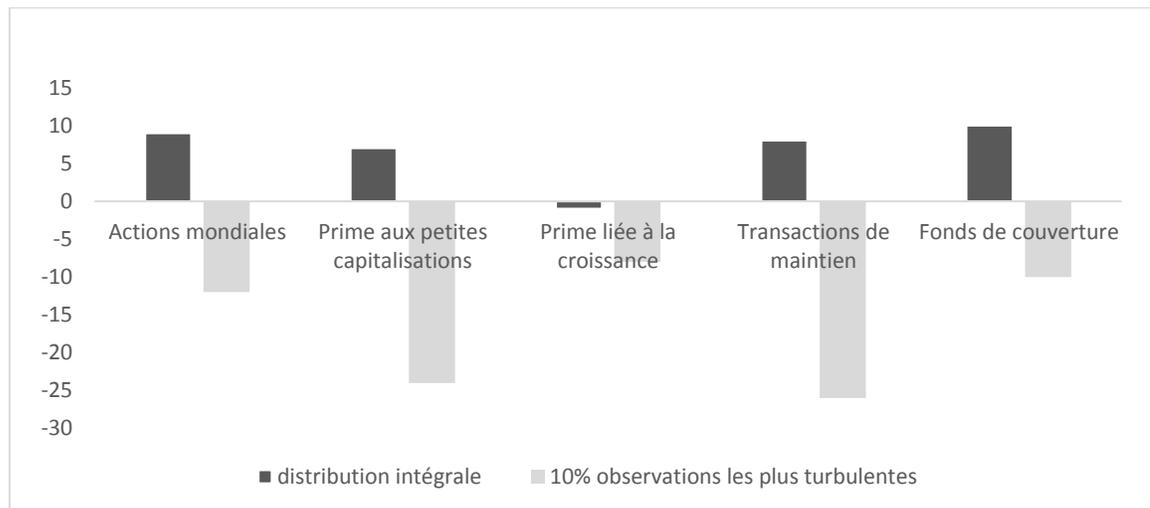
$\mu$  : le vecteur des moyennes de rendements des séries  $y_t$ .

$\Sigma$  : la matrice de variances-covariances des rendements  $y_t$ .

La distribution des rendements est supposée normale.

La figure ci-dessous compare les rendements de l'échantillon total avec ceux des 10% les plus turbulents pour différentes classes d'actifs :

Figure 3-7 Comparaison des rendements entre l'intégralité de la distribution et les 10% les plus turbulents



Source : Kritzman et Li (2010)

Les 10% d'évènements les plus turbulents se traduisent sur les marchés par des rendements très négatifs. Cette observation semble tenir pour toutes les classes d'actifs.

En effet, des rendements très éloignés de leur moyenne historique correspondent plus souvent à un choc négatif qu'à un choc positif.

Ce modèle est intéressant dans le cadre de ce travail car le concept de distance multivariée à la moyenne des rendements se rapproche du mode de fonctionnement de notre indicateur. Nous trouvons également ce modèle assez simple dans sa construction, facilement répliquable et ayant pour but de donner des signaux avancés quant aux chocs de marché.

Kritzman et Li (2010) analysent en profondeur la persistance de la turbulence telle qu'ils la définissent. Ce phénomène est empiriquement observé ci-dessus et discuté dans la revue de littérature.

- L'Indice de Risque Systémique – Le *ratio d'absorption*

Le *Windham Systemic Risk Index (WSRI)* exprime l'état actuel du marché. Ce modèle a été développé également par Mark Kritzman pour Windham Capital. Cette mesure se concentre sur la corrélation entre les différents actifs dans le marché en estimant la portion de la variabilité d'une série d'actifs qui peut être expliquée par un nombre fixe de facteurs.

Le *ratio d'absorption* exprime le niveau actuel de risque systémique dans le marché par rapport à sa moyenne long terme. Cette moyenne long terme est basée sur les rendements journaliers de plus de cinquante industries aux États-Unis.

La définition quantitative du *ratio d'absorption* est «la mesure de la proportion de la variance totale d'une série d'actifs absorbée par un nombre fini de vecteurs propres. La mesure est construite à partir d'une analyse en composante principale sur la variance totale mesurée de la série d'actifs considérés».

Dans ce cas également la construction de l'indice peut être facilement répliquée et l'idée sous-jacente est intuitive. Il est aisé de comprendre qu'au plus la corrélation entre les différentes classes d'actifs est importante, plus facilement un choc adverse sur une des classes se propagera rapidement aux autres actifs.

$$AR = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{Ei}^2}{\sum_{j=1}^N \sigma_{Aj}^2} \quad (3.15)$$

Où :

$AR$  : Le *ratio d'absorption*

$N$  : Le nombre d'actifs

$n$  : Le nombre de vecteurs propres utilisés pour calculer le *ratio d'absorption*

$\sigma_{Ei}^2$  : La variance du  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre

$\sigma_{Aj}^2$  : La variance du  $j^{\text{ème}}$  actif

Le premier vecteur propre est celui qui explique la plus grande portion de la variance. Le second vecteur propre est celui qui explique la plus grande proportion de la variance restante. Chaque vecteur est orthogonal aux précédents.

Kritzman et Li (2010) fixent arbitrairement le nombre de vecteurs propres à un cinquième (1/5) du nombre d'actifs. Ce nombre de vecteurs propres est largement suffisant pour expliquer la majeure partie de la variance.

Le *ratio d'absorption* se mesure par rapport à sa moyenne de long terme, la lecture se fait en *z-score*, autrement dit en écart-type de déviation par rapport à sa moyenne.

Finalement la mesure de changement dans le *ratio d'absorption* est standardisée :

$$\Delta AR = (AR_{15\text{jours}} - AR_{1\text{an}}) / \sigma_{1\text{an}} \quad (3.16)$$

Où :

$\Delta AR$  : Le changement standardisé dans le *ratio d'absorption*

$AR_{15j}$  : La moyenne mobile 15 jours du *ratio d'absorption*

$AR_{1an}$  : La moyenne mobile 1 an du *ratio d'absorption*

$\sigma_{1an}$  : L'écart type du *ratio d'absorption* 1 an

L'accent est mis sur les changements dans le *ratio d'absorption* supérieurs à 1 écart type (en valeur absolue). Ces changements sont très souvent suivis par des rendements inhabituels - définis précédemment comme turbulents - dans le marché.

Lorsque la lecture du *ratio d'absorption* augmente cela signifie qu'une plus grande partie de la variance est expliquée par le même nombre de facteurs. Tel que discuté plus haut, la corrélation entre les actifs étant plus importante, un choc qui survient au moment où le *ratio d'absorption* affiche une lecture haute a plus de chance de se propager à plus d'actifs et de manière plus intense.

Les règles d'exposition d'un portefeuille en fonction de l'information renvoyée par le *ratio d'absorption* sont exposées au tableau 3-1.

Les règles de transaction fixées dans le cadre de l'Indicateur que nous avons développé sont plus raffinées de manière à répondre plus dynamiquement aux différentes configurations de marché que nous pouvons rencontrer.

Tableau 3-1 Règles de décision basées sur l'indice de risque systémique

<b>Règles de transaction de l'indice de risque systémique</b>	
<b>Indice de Risque Systémique</b>	<b>Exposition Actions / Obligations</b>
$-1 \sigma \leq \Delta \text{Indice} \leq +1 \sigma$	50/50
$\Delta \text{Indice} > +1 \sigma$	0/100
$\Delta \text{Indice} < -1 \sigma$	100/0

## Chapitre 4

### Présentation des données

Dans le cadre de notre recherche nous utilisons plusieurs séries de données pour construire notre indicateur : VIX, contrats à terme sur le VIX, indice obligataire et indice d'actions. Nous utilisons également des données à des fins de comparaison des indices existants. Les indices utilisés sont le *Turbulence Index* de Windham Capital et le *ratio d'absorption* de State Street. Ces deux indicateurs sont propres aux départements de recherche de chacune des firmes et ne sont pas accessibles publiquement.

Certaines de ces données sont ce que nous voulons mesurer, comme le S&P500 pour l'indice d'équités, certaines sont les meilleures représentations de ce que nous devons utiliser (les contrats à terme sur VIX sont la meilleure représentation de la structure à terme de la volatilité, la volatilité elle-même étant seulement une mesure et ne pouvant être transigée). Notre modèle utilise les valeurs brutes à la fermeture des marchés pour transiger.

#### 4.1 Présentation des données

- Obligations: Bloomberg : BCEY4T

L'indice *Barclays US Treasury Bond 10 Year Term Index* est composé d'obligations gouvernementales fédérales américaines notées AAA et ayant une maturité comprise entre 7 et 10 ans et la valeur de l'indice est mise à jour quotidiennement sur le site de Barclays<sup>10</sup>.

L'indice compilé par Barclays contient des obligations gouvernementales fédérales américaines dont la maturité initiale est comprise entre 9.75 et 11 ans et dont le temps restant à maturité est compris entre 7 et 10 ans. Plutôt que d'inclure passivement toutes les obligations qui remplissent

---

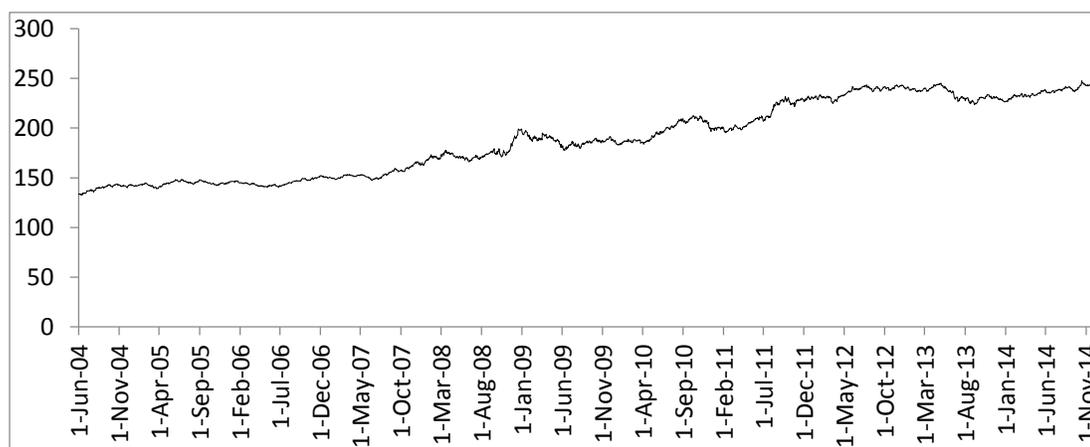
<sup>10</sup> [https://index.barcap.com/Benchmark\\_Indices/Aggregate/Bond\\_Indices](https://index.barcap.com/Benchmark_Indices/Aggregate/Bond_Indices)

ces critères, Barclays choisit de n'inclure dans la valorisation de l'indice seulement les obligations dont la maturité est proche de leur maturité originale, soit qui ont été émises peu de temps auparavant et qui reflètent les conditions de marché actuelles. Sans cette sélection, la valorisation de l'indice pourrait inclure des obligations 11 ans ayant une maturité restante de 7 ans. Celles-ci remplissent théoriquement toutes les conditions mais ont été émises il y a 4 ans pour 11 ans et il est probable que les obligations 7 ans actuellement émises reflètent une réalité toute différente et ne soient pas comparables.

L'indice a été lancé en décembre 1998 par Barclays. Nous commençons à utiliser l'indice pour la portion revenu fixe de notre portefeuille à partir du 1<sup>er</sup> juin 2004 dans le cadre de l'indicateur que nous avons construit, jusqu'au 31 décembre 2014 inclusivement. Nous utilisons des données quotidiennes et la valeur brute à la fermeture des marchés est incorporée dans le modèle.

Les données sont accessibles de manière publique et ont été extraites de Bloomberg.

Figure 4-1 L'indice Obligataire 10 ans de Barclays de Juin 2004 à Décembre 2014



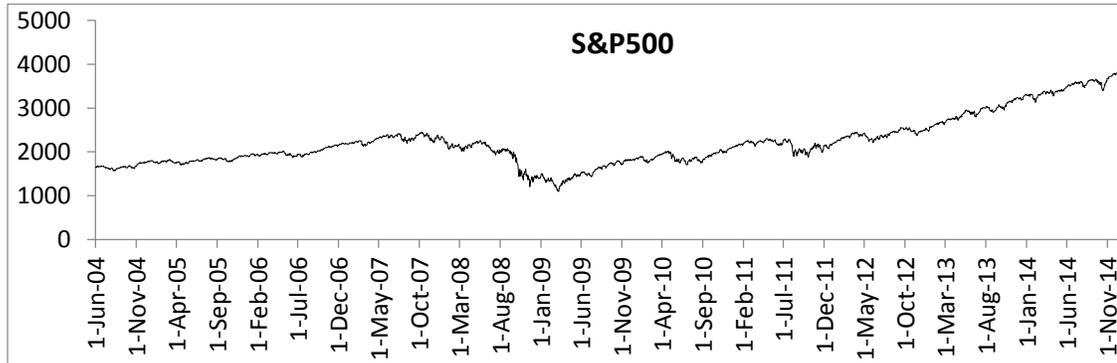
Source: Bloomberg

- Actions (Équités): Bloomberg : SPX, L'indice d'actions S&P 500.

Dans le cas des actions, nous n'avons pas besoin de recourir à un indice créé par une tierce partie : les données utilisées sont celles de l'indice S&P500 qui sont accessibles de manière publique et ont été extraites de Bloomberg.

La série de données s'étend jusqu'au 31 décembre 2014 inclusivement et nous utilisons les observations à la fermeture des marchés.

Figure 4-2 Le S&P 500 de Juin 2004 à Décembre 2014

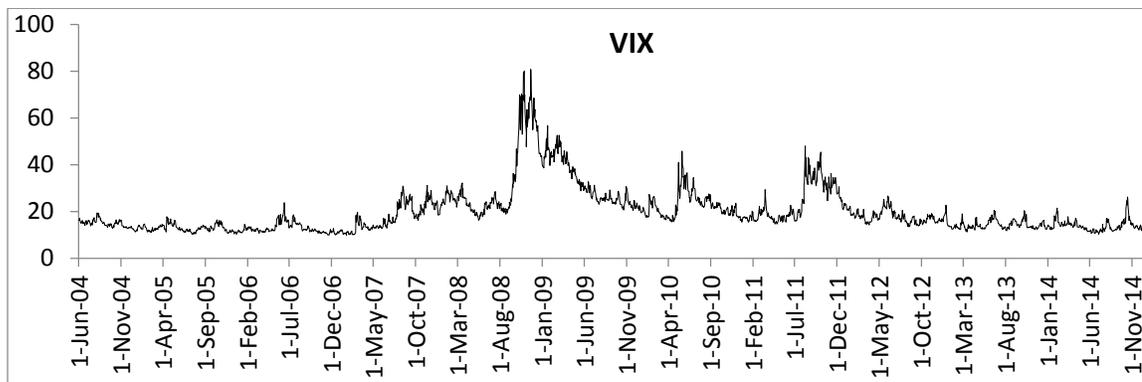


Source: Bloomberg

- Volatilité telle que mesurée par le VIX: CBOE – 1<sup>er</sup> juin 2004 au 31 Décembre 2014.

Le VIX résultant d la méthode de calcul actuelle est disponible à posteriori depuis le 2 janvier 1990. Nous utilisons la valeur du VIX à la fermeture depuis juin 2004, date à partir de laquelle les contrats à terme sur le VIX sont disponibles (voir ci-dessous). Les données sont celles du *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) et sont accessibles via son site internet. Nous utilisons les données mises à jour quotidiennement et compilées selon la nouvelle méthode de 2004 à aujourd'hui.<sup>11</sup>

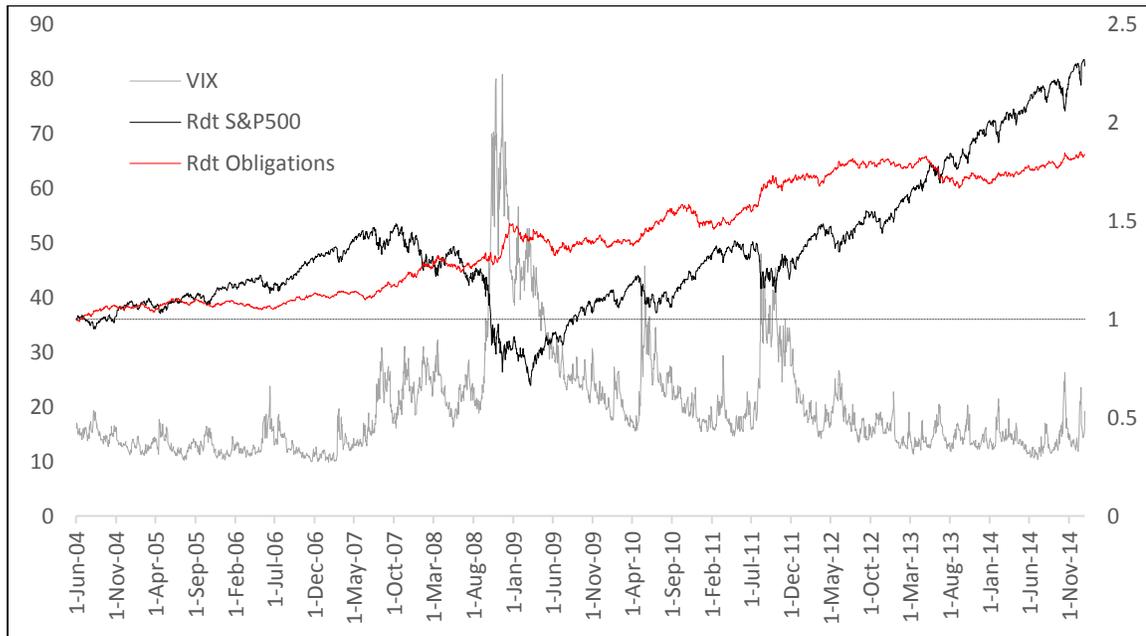
Figure 4-3 le VIX de Juin 2004 à Décembre 2014



Source: Bloomberg

<sup>11</sup> <http://www.cboe.com/micro/vix/historical.aspx>

**Figure 4-4 Rendements des actions et des obligations de Juin 2004 à Décembre 2014 vis-à-vis le VIX**



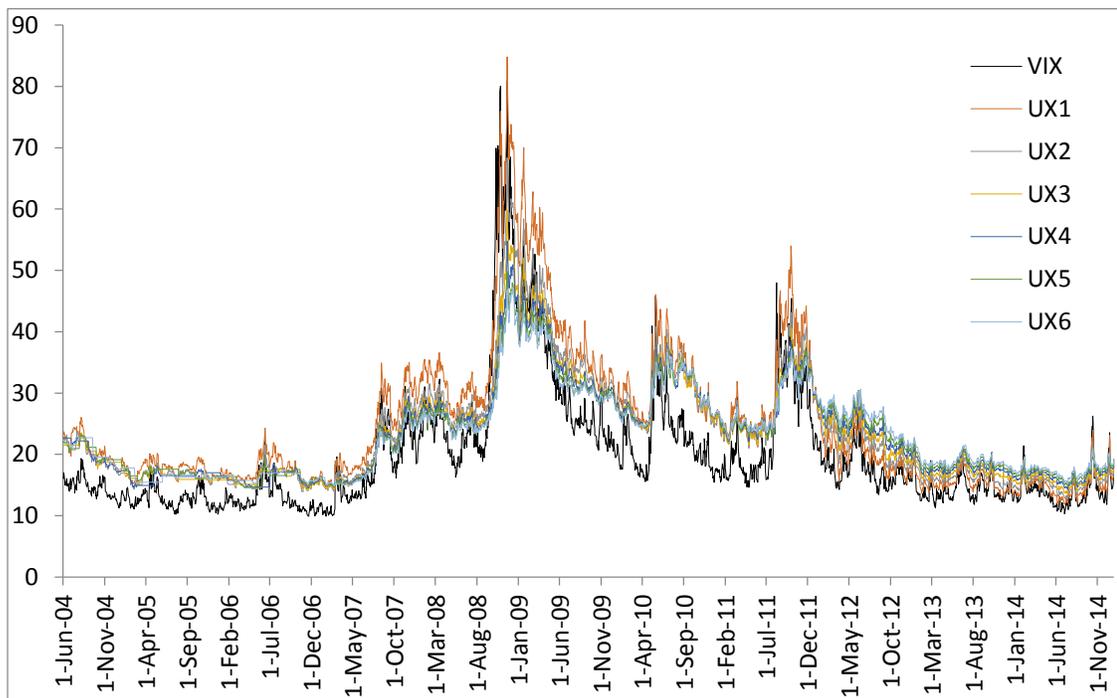
Source: Bloomberg

- **Contrats à terme sur le VIX** : Bloomberg : UX1, UX2, UX3, UX4, UX5, UX6 - 1<sup>er</sup> juin 2004 au 31 Décembre 2014 inclusivement

Nous utilisons les données à la fermeture de la valeur au marché des contrats à terme 1, 2, 3, 4, 5 et 6 mois sur le VIX. Les instruments listés qui reflètent les contrats à terme sur le VIX sur Bloomberg sont UX1, UX2, UX3, UX4, UX5, UX6 – qui sont les contrats à terme ayant la première maturité la plus proche pour UX1 (1 mois), la 2<sup>ème</sup> maturité la plus proche pour UX2, ainsi de suite. Ces indices représentent le plus fidèlement l'évolution des contrats à terme sur le VIX accessibles et transigeables. Tel que détaillé précédemment, les contrats à terme sur le VIX ont commencé à être disponibles seulement au 1<sup>er</sup> juin 2004 et l'indicateur que nous avons construit demande une période d'observation de 12 mois (6 mois dans le cadre des tests de robustesse 4 et 5), ceci explique le fait que juin 2005 soit la date de lancement du portefeuille. Les contrats à terme sur le VIX ont connu un succès retentissant lors des dernières années et leur volume de transaction quotidien a été multiplié par plus de 150 entre 2006 et 2014<sup>12</sup>.

<sup>12</sup> <http://www.cboe.com/micro/volatility/introduction.aspx>

Figure 4-5 Contrats à terme sur le VIX de maturité 1 à 6 mois vis-à-vis leur sous-jacent de Juin 2004 à Décembre 2014



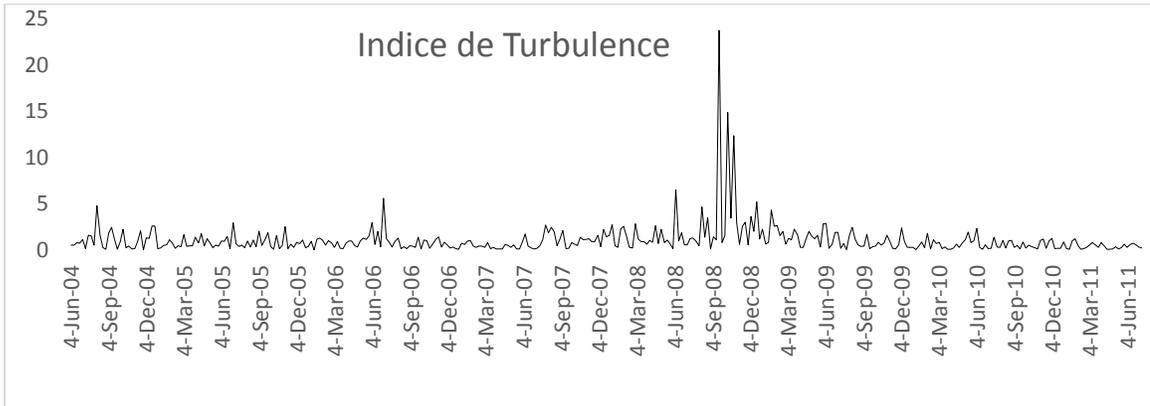
Source: Bloomberg

## 4.2 Les indicateurs existants

- L'Indice de Turbulence

Les données de l'indice jusqu'à l'été 2011 (semaine du 8 juillet 2011) ont été fournies par la Caisse de Dépôt et Placement du Québec et leur utilisation a été autorisée dans le cadre de la rédaction du présent mémoire par l'équipe de gestion du portefeuille de Revenu Fixe gouvernemental. La méthode de construction de l'indice à partir de la distance de l'observation par rapport à la moyenne multivariée de l'échantillon est largement expliquée aussi dans la revue de littérature que dans le chapitre 3.

Figure 4-6 Distribution de l'indice de turbulence de Juin 2004 à Juillet 2011.



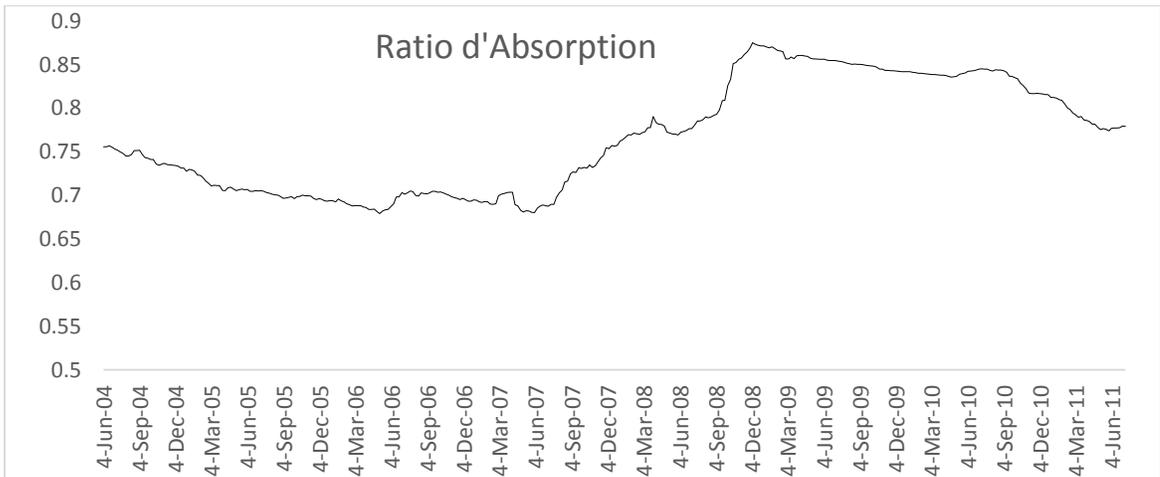
Source: State Street

- Le ratio d'absorption

Les données de l'indice jusqu'à Avril 2013 ne sont pas accessibles publiquement et ont été fournies par State Street (Montréal) avec l'autorisation de les utiliser dans le cadre du présent mémoire.

La définition et la construction du *ratio d'absorption* par un nombre fini de vecteurs propres lors de l'analyse en composante principale a été documentée dans la revue de littérature et au chapitre 3.

Figure 4-7 Distribution du ratio d'absorption de Juin 2004 à Avril 2013



Source: State Street

## Chapitre 5

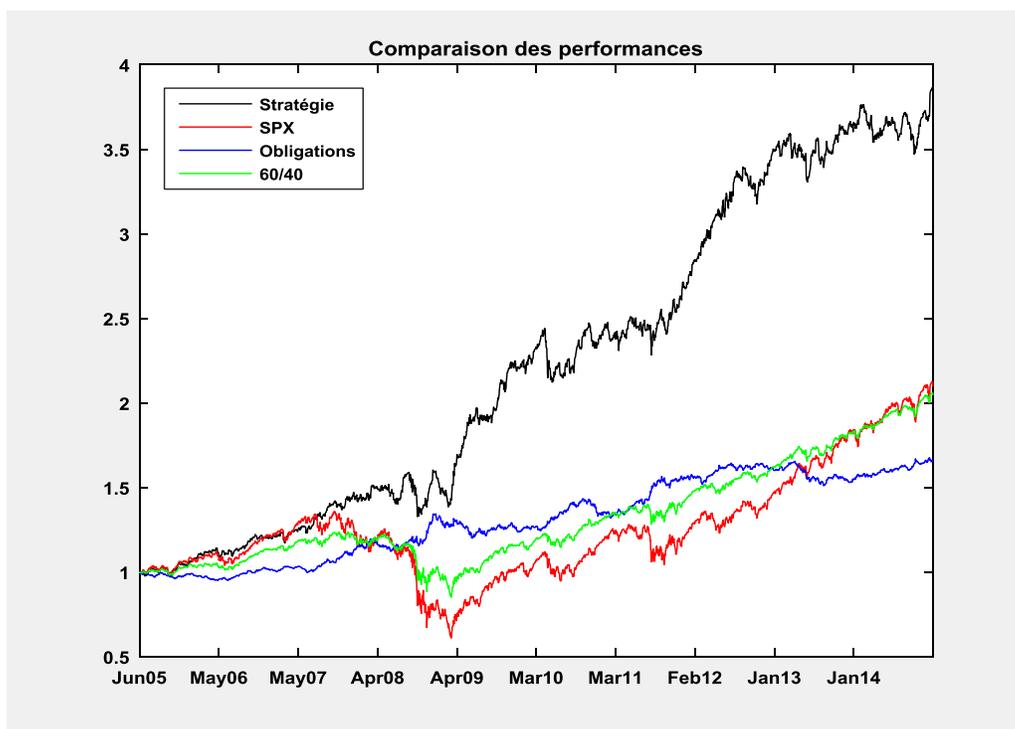
### Résultats

Rappelons la formule générale présentée à l'Équation (3.13)

$$\Delta_t = \frac{\frac{1}{\ln(VIX_{t-1})}}{\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{i=t-1} \frac{1}{\ln(VIX_i)}} \times \frac{\frac{1}{N_{LT12}} \times \sum_{i=1}^{i=t_{LT12}-1} VIX_i}{\frac{1}{N_{CT}} \times \sum_{i=1}^{i=t_{CT}-1} VIX_i} \times \frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}}$$

Le graphique ci-dessous compare l'évolution du portefeuille virtuel transigé selon les signaux générés par l'indicateur développé. Afin de mesurer la performance relative de ce portefeuille virtuel nous avons intégré l'indice d'actions S&P500, l'indice obligataire Barclays 7-10 ans ainsi qu'un portefeuille passif rééquilibré chaque jour afin de respecter la combinaison 60% actions, 40% obligations.

Figure 5-1: Performance de la Stratégie d'allocation dynamique d'actifs



La performance du portefeuille dynamique est visuellement supérieure aux indices de référence. De ce premier résultat nous pouvons observer une différence majeure entre les comportements du portefeuille de référence et celui du S&P500 lors de la crise financière de entre 2007-2009 : le rebalancement dynamique du portefeuille de référence entre les deux classes d'actifs fait en sorte que ce dernier évite la majeure partie de la baisse sur le marché des actions durant cette période. Les résultats suivants vont décomposer la performance de notre stratégie selon différentes mesures et périodes. La valeur ajoutée de l'utilisation de l'indicateur est vraiment mise en évidence durant les périodes de forte volatilité (souvent synonymes de baisse) des rendements journaliers du S&P500.

Anne Hancock (2012) souligne un manque de recherche académique en la matière. Elle met en évidence que la majorité des recherches faites sur l'interprétation et l'utilisation empirique de l'information contenue dans la structure à terme du VIX vient des départements de recherche d'institutions financières privées. Les contributions de Kritzman (2010,2011) à la littérature scientifique avec le *ratio d'absorption* ont été transposées au domaine privé chez State Street et Windham Capital avec l'*Indice de risque systémique*. Nos résultats sont comparés au test 8 avec le *ratio d'absorption* et dans les annexes aux travaux empiriques de différentes firmes.

Ci-dessous les principales mesures de performance et de risque sur la période allant de 2005 à 2014:

Tableau 5-1 Statistiques descriptives du portefeuille d'allocation dynamique d'actifs

	<b>ALLOCATION DYNAMIQUE</b>	<b>SPX</b>	<b>OBLIGATIONS</b>	<b>60/40</b>
<b>RENDEMENT ANNUALISÉ</b>	14.98%	8.02%	5.46%	7.75%
<b>ÉCART-TYPE</b>	12.33%	20.72%	6.98%	11.67%
<b>RATIO D'INFORMATION</b>	1.21	0.3871	0.7817	0.6637
<b>CHUTE MAXIMALE</b>	16.65%	55.25%	11.01%	31.37%

\*Du 2 Juin 2005 au 31 Décembre 2014

Les résultats du tableau 5-1 montrent la supériorité du portefeuille de référence en termes de rendement mais surtout en termes de rendement par rapport au risque. L'évènement de chute maximale se rapproche le plus de celui de l'indice obligataire tandis que le rendement observé est nettement supérieur à celui de tous les indices. L'écart-type des rendements est moins élevé que celui observé sur le S&P500 et légèrement supérieur à celui de la stratégie passive 60% actions / 40% obligations. L'analyse de la courbe des rendements du portefeuille de référence à

la figure 5-1 concorde avec ces résultats et le tableau 5-2 dans lequel nous analysons année par année la performance du portefeuille dynamique par rapport aux indices de référence permet de raffiner l'analyse de la valeur ajoutée de notre indicateur. Nous testerons plus loin la significativité des résultats ainsi qu'une éventuelle sur-calibration des paramètres de décision à l'aide du test *White Reality Check*.

Nous comparons ci-dessous les performances de notre allocation d'actifs à celles du S&P500, de l'indice obligataire ainsi que le portefeuille 60% actions / 40% obligations de 2005 à 2014.

Tableau 5-2 Comparaison de la performance aux indices de référence

	ALLOCATION DYNAMIQUE	SPX	OBLIGATIONS	60/40	EXCÈS / SPX	EXCÈS / OBLIGATIONS	EXCÈS / 60-40
<b>2005*</b>	2.98%	4.94%	-1.16%	2.54%	-2.02%	4.08%	0.44%
<b>2006</b>	16.81%	15.79%	2.23%	10.31%	0.93%	14.49%	6.50%
<b>2007</b>	21.09%	5.49%	10.45%	7.92%	15.40%	10.45%	13.17%
<b>2008</b>	8.28%	-37.0%	18.94%	-16.65%	45.34%	-10.61%	24.93%
<b>2009</b>	39.63%	26.46%	-6.81%	13.27%	13.40%	46.68%	26.36%
<b>2010</b>	8.90%	15.06%	9.43%	13.46%	-6.14%	-0.51%	-4.56%
<b>2011</b>	12.14%	2.11%	15.46%	8.31%	10.08%	-3.27%	3.83%
<b>2012</b>	24.46%	16.0%	3.83%	11.33%	8.45%	20.62%	13.13%
<b>2013</b>	9.52%	32.39%	-5.79%	15.79%	-22.87%	15.31%	-6.27%
<b>2014</b>	3.97%	13.69%	8.82%	11.98%	-9.72%	-4.85%	-8.01%

\*Du 2 Juin 2005 au 31 Décembre 2014

Seulement en 2010 et 2014 le portefeuille dynamique n'apporte pas de valeur par rapport aux indices de référence. Le portefeuille dynamique n'a pas mieux performé que le S&P500 en 2010, 2013 et 2014. Lors de ces trois années le S&P500 a eu des rendements respectifs de 15.06%, 32.39% et 13.69%. Le portefeuille passif 60% actions / 40% obligations a également mieux performé que le portefeuille dynamique durant les mêmes périodes et ce résultat est à mettre en relation avec la sous-performance du portefeuille dynamique par rapport au S&P500. L'indicateur construit pour identifier les périodes de stress (définies comme volatiles) limite l'exposition du portefeuille dynamique au marché des actions lorsque la volatilité implicite de ce dernier augmente. Ces périodes sont facilement identifiables à la figure 4-3. Les autres années, particulièrement 2007, 2008 et 2011 (où le rendement positif du S&P500 est imputable aux dividendes), le portefeuille dynamique offre des rendements nettement supérieurs à ceux du S&P500 tout en réduisant leur volatilité. Nous concluons là encore que l'indicateur se montre le plus utile dans les périodes plus difficiles pour le marché des actions.

L'indicateur fonctionne donc de la manière espérée en permettant au portefeuille dynamique d'éviter les principaux chocs de marché. En adoptant une approche visant à réduire l'exposition aux actions lorsque la volatilité augmente, le portefeuille dynamique peut sous-performer le S&P500 durant certaines périodes où ce dernier affiche de très bons rendements (2010, 2013 et 2014, dont les rendements sont supérieurs à leur moyenne historique de 11.21%) mais se montre très utile lors de périodes qui sont à l'inverse plus dures sur ce marché. L'indicateur a été construit dans une démarche de gestion du risque, et dans ce cadre les résultats présentés sont très satisfaisants.

### 5.1 Transactions : Règles et exposition du portefeuille

Lors de la mise en place des règles de transactions nous avons laissé une certaine marge aux changements de l'indicateur avant de déclencher une réallocation. Le marché contient du bruit et à moins que notre indice recommande une répartition d'actifs différente à plus de 5% de celle de la veille, nous ne transigeons pas et conservons la répartition d'actifs telle quelle.

Tableau 5-3 Nombre et amplitude des transactions dans l'allocation dynamique d'actifs

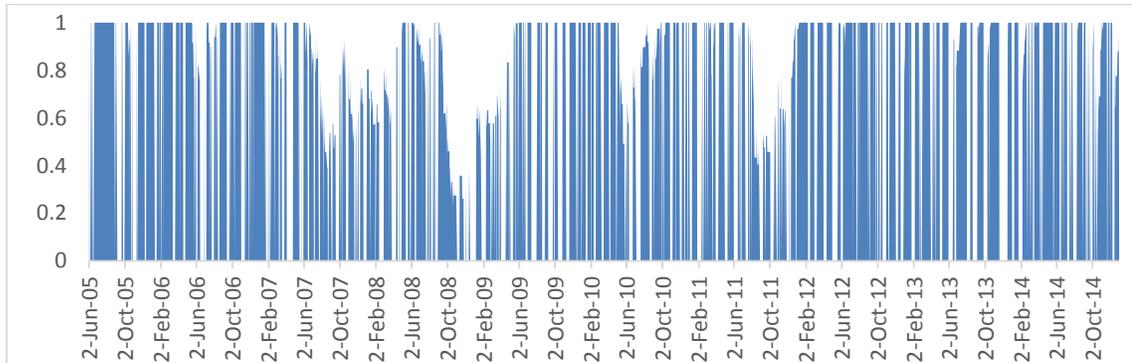
	<b>TRANSACTIONS</b>	<b>AMPLITUDE MOYENNE</b>
<b>2005*</b>	30	87.14%
<b>2006</b>	66	77.29%
<b>2007</b>	105	44.29%
<b>2008</b>	93	41.60%
<b>2009</b>	71	67.64%
<b>2010</b>	78	62.48%
<b>2011</b>	91	54.74%
<b>2012</b>	48	79.54%
<b>2013</b>	45	70.98%
<b>2014</b>	88	74.34%

\*Du 2 Juin 2005 au 31 Décembre 2014

Les années où la volatilité est très volatile, les signaux de réallocation suggérés par l'indicateur sont nombreux. Nous observons en 2007, 2008 et 2011 plus du double de transactions observées en 2012 ou 2013. Il est intéressant de constater que l'amplitude moyenne des transactions est plus faible lors des trois années les plus volatiles observées et cela peut s'interpréter à l'aide de la figure 5-2 qui suit. Tel qu'attendu, le signal renvoyé par l'indicateur fait en sorte que l'exposition du portefeuille dynamique au marché des actions en 2007, 2008 et 2011, est moindre. Les parties

1 et 2 de la formule remplissent leur rôle de modérateur de l'exposition du portefeuille dynamique au S&P500. Le même phénomène s'observe durant la première moitié de 2009, mais l'amplitude moyenne des transactions est plus élevée car l'exposition durant la deuxième partie de l'année est moins nuancée et l'exposition du portefeuille dynamique au S&P500 est soit nulle, soit totale.

Figure 5-2 : Exposition (limitée à 1) du portefeuille à l'indice d'actions.



Nous testerons plus loin la significativité statistique de la surperformance du portefeuille de référence par rapport au S&P500. De prime abord les rendements annualisés de notre stratégie sur ces trois périodes sont assez éloquentes et l'indicateur semble avoir une valeur ajoutée dans la gestion de l'exposition du portefeuille au marché des actions afin de minimiser l'impact des chocs négatifs sur ce dernier.

## 5.2 Tests de robustesse sur la performance en modifiant plusieurs paramètres de l'indicateur

Dans la suite de la présentation des résultats, nous voulons tester la robustesse de différentes manières en neutralisant ou en changeant des paramètres de l'indicateur et des règles de décision afin de mesurer l'impact que ces modifications peuvent avoir. Il est important de noter que nous mesurons la performance du portefeuille mais également les mesures de risque (écart-type et événement de chute maximale) et de rendement ajusté pour le risque. Ces mesures sont fondamentales dans notre analyse pour quantifier la valeur ajoutée de l'information incluse dans la structure à terme de la volatilité quant aux comportements futurs des marchés et allouer les

actifs de manière stratégique. Nous voulons donc être capables d'éviter les forts mouvements adverses de la composante actions sur notre portefeuille.

Dans la suite des tests nous allons agir sur les trois différentes composantes de l'indicateur tout en mettant un accent particulier sur la troisième partie qui contient le processus d'analyse et les règles de décision relatives à la structure à terme du VIX.

- Partie 1 : Le niveau du VIX observé par rapport à sa moyenne historique

$$\frac{\frac{1}{\ln(VIX_{t-1})}}{\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{\ln(VIX_i)}} \quad (5.1)$$

- Partie 2 : La moyenne court terme du VIX par rapport à sa moyenne long terme

$$\frac{\frac{1}{N_{LT12}} \times \sum_{i=1}^{t_{LT12}-1} VIX_i}{\frac{1}{N_{CT}} \times \sum_{i=1}^{t_{CT}-1} VIX_i} \quad (5.2)$$

- Partie 3 : La forme et l'évolution de la structure à terme du VIX

$$\frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}} \quad (5.3)$$

Les résultats des tests de robustesse ci-après mettent en lumière l'importance de la partie 3 de l'indicateur. Cette conclusion est en ligne avec la construction de l'indicateur. Rappelons que l'extraction de l'information incluse dans la structure à terme du VIX est effectuée dans la partie 3 de la formule que nous avons défini comme *Indicateur VIX*. En pratique  $\frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}}$  est binaire et la composante 1 et 2 de l'indicateur sont des compléments qui vont permettre de raffiner le signal renvoyé par la partie 3.

Dans les tests 1 à 3, nous allons agir sur la construction de l'indicateur en neutralisant tour à tour chacune des parties de l'indicateur et en ne conservant que la partie 3 de la formule. Par la suite les tests 4 à 7 agiront sur les règles de décision implicites à la partie 3 en modifiant la définition de long terme et court terme, les paramètres de calibration de l'indice en redéfinissant les catégorisations de la forme de la structure à terme du VIX.

5.2.1 Test 1 : Modification : 1<sup>ère</sup> composante de la formule est neutralisée

$$\Delta_t = \frac{\frac{1}{\ln(VIX_{t-1})}}{\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{\ln(VIX_i)}} \times \frac{\frac{1}{N_{LT12}} \times \sum_{i=1}^{t-LT12-1} VIX_i}{\frac{1}{N_{CT}} \times \sum_{i=1}^{t-CT-1} VIX_i} \times \frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}} \quad (5.4)$$

Figure 5-3 : Test de Robustesse 1

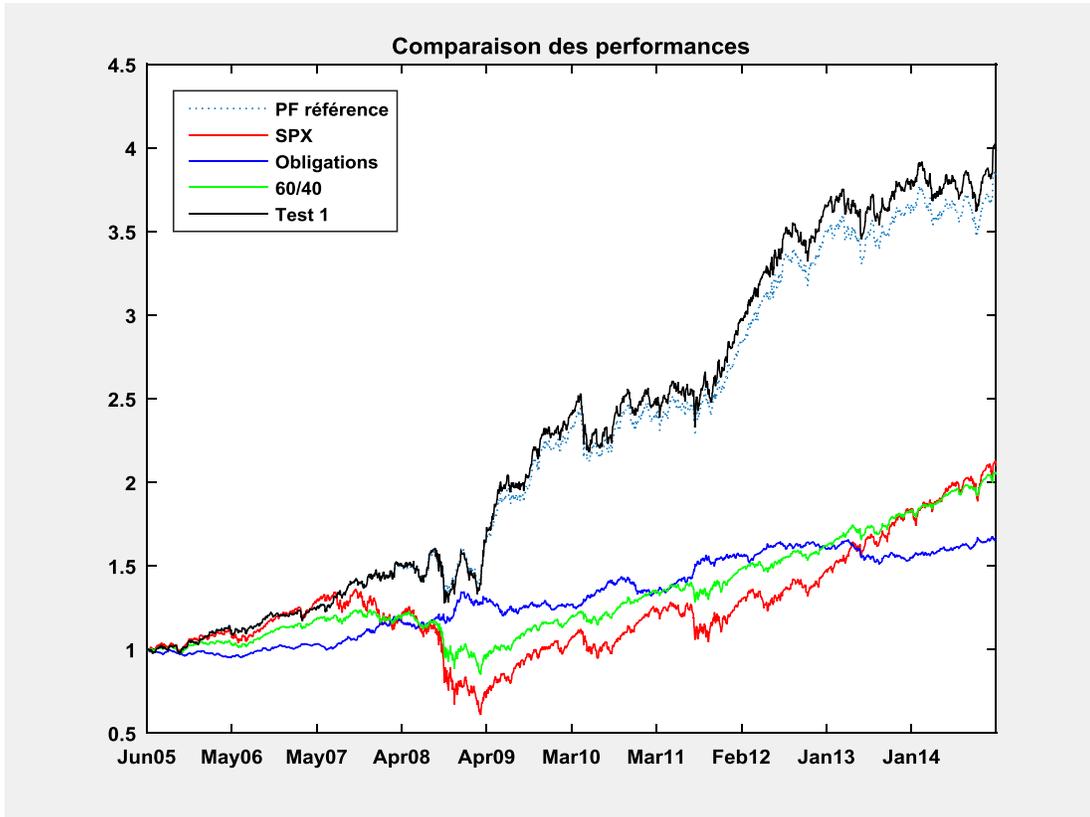


Tableau 5-4: Mesures de performance du premier test de robustesse

	PORTEFEUILLE RÉFÉRENCE	TEST 1	SPX	OBLIGATIONS	60/40
<b>RENDEMENT ANNUALISÉ</b>	14.98%	15.50%	8.02%	5.46%	7.75%
<b>ÉCART-TYPE</b>	12.33%	13.70%	20.72%	6.98%	11.67%
<b>RATIO D'INFORMATION</b>	1.21	1.1313	0.3871	0.7817	0.6637
<b>CHUTE MAXIMALE</b>	16.65%	20.60%	55.25%	11.01%	31.37%

La partie 1 de la formule est la plus dynamique, c'est elle qui permet de détecter les changements soudains dans la valeur du VIX avec un délai très faible (1 observation) : la neutralisation de cette

partie impacte alors la vitesse de réaction de l'indicateur et donc sa capacité à réduire rapidement l'exposition au marché des actions. L'absence de ce filtre rend l'allocation dynamique moins défensive et fait en sorte que le portefeuille dynamique prend légèrement plus de temps à réagir lorsque l'Indicateur VIX est différent de 0. L'exposition au S&P500 est moins nuancée dans le cadre du test 1. La figure 3-1 expose la distribution de la partie 1 sur l'intégralité de la période. Entre 2008 et 2012 la partie 1 est de manière quasi systématique inférieure à 1 et contribue donc à réduire l'exposition du portefeuille dynamique au marché des actions lorsque cette dernière était différente de 0. Durant cette période l'exposition du portefeuille dynamique au S&P500, dans le cadre du test 1, est donc légèrement supérieure à celle du portefeuille de référence. Cette différence se traduit par une meilleure performance du test 1 à la fin 2010 ainsi qu'en 2012 et 2013, périodes durant lesquelles le S&P500 a très bien performé. Les mesures de risque ont également été impactées par une plus grande exposition au marché des actions, et lorsqu'un mouvement adverse sur le marché des actions n'est pas évité, le portefeuille dynamique est alors plus impacté car plus exposé : l'écart-type des rendements et l'évènement de chute maximale sont légèrement supérieurs dans le test 1.

Les tests statistiques à la section 5.3 montreront que la neutralisation de la partie 1 n'impacte pas le rendement du portefeuille dynamique de manière significative. L'impact de cette neutralisation est en revanche significatif sur l'écart-type des rendements. Nous reconnaissons donc une contribution non-nulle de la partie 1 au fonctionnement de l'indicateur.

5.2.2 Test 2 : Modification : 2<sup>ème</sup> composante de la formule neutralisée

$$\Delta_t = \frac{1}{\ln(VIX_{t-1})} \times \frac{\frac{1}{N_{t,t+2}} \times \sum_{i=1}^{i=t,t+2-1} VIX_t}{\frac{1}{N_{CF}} \times \sum_{i=1}^{i=t,CF-1} VIX_t} \times \frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}} \quad (5.5)$$

Figure 5-4 : Test de Robustesse 2

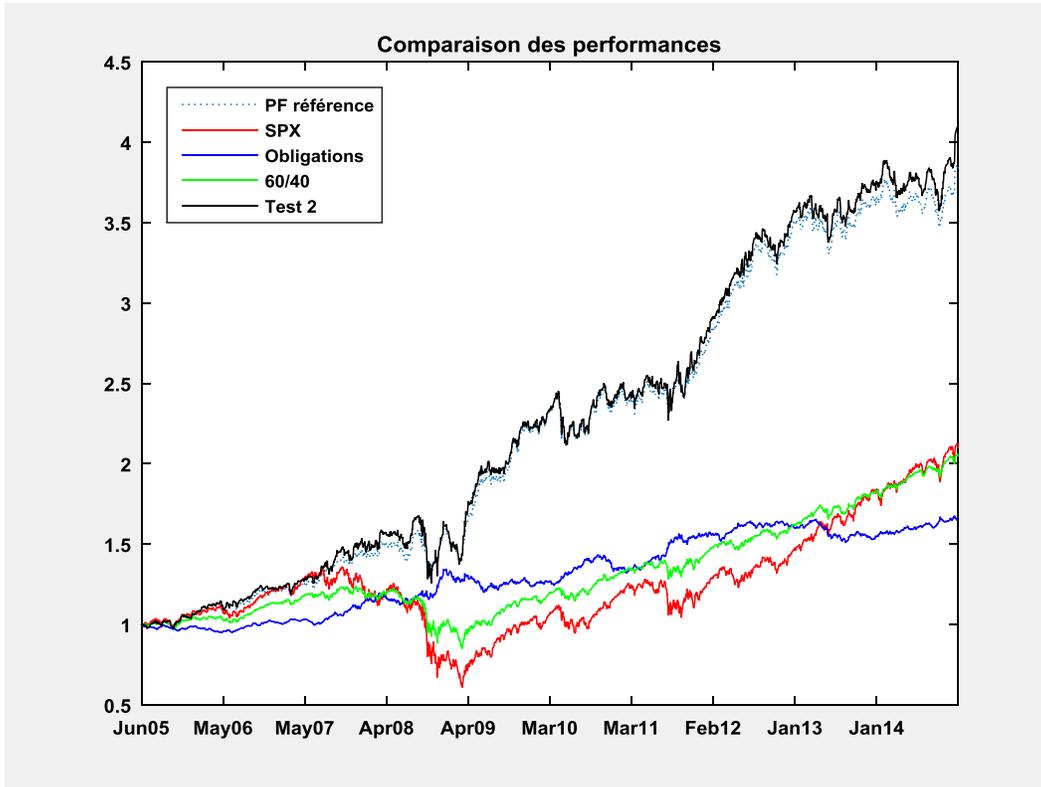


Tableau 5-5 : Mesures de performance du deuxième test de robustesse

	PORTEFEUILLE RÉFÉRENCE	TEST 2	SPX	OBLIGATIONS	60/40
RENDEMENT ANNUALISÉ	14.98%	15.66%	8.02%	5.46%	7.75%
ÉCART-TYPE	12.33%	14.90%	20.72%	6.98%	11.67%
RATIO D'INFORMATION	1.21	1.0508	0.3871	0.7817	0.6637
CHUTE MAXIMALE	16.65%	25.17%	55.25%	11.01%	31.37%

La deuxième partie de l'indicateur détecte la tendance à court terme par rapport à l'année qui vient de s'écouler (252 observations). L'impact de chaque observation est ressenti sur la valeur de l'indicateur pendant plus longtemps que dans la partie 1 de la formule : le dénominateur étant

la moyenne 2 semaines du VIX, la réaction immédiate à pic de volatilité est moins prononcée que celle de la partie 1 mais l'effet de chaque observation est ressenti durant 2 semaines. L'impact de cette partie sur le niveau d'exposition au marché est donc plus persistant que celui de la partie 1.

La distribution de la partie 2 présentée à la figure 3-2 est plus étendue que celle de la partie 1, ayant donc un impact plus prononcé sur l'exposition du portefeuille dynamique au S&P500. Nous constatons ci-dessus que la neutralisation de la partie 2 se fait principalement ressentir en 2008 et fin 2014. Dans le test 2, l'exposition du portefeuille dynamique au S&P500 est supérieure avant le choc majeur de septembre 2008 et l'impact de ce choc est donc plus important, ce qui se traduit par un événement de chute maximale plus important. De même l'exposition du portefeuille dynamique au S&P500 n'est pas réduite fin 2014 et cela se traduit par une meilleure performance car la participation du portefeuille à la performance du marché des actions n'est pas amoindrie.

Tout au long de ce travail nous avons fait de nombreuses références aux travaux de Kritzman (2010, 2011) et avons utilisé la propriété de la persistance de la turbulence que ce dernier et Li ont mis en évidence. Le chapitre 3 détaille la construction de l'indicateur et la partie 2 de l'indicateur  $\gamma$  est présentée comme la résultante de l'intégration de cette propriété. La neutralisation de la partie 2 dans notre indicateur fait en sorte d'exclure cette propriété du signal renvoyé par notre indicateur. Le tableau 5-5 indique que les rendements obtenus au test 2 sont légèrement supérieurs mais avec des mesures de risques qui sont visiblement moins bonnes.

Là encore les tests statistiques à la section 5.3 valideront la significativité de l'impact de cette partie sur les mesures de risque du portefeuille dynamique. Selon le test-t l'impact sur les rendements n'est pas significatif, mais l'écart-type des rendements et l'évènement de chute sont supérieurs de manière statistiquement significative. Nous reconnaissons ici aussi une contribution non-nulle de la partie 2 au fonctionnement de l'indicateur en tant qu'outil de gestion de risque.

5.2.3 Test 3 : Modification : 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> composantes de la formule neutralisées

$$\Delta_t = \frac{\frac{1}{\ln(VIX_{t-1})}}{\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{\ln(VIX_i)}} \times \frac{\frac{1}{N_{LFI2}} \times \sum_{i=1}^{t-LFI2-1} VIX_i}{\frac{1}{N_{CF}} \times \sum_{i=1}^{t-CF-1} VIX_i} \times \frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}} \quad (5.6)$$

Figure 5-5 : Test de Robustesse 3

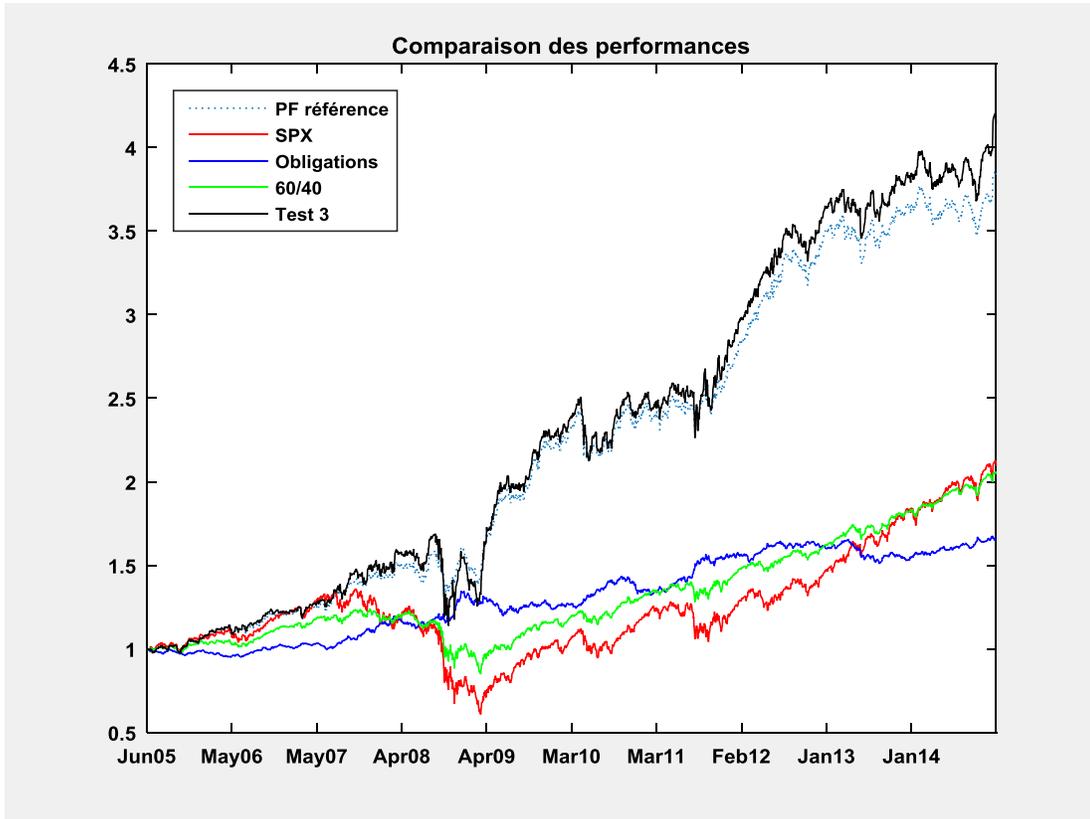


Tableau 5-6 : Mesures de performance du troisième test de robustesse

	PORTEFEUILLE RÉFÉRENCE	TEST 3	SPX	OBLIGATIONS	60/40
RENDEMENT ANNUALISÉ	14.98%	15.99%	8.02%	5.46%	7.75%
ÉCART-TYPE	12.33%	17.31%	20.72%	6.98%	11.67%
RATIO D'INFORMATION	1.21	0.9240	0.3871	0.7817	0.6637
CHUTE MAXIMALE	16.65%	32.58%	55.25%	11.01%	31.37%

La neutralisation des parties 1 et 2 de l'indicateur donne des résultats prévisibles à la lumière des résultats obtenus dans les tests 1 et 2. La neutralisation des deux premières parties de la formule affecte peu le comportement général de l'indicateur comme nous pouvons le constater à la figure

5-5. L'impact n'est pas ressenti dans la réactivité de l'indicateur mais plutôt dans les niveaux d'exposition du portefeuille dynamique au S&P500. La comparaison de la courbe des rendements met en évidence une forme quasi-identique mais dont les mouvements au test 3 sont exacerbés par rapport au portefeuille de référence. Nous avons discuté plus haut l'impact en 2008 de la neutralisation de la partie 2. La neutralisation de la partie 1 contribue donc à améliorer les rendements du portefeuille dynamique dans le test 3 et amplifie l'impact positif de la neutralisation de la partie 2 à la fin 2014. L'effet de cette double neutralisation est très visible en comparant les figures 3-3 et 3-6. Nous avons en effet neutralisé la mémoire à court-terme de l'indicateur et ce dernier n'a plus de mécanisme modérant l'exposition au marché des actions. *Delta*, lorsque différent de 0, est alors la partie 3 et donc très proche de 1 et n'est pas mitigé par les parties 1 et 2.

Nous ne sommes alors pas étonnés d'obtenir une volatilité des rendements presque 50% plus élevée ainsi qu'un événement de chute maximale représentant quasiment le double de celui du portefeuille auquel est appliqué l'indicateur non modifié. Le rendement légèrement supérieur peut s'expliquer par la compensation entre les rendements négatifs plus prononcés lors de chocs de marché et la plus grande participation au rendement des équités du fait de la pondération plus importante dans cette classe d'actifs. Les tests statistiques à la section 5.3 confirment là encore un impact non-négligeable des parties 1 et 2 sur les mesures de risque observées.

5.2.4 Test 4 : Modification : 2<sup>ème</sup> composante – LT 1 an devient LT 6 mois et CT reste 2 semaines

$$\Delta_t = \frac{\frac{1}{\ln(VIX_{t-1})}}{\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{\ln(VIX_i)}} \times \frac{\frac{1}{N_{LT6}} \times \sum_{i=1}^{t-LT6} VIX_i}{\frac{1}{N_{CT}} \times \sum_{i=1}^{t-CT-1} VIX_i} \times \frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}} \quad (5.7)$$

Figure 5-6 : Test de Robustesse 4

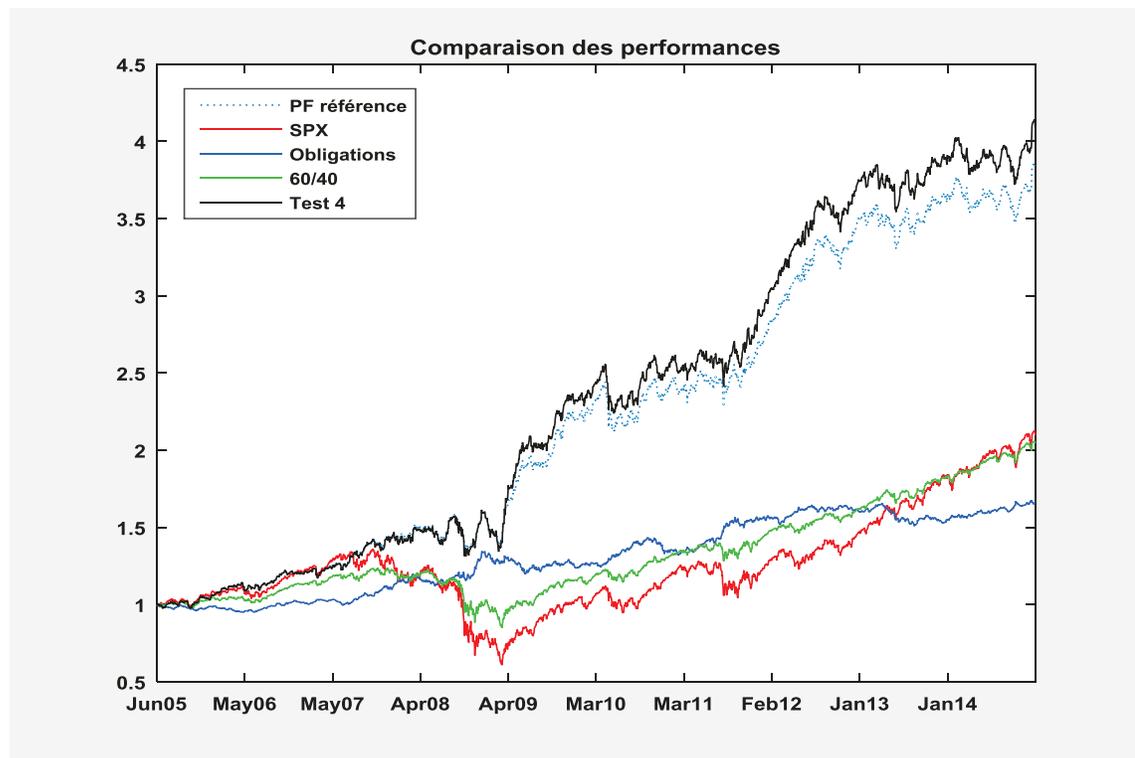


Tableau 5-7 : Mesures de performance du quatrième test de robustesse

	PORTEFEUILLE RÉFÉRENCE	TEST 4	SPX	OBLIGATIONS	60/40
RENDEMENT ANNUALISÉ	14.98%	15.81%	8.02%	5.46%	7.75%
ÉCART-TYPE	12.33%	12.85%	20.72%	6.98%	11.67%
RATIO D'INFORMATION	1.21	1.2307	0.3871	0.7817	0.6637
CHUTE MAXIMALE	16.65%	16.82%	55.25%	11.01%	31.37%

En réduisant de 1 an à 6 mois la période sur laquelle est calculée la moyenne long terme du VIX, nous changeons les paramètres de calibration de la partie 2 de l'indicateur. Les tests 2 et 3 ont mis en évidence une contribution significative de cette composante sur l'écart-type des

rendements journaliers du portefeuille dynamique. La réduction de la période sur laquelle la moyenne long terme est calculée fait en sorte que la partie 2 devient plus dynamique. L'impact d'une observation reste le même sur le dénominateur mais son impact devient deux fois plus important sur le numérateur. Cet impact paraît insignifiant car le numérateur passe de 252 observations à 126 observations et l'influence d'une seule observation, même doublée, reste marginale. Les périodes de volatilité plus élevées ont donc un impact plus important sur le numérateur que lorsque la moyenne est calculée sur 1 an. Il en résulte que la partie 2 devrait renvoyer des valeurs légèrement plus élevées dans le cadre du test 4. Nous comprenons donc que l'exposition du portefeuille dynamique au marché des actions sera légèrement plus élevée que celle du portefeuille de référence. Le tableau 5-7 fait état d'un rendement supérieur avec de meilleures mesures de risque, le ratio d'information étant plus élevé.

Les tests statistiques à la section 5.3 ne permettront pas de conclure à une différence significative aussi bien en termes de rendements que pour l'écart-type ni même à la supériorité de la stratégie par rapport à la formule de référence. Ceci étant dit, les résultats de ce test illustrent une des nombreuses possibilités de meilleure calibration de l'indicateur pouvant être explorées afin d'obtenir de meilleurs résultats.

5.2.5 Test 5 : Modification : 2<sup>ème</sup> partie – LT 1 an devient LT 6 mois et CT 2 semaines devient 1 semaine

$$\Delta_t = \frac{\frac{1}{\ln(VIX_{t-1})}}{\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{\ln(VIX_i)}} \times \frac{\frac{1}{N_{LT12}} \times \sum_{i=1}^{(LT6)^{-1}} VIX_i}{\frac{1}{N_{CT}} \times \sum_{i=1}^{(CT)^{-1}} VIX_i} \times \frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}} \quad (5.8)$$

Figure 5-7 : Test de Robustesse 5

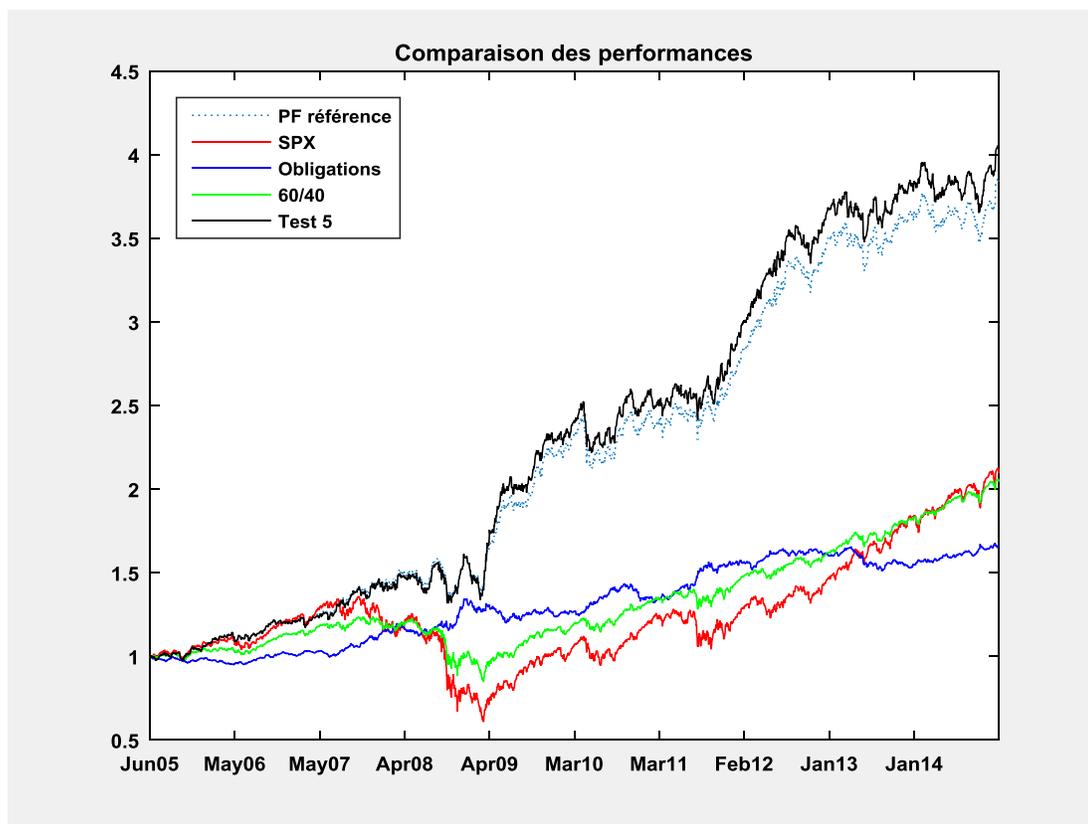


Tableau 5-8 : Mesures de performance du cinquième test de robustesse

	PORTEFEUILLE RÉFÉRENCE	TEST 5	SPX	OBLIGATIONS	60/40
RENDEMENT ANNUALISÉ	14.98%	15.55%	8.02%	5.46%	7.75%
ÉCART-TYPE	12.33%	12.56%	20.72%	6.98%	11.67%
RATIO D'INFORMATION	1.21	1.2377	0.3871	0.7817	0.6637
CHUTE MAXIMALE	16.65%	17.00%	55.25%	11.01%	31.37%

En changeant de 1 an à 6 mois la période sur laquelle est calculée la moyenne long terme du VIX, et de 2 semaines à 1 semaine pour la définition de court terme nous changeons les paramètres de calibration de la partie 2 de l'indicateur. Les tests 2 et 3 ont mis en évidence un impact significatif de cette partie sur l'écart-type des rendements journaliers du portefeuille dynamique et le test 4 a produit de meilleurs résultats mais qui n'ont pas été validés statistiquement. La réduction de la période sur laquelle les moyennes long terme et court terme sont calculées fait en sorte que la partie 2 devient plus dynamique. La différence majeure avec le test précédent est l'impact d'une observation sur le dénominateur de la partie 2. Chaque nouvelle observation représente un cinquième de la valeur du dénominateur et la mémoire court terme de l'indicateur est réduite de moitié. La diminution de la persistance nous fait anticiper une réactivité accrue de cette partie influant alors sur le niveau d'exposition du portefeuille dynamique au S&P500. L'exposition du portefeuille au marché des actions se fera donc plus rapidement après un choc. L'impact du changement de 1 an à 6 mois dans le cadre de la moyenne long terme est moins important. Les périodes de volatilité plus élevées ont donc un impact plus important sur le numérateur que lorsque la moyenne est calculée sur 1 an.

Comme lors du test précédent, la conclusion est que la calibration initiale des paramètres de l'indicateur laisse place à l'amélioration et peut être adaptée en fonction de la réponse souhaitée. Cependant, comme lors du test précédent, les différences observées au niveau du rendement, de l'écart-type des rendements ne sont pas statistiquement significatives, et on ne peut pas affirmer que les modifications apportées à la formule rendent la stratégie d'investissement supérieure selon le *White Reality Check*.

## 5.2.6 Test 6 : Modification apportées – 3<sup>ème</sup> partie – 2<sup>ème</sup> décile au lieu de 1<sup>er</sup> décile

$$\Delta_t = \frac{\frac{1}{\ln(VIX_{t-1})}}{\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{\ln(VIX_i)}} \times \frac{\frac{1}{N_{LT12}} \times \sum_{i=1}^{t=LT12-1} VIX_i}{\frac{1}{N_{CT}} \times \sum_{i=1}^{t=CT-1} VIX_i} \times \frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}} \quad (5.9)$$

Figure 5-8: Test de Robustesse 6

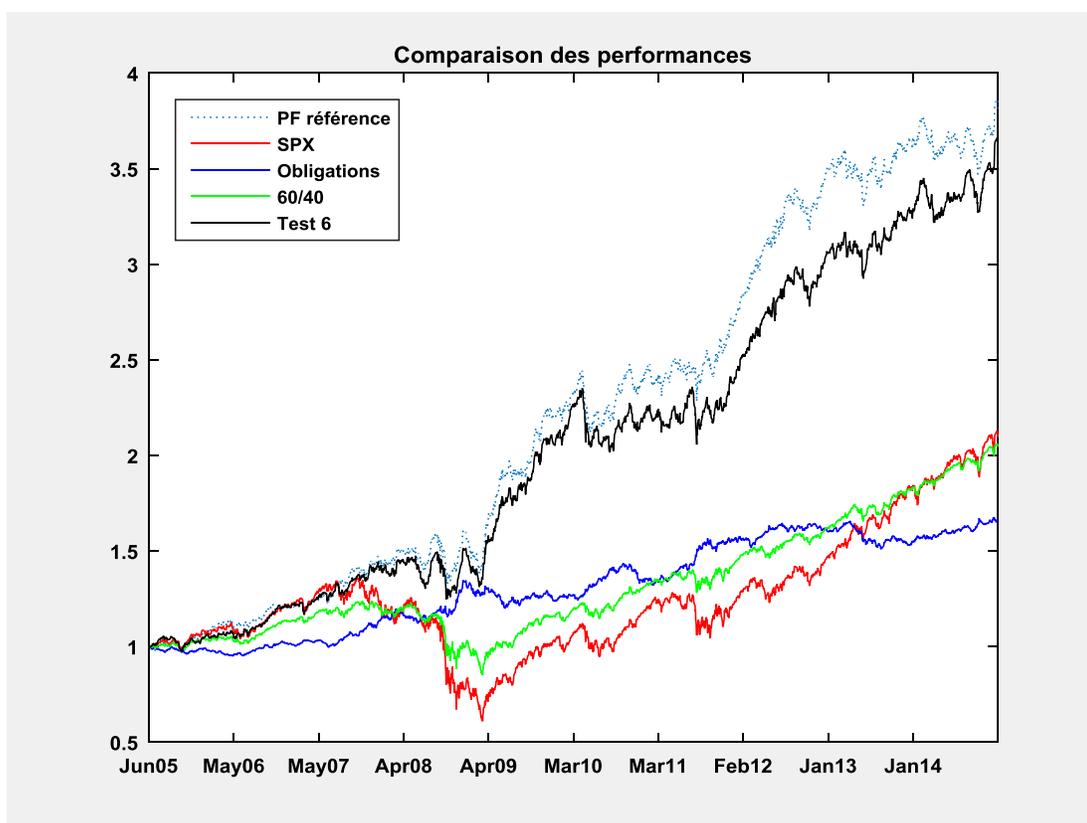


Tableau 5-9 : Mesures de performance du sixième test de robustesse

	STRATÉGIE	TEST 6	SPX	OBLIGATIONS	60/40
RENDEMENT ANNUALISÉ	14.98%	14.34%	8.02%	5.46%	7.75%
ÉCART-TYPE	12.33%	12.34%	20.72%	6.98%	11.67%
RATIO D'INFORMATION	1.21	1.1616	0.3871	0.7817	0.6637
CHUTE MAXIMALE	16.65%	16.65%	55.25%	11.01%	31.37%

Dans le test 6 nous avons modifié un des critères de détermination relié à la forme de la structure à terme du VIX. Comme il a été discuté à la section 3.4, l'Indicateur VIX est la composante centrale

et nous nous attendons à un impact majeur de ce changement sur le fonctionnement de l'indicateur. Cette nouvelle caractérisation de ce qui est défini comme une structure à terme du VIX *plate* semble avoir un impact non-négligeable sur la courbe des rendements. Lors de la construction de l'indicateur, nous définissons une structure à terme comme *plate* lorsque la valeur absolue du résultat de la valeur des contrats à terme 6 mois sur le VIX moins la valeur des contrats à terme 1 mois se trouvait dans les 10% (1<sup>er</sup> décile) les plus faibles des valeurs observées lors de la dernière année. Nous avons modifié ce critère pour définir la structure à terme *plate* comme étant les 20% des valeurs observées lors de la dernière année. La courbe des rendements est impactée, cependant il est intéressant de voir que sa forme générale reste très similaire à celle du portefeuille de référence. Le changement apporté n'impacte le fonctionnement que dans les 10% de cas où la structure à terme était en réalité assez proche d'être *plate* mais n'était pas définie comme telle.

Le tableau 5-9 nous permet de souligner que l'évènement de chute maximale est exactement le même que lorsqu'aucune modification n'est faite à la construction de l'indicateur. De même, l'écart-type des rendements est très similaire entre le test 6 et de portefeuille de référence. Ces résultats confirment que la vitesse de réaction de l'indicateur est imputable à la combinaison des parties 1 et 2 de l'indicateur, et renforcent les résultats des tests 1 et 2.

Les tests effectués à la section 5.3 confirment que seul le rendement est impacté de façon significative. Nous interprétons cela comme suit : lorsque la structure à terme de la volatilité est définie comme *plate*, la règle de décision n'investit dans les équités que lorsque la structure évolue vers le *contango*, donc lorsque la volatilité diminue. Il arrive donc que le portefeuille ne soit pas exposé aux actions alors que la version originale de notre règle aurait renvoyé un signal d'allocation non-nul. Cet effet est visiblement identifiable sur les courbes de rendement lorsque le portefeuille reproduit les rendements de l'indice obligataire alors qu'à la même période la version originale présentait un meilleur rendement du fait de l'exposition (supérieure à 0) au marché des actions. La mise en relation de la figure 5-8 avec la figure 4-3 qui représente la distribution du VIX entre 2004 et 2014 permet de réaliser que l'effet de ce changement se fait particulièrement ressentir lorsque la volatilité est peu volatile. Nous observons les différences entre les courbes de rendements réduire entre mi 2012 et fin 2014 et constatons que l'indicateur modifié a mieux performé sur cette période.

5.2.7 Test 7 : Modification apportées – 3ème partie – 1<sup>er</sup> décile sur 5 mois au lieu de 6 mois

$$\Delta_t = \frac{1}{\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{i=t-1} \frac{1}{\ln(VIX_t)}}} \times \frac{1}{\frac{1}{N_{LT12}} \times \sum_{i=1}^{i=t_{LT6}-1} VIX_t}} \times \frac{\text{Indicateur VIX}}{VIX_{t-2}} \quad (5.10)$$

Figure 5-9 : Test de Robustesse 7

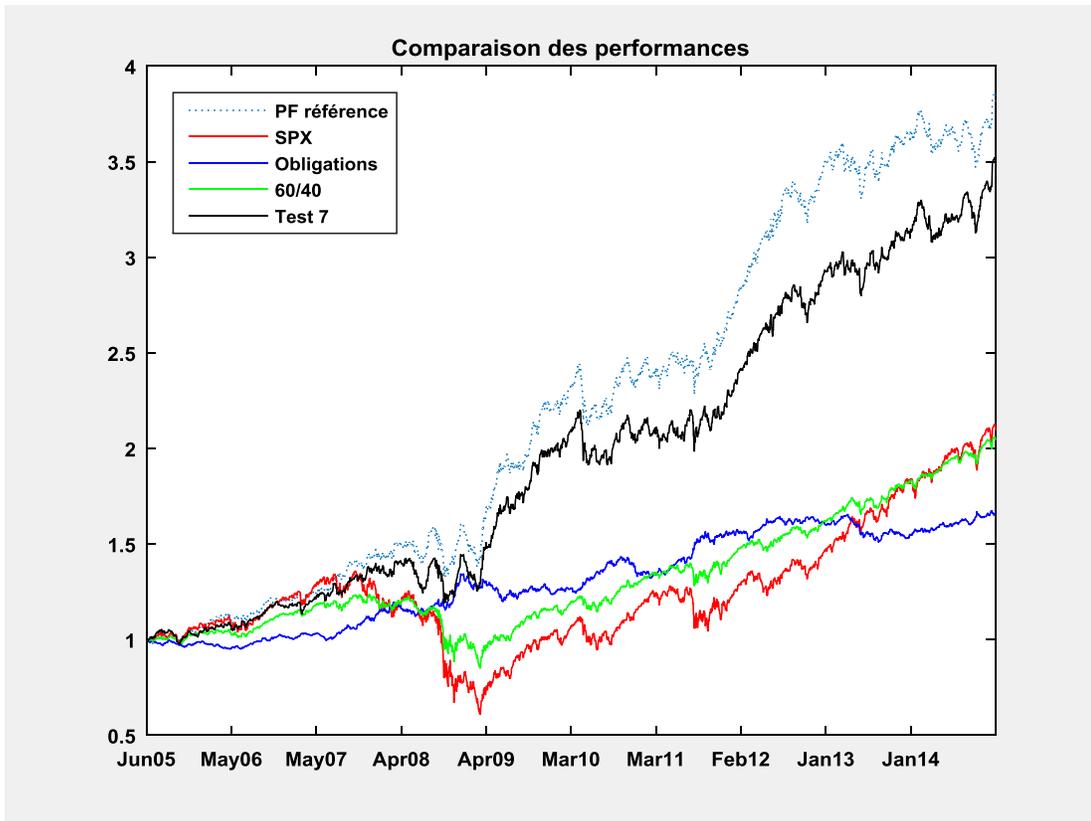


Tableau 5-10 : Mesures de performance du septième test de robustesse

	STRATÉGIE	TEST 7	SPX	OBLIGATIONS	60/40
<b>RENDEMENT ANNUALISÉ</b>	14.98%	13.88%	8.02%	5.46%	7.75%
<b>ÉCART-TYPE</b>	12.33%	12.36%	20.72%	6.98%	11.67%
<b>RATIO D'INFORMATION</b>	1.21	1.1227	0.3871	0.7817	0.6637
<b>CHUTE MAXIMALE</b>	16.65%	16.65%	55.25%	11.01%	31.37%

Dans ce test nous avons altéré un autre critère d'interprétation de la forme de la structure à terme du VIX. La construction originale de l'indicateur établit que la forme de la structure à terme du VIX est déterminée par la valeur absolue du résultat de la valeur des contrats à terme 6 mois sur

le VIX moins la valeur des contrats à terme 1 mois. Nous gardons maintenant la même règle de décision mais considérons les contrats à terme à échéance 5 mois plutôt que 6 mois pour calculer la valeur absolue du résultat. En prenant en compte les contrats à terme 5 mois nous perdons nécessairement de l'information qui est contenue entre les contrats 5 mois et 6 mois. Les contrats à terme sur le VIX sont disponibles jusqu'à 9 mois. Nous aurions pu indifféremment décider de considérer les contrats à terme 4 mois ou 7 mois.

Les conclusions relatives à l'évènement de chute maximale et à la volatilité des rendements se répètent et sont constantes : les composantes 1 et 2 de l'indicateur sont responsables de la réactivité de l'indicateur et du niveau d'exposition du portefeuille aux actions si la partie 3 est non-nulle.

Ici encore la seule différence significative dans les statistiques descriptives des portefeuilles est au niveau des rendements.

Le tableau 2-1 établit la relation inverse entre l'échéance des contrats à terme et l'amplitude de leur réaction à un choc de volatilité. Les contrats à terme 6 mois sont donc moins sensibles à un choc de volatilité que ceux à 5 mois et ces derniers contiennent moins d'information que ceux ayant une échéance plus éloignée. Dans le cas d'un choc de marché, la figure 2-4 illustre que lorsque la structure à terme est en *backwardation* comme en janvier 2009, les contrats à terme 5 mois affichent des valeurs supérieures à ceux ayant une plus longue échéance. L'indicateur va donc rencontrer moins souvent les conditions déterminées pour exposer le portefeuille aux actions. À l'exception du rendement, toutes les mesures sont identiques à celles du portefeuille de référence, il en découle que la différence vient du fait que le portefeuille est marginalement moins exposé aux actions et profite donc moins du potentiel d'appréciation. Dans le cas du test 7 nous constatons également une meilleure performance du portefeuille dynamique modifié en 2014. L'exposition du portefeuille modifié au S&P500 plus faible fait en sorte que ce dernier a plus bénéficié de la performance de la composante revenu fixe que le portefeuille de référence durant cette période.

## 5.2.8 Test 8 : Comparaison entre la stratégie d'allocations d'actifs et le *ratio d'absorption*.

Figure 5-10 : Performance comparée au *ratio d'absorption*

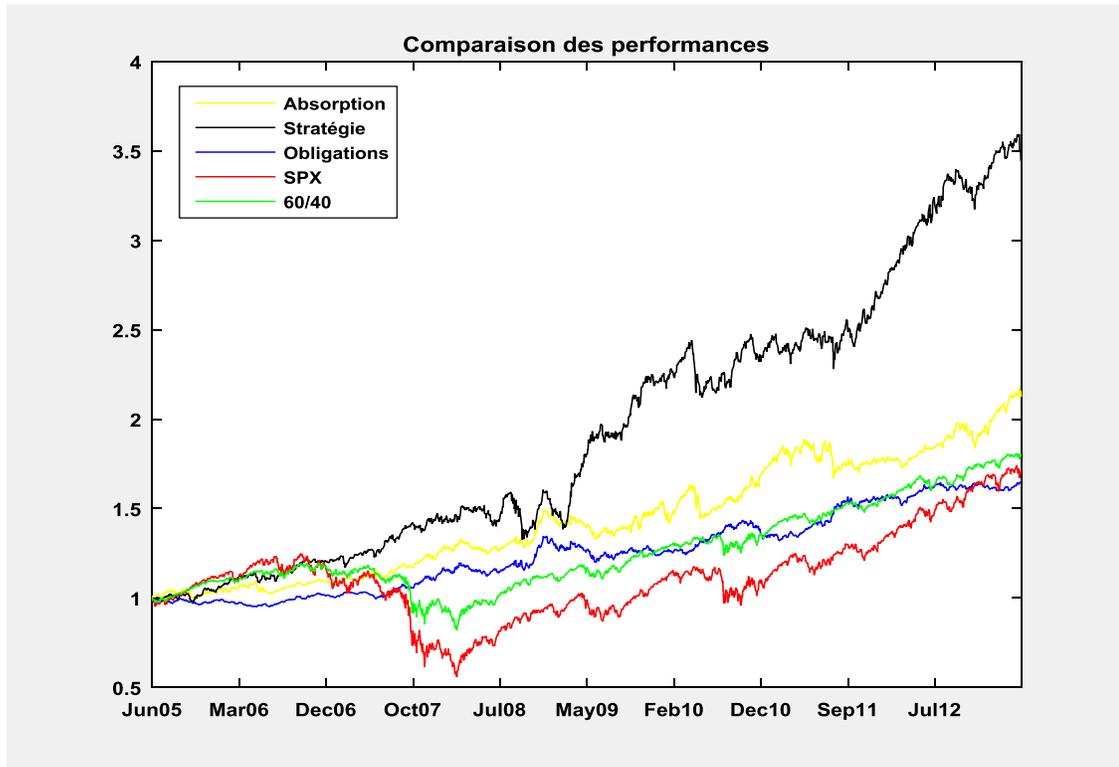


Tableau 5-11 : Mesures de performance de la stratégie d'allocation d'actifs vs. le *ratio d'absorption*

	STRATÉGIE	ABSORPTION	SPX	OBLIGATIONS	60/40
<b>RENDEMENT ANNUALISÉ</b>	15.84%	10.04%	7.10%	5.46%	7.75%
<b>ÉCART-TYPE</b>	13.04%	10.61%	22.36%	6.98%	12.56%
<b>RATIO D'INFORMATION</b>	1.21	0.9462	0.3175	0.7817	0.6167
<b>CHUTE MAXIMALE</b>	16.65%	11.79%	55.25%	11.01%	31.37%

Le test 8 compare la performance du portefeuille de référence basé sur l'indicateur que nous avons développé avec la performance d'un autre portefeuille qui utilise le *ratio d'absorption* pour son allocation dynamique d'actifs. Le *ratio d'absorption* est construit à partir d'une analyse en composante principale mesurant la portion de la variance dans le marché expliquée par un nombre fini de vecteurs propres. Les règles d'allocation recommandées par Kritzman et Li (2010)

associées à l'utilisation de cet indicateur ont été détaillées au tableau 3-1. Ces dernières sont basées seulement sur le changement en écart-type observé du ratio par rapport à l'observation précédente.

La figure 5-10 et le tableau 5-11 permettent de faire deux observations : l'indicateur que nous avons développé expose d'avantage le portefeuille au marché des actions et le *ratio d'absorption* se comporte de manière plus conservatrice dans l'exposition du portefeuille à l'actif risqué. Ce phénomène est particulièrement observable sur la courbe des rendements en 2009 et à partir de la moitié 2011 pour l'année qui suit. Les rendements du portefeuille de référence sont notablement et statistiquement supérieurs à ceux obtenus avec le portefeuille utilisant le *ratio d'absorption* pour son allocation d'actifs. Notons tout de même que l'utilisation du *ratio d'absorption* permet d'obtenir des rendements qui sont plus de 40% supérieurs à ceux du S&P500 sur la période allant de juin 2005 à avril 2013. Il y a donc un effet positif non-négligeable relié à l'utilisation du *ratio d'absorption* par rapport à une allocation passive dans le S&P500.

L'écart-type des rendements et l'évènement de chute maximale présentés au tableau 5-11 sont d'une importance capitale dans le cadre d'une démarche de gestion de risque. L'utilisation du *ratio d'absorption* permet une réduction de ces deux mesures de risque de plus de 30% par rapport à celles du portefeuille de référence. Ces différences sont majeures et la section 5.3 confirme la validité statistique de chacune de ces observations : les mesures de performance (rendement et rendement ajusté pour le risque) sont meilleures dans le cas du portefeuille utilisant l'indicateur que nous avons développé. Les mesures de risque sont quant à elle significativement meilleures dans le cadre de l'utilisation du *ratio d'absorption*.

Le portefeuille de référence est également comparé à l'utilisation d'autres indicateurs existants dont nous avons parlé dans l'introduction : Le *Global Risk Demand Index* développé par Morgan Stanley, le *Macro Risk Index* de CitiGroup, le *ratio d'absorption* de State Street et le *Turbulence Index* de Windham Capital. Les principales mesures de performance de ces tests sont présentées dans les Annexes.

Les tests présentés ci-dessus ne représentent que quelques manières dont l'indicateur peut être retravaillé et optimisé. L'indicateur peut être modifié d'une infinité de manière pour tester la robustesse des résultats obtenus et la significativité de la contribution de chacune des parties de la formule. Il ressort néanmoins des tests 1 à 5 ci-dessus que les parties 1 et 2 de la formule ont une importance significative en ce qui concerne le niveau de réponse de l'indicateur lorsque la partie 3 renvoie un signal non-nul. Dans le cas contraire, les niveaux des deux premières parties de la formule sont sans importance car *Delta* sera égal à 0.

Les modifications apportées à l'*Indicateur VIX* dans la partie 3 de la formule modifient la physionomie de l'indicateur, la réactivité de ce dernier ainsi que sa capacité à extraire et utiliser l'information contenue dans la structure à terme du VIX. Les périodes de calibration de l'indicateur ainsi que les paramètres d'analyse de la forme de la structure à terme du VIX sont cruciaux et les changements que nous avons testé impactent le fonctionnement de l'indicateur, et par conséquent la performance du portefeuille de référence de manière significative.

La valeur ajoutée de l'indicateur peut être questionnée lorsque le marché des actions offre de bons rendements et peu de risque, il faut cependant garder à l'esprit que l'indicateur a été développé dans une démarche de gestion de risque et a pour but de limiter l'impact qu'un choc adverse sur le S&P500 peut avoir sur le portefeuille dynamique. Les années 2010, 2013 et 2014 ont été très propices au S&P500 et le portefeuille dynamique a effectivement sous-performé le marché des actions. En 2009 le portefeuille de référence affiche un rendement positif de 39.63% et bat le marché de 13.40% lorsque ce dernier est positif de plus de 26%. Ce résultat est à détailler : le portefeuille dynamique performe de la même façon que le S&P500 sur la deuxième partie de 2009 mais l'indicateur permet au portefeuille de référence de surperformer en évitant la chute du marché durant la première partie de 2009.

De manière plus générale, la valeur ajoutée de notre travail sur la gestion du risque d'un portefeuille s'observe durant des périodes telles que la crise financière de 2008 ou le *sell-off* de 2011. Le stress de marché tel que mesuré par l'indicateur ou encore les changements rapides dans les régimes de volatilité sont interprétés par l'indicateur comme étant synonymes de risque et ce dernier réduit alors l'exposition du portefeuille dynamique au marché. Il en résulte que nous obtenons lors de la pire crise financière de la finance moderne un événement de chute maximale qui est moins du tiers de celui du S&P500 tout en offrant un rendement positif de 8% (excédentaire de plus de 45%) dans un contexte de marché négatif de 37%. Par définition la date

de la prochaine crise financière ou du prochain choc de marché ne sont pas connues et la raison d'exister d'un indicateur de stress de marché est d'envoyer des signaux avancés permettant d'anticiper ou au moins de réagir rapidement à ces situations.

### 5.3 Tests statistiques

- Le test-t (*t-test*)

Nous utilisons un *t-test* sur les différentes distributions de rendements journaliers pour tester l'hypothèse de l'égalité de leur moyenne. Snedecor et Cochran (1989) nuancent le test pour les données appariées, les variances assumées égales ou non ainsi que le degré de significativité que nous voulons considérer; des ajustements qui sont maintenant largement pris en charge par les outils que nous utilisons.

Il est à noter que cette méthode présente de nombreux avantages au niveau de la simplicité d'implémentation et de l'analyse des résultats. Une des limitations de cette méthode est sa concentration uniquement sur les moyennes des échantillons analysés et non sur les valeurs individuelles qui composent la série.

Hypothèse nulle:  $H_0: \mu_1 = \mu_2$

Hypothèse alternative:  $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

$$\text{Le Test Statistique est alors : } T = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{\sqrt{s_1^2/N_1 + s_2^2/N_2}} \quad (5.1)$$

Avec  $N_1$  et  $N_2$ ,  $\bar{Y}_1$  et  $\bar{Y}_2$  et  $s_1^2$  et  $s_2^2$  sont respectivement les tailles, moyennes et variances des échantillons.

L'hypothèse nulle  $H_0$  impliquant l'égalité des moyennes est rejetée si  $|T| > t_{1-\alpha/2, \nu}$  (la valeur seuil de la distribution  $t$  avec  $\nu$  degrés de liberté).

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{N_1}\right)^2 / (N_1 - 1) + \left(\frac{s_2^2}{N_2}\right)^2 / (N_2 - 1)} \quad (5.2)$$

- Le test-F (F-test)

Nous utilisons un *F-test* sur les différentes distributions de rendements journaliers pour tester l'hypothèse que deux distributions normales ont la même variance, hypothèse introduite par Snedecor et Cochran(1983).

La principale faiblesse de ce test est la condition de normalité des distributions. Le test n'est pas robuste à la violation de cette hypothèse.

Hypothèse nulle :  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Hypothèse alternative :  $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Avec un niveau de significativité  $\alpha$

Intervalle de confiance : L'hypothèse nulle d'égalité des variances est rejetée si

$$\text{Rejet } H_0 \text{ si } F < F_{1-\alpha/2, N_1-1, N_2-1} \text{ ou } F > F_{\alpha/2, N_1-1, N_2-1}$$

Avec  $F_{\alpha, N_1-1, N_2-1}$  la valeur seuil de la distribution avec  $N_1 - 1$  et  $N_2 - 1$  degrés de liberté et un niveau de significativité  $\alpha$ .

- La méthode de ré-échantillonnage stationnaire de Politis et Romano

Politis et Romano (1994) introduisent une nouvelle méthode de ré-échantillonnage stationnaire tandis que Cogneau et Zakamouline (2010) passent en revue les différentes méthodes de ré-échantillonnage en finance. Ils soulignent l'intérêt de cette méthode qui est de «créer une pseudo série temporelle stationnaire à partir de laquelle les statistiques de la distribution peuvent être recalculées».

Nous reproduisons ci-dessous une partie de l'article de Politis et Romano (1994) pp.1303-1304.:

Le ré-échantillonnage se fait par blocs dont la longueur est générée à partir d'une distribution géométrique avec une probabilité  $p$ . La longueur des blocs étant aléatoire, elle peut être plus grande que la distribution, les données sont considérées se suivre et tourner en rond, de telle sorte que dans le cadre de la distribution uniforme  $\{1 \dots n\}$ ,  $X_1$  suit  $X_n$ .

Pour décrire l'algorithme soit :

$$B_{i,b} = \{X_i, X_{i+1} \dots, X_{i+b-1}\} \quad (5.3)$$

est le bloc de  $b$  observations commençant à  $X_i$ . Dans le cas où  $j > N$ ,  $X_j$  est défini comme étant  $X_i$ , quand  $i = j(\text{mod } N)$  et  $X_0 = X_N$ . Enfin soit  $p$  un chiffre fixe entre  $[0,1]$ .

La pseudo série temporelle est, conditionnellement à la série originale  $X_1, \dots, X_n$ , une pseudo temporelle  $X_1^*, \dots, X_n^*$  générée par un processus de ré-échantillonnage adapté qui est stationnaire. L'algorithme de ré-échantillonnage peut être décrit de la manière suivante :

Soit  $X_1^*$  choisi de manière aléatoire à partir des  $N$  observations originales de telle manière que  $X_1^* = X_{I_1}$  avec une probabilité  $p$ . Soit  $X_2^*$  choisi de manière aléatoire à partir des  $N$  observations originales, et soit  $X_2^* = X_{I_1+1}$  avec la probabilité  $1-p$  faisant en sorte que  $X_2^*$  serait l'observation suivante  $X_{I_1}$  dans la série temporelle originale. De manière générale, étant donné que  $X_1^*$  est déterminé par la  $J^{\text{ème}}$  observation  $X_J$  de la série temporelle originale, soit  $X_{i+1}^*$  égal à  $X_{J+1}$  avec la probabilité  $1-p$  et choisi aléatoirement des  $N$  observations originales avec la probabilité  $p$ .

Proposition 1. Conditionnellement à  $X_1, \dots, X_n$ ,  $X_1^*, X_2^* \dots, X_n^*$  est stationnaire.

- Si les observations originales  $X_1, \dots, X_n$  sont toutes distinctes, alors la nouvelle série  $X_1^*, \dots, X_n^*$  est, conditionnellement à  $X_1, \dots, X_n$  une chaîne de Markov stationnaire.
- Si, à l'inverse, deux des observations originales sont identiques et le reste des observations distinctes, alors  $X_1^*, \dots, X_n^*$  est une chaîne Markovienne stationnaire de second ordre.

De manière générale, en fonction du nombre d'observations identiques, si  $m$  est supérieur à  $b$  de manière à ce que pour  $i$  différent de  $j$  (et  $i$  et  $j$  compris entre 1 et  $N$ ),  $B_{i,b}$  et  $B_{j,b}$  sont identiques (et  $m = 0$  si toutes les observations sont distinctes), alors la série  $X_1^*, \dots, X_n^*$  est une chaîne de Markov stationnaire d'ordre  $(m+1)$ .

- Le White Reality Check (WRC)

Nous reproduisons ici une partie des résultats avancés par White (2000) tels que présentés dans le papier de recherche de Eola Investments<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup><http://www.eolainvestments.com/Documents/5%20A%20Reality%20Check%20and%20Test%20for%20SPA%20for%20z-Model.pdf>

White a introduit le test pour la calibration de données, une méthode pour quantifier le risque associé à la sur calibration dans les modèles prédictifs. La méthode utilise un *bootstrap* pour obtenir la distribution d'une hypothèse nulle afin de tester cette dernière. Cette méthode a permis de tester la significativité statistique d'un modèle de *trading* par rapport à un indice de référence.

Soit une stratégie de trading (stratégie A) qui établit 1-la période suivante prédictions pour  $n$  périodes de  $R$  à  $T$  tel que  $T = R + n - 1$ .

On teste la stratégie par rapport à son indice de référence grâce à :

$$\hat{f}_A^{\{t+1\}} = \log(1 + y^{\{t+1\}} S_1) - \log(1 + y^{\{t+1\}} S_0) \quad (5.4)$$

Où  $t = R, R+1, \dots, T$

A est la stratégie de *trading*

B l'indice de référence

S le signal de transaction : 1 = long, 0 = neutre, -1 = vente à découvert

$y$  = le rendement sur la période.

$$y^{\{t+1\}} = \frac{v^{\{t+1\}} - v^{\{t\}}}{v^{\{t\}}} \quad (5.5)$$

Où  $v$  est la valeur et

$$\log(1 + y^{\{t+1\}} S_i) = \log\left(\frac{v_i^{\{t+1\}}}{v_i^{\{t\}}}\right), \quad i = A, B \quad (5.6)$$

soit

$$r_i^{\{t+1\}} = \log(1 + y^{\{t+1\}} S_i), \quad i = A, B \quad (5.7)$$

alors

$$\hat{f}_A^{\{t+1\}} = r_A^{\{t+1\}} - r_B^{\{t+1\}} \quad (5.8)$$

Ce qui signifie que  $\hat{f}_A^{\{t+1\}}$  est le rendement excédentaire par période de la stratégie de trading par rapport à son indice de référence au temps  $t+1$ .

De manière générale :

$$\bar{f}_A = \frac{1}{n} \sum_{t=R}^T \hat{f}_A^{\{t+1\}} = \bar{r}_A - \bar{r}_B \quad (5.9)$$

$\bar{f}_A$  est le retour excédentaire moyen de stratégie de trading par rapport à l'indice de référence dans les  $n$  périodes de  $R$  à  $T$ .

On teste alors l'hypothèse nulle que la stratégie de trading ne bat pas l'indice de référence :

$$H_0 = E[f_A] \leq 0, \text{ autrement dit } \bar{f}_A - E[f_A] \geq \bar{f}_A \quad (5.10)$$

La distribution de  $\bar{f}_A - E[f_A]$  peut être estimée par le bootstrap stationnaire selon le deuxième théorème de Politis et Romano (1994) :

$$n^{1/2}(\bar{f}_A - E[f_A]) \sim n^{1/2}(\bar{f}_A^* - \bar{f}_A) \quad (5.11)$$

Avec  $\bar{f}_1^*$  le rendement excédentaire ré-échantillonné de la stratégie de trading par rapport à l'indice de référence.

La distribution est construite en ré-échantillonnant la série originale N fois ( $N \gg 1$ ). On note  $j$  le  $j^{\text{ème}}$  ré-échantillonnage et la notation \* pour désigner l'intégralité de la série de ré-échantillonnage :

$$\bar{f}_A^* = \bar{f}_{A,j} = \frac{1}{n} \sum_{t=R}^T \hat{f}_{A,j}^{\{t+1\}} = \bar{r}_{A,j} - \bar{r}_{B,j}, \quad j = 1, 2 \dots N \quad (5.12)$$

Soit  $j = 0$  la série de données originales, alors  $\bar{V}_{A,0} = n^{1/2} \bar{f}_{A,0}$  (5.13)

Et  $\bar{V}_A^* = \bar{V}_{A,j} = n^{1/2}(\bar{f}_{A,j} - \bar{f}_{A,0}), \quad j = 1, 2 \dots N$  (5.14)

L'hypothèse nulle est équivalente à  $\bar{V}_A^* \geq \bar{V}_{A,0}$  et peut être rejetée si  $\bar{V}_{A,0}$  se trouve dans la partie droite (*right tail*) de la distribution de  $\bar{V}_A^*$  obtenue par ré-échantillonnage.

La valeur-p (*p-value*) est 1- le percentile de  $\bar{V}_A^*$  ayant la valeur  $\bar{V}_{A,0}$ .

Posons  $\bar{V}_A^*$  tel que  $\bar{V}_{A,(1)} < \bar{V}_{A,(2)} < \dots < \bar{V}_{A,(N)}$  et trouver  $M$  tel que  $\bar{V}_{A,(M)} \leq \bar{V}_{A,0} \leq \bar{V}_{A,(M+1)}$

La valeur-p est donnée par  $p = 1 - M/N$ .

### Test-T unilatéral supérieur (Right Tailed t-test) sur la moyenne des rendements.

Hypothèse nulle:  $H_0: \mu_1 = \mu_2$

Hypothèse alternative:  $H_a: \mu_1 > \mu_2^*$

\*L'hypothèse alternative est différente du t-test habituel car elle permet dans ce cas de non seulement affirmer la différence entre les deux valeurs mais d'établir la supériorité du paramètre testé par rapport à la valeur de contrôle.

Tableau 5-12: t-test unilatéral droit

	STRATÉGIE	TEST1	TEST2	TEST3	TEST4	TEST5	TEST6	TEST7	ABSORPTION
STRATÉGIE	X	-2.4641*	-1.8339*	-2.8349*	-7.3245*	-6.3569*	11.8801	10.3674	27.448
S&P500	48.7037	49.123	49.74	49.2464	49.7881	49.6498	43.8221	43.214	35.6181
OBLIGATIONS	47.0508	47.513	48.1266	47.6437	48.2299	48.0701	41.9217	41.3105	21.029
60/40	45.5432	46.1319	46.6681	46.2769	47.1026	46.9029	39.8568	39.4403	19.3558

Intervalle de confiance à 95%

\* Non-rejet de  $H_0$

### Test-F (F-test) sur l'écart-type des rendements.

Hypothèse nulle :  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Hypothèse alternative :  $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Valeurs critiques : Rejet de  $H_0$  si  $F < 0.9285$  ou  $F > 1.0743$

Tableau 5-13: F-test

	STRATÉGIE	TEST1	TEST2	TEST3	TEST4	TEST5	TEST6	TEST7	ABSORPTION
STRATÉGIE	X	0.8096	0.6844	0.5072	0.9412*	0.9839*	1.0208*	0.9942*	1.5084
S&P500	0.3537	0.437	0.5168	0.6975	0.3759	0.3595	0.3466	0.3558	0.2252
OBLIGATIONS	3.1188	3.8524	4.5567	6.1494	3.3137	3.1697	3.0554	3.137	2.1291
60/40	1.115	1.3772	1.629	2.1984	1.1847	1.1332	1.0923	1.1215	0.7141

Intervalle de confiance à 95%

\* Non-rejet de  $H_0$

### White Reality Check (WRC) :

Bootstrap Politis et Romano : Taille des blocs = 500

WRC : Signal = 2 : Supériorité d'une stratégie de trading vis-à-vis un indice de référence

Hypothèse nulle :  $H_0$ : Le modèle de transaction n'est pas supérieur à l'indice de référence

Hypothèse alternative :  $H_a$ : Le modèle de transaction est supérieur à l'indice de référence

Tableau 5-14: White Reality Check

	STRATÉGIE	TEST1	TEST2	TEST3	TEST4	TEST5	TEST6	TEST7	ABSORPTION
STRATÉGIE	X	0.378*	0.388*	0.374*	0.526*	0.488*	0.8*	0.726*	0.998
S&P500	0.012	0.014	0.004	0.022	0.006	0.014	0.072	0.018	0.01
OBLIGATIONS	0.002	0.0001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.01	0.002	0.001
60/40	0.008	0.014	0.002	0.012	0.0121	0.016	0.072	0.014	0.0126

Intervalle de confiance à 95%

\* Non-rejet de  $H_0$

- Analyse des résultats du T-Test

Dans tous les cas de figure l'indice de référence que nous avons développé, que ce soit la version originale ou bien la version dont certains paramètres ont été changés pour les tests 1 à 7, l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes est rejetée systématiquement quel que soit l'indice de référence auquel le portefeuille est comparé, SPX, Obligations ou 60/40.

Ce résultat est très positif car nous rejetons l'hypothèse nulle, donc dans le cas d'un test-t unilatéral supérieur nous pouvons affirmer que les moyennes de rendements des portefeuilles sont significativement supérieures à celles des indices de référence.

Ces résultats confirment statistiquement ce qui a été observé dans l'analyse préliminaire des tests.

Les résultats sont plus nuancés lorsque nous essayons de démontrer la supériorité du portefeuille de référence aux rendements obtenus avec l'indicateur dont les paramètres ont été modifiés : seulement les tests 6 et 7 permettent de rejeter l'hypothèse nulle. En d'autres termes les modifications des parties 1 et 2 de l'indicateur (tests 1 à 5) n'impactent pas les rendements de manière significative par rapport au portefeuille de référence : on ne peut rejeter l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes.

La modification des paramètres de calibration par rapport à la forme et l'évolution de la structure à terme du VIX – la partie 3 – entraîne des changements significatifs sur la performance. Ces résultats viennent également confirmer le bon fonctionnement de l'indicateur. En effet tel que détaillé à la construction de l'indicateur dans le chapitre 3, la partie 3 est binaire et va décider de l'exposition ou non de notre portefeuille aux actions. Les parties 1 et 2 agissent comme des modérateurs de cette exposition et impactent les statistiques d'évènement de chute maximale ainsi que la volatilité des rendements de la stratégie.

Nous mettons cette affirmation en lumière dans l'analyse des tests-f ci-dessous.

- Analyse des résultats du F-Test

Là encore les résultats sont éloquentes. L'hypothèse nulle est rejetée dans tous les tests qui comparent le portefeuille de référence (stratégie) aux différents indices de référence, le S&P500, les obligations et le portefeuille passif 60/40.

Dans ce cas nous avons effectué un test bilatéral et la seule chose que nous pouvons affirmer en rejetant l'hypothèse nulle est que l'écart-type des rendements obtenus avec la stratégie est statistiquement différent de celui de l'indice de référence. Ceci étant, une fois la différence statistiquement établie, nous pouvons anticiper les résultats d'un test unilatéral à partir des niveaux observés.

Les résultats sont moins systématiques lorsque nous comparons les résultats obtenus avec le portefeuille de référence à ceux obtenus avec les tests modifiant l'indicateur.

Les tests 1 à 3 sont effectués en modifiant les parties 1 et 2 de la formule. Lors de ces trois tests nous rejetons l'hypothèse nulle. Ce résultat confirme que la modification des parties 1 et 2 impacte de manière significative l'écart-type des rendements. La combinaison de cette conclusion à celles tirées des t-test à la section précédente se résume par un impact significatif des parties 1 et 2 sur l'écart-type des rendements mais pas d'impact significatif sur les rendements du portefeuille.

Les tests 4 à 7 ne nous permettent pas de rejeter l'hypothèse nulle. Du raisonnement ci-dessus ces résultats étaient attendus pour les tests 6 et 7 car les parties 1 et 2 de l'indicateur n'ont pas été modifiées et nous nous attendions donc à des écart-types non statistiquement différents sur les deux séries de rendement.

En ce qui concerne les tests 4 et 5 les modifications apportées se situent au niveau de la définition de long terme et court terme qui sont respectivement changées de 1 an à 6 mois et de 2 semaines à 1 semaine. Force est de constater que ces changements n'ont pas d'impact significatif sur l'écart-type des rendements.

La combinaison des conclusions tirées des deux séries de test ci-dessus nous permet de valider plusieurs hypothèses que nous avons énoncé quant au rôle de chacune des parties de l'indicateur. Finalement la supériorité des rendements du portefeuille de référence à ceux des indices de référence ainsi que la réduction de l'écart-type des rendements sont validés statistiquement.

La validation statistique de la supériorité des résultats est donc une validation de l'utilisation de notre modèle selon les mesures de risque et de performance considérées.

L'indicateur utilise des paramètres de calibration que nous avons défini de façon arbitraire, et même si nous avons justifié chacun de ces choix et testé l'impact de modifications sur certains d'entre eux, nous testons néanmoins les résultats une fois de plus avec un test statistique plus

puissant : Le *White Reality Check* (WRC) introduit par White (2000). Ce test utilise la méthode de ré-échantillonnage stationnaire de Politis et Romano (1994) de manière à déterminer si les résultats supérieurs ont été obtenus par chance et a vocation d'éliminer les effets de sur-calibration ou *data mining*. Cette méthode statistique est particulièrement adaptée pour établir la supériorité d'une stratégie de trading par rapport à un référentiel et s'intègre très naturellement dans le cadre de ce travail.

La théorie sous-jacente à la méthode de ré-échantillonnage de Politis et Romano (1994) ainsi que la définition statistique du *White Reality Check* ont été présentées à la section précédente.

- Analyse des résultats de *White Reality Check* (WRC)

Dans WRC l'hypothèse nulle  $H_0$  est telle que la stratégie de transaction qui est testée n'a pas de pas de supériorité prédictive par rapport à l'indice de référence auquel on la compare. Nous cherchons donc à établir si une stratégie de transaction est meilleure qu'une autre et si les résultats de la stratégie testée ont été obtenus par chance.

Dans le tableau ci-dessus l'hypothèse nulle n'est pas rejetée seulement dans les cas où le portefeuille de référence (stratégie) est comparé aux tests de robustesse qui lui sont appliqués. Les tests statistiques précédents reconnaissaient une différence significative entre le portefeuille de référence et seulement les tests 6 et 7. Ces résultats concordent donc dans la majorité des cas et nous constatons que les *p-value* de WRC pour les tests 6 et 7 sont tout de même assez élevées. Ce résultat peut aussi s'expliquer par le fait que WRC prend en compte plusieurs moments de la distribution, contrairement au test-t qui ne prend en compte que le premier.

L'intégralité des tests entre le portefeuille de référence (stratégie) et les 7 tests de robustesse mesurés aux trois indices de référence (S&P500, obligations, 60/40) mène à une seule conclusion : L'hypothèse nulle est rejetée et nous concluons donc à la supériorité de la stratégie de transaction testée.

Ces résultats sont une validation statistique supplémentaire des résultats obtenus précédemment. Nous concluons ici les différents tests statistiques et sommes très satisfaits de la convergence des résultats empiriques et statistiques.

Les résultats valident notre hypothèse de départ quant à la valeur ajoutée de l'utilisation des données extraites du VIX et sa structure à terme dans une stratégie d'allocation dynamique d'actifs.

# Chapitre 6

## Conclusion

Les résultats présentés valident empiriquement et statistiquement l'hypothèse de départ : l'information contenue dans la structure à terme du VIX permet d'améliorer de manière significative la gestion de risque d'un portefeuille via une allocation dynamique de ses actifs.

L'objectif de départ était double : en premier lieu extraire de l'information pertinente quant au comportement futur du VIX à partir de sa structure à terme, en second lieu utiliser la relation naturelle entre le VIX et le S&P500 pour appliquer cette information à une stratégie de gestion du risque sur un portefeuille virtuel. Nous avons donc intégré l'information relative au VIX extraite de sa structure à terme et la relation entre le VIX et le S&P500 pour anticiper les mouvements adverses futurs du marché des actions à partir du VIX et de sa structure à terme.

Pour ce faire nous avons d'abord modélisé une manière d'extraire l'information contenue dans la structure à terme du VIX.

Par la suite, nous avons imaginé une façon de transposer l'information extraite à un portefeuille grâce à des règles de transaction systématiques. Les résultats obtenus avec le portefeuille virtuel sont ensuite comparés à ceux de plusieurs portefeuilles, le S&P500, l'indice obligataire, un portefeuille équilibré investi à 60% dans le S&P500 et 40% dans l'indice obligataire.

Les résultats du portefeuille virtuel pour les mesures de rendement, de risque et de rendements ajustés pour le risque sont concluants et les différences de résultats pour le portefeuille virtuel sont statistiquement significatives selon les trois tests statistiques utilisés à la section 5.3 du chapitre Résultats.

L'hypothèse de départ est empiriquement validée et ce résultat est très important dans la conclusion de ce travail car il permet d'ouvrir plusieurs avenues de recherche.

La robustesse des paramètres choisis pour calibrer l'indicateur est également testée en comparant les performances du portefeuille virtuel de référence à un autre portefeuille virtuel auquel on applique l'indicateur développé dont certains critères ont été modifiés. Dans ce cas les résultats des tests statistiques sont moins concluants et confirment que l'indicateur développé laisse place à du raffinement quant à la calibration des paramètres décisionnels et la manière d'utiliser l'information.

Finalement le portefeuille virtuel est également comparé aux résultats obtenus avec un portefeuille virtuel auquel est appliqué le *ratio d'absorption* développé par Kritzman et Li (2010). Les mesures de performance du portefeuille virtuel se servant des signaux renvoyés par l'indicateur développé sont supérieures à un portefeuille utilisant le *ratio d'absorption*, les mesures de risque sont par contre moins bonnes. Le ratio rendement-risque donne l'avantage à l'indicateur que nous avons développé.

Carr et Wu (2006) ont démontré sous la mesure risque-neutre que de l'information pertinente sur le comportement futur du VIX est contenue dans la structure à terme de ce dernier.

Notre démarche produit des résultats qui sont en ligne avec cette démonstration et en utilisant le S&P500 (dont les options sont à la base de la construction du VIX) et un indice obligataire, nous obtenons des résultats concluants.

Les résultats sont statistiquement significatifs et valident l'hypothèse de départ en créant un outil facilement compréhensible, répliquable et qui apporte une réelle valeur ajoutée à une stratégie de gestion de portefeuille à partir de données accessibles publiquement.

Nous terminons ce mémoire sur des résultats concluants : une allocation dynamique qui réduit de 70% l'évènement de chute maximale du portefeuille de référence par rapport au S&P 500, limite la volatilité des rendements et améliore les rendements. Le portefeuille de référence affiche un ratio d'information plus de trois fois supérieur à celui du marché des actions et quasiment deux fois supérieur à celui du portefeuille 60/40.

Comme bien souvent, la validation de l'hypothèse de départ ouvre la porte sur de nouvelles avenues de recherche, par exemple comment optimiser l'extraction et l'exploitation de l'information contenue dans la structure à terme du VIX dans une stratégie de gestion de risque ? Nous pouvons également penser à calibrer l'indicateur pour l'utiliser dans le cadre de stratégies de placement à volatilité constante ou bien répondre aux besoins spécifiques de gestionnaire dans la gestion du risque de leur portefeuille.

# Annexes

## Performance de la stratégie à la lumière des indicateurs existants

Dans cette partie plusieurs indicateurs de stress de marché développés par des tierces parties sont considérés. Ils indiquent le niveau de stress qui prévaut dans le marché. Une lecture basse indique donc un niveau de stress ressenti assez faible et un environnement propice à la prise de risque : exposer son portefeuille au marché des actions.

Nous considérons plusieurs indicateurs et leur distribution. Pour chacun la médiane est identifiée et la distribution est séparée en deux : de la valeur minimale jusqu'à la médiane (non incluse) par intervalle de 0,1 et chaque valeur est testée pour déterminer la valeur optimale inférieure. Le même procédé est appliqué à la 2<sup>ème</sup> partie de la distribution dans laquelle pour la valeur optimale supérieure.

Tous les couples de valeurs sont testés pour identifier la combinaison de valeurs représentant les valeurs optimales inférieure et supérieure permettant d'obtenir le meilleur rendement d'un portefeuille transigé selon la règle ci-dessous :

Lorsque l'indice affiche une valeur en dessous de la valeur optimale inférieure alors le portefeuille est exposé à 100% à l'indice d'actions.

Une lecture de l'indice comprise entre la valeur optimale inférieure et supérieure indique un niveau de stress qui prévaut cohérent avec sa distribution et suggère une exposition du portefeuille à 50% dans les actions et 50% dans les obligations.

Finalement, une lecture de l'indice au-dessus de sa valeur optimale supérieure suggère une exposition du portefeuille à 100% à l'indice obligataire.

La détermination des valeurs seuils se fait en optimisant les rendements du portefeuille sur une période de 26 semaines commençant au début de l'indice. Les valeurs seuils trouvées selon le processus détaillé ci-dessus sont alors utilisées à la première itération après la période d'optimisation. La période de calibration est finie et le portefeuille est alors transigé hors-échantillon.

À l'itération suivante la fenêtre de 26 semaines est décalée d'une itération, de façon à inclure la valeur de la semaine précédente et faire sortir de l'échantillon d'optimisation la 1<sup>ère</sup> valeur de l'indice.

Selon le même processus, les nouvelles valeurs seuils optimales sont déterminées et utilisées hors-échantillon à l'itération suivante.

Cette opération est répétée autant de fois que nécessaire pour arriver à la fin de l'échantillon considéré en faisant rouler la fenêtre d'optimisation.

Le but de cette méthode est d'optimiser les valeurs seuil sur le passé et appliquer ces valeurs au futur, car c'est ce que nous ferions dans la réalité, se servir du passé pour essayer de prévoir le futur.

Le même processus est répété avec des fenêtres d'optimisation différentes de 38 et 52 semaines.

Le portefeuille d'investissement a une valeur initiale de 1. Nous considérons T=0 à la première valeur de l'indice disponible.

Nous commençons en janvier 1999 car c'est à partir de cette date que tous les indicateurs qui nous intéressent pour ces tests sont disponibles.

Nous pouvons exprimer la stratégie par cette équation

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} * \beta * \text{Équités} + \alpha_{t-1} * (1 - \beta) * \text{Indice Obligataire}$$

Où:

$\alpha_t$  est la valeur du portefeuille au temps t

$\alpha_{t-1}$  est la valeur du portefeuille au temps t-1

$\beta \in \{0; \frac{1}{2}; 1\}$

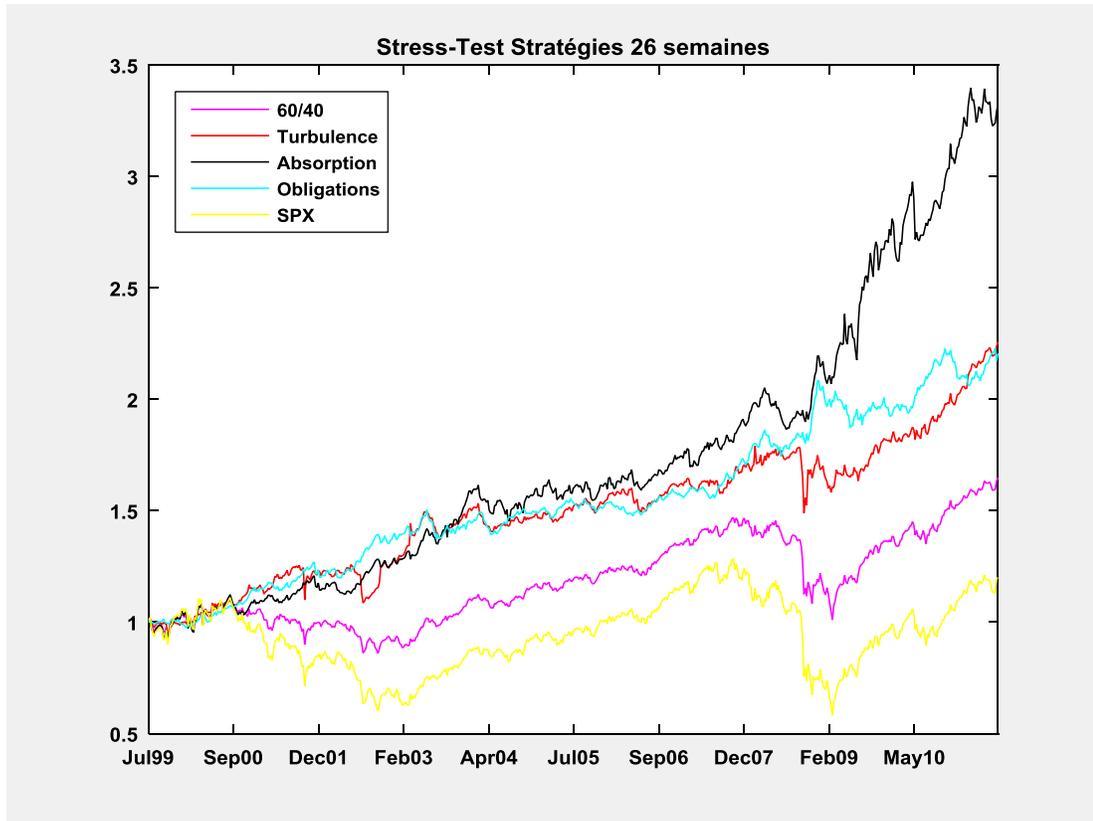
$\beta = 0$  si l'indicateur au temps (t-1) dit que le marché est *stressé*.

$\beta = \frac{1}{2}$  si l'indicateur au temps (t-1) ne signale pas de situation particulière dans le marché.

$\beta = 1$  si l'indicateur au temps (t-1) dit que le marché n'est pas *stressé*.

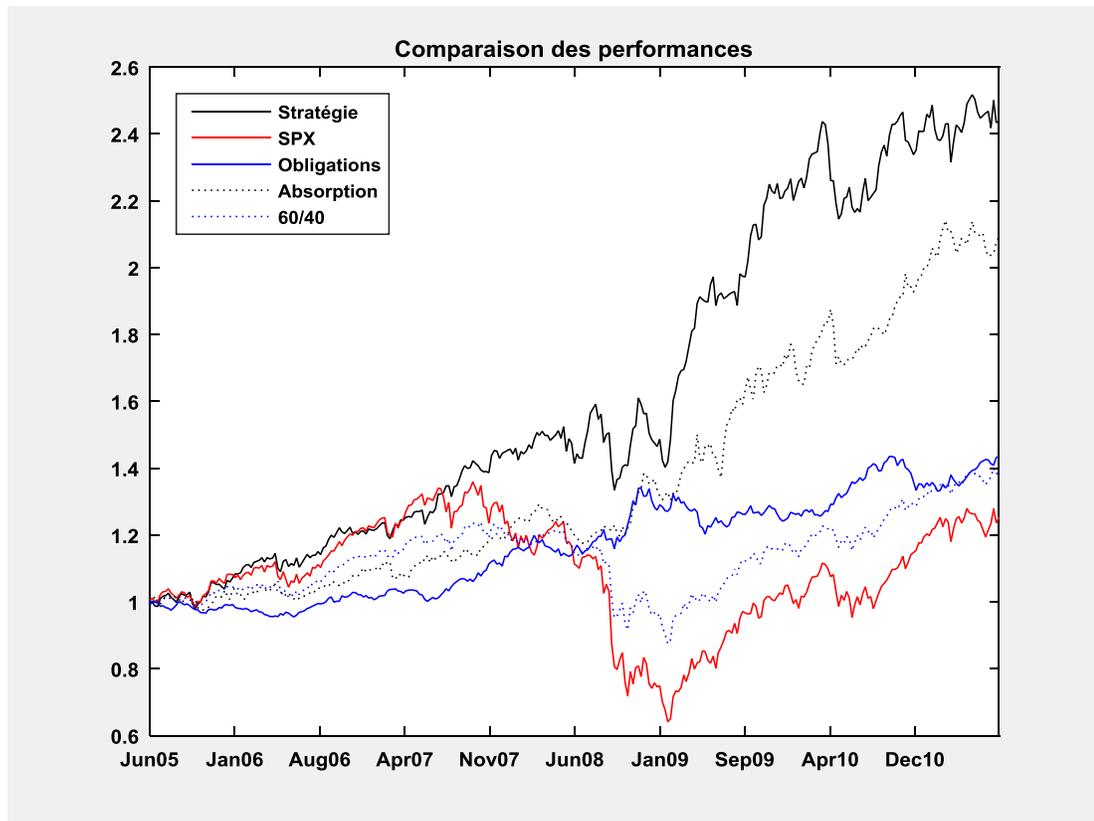
Indicateurs existants

Figure 7-1 Indicateurs existants optimisés sur 26 semaines



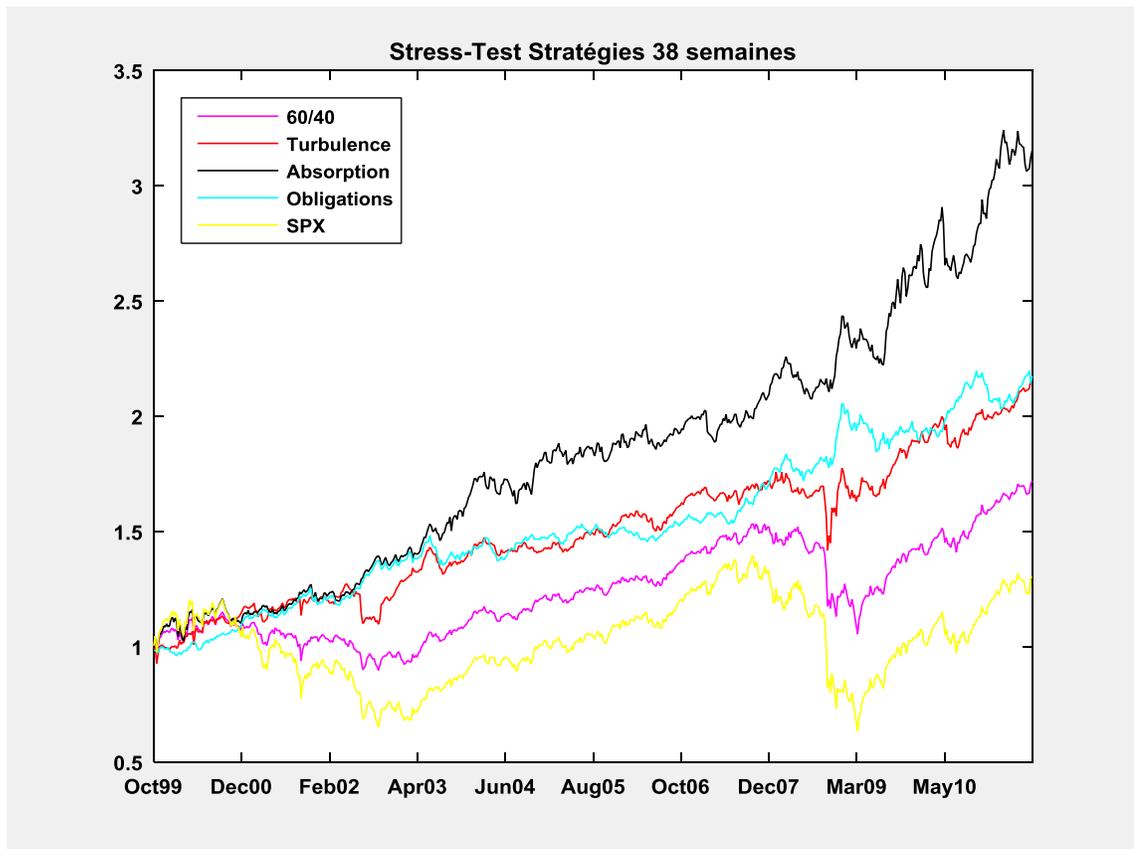
	SPX	OBLIGATIONS	TURBULENCE	60/40	ABSORPTION
<b>RENDEMENT ANNUALISÉ</b>	1.52%	6.78%	6.99%	4.23%	10.47%
<b>ÉCART-TYPE</b>	19.37%	6.84%	10.81%	11.10%	10.63%
<b>RATIO D'INFORMATION</b>	0.0786	0.9917	0.6466	0.3809	0.985
<b>CHUTE MAXIMALE</b>	54.71%	10.21%	16.83%	31.19%	9.95%

Figure 7-2 Comparaison de L'Indicateur avec le *ratio d'absorption* optimisé sur 26 semaines



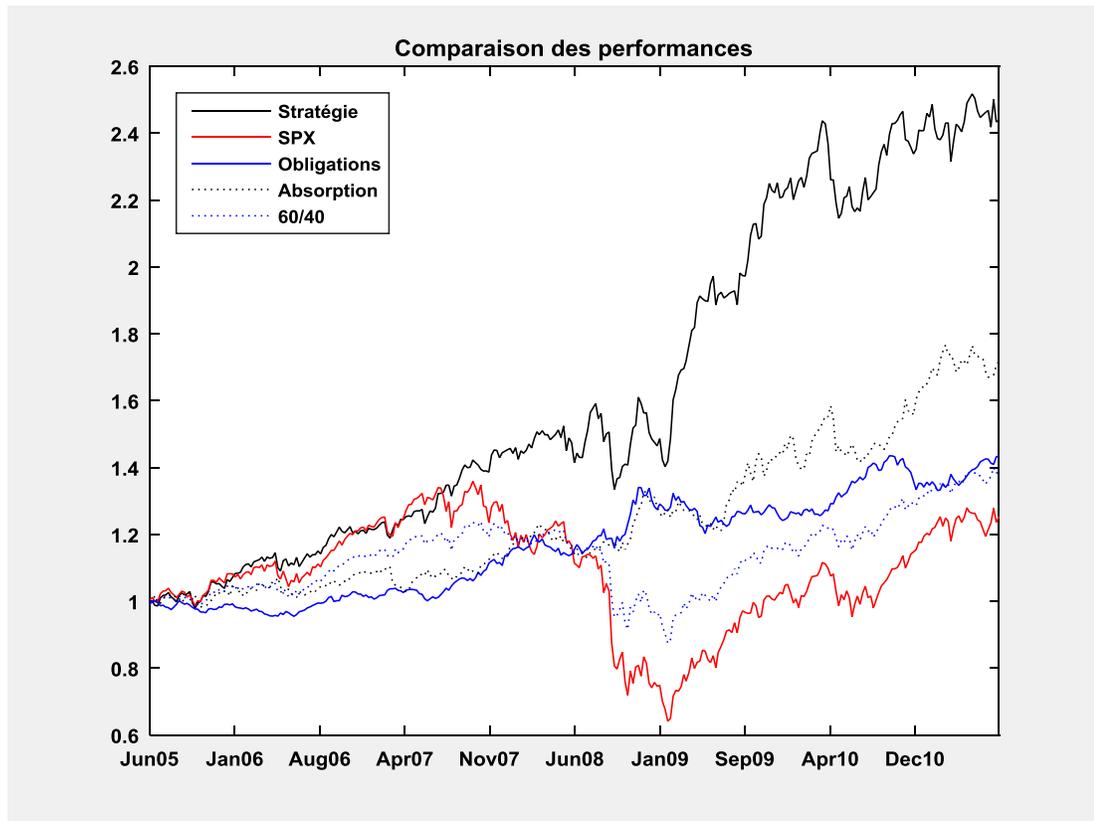
	STRATÉGIE	SPX	OBLIGATIONS	60/40	ABSORPTION
RENDEMENT ANNUALISÉ	13.49%	3.74%	6.06%	5.56%	12.80%
ÉCART-TYPE	12.96%	18.99%	7.03%	11.12%	10.61%
RATIO D'INFORMATION	1.0413	0.1972	0.8621	0.5001	1.2072
CHUTE MAXIMALE	16.13%	52.79%	10.28%	29.41%	9.12%

Figure 7-3 Indicateurs existants optimisés sur 38 semaines



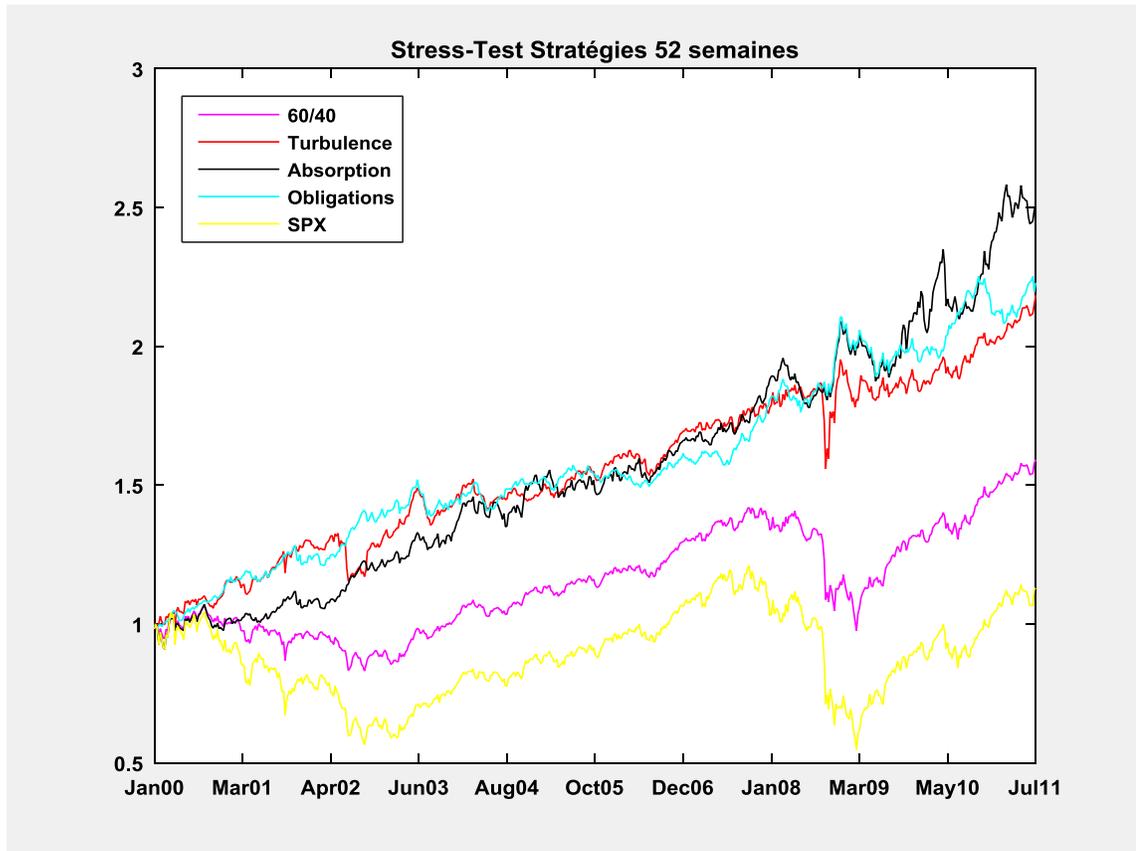
	SPX	OBLIGATIONS	TURBULENCE	60/40	ABSORPTION
<b>RENDEMENT ANNUALISÉ</b>	2.26%	6.79%	6.79%	4.69%	10.20%
<b>ÉCART-TYPE</b>	19.43%	6.88%	10.06%	11.12%	10.17%
<b>RATIO D'INFORMATION</b>	0.1164	0.9865	0.6750	0.4220	1.0029
<b>CHUTE MAXIMALE</b>	54.71%	10.21%	19.40%	31.19%	10.66%

Figure 7-4 Comparaison de L'Indicateur avec le *ratio d'absorption* optimisé sur 38 semaines



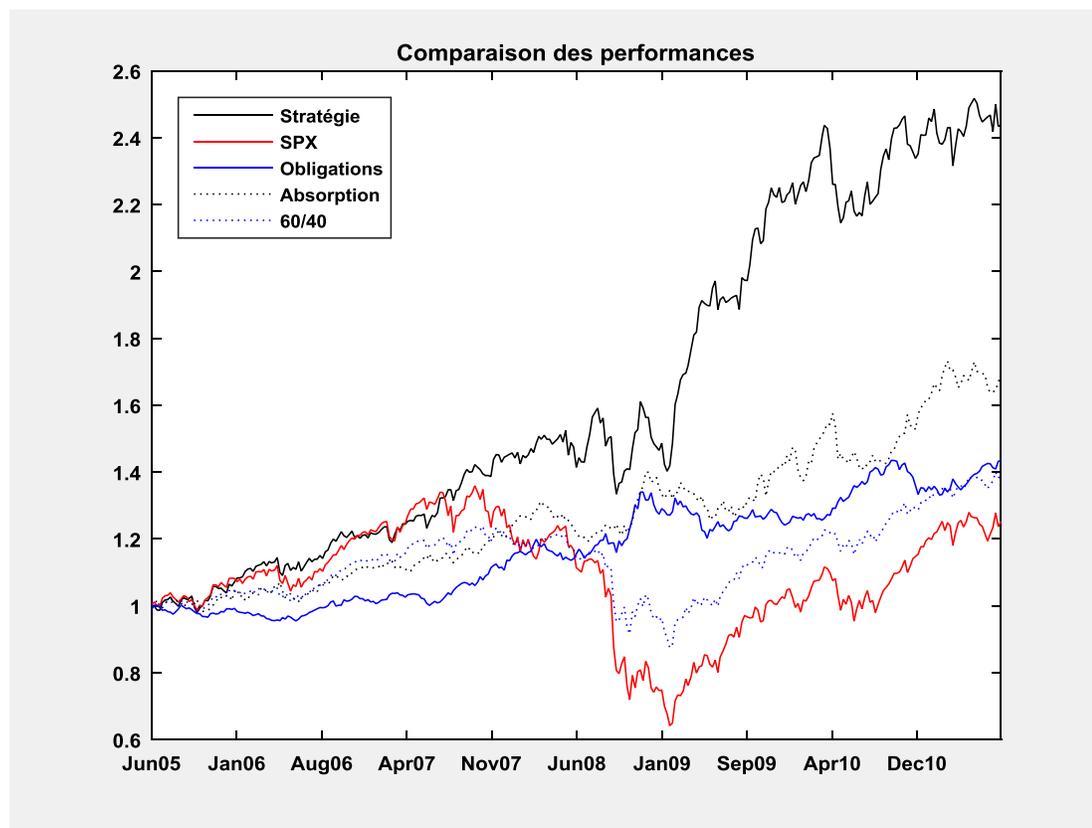
	STRATÉGIE	SPX	OBLIGATIONS	60/40	ABSORPTION
<b>RENDEMENT ANNUALISÉ</b>	13.49%	3.74%	6.06%	5.56%	9.24%
<b>ÉCART-TYPE</b>	12.96%	18.99%	7.03%	11.12%	9.71%
<b>RATIO D'INFORMATION</b>	1.0413	0.1972	0.8621	0.5001	0.9507
<b>CHUTE MAXIMALE</b>	16.13%	52.79%	10.28%	29.41%	10.66%

Figure 7-5 Indicateurs existants optimisés sur 52 semaines



	SPX	OBLIGATIONS	TURBULENCE	60/40	ABSORPTION
<b>RENDEMENT ANNUALISÉ</b>	1.06%	7.18%	6.99%	4.10%	8.30%
<b>ÉCART-TYPE</b>	19.39%	6.89%	9.93%	11.08%	9.86%
<b>RATIO D'INFORMATION</b>	0.0544	1.0426	0.7039	0.3706	0.8418
<b>CHUTE MAXIMALE</b>	54.71%	10.21%	16.47%	31.19%	10.66%

Figure 7-6 Comparaison de L'Indicateur avec le *ratio d'absorption* optimisé sur 52 semaines



	STRATÉGIE	SPX	OBLIGATIONS	60/40	ABSORPTION
<b>RENDEMENT ANNUALISÉ</b>	13.49%	3.74%	6.06%	5.56%	8.88%
<b>ÉCART-TYPE</b>	12.96%	18.99%	7.03%	11.12%	9.44%
<b>RATIO D'INFORMATION</b>	1.0413	0.1972	0.8621	0.5001	0.9412
<b>CHUTE MAXIMALE</b>	16.13%	52.79%	10.28%	29.41%	10.66%

\*Nous comparons les 5 indicateurs initiaux depuis 1999 jusqu'en 2011 car nous n'avons pas accès aux données par la suite Les données jusqu'à 2011 ont été obtenues et autorisées à utiliser lors d'un stage à La Caisse de Dépôt et Placement du Québec en 2011.

Le seul indicateur pour lequel nous disposons des données jusqu'en 2013 est le *ratio d'absorption* car nous avons décidé d'approfondir nos recherches avec seulement ce dernier au vu des résultats trouvés en première partie. State Street a consenti à nous fournir les données dans le cadre de ce travail sous réserve de non divulgation.

# Bibliographie

ANG, Andrew, CHEN, Joseph et XING Yuhang (2002) «Downside Risk and the Momentum Effect», Document de travail

BAKSHI, Gurdip et KAPADIA, Nikunj (2003) «Delta-Hedged Gains and the Negative Market Volatility Risk Premium», *The Review of Financial Studies*, Summer 2003, Vol. 16-2, pp. 527-566

BENNETT, Colin (2014) «Trading Volatility, Correlation, Term Structure and Skew», Document de Travail.

BENNETT, Colin et GIL, Miguel (2012) «Measuring Historical Volatility», Document de Travail, Groupe Santander, 2012

BLACK, Fischer et SCHOLES, Myron (1973) «The Pricing of Options and Corporate Liabilities», *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, Issue 3 (May-June 1973), pp.637-654

BRENNER, Menachem et GALAI, Dan (1989) «New Financial Instruments for Hedging Changes in Volatility», *Financial Analyst Journal* Jul/Aug 1989 p.61

BROWNE, Frank et MANASSE, Paolo (1990) «The Information Content of the Term Structure of Interest Rates: Theory and Evidence», *OECD Economic Studies*, Vol.14 1990

CAPPIELLO, Lorenzo, ENGLE, Robert F. et SHEPPARD, Kevin (2006) «Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns», *Journal of Financial Econometrics* 2006, Vol. 4 – 4, pp. 537-572

CARR, Peter et WU, Liuren (2006) «A Tale of two Indices», *The Journal of Derivatives*, Spring 2006, pp. 13-29

CHOW, George, JACQUIER, Eric, KRITZMAN, MARK et LOWRY, Kenneth (1999) «Optimal Portfolios in Good Times and Bad», *Financial Analyst Journal*, May-June 1999, Vol. 55-3, pp. 55-73

CHRISTOFFERSEN, Peter F. et DIEBOLD, Francis X. (1997) «How Relevant is Volatility Forecasting for Financial Risk Management?», Document de travail, *The Warthon Financial Institutions Center* – University of Pennsylvania 1997

CLEMENTS, Adam et BECKER, Ralf (2009) «A nonparametric approach to forecasting realized volatility», Document de travail #43, National Centre for Econometric Research

COGNEAU, Philippe et ZAKAMOULINE, Valeri (2010) «Bootstrap Methods for Finance: Review and Analysis\*», University of Liege, HEC Management School, University of Agder, Faculty of Economics.

EDWARDS, Franklin R. (1999) «Hedge Funds and The Collapse of Long-Term Capital Management», *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 13 No.2, Spring 1999, pp.189-210

FORBES, Kriston et RIGOBON, Roberto (2001) «Measuring Contagion: Conceptual and Empirical Issues», Chapitre 3.

FRENCH, Kenneth R., SCHWERT, G. William et STAMBAUGH, Robert F. (1987) «Expected Stock Returns and Volatility», *Journal of Financial Economics* 1987, vol.19, pp. 3-29

«Global Financial Stability Report : Responding to the Financial Crisis and Measuring Systemic Risk», International Monetary Fund, April 2009

HANCOCK, G. D'Anne (2012) «VIX and VIX Futures Pricing Algorithms: Cultivating Understanding», *Modern Economy* 2012, vol.3, pp.284-294

HEYNEN, Ronald, KEMNA, Angelien et VORST Ton (1994) «Analysis of the Term Structure of Implied Volatilities», *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* – Mars 1994, Vol.29, No. 1, pp.31-56

HILL, Joanne et RATTRAY, Sandy (2004) «Volatility as a Tradable Asset : Using the VIX as a Market Signal. Diversifier and for return enhancement», Document de travail, Goldman, Sachs & Co. 25 Mars 2004

HONG, Yongmiao, TU, Jun et ZHOU Guofu (2007) «Asymmetries in Stock Returns: Statistical Tests and Economic Evaluation», *The Review of Financial Studies*, vol. 20 – 5, pp. 1547–1581

International Financing Review, Issue 941, August 8 1992 «Amex examines Volatility Options».

KEATING, Con et SHADWICK, William (2002) «A Universal Performance Measure», *Journal of Performance Measurement*, Spring 2002b, pp.59-84

KEATING, Con et SHADWICK, William (2002) «An Introduction to Omega», The Finance Development Centre Limited, 2002

KLIESEN, Kevin L. et SMITH, Douglas L. (2010) «Measuring Financial Market Stress», Document de travail, Federal Reserve of St. Louis 2010, Number 2, Economic Synopses

KRITZMAN, Mark (2010) «The Windham Systemic Risk Index», Document de travail May 2010, Windham Capital Management

KRITZMAN, Mark (2011) «Financial Turbulence and Systemic Risk: Application for Portfolio Management», Document de travail, Windham Capital Management June 2011

KRITZMAN, Mark et LI, Yuanzhen (2010) «Skulls, Financial Turbulence, and Risk Management», *Financial Analyst Journal* 2010, Vol. 66-5 pp. 30-41

KRITZMAN, Mark, LI, Yuanzhen, PAGE, Sebastien et RIGOBON, Roberto (2010) «Principal Components as a Measure of Systemic Risk», Document de travail, MIT Sloan School of Management & *The Journal of Portfolio Management* 2011, Vol. 37-4

LIN Yeuh-Neng et CHANG Chien-Hung (2009) «VIX Option Pricing», *Journal of Futures Markets* June 2009, Vol.29, Issue 6 pp.523-543

MAHALANOBIS, P.C. (1936) «On the Generalized Distance in statistics», *National Institute of India* Jan. 1936, Vol.2-1, pp. 49-55

MARKELOFF, Richard, WARNER, Geoffrey et WOLLIN, Elizabeth (2012) «Modeling Systemic Risk to the Financial System», Document de travail 2012, The MITRE Corporation

MISHKIN, Frederic (1990a) «What Does the Term Structure Tell Us About Future Inflation? », *Journal of Monetary Economics*, Vol. 25, pp.77-95

MISHKIN, Frederic (1990b) «The Information in the Longer-Maturity Term Structure About Future Inflation », *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 55, pp.815-828

NAOUI, Kamel et KHALED, Mohamed (2010) «Apport de la Finance Comportementale à l'explication de la Volatilité Excessive des prix des Actifs Financiers», *Revue Libanaise de Gestion et d'Économie*, Vol. 4 2010

OET, Mikhail V., EIBEN, Ryan, BIANCO, Timothy, GRAMLICH, Dieter, ONG, Stephen J. et WANG, Jing (2011) «SAFE: An Early Warning System for Systemic Banking Risk», Document de travail 11-29, Federal Reserve Bank of Cleveland, November 2011

PLIHON, Dominique (2006) «Instabilité Financière et risqué systémique: l'insuffisance du contrôle macro prudentiel», *Le Financement de l'Économie*, Cahiers Français 331, pp. 85-90

POLITIS, Dimitris et ROMANO, Joseph (1994) «The Stationary Bootstrap», *Journal of American Statistic Association*, vol. 89 pp. 1303-1313

ROSE, Andrew K. et SPIEGEL, Mark M. (2010) «Cross-Country Causes and Consequences of the Crisis: An Update», Document de travail, The National Bureau of Economic Research 2010.

SCHWERT, G. William (2011) «Stock Volatility during the recent Financial Crisis», Document de travail 16976, National Bureau of Economic Research, April 2011

SNEDECOR, George et COCHRAN, William (1989) «Statistical Methods», Huitième Édition, Iowa State University Press

STÖCKL, Sebastian et HANKE, Michael (2014) «Financial Applications of the Mahalanobis Distance», *Applied Economics and Finance*, Vol 1 No. 2, November 2014, pp.78-84

VAN ROYEN, Anne Sophie (2002) «Hedge Fund Index Returns», *Institutional Investor Journal* 2002, Vol 2002-1, pp. 111-117

WHALEY, Robert E. (1993) «Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue», *The Journal of Derivatives* Fall 1993 p.71

WHITE, Halbert (2000) «A Reality Check For Data Snooping», *Econometrica*, Vol. 68 No. 5, September 2000. pp.1097-1126

Whitepaper « The CBOE Volatility Index – VIX » <http://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf>

ZHU, Yingzi et ZHANG, Jin E. (2005) «Variance Term Structure and VIX Futures Pricing»,  
*International Journal of Theoretical and Applied Finance* Feb.2007, Vol. 10-1, pp. 111-127