

# HEC MONTRÉAL

**Modèles et méthodes de calcul pour la valorisation d'un CDO  
synthétique**

**par  
Elie Elkhail**

**Sciences de la gestion  
(Ingénierie financière)**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du grade de maîtrise ès sciences  
(M. Sc.)*



*No 157  
2008*

Décembre 2008  
© Elie Elkhail, 2008

## DÉCLARATION DE L'ÉTUDIANTE, DE L'ÉTUDIANT ÉTHIQUE EN RECHERCHE AUPRÈS DES ÊTRES HUMAINS

### Recherche sans collecte directe d'informations

Cette recherche n'impliquait pas une collecte directe d'informations auprès de personnes (exemples : entrevues, questionnaires, appels téléphoniques, groupes de discussion, tests, observations participantes, communications écrites ou électroniques, etc.)

Cette recherche n'impliquait pas une consultation de documents, de dossiers ou de banques de données existants qui ne font pas partie du domaine public et qui contiennent des informations sur des personnes.

Titre de la  
recherche :

Modèles et méthodes de  
calcul pour la valorisation  
d'un CDO synthétique

Nom de l'étudiant : Elie Elkhaj

Signature : EL: Elkhaj

Date : 30/08/2008



# Sommaire

Ce projet permet de comparer différents modèles de valorisation d'un CDO (*Collateralised Debt Obligations*) synthétique. Cette valorisation de CDO consiste essentiellement à déterminer la distribution des pertes d'un portefeuille de contrats dérivés sur défaut (CDS ou *Credit Default Swap*). Pour modéliser le comportement des éléments du portefeuille, le modèle de type copule est présenté où une structure de dépendance est introduite à l'aide d'une fonction copule. Ce modèle général exige toutefois l'estimation d'un grand nombre de paramètres de dépendance entre les éléments du portefeuille. Comme alternative, le modèle à un facteur, un cas particulier du modèle de type copule, est introduit. Ce modèle est caractérisé par la présence d'un facteur de risque commun à tous les éléments du portefeuille qui permet de simplifier la structure de dépendance. Plus spécifiquement, ce modèle à un facteur exige la construction d'une fonction de surplus pour chacun des éléments crédit du portefeuille. Pour ces éléments, le temps de défaut survient lorsque leur fonction de surplus est inférieure à un certain seuil. Ce seuil est calculé à partir des prix observés sur les titres CDS individuels correspondants. Quant à la fonction de surplus, elle est construite à partir d'un facteur de risque commun (aux éléments du portefeuille), d'un facteur de risque spécifique et de paramètres de dépendance liant les éléments du portefeuille selon la copule choisie. De plus, conditionnellement à ce facteur de risque commun, les temps de défaut sont indépendants.

Les modèles à un facteur suivants sont implantés en langage Matlab afin de comparer leur capacité à valoriser correctement un CDO synthétique : gaussien, gaussien

stochastique, NIG (*Normal Inverse Gaussian*), NIG stochastique, Student-t (deux facteurs), Clayton, Gumble et Marshall-Olkin (MO). Trois méthodes de calcul sont utilisées pour obtenir la distribution des pertes du portefeuille : Monte-Carlo (M-C), semi-analytique par transformée de Fourier (FFT) et l'approximation du large portefeuille homogène de Vasicek (LHP ou *Large Homogenous Portfolio*). Les données utilisées sont basées sur le contrat indiciel sur défaut iTraxx Europe et sur les tranches de CDO standardisées associées pour les échéances 5, 7 et 10 ans. Ces données sont extraites du rediffuseur de données Bloomberg pour la période allant du 21 septembre 2007 au 16 juin 2008, durant la crise des crédits hypothécaires (*subprimes*). L'estimation des paramètres de dépendance est effectuée en calibrant le prix théorique calculé avec celui observé sur le marché pour la tranche la plus risquée (*equity*) tout en minimisant l'erreur sur les autres tranches. La performance des modèles est évaluée en comparant le niveau des erreurs calculées.

Les résultats obtenus sont les suivants. Le modèle à un facteur gaussien ne capture pas adéquatement la dynamique des prix observés. Le choix de copules Student-t, de Clayton et de Gumble ne sont pas des alternatives intéressantes au modèle gaussien pour la période étudiée. Le modèle MO capture un peu mieux la structure de dépendance dans un contexte de crise des crédits. Le modèle NIG semble être le meilleur compromis entre le modèle gaussien et le modèle MO. Quant aux modèles gaussien et NIG avec extension stochastique de la corrélation, ils permettent de modéliser un peu mieux la structure de dépendance comparativement aux modèles de base respectifs. Parmi tous les modèles analysés, c'est le modèle NIG avec extension stochastique qui offre les meilleurs résultats. Finalement, parmi l'ensemble des combinaisons modèle/méthode de calcul, la combinaison NIG/LHP est particulièrement intéressante comme compromis entre précision et vitesse de calcul.

## Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mes directeurs de recherche, M. Nicolas A. Papa-georgiou et M. Bruno Rémillard, pour avoir accepté de diriger ce mémoire. Je remercie également les membres du jury : M. Iwan Meier et M. Martin Boyer.

Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes qui ont collaboré à l'obtention de cette maîtrise, en particulier Alexis qui m'a aidé à réviser ce mémoire.

Merci enfin à ma conjointe Anna-Maria, ma famille et mes amis pour leur soutien inconditionnel.

Je souligne également l'IFM2 pour leur soutien financier.



# Table des matières

Sommaire . . . . .	i
Remerciements . . . . .	iii
Table des matières . . . . .	iv
Table des figures . . . . .	vi
Chapitre 1. Introduction . . . . .	1
Chapitre 2. Mise en contexte . . . . .	5
2.1 Dérivés de crédit sur titre simple et CDO . . . . .	5
2.1.1 CDS sur titre simple . . . . .	5
2.1.2 Indices et contrats indiciels sur défaut . . . . .	8
2.1.3 Produits structurés : CDO . . . . .	10
2.2 Modélisation du risque de crédit multiple . . . . .	18
2.2.1 Approche structurelle . . . . .	18
2.2.2 Approche réduite . . . . .	19
2.2.3 Approche hybride et copules . . . . .	21
2.3 Valorisation d'un CDO synthétique : aspects pratiques . . . . .	25
Chapitre 3. Valorisation générale d'un CDO synthétique par le modèle de type copule . . . . .	28
3.1 Copules . . . . .	29
3.1.1 Définition et propriétés générales des copules . . . . .	29
3.1.2 Exemples de copules . . . . .	30
3.2 Valorisation des CDO . . . . .	33
3.2.1 Espace probabiliste du modèle . . . . .	33
3.2.2 Construction d'une courbe de crédit . . . . .	34
3.2.3 Construction de la distribution multivariée de survie . . . . .	36
3.2.4 Construction de la distribution des pertes du portefeuille . . . . .	51
3.2.5 Équation générale de valorisation . . . . .	53
Chapitre 4. Méthodes de calcul des pertes du portefeuille d'un CDO	57
4.1 Introduction . . . . .	57
4.1.1 Calibration de la copule . . . . .	58
4.2 Méthode de calcul par Monte-Carlo . . . . .	59



4.2.1	Simulation des instants de défauts : modèle général . . . . .	60
4.2.2	Simulation des temps de défauts : modèle à un facteur gaussien . . . . .	60
4.2.3	Simulation des instants de défauts : modèle à deux facteurs Student-t . . . . .	61
4.2.4	Simulation des instants de défauts : modèle à un facteur Clay- ton et Gumbel . . . . .	62
4.2.5	Simulation des instants de défauts : modèle à un facteur Marshall-Olkin . . . . .	63
4.2.6	Simulation des instants de défauts : modèle à un facteur NIG . . . . .	64
4.2.7	Algorithme de valorisation . . . . .	64
4.3	Méthode de calcul semi-analytique par transformée de Fourier pour un modèle à un facteur . . . . .	65
4.3.1	Algorithme de valorisation . . . . .	67
4.4	Méthode de calcul par l'approximation du large portefeuille homogène (LHP) . . . . .	68
4.4.1	Approximation du large portefeuille homogène . . . . .	69
4.5	Algorithme de valorisation . . . . .	71
<b>Chapitre 5. Comparaison numérique des modèles et des méthodes de calcul . . . . .</b>		<b>73</b>
5.0.1	Description des données . . . . .	73
5.0.2	Implantation des modèles en Matlab . . . . .	76
5.0.3	Calcul des corrélations implicites et de base . . . . .	77
5.0.4	Comparaison des modèles à un facteur . . . . .	84
5.0.5	Comparaison des méthodes de calcul . . . . .	87
<b>Chapitre 6. Conclusion . . . . .</b>		<b>91</b>
<b>Bibliographie . . . . .</b>		<b>95</b>

## Table des figures

1.1	Progression de la valeur notionnelle des dérivés sur crédit. . . . .	2
2.1	Échange de flux monétaire durant la durée de vie d'un CDS avec règlement en espèces. . . . .	6
2.2	Règlement physique et en espèces d'un CDS simple. . . . .	7
2.3	Indices sur défaut établis par Markit group. . . . .	9
2.4	Structure simplifiée d'un CDO de type cash-flow. . . . .	13
2.5	Structure simplifiée d'un CDO synthétique sans SPV. . . . .	13
2.6	CDO sur indice iTraxx Europe. . . . .	15
2.7	Distribution à queue épaisse. . . . .	22
3.1	Pertes en % absorbées par chaque tranche d'un CDO. . . . .	52
3.2	Flux entre la patte protection et la patte prime. . . . .	54
5.1	Caractéristiques de l'indice Markit iTraxx Europe. . . . .	73
5.2	Cote de crédit des entités selon Markit group. . . . .	74
5.3	Indice iTraxx Europe-5ans, série-8. . . . .	75
5.4	distribution des pertes en fonction de la corrélation . . . . .	78
5.5	Prime en fonction de la corrélation. . . . .	79
5.6	Primes observées pour les échéances 5-7 et 10 ans. . . . .	80
5.7	Corrélation implicite pour les échéances 5-7 et 10 ans. . . . .	81
5.8	Corrélation implicite. . . . .	81
5.9	Corrélation de base pour les échéances 5-7 et 10 ans. . . . .	84
5.10	Résultats comparatifs des modèles-iTraxx 5ans-2007-10-15. . . . .	85
5.11	Résultats comparatifs des modèles-iTraxx 5ans-2008-03-17. . . . .	86
5.12	Résultats comparatifs des modèles-iTraxx 5ans-2008-06-16. . . . .	87
5.13	Distribution des pertes (Gauss, Student-t, Clayton). . . . .	88
5.14	Distribution des pertes (Gauss, NIG, MO, Gumble). . . . .	89
5.15	Distribution des pertes (Gauss, Gauss-stoch.). . . . .	89
5.16	Distribution des pertes (NIG, NIG-stoch.). . . . .	90
5.17	Temps de simulation des modèles en secondes (Matlab 6.5). . . . .	90

# Chapitre 1

## Introduction

Les dérivés de crédit sont des contrats financiers bilatéraux dont la valeur dépend de l'occurrence d'événements de crédits (faillite, défaut de paiement ou tout changement aux termes de l'emprunt) sur le sous-jacent de type crédit. Ce sous-jacent prend généralement la forme d'un prêt bancaire ou d'un titre obligataire dont le remboursement n'est pas garanti. L'innovation majeure apportée par ces instruments est le transfert synthétique du sous-jacent de type crédit, c'est-à-dire le transfert spécifique du risque de crédit à d'autres intervenants, sans véritablement céder l'actif sous-jacent. Ces instruments permettent ainsi l'isolation précise du risque de crédit des autres types de risques, particulièrement le risque de marché (ou risque de taux d'intérêt).

Depuis quelques années, le marché mondial des dérivés de crédit a connu une croissance phénoménale. Selon la British Banker's Association (BBA) [57], ce marché, pratiquement inexistant au début des années 90, est passé d'une valeur notionnelle de 180 milliards \$US en 1996 à une valeur estimée de 33 000 milliards \$US en 2008. La figure 1.1 illustre cette progression.



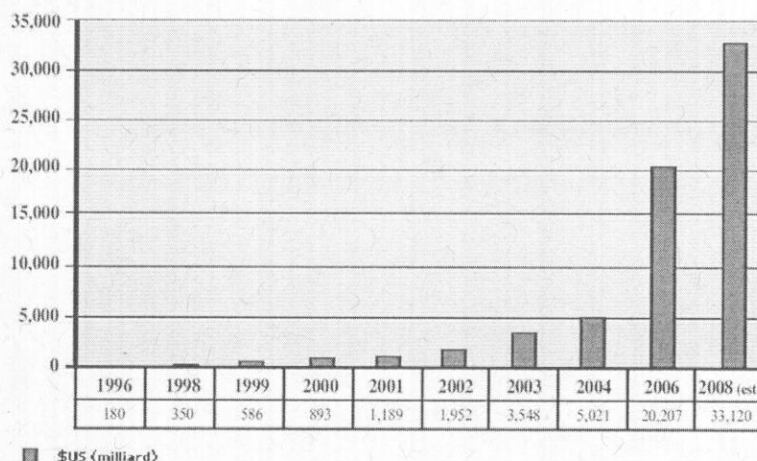


Fig. 1.1: Progression de la valeur notionnelle des dérivés sur crédit.

En 2006, selon BBA [57], les deux principaux instruments négociés sur dérivés de crédit, en terme de valeur notionnelle, sont les contrats dérivés sur défaut (CDS ou *Credit Default Swap*) avec plus de 60 % du total négocié, et les produits de type CDO (*Collateralised Debt Obligations*), avec près de 25 % du total négocié. Les autres produits négociés sont : les dérivés sur panier (*n<sup>th</sup> to default swap* par exemple), les swaptions, les notes sur crédit, les options sur *swap* de crédit, les produits sur crédit lié à des actions, etc.

Le contrat CDS permet aux investisseurs de s'assurer contre le risque de défaut ou, alternativement, de spéculer sur la réalisation de cet événement. Le CDO est plutôt basé sur un portefeuille d'éléments de crédit divisé en plusieurs tranches de risque, ou niveau de priorité de paiements, correspondant aux besoins de divers profils d'investisseurs. La tranche la moins risquée est la première payée mais la dernière à absorber les pertes. La tranche la plus risquée est la dernière payée mais la première à absorber les pertes. Chaque tranche reçoit un paiement proportionnel au niveau de risque et absorbe une fraction des pertes selon son degré d'exposition hiérarchique.

Les dérivés de crédit sont principalement utilisés par les banques commerciales comme outil de gestion de risque. En effet, leur intérêt pour ces instruments se ca-



ractérise notamment par une nouvelle culture de gestion de risque, renforcée par les accords de Bâle sur les fonds propres. Ils sont ainsi utilisés dans le but de diversifier leurs actifs exposés au risque de crédit ou pour réduire leur exposition au risque de crédit dans leur bilan. Ces instruments sont également utilisés par les spéculateurs, tels les fonds de couverture (*hedge fund*) et les banques d'investissement, intéressés à s'exposer au risque du crédit sur des signatures absentes du marché obligataire ou à obtenir un rendement plus élevé que celui offert par les titres obligataires de même cote de crédit. Toutefois, suite à la récente crise de crédit ayant débuté en juillet 2007, plusieurs investisseurs ont très rapidement perdu confiance dans ce type de produits dérivés, en particulier certains types de CDO moins transparents et peu liquides tels les CDO basés sur un portefeuille de prêts hypothécaires à risques (*subprimes*). Il est à anticiper qu'au cours des prochaines années, la taille du marché des dérivés de crédit, ou du moins sa progression, sera très certainement réduite, particulièrement dans ces segments moins transparents. Déjà en avril 2008, l'agence de presse Reuters [59] a rapporté que la création de nouveaux CDO avait diminué de près de 90% pour le premier trimestre de 2008 comparativement à 2007.

Dans le cadre de ce mémoire, la valorisation d'une classe de CDO plus transparente et plus liquide est présentée : les CDO synthétiques standardisés sur indice. En 2004, parallèlement à la création d'indices (iTraxx et CDX) liés à un portefeuille de CDS, l'arrivée à maturité du marché des CDO a favorisé le lancement de tranches standardisées de CDO sur ces indices. Les prix de ces tranches sont cotés de façon continue et ont facilité le développement d'une liquidité importante sur ces instruments qualifiés de produits de "corrélation". En effet, alors que dans le cas des CDS c'est le risque de crédit spécifique lié à une obligation qui est négocié, c'est plutôt la "corrélation" entre les éléments du portefeuille composant l'indice qui est négociée dans le cas des CDO synthétiques sur indice. Ce mémoire présente les principaux modèles de valorisation d'un CDO synthétique. Ces modèles sont basés sur la modélisation de la dépendance entre les défauts multiples d'un portefeuille de CDS à partir des fonctions appelées copules. Un risque commun (facteur de risque commun à l'ensemble des éléments du portefeuille) est également introduit afin de simplifier la modélisation ; le modèle le

plus commun étant le modèle à un facteur basé sur la copule gaussienne. Ce modèle à un facteur gaussien, tout comme le modèle de Black-Scholes pour la valorisation des options européennes, est celui communément utilisé en industrie pour évaluer les dérivés de crédit sur portefeuille tels que les CDO. Des extensions de ce modèle sont également présentées (choix d'une copule différente ou choix différent de paramètres) afin de tenter de mieux représenter la dynamique des prix observés sur les marchés.

Plus spécifiquement, au chapitre 1 une mise en contexte qualitative de l'univers des produits dérivés de crédit est présentée. Les principaux produits sur dérivés de crédit sont d'abord décrits : CDS sur titres simples, indices CDS, CDO. Les principales approches pour modéliser le risque de crédit multiple sont ensuite détaillées : approche structurelle, approche réduite et approche hybride avec copules. Finalement, les aspects pratiques liés à la valorisation d'un CDO synthétique, telles que les méthodes de calcul, sont discutés. Le chapitre 2 expose quantitativement les modèles mathématiques menant à l'équation de valorisation d'un CDO synthétique. Dans un premier temps, la définition, les propriétés générales et des exemples de copules sont présentés. Dans un second temps, les étapes menant à l'équation générale de valorisation d'un CDO sont détaillées ainsi que les principaux modèles à un facteur permettant la construction de la distribution des pertes du portefeuille : gaussien, Student-T, archimédien (Gumble, Clayton), Double-T, Normal Inverse Gaussian (NIG), Marshall-Olkin et gaussien-NIG avec extension aléatoire de la corrélation. Le chapitre 3 expose les méthodes de calcul utilisées pour l'évaluation numérique des pertes du portefeuille à partir des modèles à un facteur décrits au préalable dans ce chapitre : la simulation de Monte-Carlo, la méthode semi-analytique (FFT) et la méthode d'un large portefeuille homogène (LHP). Finalement, le chapitre 4 fait état des résultats numériques des modèles étudiés et de la performance des techniques de calcul. Les données utilisées sont basées sur l'indice iTraxx Europe et sur les tranches de CDO standardisées associées à ce dernier pour les échéances 5, 7 et 10 ans. Ces données sont extraites du redifuseur de données Bloomberg pour la période allant du 21 septembre 2007 au 16 juin 2008 (série 8), durant la crise des crédits hypothécaires (*subprimes*).

## Chapitre 2

### Mise en contexte

#### 2.1 Dérivés de crédit sur titre simple et CDO

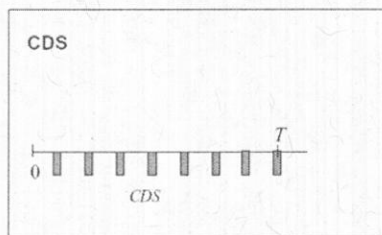
##### 2.1.1 CDS sur titre simple

Le contrat CDS sur titre simple (ou *single-name* CDS) est le bloc de base des instruments sur dérivés de crédit. Il permet aux investisseurs de s'assurer contre le risque de défaut ou, alternativement, de spéculer sur la réalisation de cet événement. Il offre ainsi la possibilité de transférer synthétiquement le risque de crédit d'un sous-jacent (généralement une obligation corporative) entre deux contreparties, sans échange initial de flux monétaire. En effet, l'acheteur du contrat désirant se protéger accepte de payer une série de primes au vendeur pour la durée fixe du contrat ou jusqu'à la réalisation d'un événement de crédit (défini dans le contrat) telle la faillite, le défaut de paiement ou tout changement aux termes de l'emprunt. Le vendeur, en retour, accepte de le compenser uniquement en cas d'un événement de crédit. Cette situation de défaut met fin au contrat et il y a alors un règlement final physique ou en espèces. La figure 2.1 illustre les flux échangés durant la durée de vie du contrat entre l'acheteur/vendeur du contrat, où  $T$  est la durée de vie du contrat et  $\tau$  le temps

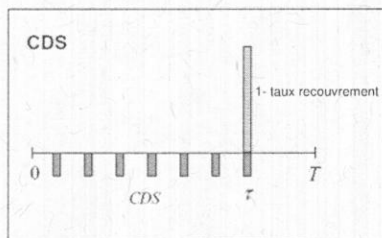


de défaut.

■ Pas de défaut



■ Défaut



**Fig. 2.1:** Échange de flux monétaire durant la durée de vie d'un CDS avec règlement en espèces.

**Règlement physique :** C'est le règlement le plus courant. Il consiste pour l'acheteur de la protection à vendre au pair des titres en défaut pour un montant égal à la valeur nominale du swap.

**Règlement en espèces :** Le vendeur de protection verse à l'acheteur la différence entre la valeur nominale du swap et la valeur au marché des titres de référence.

La figure 2.2 illustre les échanges effectués pour ces deux types de règlement final.

Bien qu'un contrat CDS puisse se comparer à une assurance classique, il se différencie de celle-ci à plusieurs niveaux : 1) l'acheteur de la protection n'est pas contraint à détenir l'actif sous-jacent ; 2) le règlement du contrat, suite à un événement de crédit, intervient automatiquement, sans que l'assuré n'ait à prouver qu'il y a eu préjudice ; 3) l'acheteur du contrat peut en sortir à son gré.



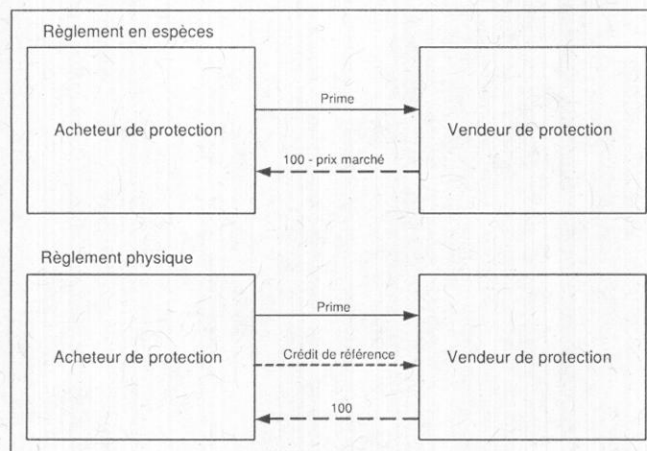


Fig. 2.2: Règlement physique et en espèces d'un CDS simple.

Ces contrats CDS sont négociés sur les marchés de gré à gré et les termes du contrat (définition des événements sur crédit, méthodologie de règlement final, etc.) sont standardisés par ISDA (*International Swaps and Derivatives Association*), une association regroupant les principaux intervenants sur les produits dérivés et ayant défini en 2003 un cadre normatif sur les dérivés de crédit [58]. Ce degré de standardisation, combiné aux avantages offerts par le transfert synthétique du sous-jacent, ont favorisé le développement d'un produit relativement liquide, surpassant généralement la liquidité des obligations corporatives liées et offrant une prime (*spread*) supérieure à celles-ci. Ce marché mondial des CDS n'est toutefois véritablement liquide que pour un groupe de 500-1000 signatures. De plus, ces blocs liquides sont souvent utilisés pour la création d'autres dérivés de crédits plus complexes (CDO synthétiques,  $n^{th}$  to default swap, etc.), créant un effet de concentration.

Quant à la valeur de la prime payée par l'acheteur, elle est calculée de sorte que la valeur initiale du contrat soit nulle. De façon équivalente, cela revient à dire que la valeur présente du paiement (patte flottante) à l'acheteur de la protection en cas de défaut égale la valeur présente des paiements (patte fixe) au vendeur de la protection. Le principal facteur qui détermine le montant de cette prime est la cote de crédit de l'obligation de référence liée au contrat CDS ; plus le risque de défaut est élevé, plus

cette prime sera élevée.

### 2.1.2 Indices et contrats indiciels sur défaut

Afin de favoriser une plus grande liquidité et une plus grande transparence sur le marché des CDS, l'innovation proposée est de créer des indices de référence standardisés sur un portefeuille de CDS. Des contrats indiciels sur défaut liés à ces indices sont négociés sur le marché.

Ces indices CDS sont généralement composés d'un panier équipondéré de contrats CDS sur titre simple (*single-name* CDS). Les titres du panier sont choisis de façon à regrouper les CDS les plus liquides, par cote de crédit (ou niveau de risque), zone géographique ou segment industriel. La valeur de l'indice reflète le coût nécessaire pour se protéger contre les événements de défaut sur les titres du panier ; ainsi la valeur de l'indice augmente lorsque la qualité du crédit se détériore et diminue dans le cas contraire.

Les principales familles d'indices, gérées par Markit Group ([www.markit.com](http://www.markit.com)), sont les indices iTraxx pour les marchés d'Europe, d'Asie et d'Australie ; et les indices CDX pour l'Amérique du Nord et les marchés émergents. Ces indices sont statiques pendant leur durée de vie, généralement 6 mois, sauf lorsque qu'une entité du panier subit un événement de crédit (le CDS lié est alors retiré de l'indice). Ainsi, à chaque cycle de vie, un nouvel indice est constitué, par le rebalancement (*index roll* ou roulement de l'indice) de l'ancien, afin de refléter le plus fidèlement possible les conditions changeantes sur le segment de crédit que l'indice désire refléter. Il est à noter que le niveau de l'indice change généralement suite au roulement de l'indice du fait que les nouveaux entrants ont une prime de risque différente des sortants. Les contrats indiciels sur défaut sont utilisés afin de spéculer sur l'habilité des compagnies représentées dans l'indice à payer leur dette ou alternativement à se couvrir contre le risque de défaut. Les événements de défauts possibles (*credit events*) étant la faillite, le défaut de paiement ou tout changement aux termes de l'emprunt sur un sous-jacent de type crédit du panier.

Les contrats indiciels sur défaut les plus liquides, en terme de volumes négociés et d'écart cours vendeur/cours acheteur, sont les contrats sur indice CDX.NA.IG (CDX *North America Investment Grade*) et iTraxx Europe. Ces indices regroupent un panier de 125 CDS liés à des obligations corporatives provenant respectivement de l'Amérique du Nord et de l'Europe et ayant une qualité de crédit de type investissement (*investment grade*) avec une cote de crédit  $\geq$  BBB. Ces indices sur défaut ont généralement une durée de vie de 3-5-7 ou 10 ans. La figure 2.3 illustre ces indices de référence ainsi que des sous-indices régionaux et sectoriels.

	Index	# Entities	Roll Dates	Maturity in years	Credit Events
CDX	IG	125	3/20 – 9/20	1, 2, 3, 5, 7, 10	Bankruptcy, Failure to Pay
	HY	100	3/27 – 9/27	3, 5, 7, 10	
	XO	35	3/20 – 9/20	3, 5, 7, 10	
	EM	14 (variable)	3/20 – 9/20	5	
	EM Diversified	40	3/20 – 9/20	5	
iTraxx Europe	Europe	125	3/20 – 9/20	3, 5, 7, 10	Bankruptcy, Failure to Pay, Modified Restructuring
	Non Financials	100	3/20 – 9/20	5, 10	
	Senior Financials	25	3/20 – 9/20	5, 10	
	Sub Financials	25	3/20 – 9/20	5, 10	
	High Volatility	30	3/20 – 9/20	3, 5, 7, 10	
	Crossover	50	3/20 – 9/20	3, 5, 7, 10	
iTraxx Asia	Japan	50	3/20 – 9/20	3, 5, 10	Bankruptcy, Failure to Pay, Modified Restructuring
	High Volatility	25	3/20 – 9/20	5	
	Asia ex-Japan IG	50	3/20 – 9/20	5	
	Asia ex-Japan HY	20	3/20 – 9/20	5	
	Australia	25	3/20 – 9/20	5, 10	

Fig. 2.3: Indices sur défaut établis par Markit group.

Un point important à noter est que ces indices possèdent des coupons fixes (primes) prédéterminés lors de leur lancement et sont négociés comme des instruments propres sur le marché de gré à gré de façon similaire à une obligation. La valeur (prix) de chaque instrument est par conséquent déterminée par la dynamique d'offre et de demande et non de façon théorique. Le prix coté est en fait une réévaluation de cette prime de risque initialement fixée lors de son lancement. Comme pour une obligation, la valeur du titre négocié varie ainsi de façon inverse à cette prime en



prenant une valeur au dessus ou en dessous de sa valeur au pair.

Finalement, bien que le marché sur dérivés de crédit soit essentiellement de type gré à gré, certaines bourses organisées tentent également de lancer des produits standardisés sur ces indices liquides (iTraxx, CDX). Eurex a par exemple été la première à lancer un contrat à terme sur l'indice iTraxx Europe en mars 2007 avec, jusqu'à présent, peu de succès. Toutefois, avec la récente crise des crédits hypothécaires (*sub-primes*), le paysage du marché du crédit pourrait être réorganisé et les bourses organisées, misant sur leur système de garantie financière de leur chambre de compensation, pourraient potentiellement profiter de cette situation.

### 2.1.3 Produits structurés : CDO

#### Définition d'un CDO

Tavakoly [51] définit les CDO de la façon suivante : les CDO sont une forme de titrisation (*securitization*) dont le portefeuille sous-jacent est composé de titres obligataires (*bonds*), de prêts (*loans*), de ABS (*Asset Backed Securities* ou titres adossés sur des actifs), de MBS (*Mortgage Backed Securities* ou prêts hypothécaires adossés), de tranches d'un autre CDO ou de dérivés de crédits ayant comme sous-jacent un des actifs énumérés précédemment. Ces instruments financiers sont considérés comme des produits structurés permettant de négocier la corrélation puisqu'ils sont construits sur la base de la dépendance d'actifs financiers et de leurs instruments dérivés. Dans le cas des CDO, et c'est l'une de leurs principales caractéristiques, ce n'est pas un type de profil mais plusieurs profils rendement-risque qu'il est possible de reproduire à partir d'un même portefeuille. Quant à l'appellation titrisation, elle vient du fait que les CDO permettent d'émettre des titres (généralement notés) sur le marché des capitaux qui sont garantis (*backed*) par un portefeuille d'actifs (par exemple une centaine de débiteurs provenant du secteur bancaire). Un CDO peut donc être conçu comme une combinaison d'actifs (le portefeuille) et de passifs (les titres). Le créateur ou initiateur du CDO est généralement une banque, une banque d'investissement ou une société de gestion d'actifs qui désire transférer le risque de crédit, par une ces-



sion parfaite ou par des dérivés de crédits, du portefeuille de référence vers d'autres investisseurs. Dans un CDO classique, il y a séparation entre le risque de crédit du portefeuille et celui de l'initiateur du montage via le recours à une tierce structure dédiée (*Special Purpose Vehicle* - SPV). Un SPV s'occupe alors de la titrisation et de l'émission des tranches de CDO adossées au portefeuille de référence. Il est toutefois à noter que dans certaines structures de CDO, il y a absence de SPV et l'arrangeur devient la contrepartie directe de l'investisseur.

### Titres découpés en plusieurs tranches

Les titres émis (passifs) sont ainsi divisés en plusieurs tranches de risque, ou niveau de priorité de paiements, correspondant aux besoins de divers profils d'investisseurs. Généralement, il existe trois niveaux de tranches : *senior* (ou supérieure), *mezzanine* (ou intermédiaire) et *equity* (ou inférieure). La tranche *senior*, la moins risquée, est la première payée mais la dernière à absorber les pertes. La tranche *equity*, la plus risquée, est la dernière payée mais la première à absorber les pertes. Chaque tranche reçoit un paiement proportionnel au niveau de risque et absorbe une fraction des pertes selon son degré d'exposition hiérarchique.

La tranche *equity* n'est pas notée alors que les tranches *senior* et *mezzanine* sont respectivement notées de A à Aaa et de B à Bbb par les agences de cotations (Moody's, Standard and Poors, Fitch). Une tranche supplémentaire non cotée est souvent ajoutée à celles énumérées précédemment (particulièrement dans le cas des CDO synthétiques) : la tranche *super senior*, c'est-à-dire ayant une cote "théorique" supérieure à celle de la tranche *senior*.

### Types de CDO

Plusieurs types de CDO existent sur le marché et leur regroupement ne fait pas l'unanimité auprès des professionnels de la finance. Voici toutefois, selon Tavakoli [51], trois regroupements communs permettant de les identifier :

**1- L'objectif de la transaction** - Le premier classement consiste à séparer les

CDO en deux grands groupes en fonction de leur utilité : CDO de bilan (*balance sheet CDO*) et les CDO d'arbitrage (voir également Picone [45]).

Le CDO d'arbitrage permet un arbitrage entre le rendement moyen du portefeuille sous-jacent et la rémunération offerte aux investisseurs des tranches. Selon Tavakoli, bien que les transactions des institutions financières s'approchent d'une opération d'arbitrage au sens strict, le terme dans ce cas est mal choisi puisque ce type de transaction n'implique pas un gain assuré sans risque. En effet, le risque n'est pas toujours entièrement transféré des actifs du portefeuille vers les tranches associées vendues et la viabilité financière de la transaction n'est pas toujours assurée. Tavakoli propose plutôt le terme *CDO economics* afin de calculer les gains et les pertes possibles suite à ce type d'opération. Quant au CDO de bilan, il permet d'optimiser le bilan (généralement celui d'une banque) en cédant un portefeuille d'actifs, ainsi que le risque associé, vers d'autres investisseurs.

## **2- Le mode de transfert du risque de crédit du portefeuille sous-jacent**

La seconde distinction consiste à séparer les CDO en deux grands groupes en fonction du mode de transfert du risque de crédit du portefeuille sous-jacent : CDO de flux (*cash CDO*) et CDO synthétique.

Ainsi, lorsque le portefeuille est composé d'actifs au comptant (*cash assets*) tels que des titres obligataires, des prêts, des ABS, des MBS, etc., le CDO est nommé CDO de flux. Dans ce cas, il y a cession parfaite d'actifs (*true sale*) du créateur du CDO (initiateur) vers un SPV qui à son tour se refinance en vendant des titres à divers investisseurs. Il y a alors transfert du risque du SPV aux investisseurs qui en retour reçoivent des paiements de coupons, reflétant le risque assumé. La figure 2.4 illustre ce type de structure.

Le CDO est dit synthétique dans le cas où les actifs du CDO sont des dérivés de crédit de type CDS. Le terme synthétique est utilisé car le risque est synthétiquement transféré vers un autre parti à l'aide des CDS sans qu'il n'y ait transfert de la dette sous-jacente. De plus, tout comme pour un contrat CDS, il existe une relation acheteur/vendeur de protection entre les contreparties. Ainsi, le vendeur accepte de com-

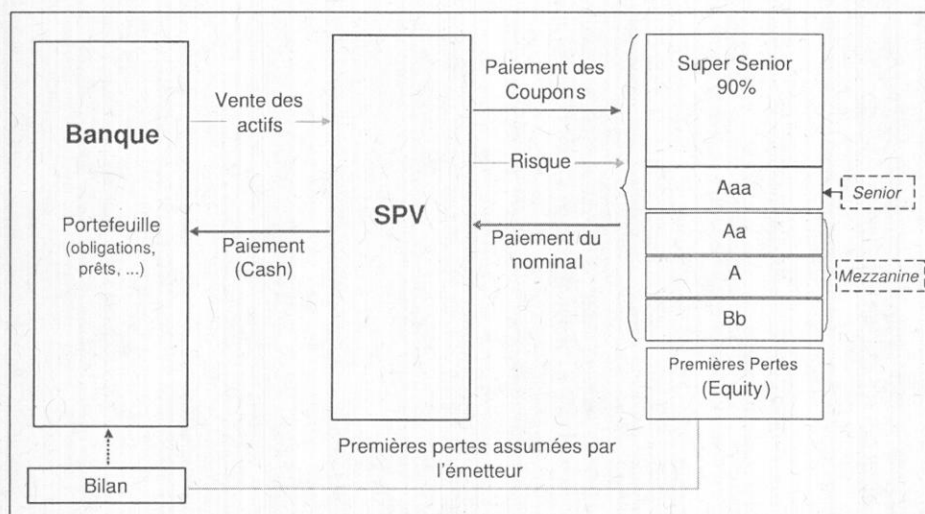


Fig. 2.4: Structure simplifiée d'un CDO de type cash-flow.

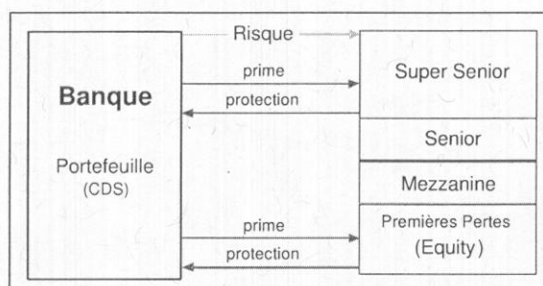


Fig. 2.5: Structure simplifiée d'un CDO synthétique sans SPV.

penser l'acheteur en cas de perte sur le portefeuille sous-jacent ayant un impact sur la tranche concernée. En retour, pour la durée fixe du contrat, l'acheteur accepte de payer une série de primes (*spreads*) au vendeur proportionnellement à la valeur nominale initiale de la tranche moins les pertes encourues. La figure 2.5 illustre ce type de structure synthétique.

Contrairement aux CDO de flux, les CDO synthétiques n'exigent pas un transfert direct d'actifs vers un SPV. En effet, un SPV n'est pas nécessaire si un contrepartie (acheteur de protection) peut être trouvé pour chacun des CDS du portefeuille. Cette pratique offre plusieurs avantages dont : le maintien des bonnes relations entre le



créancier et l'emprunteur initial (par exemple pour des raisons de confidentialité), la réduction des coûts intermédiaires causés par la création d'un SPV et la diminution du temps de transaction. Par ailleurs, ce type de CDO synthétique a très fortement contribué à l'explosion de la demande globale de CDO, particulièrement du côté du marché européen pour des opérations d'arbitrage. Cette forte augmentation est directement liée à la croissance rapide du marché des CDS.

**3- La composition du portefeuille :** Finalement, la troisième distinction concerne la composition du portefeuille sous-jacent. Pour un CDO, les instruments classiques composant ce portefeuille sont les prêts bancaires, les titres obligataires ou, dans le cadre d'opérations synthétiques, les CDS. Toutefois, depuis quelques années, cet éventail s'est élargie afin d'inclure d'autres produits structurés : CDO d'ABS, CDO de MBS, CDO de CDO (*CDO*<sup>2</sup>), etc.

#### **Tranche de CDO sur des indices standardisés sur défaut (iTraxx, CDX)**

Tel que mentionné précédemment, parallèlement à la création d'indices sur défaut (iTraxx et CDX), l'arrivée à maturité du marché des CDO a favorisé la lancement de tranches standardisées de CDO liées à ces indices. Selon BBA [57], la part de tranches de CDO basée sur ces indices, par rapport au total des produits dérivés négociés, en terme de valeur notionnelle, est passée de 2.0% en 2005 à 7.6% en 2006.

La figure 2.6 illustre ce type de CDO sur l'indice standardisé iTraxx-Europe avec des points d'attachement liés à chaque tranche, c'est-à-dire à 3%, 6%, 9%, 12% et 22%. Dans le cadre de ce mémoire, c'est ce type de CDO qui est valorisé.

#### **Bénéfices des CDO**

Voici selon Bluhm [4] les principales raisons expliquant l'explosion de la popularité de ces produits auprès des banques ces dernières années :

1. **Arbitrage :** Les CDO synthétiques sont particulièrement utilisés à cette fin. Cette opération est possible en diversifiant un portefeuille d'actifs, en découpant

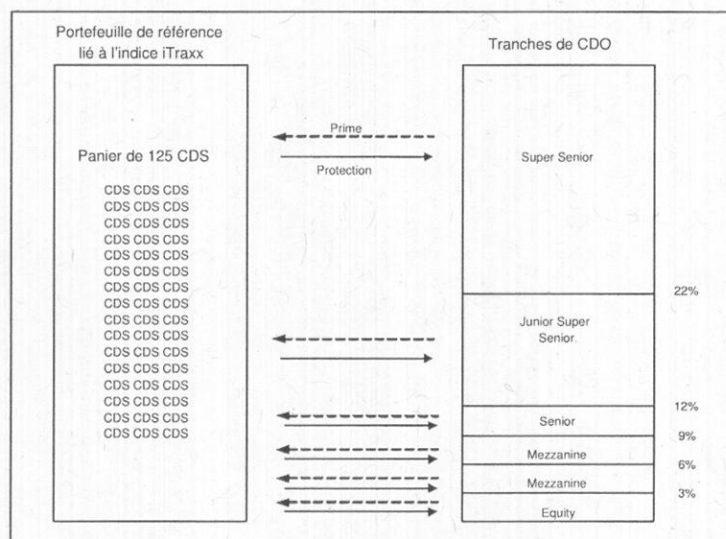


Fig. 2.6: CDO sur indice iTraxx Europe.

la partie passive du CDO et en rehaussant la qualité du crédit par des techniques de protection. Il est alors possible de payer, globalement, une prime (*spread*) de crédit moins élevée (pour les passifs) que celle reçue (pour les actifs à risque). Des occasions d'arbitrage apparaissent également lorsque des changements rapides de notation de crédit n'ont pas le temps de se refléter sur les instruments de crédit.

2. **Réduire son capital réglementaire** : Le risque de crédit est le principal risque contenu dans le bilan consolidé d'une banque. L'intérêt pour la banque est de déconsolider le risque de son bilan et de libérer des fonds propres pour respecter l'accord de Bâle (accord destiné à garantir la solvabilité des institutions financières).
3. **Satisfaire aux exigences en terme de retour sur fonds propres (*Return On Equity* ou ROE)** : Les titres à plus faible rendement sont titrisés afin de les éliminer du bilan et d'augmenter le ROE.
4. **Financement** : Les banques mal notées peuvent diminuer le coût de leur financement en émettant des titres qui ne dépendent pas de leur cote de crédit propre mais plutôt des titres qui adossent la dette émise.

5. **Réduire la concentration de risques** : C'est un transfert du risque de crédit vers des investisseurs désirant le supporter (par exemple des compagnies d'assurances, des banques ou des investisseurs privés).

Du côté des acheteurs des tranches de CDO, tels les fonds de couverture ou les firmes d'investissement, l'avantage d'investir dans ces titres repose essentiellement sur la possibilité d'obtenir une prime (*spread*) de crédit supérieure à celle d'une obligation corporative de même cote de crédit. Les fonds de couverture (*hedge fund*) utilisent également ces instruments pour effectuer des stratégies de négociations sophistiquées liées à la corrélation (*correlation trading*).

### Inconvénients des CDO

Kiff, Michaud et Mitchell [32] présentent, quant à eux, les problèmes et aléas moraux potentiels associés à l'utilisation de produits de transfert de risque. Voici quelques cas retenus. Puisque les banques ne sont plus affectées par les défauts de crédit grâce à l'achat d'une protection, elles pourraient être moins enclines à effectuer la sélection et le suivi des emprunteurs. Cette situation accentue les problèmes d'asymétrie d'information entre prêteurs et emprunteurs et cause un déséquilibre dans le marché. Un autre problème concerne la possibilité qu'un prêteur achète de la protection sur un emprunteur contre son gré ou sans l'en informer, envoyant un signal négatif quant à la qualité de crédit de l'emprunteur. Un autre aléa moral est celui du prêteur qui, en achetant de la protection, pourrait être tenté de déclencher prématurément un événement de défaut afin de maximiser son profit.

Dans le cas plus précis des CDO, Duffie et Garleanue [12] analysent les sources favorisant une plus grande illiquidité de ce marché : la sélection adverse, les coûts de transaction (construction du produit, marketing, gestion, etc.) et les aléas moraux. Dans le cas de la sélection adverse, le prix d'un titre peut être revu à la baisse (*lemon's premium*) du fait que l'investisseur sait qu'il peut ne pas être correctement informé (par l'émetteur) concernant les structures de risque de crédit d'un CDO. Afin de démontrer leur bonne foi, une technique souvent utilisée par les émetteurs est de



conserver une partie de la tranche la plus risquée d'un CDO ; cela permet de prouver au marché qu'ils ont confiance en la qualité de leur structure. Quant aux aléas moraux, ils concernent plus spécifiquement les SPV qui, étant peu affectés par la performance économique des CDO, présentent le risque d'une négligence potentielle relativement à la qualité de sélection des actifs du portefeuille.

Un autre cas d'aléa moral et le lien d'affaires entre les initiateurs de CDO et les agences de notation [60]. Ainsi, plusieurs investisseurs achètent les tranches de CDO basées uniquement sur la cote de crédit (*rating*) effectuée par les agences de notation (Moody's, Fitch, Standard and Poors). Cette notation (ou cotation), développée à l'origine pour des portefeuilles traditionnels ou des titres individuels exposés au risque de crédit, est basée sur le calcul de l'espérance de la perte lorsqu'un événement de défaut survient. Toutefois, étant donné la nature structurée des CDO, cette notation, tel qu'indiqué dans une étude effectuée par la Banque des Règlements Internationaux [56], est limitée et ne reflète que certains aspects liés au risque de crédit. Les risques de liquidité, de volatilité évaluée au cours du marché (*mark-to-market*) et de volatilité dans la notation, ne sont en effet pas considérés. Suite à la crise liée aux prêts immobiliers à risques (*subprimes*), ces agences ont été fortement critiquées relativement à leur capacité à bien noter les tranches de CDO en reflétant de façon réaliste le risque de crédit. Le problème le plus fréquemment soulevé est celui du risque potentiel de conflit d'intérêt entre les initiateurs des CDO et les agences de notation, grassement payées par ceux-ci afin de fournir une cote de crédit sur les tranches des CDO. En effet, le problème apparaît du fait qu'une grande partie du revenu des agences de notation dépend de la création de CDO "vendables", c'est-à-dire constitués principalement de tranches notées de type investissement (*investment grade*) ayant une cote  $\geq$  BBB. Récemment (février 2008), l'agence de notation Standard and Poors a annoncé une série de mesures visant à réformer son fonctionnement suite à la problématique de la notation (*rating*) des produits financiers liés aux prêts hypothécaires à risque (*subprimes*). De son côté, Moodys envisage de créer une échelle de notation spécifique pour les produits financiers complexes ou structurés.

Une autre problème pouvant être relevé est la valorisation délicate d'un CDO, sujette au risque de modèle, particulièrement en ce qui concerne les hypothèses de corrélation utilisées. Les modèles disponibles sont complexes, multiples et peu éprouvés. Toutefois, bien que plusieurs investisseurs soient incapables de les valoriser correctement ou de gérer le risque induit, ces produits demeurent populaires du fait que les acheteurs de tranches de CDO privilégient souvent la recherche de rendement au détriment de la sécurité financière. Il est néanmoins à prévoir, suite à la présente crise liée au crédit, que l'appétit pour le risque de plusieurs investisseurs diminuera.

Les prochaines sections présentent les hypothèses de modélisation les plus communes exposées dans la littérature pour valoriser un CDO.

## 2.2 Modélisation du risque de crédit multiple

La performance des diverses tranches d'un CDO (passifs) est directement liée à celle du portefeuille sous-jacent. Ainsi, afin de déterminer le risque induit par le portefeuille, celui-ci est modélisé comme un portefeuille de crédit. La valorisation juste d'un CDO dépend donc fortement de la capacité à mesurer adéquatement le comportement global de défaut des actifs qui le composent. Dans la littérature, plusieurs techniques sont proposées afin de modéliser la dépendance des défauts des actifs du portefeuille. Mashal, Neldi et Zeevi [38] divisent ces approches en trois groupes distincts : les modèles structurels, les modèles réduits et les modèles hybrides.

### 2.2.1 Approche structurelle

L'approche structurelle, proposée par Merton [41], repose sur la modélisation de la structure du capital d'une firme (capital propre et dette) comme une option ayant comme sous-jacent l'actif de la firme. Pour une entreprise donnée, le défaut survient dès que la valeur de ses actifs (appelés variables d'état, ou *latent variables*) descend sous un seuil déterminé par le niveau de la dette. La valeur de la firme est donc utilisée pour obtenir le temps de défaut qui, dans cette situation, est qualifié d'événement

endogène, c'est-à-dire où le lien entre la structure de l'entreprise et le risque de défaut est explicitement considéré. Dans le cas d'un portefeuille, Zhou [55] a étendu le modèle de Merton afin de mesurer la dépendance entre les défauts de plusieurs entreprises. Ces modèles sont généralement calibrés à partir des corrélations entre la valeur des actifs. Les modèles industriels KMV et CreditMetrics sont des exemples d'approche structurelle. Le principal avantage de cette approche est de permettre une évaluation relativement simple, cohérente et intégrée des divers titres du portefeuille. Toutefois, Schönbucher et Rogge [49] résument bien leurs faiblesses en affirmant qu'un bon modèle ne doit pas seulement pouvoir capter de façon réaliste la dépendance entre les défauts à l'intérieur d'un temps fixe ; il doit également capter les dynamiques des temps de défauts, des primes (*spreads*) de crédit et des prix sur le marché, afin de tenir compte du risque réel et du risque perçu. Ces modèles ne le permettent pas et, par conséquent, ne sont pas utilisés pour la valorisation des produits dérivés sur crédit mais plutôt pour la gestion des risques.

### 2.2.2 Approche réduite

Contrairement à l'approche structurelle, l'approche réduite (ou d'intensité), proposée par Jarrow et Turnbull [26] puis par Duffie et Singleton [10], permet d'utiliser les données du marché (généralement des prix observés sur des obligations négociées) pour calibrer le modèle et ainsi obtenir une valorisation neutre au risque.

#### Dérivés de crédit sur titre simple

Les modèles basés sur l'approche réduite sont maintenant communément utilisés en industrie pour la valorisation de produits dérivés sur crédit ayant un seul actif sous-jacent tels les CDS. Ainsi, pour une firme donnée, cette approche spécifie un processus de défaut exogène, c'est-à-dire où le lien entre la structure de l'entreprise et le risque de défaut n'est pas explicitement considéré. Le temps de défaut est généralement modélisé selon le premier arrivage d'un processus de comptage de Poisson avec une intensité  $\lambda_t$ , où  $\lambda_t$  représente la probabilité instantanée de défaut d'une firme sachant



qu'elle n'a pas fait défaut avant le temps  $t$ . Dans la littérature, Duffie [11] et Hull-White [23] ont été les premiers à fournir explicitement une approche de type réduite pour valoriser les CDS. Dans un papier subséquent, Hull-White [24] ont raffiné leur modèle en considérant que le risque de défaut de contrepartie, c'est-à-dire le risque de défaut du vendeur du contrat, n'est par nul. Houweling et Vort [22] ont, quant à eux, présenté le premier papier à tester empiriquement l'habileté des modèles réduits à valoriser de façon précise les CDS.

### Dérivés de crédit sur portefeuille

Dans le cas de produits dérivant d'un portefeuille sur crédit, Duffie et Garleanu [12] proposent d'étendre les modèles réduits précédents afin d'inclure une corrélation entre les intensités de défaut. Le principal désavantage lié à cette approche, tel que noté par Schönbucher et Schubert [47], est le fait d'obtenir des corrélations de défauts trop faibles par rapport à celles observées empiriquement. Afin de remédier à ce problème et raffiner la modélisation des corrélation de défauts, Davis et Lo [8] puis Jarrow et Yu [27] ont préposé un modèle réduit de type défauts par contagion (*infectious defaults*). Ce modèle implique qu'un défaut sur une obligation peut générer, par contagion, des défauts sur d'autres obligations (par exemple dans un même secteur d'activité). Un facteur de saut est alors ajouté aux intensités de défaut conjointes pour tenir compte de cette situation.

Bien qu'intuitivement attrayants, ce modèle comporte des problèmes, tel que noté par Schönbucher et Schubert [47]. Le principal problème concerne la difficulté à estimer l'intensité de défaut pour chaque obligation du portefeuille causée par la complexité de l'opération ainsi que par l'absence de données historiques de qualités sur crédit. De plus, ces modèles sont difficiles à calibrer due au nombre élevé de paramètres nécessaires pour modéliser ce type de défaut.

### 2.2.3 Approche hybride et copules

Les modèles hybrides, tel que mentionné par Mashal, Neldi et Zeevi [38], permettent d'éviter les problèmes posés par les deux approches classiques tout en conservant certains de leurs avantages respectifs. Ils sont qualifiés d'hybrides car, d'une part, de la même façon que l'approche structurelle, un défaut se produit lorsque la valeur des actifs liés au portefeuille diminue au deçà d'un certain seuil ; d'autre part, comme pour l'approche réduite, ce seuil est ajusté de façon à être cohérent avec les données observées sur le marché. Cette approche hybride permet d'estimer une certaine structure de dépendance (ou défauts de corrélation) à l'aide de fonctions de type copule, calibrées à partir de la valeur des actifs du portefeuille. Cette approche est la plus utilisée en industrie pour la valorisation des CDO et est qualifiée de modèle de type copule.

#### Modélisation du risque de crédit à l'aide des copules

La notion de copule a été introduite par Sklar [50] en 1959 afin de construire des distributions multidimensionnelles dont les distributions marginales sont données. Le mot copule est issu du latin *copula* qui signifie lien, chaîne, union. Comme son nom l'indique, les copules permettent de joindre des distributions marginales. La méthode classique pour faire ce lien est d'utiliser la notion de corrélation linéaire (ou de Pearson), ce qui est tout à fait convenable pour des distributions normales multivariées. Toutefois, tel que noté par Embrechts [15], cette notion de corrélation n'est qu'un cas particulier de la mesure de dépendance. En effet, dans certaines situations, cette mesure n'est pas satisfaisante et fournit très peu d'information concernant la dépendance : c'est le cas des distributions à queues épaisses. La figure 2.7 illustre ce type de distribution.

Embrechts [15] [16] a été le premier à introduire la notion de copule dans le monde de la finance afin de tenir compte de façon plus juste de la dépendance présente entre des événements extrêmes qui sont caractérisés par des distributions à queues épaisses. La distribution des rendements sur crédit nécessaire à la modélisation des CDO fait

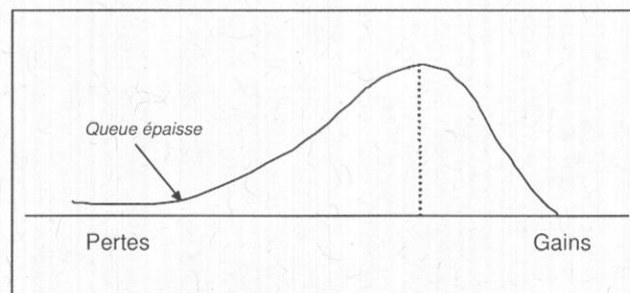


Fig. 2.7: Distribution à queue épaisse.

partie de ce groupe où les événements de crédit sont rares mais les pertes causées très grandes. Un autre article de référence sur les copules, écrit par Frees et Valdez [17], introduit cette notion dans le domaine de l'actuariat ; différents types de copules (normale, archimédienne (Clayton, Gumbel, Frank), etc.) sont présentés ainsi que la façon de les générer par simulation. Cherubini et al. [6] et Galiani [20] présentent également une revue des techniques de simulation de copules, spécifiquement pour la valorisation de produits dérivés sur crédit. Il est à noter que depuis 1997, tel qu'expliqué par Frey et McNeil [18], les modèles industriels CreditMetrics et KMV utilisent, bien qu'implicitement, des copules normales dans la modélisation du risque de crédit.

### Modèle hybride avec copule gaussienne

Le premier modèle à véritablement utiliser cette fonction de copule de façon explicite est celui de Li [36] en 1999 par l'introduction du modèle avec copule gaussienne (*Gaussian Copula*) pour estimer la dépendance des temps de défaut dans le cas de deux compagnies. Dans ce contexte, la modélisation des temps de défaut individuels est effectuée de façon similaire au modèle d'intensité présenté pour la valorisation des CDS : un taux de hasard  $h_t$  constant, équivalent à l'intensité  $\lambda_t$  d'un processus de comptage de Poisson, est défini. La fonction de copule gaussienne est ensuite utilisée pour lier les temps de défaut individuels.

Plus spécifiquement, puisque les données directes (historiques ou prix) sont très



rares, des données indirectes provenant d'observations sur le marché (CDS par exemple) sont utilisées afin de construire des distributions marginales pour chaque entité du portefeuille. À partir de ces marges et de leur structure de corrélation, et en posant l'hypothèse que le temps de défaut est une fonction croissante de la valeur des actifs, la distribution conjointe des temps de défaut peut ainsi être générée, de façon unique, à l'aide d'une copule gaussienne. La modélisation de la dépendance consiste alors essentiellement à estimer une matrice de corrélation entre chacune des entités du portefeuille. En particulier, dans le cas où il y a  $n$  entités dans le portefeuille,  $n(n-1)/2$  paramètres devront être estimés par des techniques statistiques telle que la méthode de maximum de vraisemblance. Cette technique devient toutefois inefficace en terme de solvabilité lorsque  $n$  est élevé. En effet, dans le cas d'un portefeuille sur dérivés de crédits,  $n$  est souvent de l'ordre de plusieurs dizaines (parfois même centaines) d'entités.

### Modèle standard à un facteur gaussien

Le modèle à un facteur gaussien, qui est un cas particulier du modèle avec copule gaussienne, a été introduit par Vasicek [53] et appliqué aux dérivés sur crédit par plusieurs auteurs, dont Laurent et Gregory [35]. Il offre l'avantage de réduire le nombre de paramètres de corrélation à estimer lorsque le nombre d'entités dans le portefeuille est grand. En effet, dans le cas où il y a  $n$  entités dans le portefeuille,  $n$  paramètres, plutôt que  $n(n-1)/2$ , devront être estimés. Cette méthode à un facteur permet ainsi de réduire le nombre de paramètres à estimer par l'introduction d'un facteur commun du marché pouvant par exemple représenter l'état de l'économie. Le calcul de la matrice de corrélation est alors réduit à l'estimation de  $n$  paramètres de corrélation. Comme simplification supplémentaire, un compromis utilisé en industrie est de résumer l'ensemble de l'information liée à cette matrice de corrélation à une seule constante  $\rho_i = \rho$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Cette méthode, tout comme la méthode de Black-Scholes pour la valorisation des options européennes, est devenue la méthode classique pour évaluer les dérivés de

crédit sur portefeuille tels que les CDO. En effet, des auteurs comme Burtshell-Gregory et Laurent [5], bien que critiques envers ce modèle à facteur gaussien, affirment que ce modèle est maintenant un standard en industrie en raison du compromis offert entre sa relative simplicité et sa capacité à se conformer aux prix observés sur le marché. De plus, selon ces mêmes auteurs, les gains demeureraient limités à ajouter un degré de sophistication au modèle ; cet ajout ne corrigeant en rien la dynamique irréaliste des primes (*spreads*) de crédit ou encore l'effet sourire (*smile*) de corrélation implicite, semblable à celui observé dans le modèle de Black-Scholes pour la volatilité implicite. En effet, dans le cas d'un CDO, la corrélation implicite, qui devrait être constante, diffère d'une tranche à l'autre. Pour une tranche de CDO, la corrélation implicite est celle permettant, comme paramètre d'entrée unique, de calculer le prix observé sur le marché.

### **Extension du modèle standard à un facteur gaussien**

Le modèle de type facteur n'est pas limité à l'utilisation d'une copule gaussienne ou d'un seul facteur commun. Plusieurs autres modèles, considérés comme des extensions du modèle à un facteur gaussien, sont proposés dans la littérature afin de tenter d'améliorer le modèle gaussien à un facteur. Par exemple, Andersen et Sidenius [2] présentent une extension stochastique de la corrélation et du taux de recouvrement du modèle gaussien. D'autres auteurs proposent plutôt une extension relative au choix de la copule. L'impact du choix de la copule est présenté dans la sous-section suivante.

### **Impact du choix de la copule sur la valorisation**

Le choix d'un type de copule qui gouverne la nature de la dépendance entre les défauts est également critique dans la valorisation des CDO. Cette notion est notamment discutée par Durrleman, Nikeghbali et Roncalli [14] qui présentent certaines méthodes pour orienter ce choix.

La copule gaussienne est la plus utilisée en industrie en raison de sa simplicité et de sa structure de dépendance intuitive. Plusieurs auteurs affirment toutefois que

la copule gaussienne ne parvient pas à capturer correctement la dépendance des distributions en cas de grandes pertes (*tail dependence*), ce qui explique la difficulté à calibrer correctement les modèles à facteur de type gaussien avec les prix observées sur les marchés.

Mashal, Neldi et Zeevi [38] proposent comme alternative l'utilisation de la copule- $t$  (Student) afin de mieux modéliser la distribution conjointe des actifs. Schönbucher et Rogge [49] affirment que le choix d'une copule normale ou Student génère une structure de dépendance de défauts irréaliste et proposent plutôt l'utilisation de la famille archimédienne (Clayton, Gumbel et Frank). Hull et White [25] proposent quant à eux la copule double  $t$  alors que Kelaménova-Schmid-Werner proposent une copule NIG (Normal Inverse Gaussian) [30] comme alternative au modèle de Hull et White.

Burtschell-Gregory et Laurent [5] effectuent, quant à eux, une comparaison de plusieurs type de copules (gaussienne, Clayton, Student  $t$ , Double  $t$ , Marshall Olkin) et font les observations suivantes : les copules Clayton et Student- $t$  offrent des résultats similaires à la copule gaussienne alors que la copule MO amplifie dramatiquement la queue des distributions des pertes. La copule double- $t$  semble offrir un meilleur compromis entre ces deux groupes de copules et permet d'obtenir des prix plus conformes à ceux observés sur le marché (iTraxx Europe).

## 2.3 Valorisation d'un CDO synthétique : aspects pratiques

Dans le cadre de ce mémoire, afin d'isoler explicitement la composante de valorisation d'un CDO liée aux pertes du portefeuille sous-jacent et de sa structure de dépendance, seule la valorisation d'un CDO synthétique (basé sur un indice) est effectuée, évitant ainsi d'avoir à considérer d'autres éléments relatifs au financement du CDO, à sa gestion, etc. De plus, l'approche à un facteur est utilisée afin de simplifier la modélisation.



Pour valoriser un CDO synthétique, il suffit d'abord de trouver les marges des probabilités de défaut (obtenues généralement à partir des prix des CDS observés sur le marché) puis de choisir une copule pour obtenir la structure de dépendance désirée. À partir de cette distribution multivariée, il est alors possible de calculer, par une valorisation neutre au risque, un prix juste pour chaque tranche du CDO. Cette valorisation a été développée de façon générale par plusieurs auteurs dont Friend et Rogge [19], Galiani [20], Meneguzzo et Vecchiato [40] ainsi que Schirm [46]. La valeur d'une tranche au temps 0 est donnée par :  $V(0) = V(0)_{prot} - V(0)_{pri}$ , où  $V_{prot}(0)$  et  $V_{pri}(0)$  correspondent, respectivement, à la perte moyenne payée (patte protection) et à la prime moyenne collectée (patte prime) sur cette tranche.

La prix juste de la protection est finalement obtenu en posant  $V(0) = 0$ . La valorisation d'un CDO dépend donc directement de la distribution des pertes sur le portefeuille sous-jacent. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour calculer ces pertes à l'aide du modèle de type copule. Ces méthodes de calcul peuvent être classées en trois principaux groupes : les simulations Monte-Carlo (M-C), les méthodes semi-analytiques sans simulation M-C et l'approximation des pertes selon Vasicek.

La première méthode, la simulation M-C, bien que nécessitant un long temps de roulement, a l'avantage d'être générale et facile à implanter. Des auteurs comme Galiani [20] et Meneguzzo et Vecchiato [40] présentent divers algorithmes de simulation. D'autres auteurs comme Glasserman et Li [21] ainsi que Joshy et Kainth [29] s'intéressent également à cette méthode et proposent des techniques de réduction de variance, principalement de type échantillonnage stratégique (*importance sampling*), pour accélérer la convergence des simulations.

La seconde méthode permet de calculer les pertes sur le portefeuille de façon semi-analytique, à partir du modèle à un facteur, sans l'utilisation de la force brute d'une simulation Monte-Carlo. Ce modèle est proposé dans la littérature par Laurent et Gregory [35] qui utilisent une approche de type transformée rapide de Fourier (FFT). D'autres auteurs, comme Hull et White [25] ainsi que Andersen, Sidenius et Basu [1] proposent, quant à eux, des variantes de l'approche de Laurent et Gregory, basées

sur un algorithme récursif qui permet d'éviter le calcul des FFT. Il est à noter que ces modèles comportent tous des extensions à l'approche standard à un facteur afin que les prix estimés reflètent davantage les prix observés sur le marché : par exemple en ajoutant des paramètres stochastiques (pour le taux de recouvrement ou pour la corrélation) ou en choisissant une copule autre que gaussienne (par exemple Student-t, Double-t, de Clayton, de Gumble, de Marshall-Olkin, Normal Inverse Gaussian (NIG)).

Finalement, la troisième approche est basée sur l'approche de la loi des grands nombres de Vasicek [53]. Elle offre l'avantage de calculer les pertes d'un portefeuille sous une forme fermée à l'aide de seulement deux paramètres : la probabilité de défaut des actifs et la corrélation entre la valeur des actifs. Cette méthode est basée sur l'hypothèse simplifiée d'un large portefeuille homogène (*Large Homogenous Portfolio* ou LHP), c'est-à-dire un portefeuille constitué d'un large nombre d'instruments de même poids et ayant les mêmes caractéristiques. Ce modèle, bien que moins précis, est souvent utilisé en industrie comme première approximation en utilisant une copule gaussienne. Toutefois, Schönbucher [48], afin de modéliser les pertes de façon plus réaliste, étend l'approche LHP de Vasicek en utilisant des copules de type archimédienne. Plus récemment, Kelaménova-Schmid-Werner [30] ont également étendu l'approche de Vasicek en introduisant une copule NIG (*Normal Inverse Gaussian*). Cette copule NIG offre les mêmes avantages que la copule double t présentée par Hull et White [25] tout en permettant de calculer analytiquement, de façon stable, et avec une certaine flexibilité et précision, le prix des tranches d'un CDO synthétique.

## Chapitre 3

### Valorisation générale d'un CDO synthétique par le modèle de type copule

Le chapitre précédent a présenté qualitativement la structure des CDO ainsi que les principaux modèles et techniques de calcul utilisés afin de les valoriser. Le présent chapitre consiste à présenter quantitativement le modèle général de valorisation neutre au risque d'un CDO synthétique à partir de fonctions copules. Ainsi, ce chapitre exposera, dans un premier temps, la définition et propriétés générales des copules. Dans un second temps, les trois étapes menant à l'équation générale de valorisation d'un CDO seront détaillées :

1. La construction d'une courbe de crédit permettant d'extraire les probabilités de défaut individuelles pour chaque composante du portefeuille.
2. La construction de la distribution conjointe de survie à partir d'une structure de dépendance de type copule.
3. Le calcul de la distribution des pertes du portefeuille.



### 3.1 Copules

#### 3.1.1 Définition et propriétés générales des copules

Une copule est une fonction de répartition conjointe dont les marges sont uniformes sur  $[0, 1]$ . Ainsi,  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  est une copule si et seulement si il existe des variables aléatoires  $U_1, \dots, U_n$ , uniformément distribuée sur  $[0, 1]$ , telles que

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n), \quad (3.1)$$

où

$$U_i \sim U[0, 1], i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.2)$$

Le théorème le plus important dans la théorie des copules est donné par Sklar [50] et s'énonce comme suit. Soit  $H$  une fonction de répartition conjointe sur  $\mathbb{R}^n$  avec des fonctions de répartition marginales (marges)  $F_i$  correspondants à chaque variable aléatoire  $X_i$ , où  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Alors, il existe une fonction copule  $C$  telle que  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (3.3)$$

La fonction de densité à  $n$  dimensions peut alors être exprimée par

$$h(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (3.4)$$

où

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{\partial^n (C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)))}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)}. \quad (3.5)$$

De plus, si toutes les marges  $F_i$  sont continues, alors la copule  $C$  est unique. Un corollaire immédiat du théorème de Sklar est que

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)), \quad (3.6)$$

où  $F^{-1}$  est une fonction quantile tel que

$$F_i^{-1}(u_i) = \{x_i \in \mathbb{R} : F_i(x_i) \geq u_i\}, u_i \in [0, 1], i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Exemples de copules

#### Copules Elliptiques

Les copules gaussienne et Student-t font partie de la même famille des copules dites elliptiques (voir Embrechts et al. ([16])). Ces copules sont symétriques, c'est-à-dire qu'elles présentent une symétrie relative à la dynamique de dépendance inférieure et supérieure des queues (*lower/upper tail dependence*) des distributions. Cette dynamique de dépendance, dans un contexte de modélisation de risque de crédit, est caractérisée par le degré de dépendance entre des événements de défauts extrême. Ainsi, dans le cas de la copule gaussienne, elle ne possède aucune dynamique de dépendance relative aux queues inférieures et supérieures, ce qui suppose que les événements extrêmes se produisent de façon pratiquement indépendante entre eux, sans effet de défauts en grappes (*clusters default*), peu importe les scénarios envisagés. Alors que dans le cas de la copule Student-t, une dépendance symétrique est introduite relative aux queues inférieures et supérieures, ce qui suppose l'introduction d'un effet de défauts en grappes symétrique. Cette symétrie, en pratique, pourrait par exemple se traduire par la même probabilité d'apparition de grappes de défauts dans le cas de deux scénarios économiques opposés tel un marché haussier (*bull market*) ou un marché baissier (*bear market*).

Malgré les limites de cette famille de copules, leurs principaux avantages reposent, d'une part, sur le fait que les praticiens ont généralement une bonne compréhension de la dépendance induite par ces copules (particulièrement pour la copule gaussienne), et d'autre part, par la facilité offerte pour la génération des échantillons aléatoires dans un contexte de simulation de Monte-Carlo, et ce malgré le fait qu'il n'existe pas de fonction explicite pour ces copules.

#### *Exemple 1-Copule Gaussienne*

A partir de l'équation 3.6, la copule gaussienne de dimension  $n$  peut s'exprimer de façon implicite par

$$C_R^{gauss}(u_1, \dots, u_N) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_N)). \quad (3.8)$$

où  $\Phi_R$  est une fonction de répartition de type gaussienne multivariée ayant une matrice de covariance  $R$  et  $\Phi$  une fonction de répartition univariée de type gaussienne standard.

### Exemple 2-Copule Student-t

De façon similaire à la copule gaussienne, la copule Student-t peut s'exprimer implicitement par

$$C_{\nu,R}^{stud_t}(u_1, \dots, u_N) = t_{\nu,R}(t^{-1}(u_1), \dots, t^{-1}(u_N)), \quad (3.9)$$

où  $t_{\nu,R}$  est une fonction de répartition de type Student multivariée ayant une matrice de covariance  $R$  et  $\nu$  degrés de liberté, et  $t_\nu$  une fonction de répartition univariée de type Student standard avec  $\nu$  degrés de liberté.

### Copules Archimédiennes

La fonction  $C^{arch} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ , définie comme

$$C^{arch}(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \varphi(u_i)\right), \quad (3.10)$$

est appelée une copule archimédienne de dimension  $n$  si et seulement si  $\varphi^{-1}$  est complètement monotone sur  $[0, \infty]$ , c'est-à-dire :

$$(-1)^i \frac{\partial^i}{\partial u^i}(\varphi^{-1}) \geq 0, \quad i = 0, \dots, n. \quad (3.11)$$

La fonction  $\varphi$  est appelée le générateur de la copule  $C^{arch}$  de paramètre unique  $\theta$ . En particulier, tel que mentionné par Schonbucher [48], la transformée inverse de Laplace permet de servir de générateur pour cette famille. Ainsi, la transformée de Laplace pour une variable aléatoire non-négative  $Y$  ayant une fonction de répartition  $G(y)$  et de densité  $g(y)$  est donnée par

$$L_t^Y = \mathbf{E}[\exp(-tY)] = \int_0^\infty \exp(-ty) dG(y), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.12)$$

De plus, soit  $\varphi : [0, \infty] \mapsto [0, 1]$ . Si une solution existe, alors la transformée inverse de Laplace de  $\varphi$  est définie comme la fonction  $g$  solutionnant

$$L^\varphi(t) = \int_0^\infty \exp(-ty) g(y) dy = \varphi(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.13)$$



Les copules archimédiennes les plus communes dans le domaine du risque de crédit sont la copule de Clayton, de Gumbel et de Frank (voir Embrechts et al. [16] et Frees et Valdez [17]). Les copules de Clayton et de Gumbel permettent en outre l'introduction d'une asymétrie relative à la dépendance des queues des distributions (dépendance pour l'une des deux queues seulement). De plus, ces copules offrent, tout comme les copules elliptiques, la possibilité d'échantillonner des scénarios aléatoires dans un contexte de simulation Monte-Carlo.

### *Exemple 3-Copule de Clayton*

Cette copule a été introduite par Clayton ([7] dans ses études épistémologiques afin de modéliser l'incidence des maladies chroniques sur des membres d'une même famille. La copule de Clayton n'a pas de dépendance supérieure mais uniquement inférieure. La fonction génératrice s'exprime par

$$\varphi(t) = (t^{-\theta} - 1), \theta > 0, \quad (3.14)$$

et la fonction inverse par

$$\varphi^{-1}(t) = (t + 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \theta > 0. \quad (3.15)$$

Dans le cas de la copule de Clayton, cette fonction inverse correspond à la transformée de Laplace de la v.a.  $Y$  non-négative de type Gamma standard de paramètre  $1/\theta$ .

La copule de Clayton peut alors s'exprimer explicitement par

$$C_{\theta}^{Clay}(u_1, \dots, u_n) = (1 - n + \sum_{i=1}^n u_i^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}}, \theta > 0. \quad (3.16)$$

### *Exemple 4-Copule de Gumbel*

La copule de Gumbel n'a pas de dépendance inférieure mais uniquement supérieure. La fonction génératrice s'exprime par

$$\varphi(t) = (-\ln t)^{\theta}, \theta \geq 1, \quad (3.17)$$

et la fonction inverse par

$$\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{\frac{1}{\theta}}), \theta \geq 1. \quad (3.18)$$

La copule de Gumbel peut alors s'exprimer explicitement par

$$C^{Gumb}(u_1, \dots, u_n) = \exp\left[-\sum_{i=1}^n (\ln u_i)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}, \quad \theta \geq 1. \quad (3.19)$$

## Autres Copules

### *Exemple 5- Copule de Marshall et Olkin*

Cette classe de copule a été introduite par Marshall et Olkin [39] afin de modéliser la distribution conjointe de la durée de vie (ou fiabilité) de certains objets lorsque leur durée de vie est reliée. En pratique, ces objets peuvent par exemple être des ampoules semblables ou dans le domaine du crédit des obligations provenant du même secteur d'activité. Dans la théorie de la fiabilité, la modélisation du temps de survie individuel est souvent modélisé à partir d'une distribution exponentielle. Le but de cette copule est de construire une distribution multivariée à partir des distributions marginales exponentielles. Cette copule présente une dépendance symétrique au niveau des queues de sa distribution. Elle peut s'exprimer explicitement par

$$C_\alpha^{MO}(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha) \prod_{i=1}^n u_i^{1-\alpha}. \quad (3.20)$$

Il est à noter que l'ensemble des copules présentées dans cette section ainsi que d'autres type de copules (Normal Inverse Gaussian (NIG), double-t par exemple) sont utilisées dans la modélisation de CDO mais à l'intérieur d'un modèle à un ou plusieurs facteurs. Ces copules seront présentées implicitement dans les prochaines sections, parallèlement à l'introduction des modèles à facteurs.

## 3.2 Valorisation des CDO

### 3.2.1 Espace probabiliste du modèle

Soit,  $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ , l'espace probabilisé filtré du modèle présenté dans ce mémoire. Toutefois, puisque le modèle est calibré à partir des données observées sur le marché et que la valorisation dépend de ces données, une mesure martingale équivalente  $\mathbf{Q}$  est définie. Par conséquent, l'ensemble des probabilités et des

espérances du modèle sont calculées sous cette mesure  $\mathbf{Q}$ , permettant une valorisation neutre au risque.

### 3.2.2 Construction d'une courbe de crédit

Afin de valoriser un CDO, le comportement du temps de défaut ( $\tau_i$ ) pour chacun des  $n$  éléments du portefeuille ( $1 \leq i \leq n$ ) doit être modélisé. A cet effet, il est commun d'utiliser une fonction de survie  $S(t)$  permettant de calculer la probabilité qu'un temps de défaut  $\tau$  survienne au-delà d'un certain intervalle de temps  $t$ . Ainsi, pour chaque élément  $i$  du portefeuille, une courbe de probabilité de survie est générée en fonction du temps  $t$ .

Le temps de défaut  $\tau$  est alors modélisé comme un temps d'arrêt, avec une fonction de répartition  $F(t) = \mathbf{Q}(\tau \leq t) = 1 - S(t)$ ,  $t \geq 0$ . Le taux de hasard  $h_t$  est défini par

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \quad (3.21)$$

Par conséquent, étant donné la survie jusqu'au temps  $t$  d'un élément  $i$  du portefeuille, sa probabilité instantanée de défaut sous  $\mathbf{Q}$  dans un intervalle de temps  $[t, t + dt]$  est égale à  $h_i(t)dt$ . Alternativement, il est possible de démontrer que cette interprétation est équivalente à une modélisation selon le premier arrivage d'un processus de comptage de Poisson avec une intensité  $\lambda_t = h_t$ . Formellement, la fonction de survie est alors calculée selon

$$S_i(t) = P(\tau_i > t) \quad (3.22)$$

$$= \exp\left(-\int_0^t h_i(u)du\right). \quad (3.23)$$

La fonction de répartition du temps de défaut est donnée par

$$F_i(t) = P(\tau_i \leq t) \quad (3.24)$$

$$= 1 - S(t) \quad (3.25)$$

$$= 1 - \exp\left(-\int_0^t h_i(u)du\right). \quad (3.26)$$



Le temps de défaut d'un élément  $i$  d'un portefeuille est défini comme le premier temps où l'expression  $\exp(-\int_0^t h_i(s)ds)$  passe sous le seuil de déclenchement stochastique représenté par la variable  $U_i$ .

$$\tau_i = \inf\{t : \exp(-\int_0^t h_i(s)ds) \leq U_i\} \quad (3.27)$$

$$= S_i^{-1}(U_i) \quad (3.28)$$

$$= F_i^{-1}(1 - U_i), \quad (3.29)$$

où  $U_i$  est uniformément distribué sur  $[0, 1]$ .

La fonction  $h_i$  du taux de hasard, par analogie à la structure à terme des taux d'intérêts, peut également être appelée courbe de crédit. Plusieurs approches peuvent être utilisées afin de construire cette courbe de crédit :

- Approche à partir des données historiques de défauts des agences de notation ;
- Approche théorique structurelle de Merton ;
- Approche à partir des données de marché telles les CDS (*Credit Default Swap*).

La dernière approche est celle qui est souvent favorisée en industrie étant donné l'explosion de la liquidité du marché des CDS. Elle permet d'extraire des probabilités de défauts qui reflètent, à un moment donné, la perception du marché à propos de la tendance future de défaut d'un sous-jacent ; cette méthode est celle retenue dans le cadre de ce mémoire. Il faut alors calculer les  $F_i^{cds}(t)$ , tels que définis à l'équation 3.26, permettant une valorisation neutre au risque.

En posant les hypothèses simplificatrices que le taux de hasard et le taux de recouvrement sont constants, il est possible de calculer un taux de hasard, pour chaque élément  $i$  du portefeuille, à partir de l'équation de valorisation d'un CDS selon

$$h_i = \frac{s_i^{cds}}{1 - Rc_i}, \quad (3.30)$$

où  $s_i^{cds}$  est une prime (*spread*) de CDS d'échéance  $T$ , correspondant au paiement périodique, exprimée comme un pourcentage (en points de base) de la valeur notionnelle du contrat ; et  $Rc_i$  est le taux de recouvrement constant fixé de façon exogène

à partir de données des agences de notation. Le temps de défaut de l'équation 3.27 peut alors s'exprimer selon

$$\tau_i = -\frac{\ln(U_i)}{h_i}. \quad (3.31)$$

Il est à noter que les calculs menant à l'obtention de l'équation 3.30 pour le taux de hasard sont liés à la valorisation neutre au risque d'un CDS (voir D. Meneguzzo, W. Vecchiato [40]).

### 3.2.3 Construction de la distribution multivariée de survie

#### Modèle général

Afin d'évaluer correctement un CDO ayant comme sous-jacent un portefeuille composé de  $n$  titres, il faut être en mesure d'obtenir un vecteur aléatoire de temps de défauts  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ , où  $\tau_i$  correspond au temps de défaut du titre  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

La fonction de survie de ces temps de défauts est donnée par  $S(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{Q}(\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n)$ . La fonction de répartition conjointe des temps de défauts est donnée par  $F(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{Q}(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_n \leq t_n)$ . Une copule  $C$  est alors choisie afin de modéliser la dépendance des temps de défauts à partir des marges individuelles  $F_i(t)$  de l'équation 3.26.

$$F(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{Q}(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_n \leq t_n) \quad (3.32)$$

$$= C(F_1(t_1), \dots, F_n(t_n)) \quad (3.33)$$

Parmi les copules existantes, la copule gaussienne multivariée est la plus utilisée en industrie dans la modélisation de la dépendance des produits dérivés sur crédit. Ainsi, dans le cas du modèle de Li [36], cette copule  $C$  est gaussienne ( $C_R^{gauss}$ ) et, afin de l'estimer, il suffit de déterminer la matrice de corrélation  $R$  entre les temps de défauts des éléments du portefeuille.

Toutefois, tel que mentionné dans le chapitre précédent, ce modèle général devient rapidement inefficace en terme de solvabilité lorsque  $n$  est élevé. Cela est d'autant plus vraie pour des copules  $C$  autres que gaussienne (copule-t, famille de copules

archimédiennes, etc.), exigeant une complexité de calculs encore plus élevée dans l'estimation des paramètres.

### Modèle à un facteur

Il est possible de réduire ce niveau de complexité en introduisant un facteur de risque commun ( $V$ ) aux  $n$  éléments du portefeuille. La principale caractéristique de ce modèle est que, conditionnellement à ce facteur de risque commun  $V$ , les temps de défaut sont indépendants. De plus, afin d'estimer la valeur simplifiée de la copule de défauts  $C$ , un vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$ , permettant l'introduction du facteur commun, est défini afin que la copule de la distribution multivariée des temps de défaut soit la même que celle de la distribution du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$ .

Ainsi, conditionnellement à  $V$ , il est possible de définir la probabilité conditionnelle de survie  $q_t^{i|V} = \mathbf{Q}(\tau_i > t|V)$  et la probabilité conditionnelle de défaut  $p_t^{i|V} = \mathbf{Q}(\tau_i \leq t|V)$ . La fonction de répartition multivariée de survie, conditionnellement à  $V$ , s'exprime alors par

$$S(t_1, \dots, t_n|V) = \prod_{i=1}^n (q_{t_i}^{i|V}). \quad (3.34)$$

La fonction de répartition inconditionnelle de survie s'exprime par

$$S(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n (q_{t_i}^{i|v}) f(v) dv. \quad (3.35)$$

Et la fonction de répartition inconditionnelle de défaut s'exprime par

$$F(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n (p_{t_i}^{i|v}) f(v) dv, \quad (3.36)$$

où  $f(V)$  est la fonction de densité du facteur commun  $V$ .

De plus, comme autre hypothèse de modélisation, on suppose que chaque crédit  $i$  est lié à une compagnie représentée par une fonction de surplus  $X_i$ . Le défaut de la compagnie  $i$  survient au temps  $\tau_i$  lorsque sa fonction de surplus (par exemple le surplus entre la valeur nette des actifs et des passifs) est inférieure à un certain seuil  $K_i$  pour un temps  $t$  donné. Dans ce cas,  $\mathbf{Q}(\tau_i < t) = \mathbf{Q}(X_i < K_i(t))$ . En posant



$Q(X_i < K_i(t)) = F_{X_i}(K_i) = u_i$ , où  $F_{X_i}$  est la fonction de répartition marginale des  $X_i$ , alors

$$K_i = F_{X_i}^{-1}(u_i). \quad (3.37)$$

Il est à noter que, tel que présenté précédemment à la section Construction d'une courbe de crédit (voir les équations 3.26 et 3.30), il est commun de calibrer ce modèle à partir des prix observés sur le marché des CDS. Dans ce cas, le seuil  $K_i(t)$  est choisi tel que la marge  $F_i^{cds}(t)$  définie à l'équation 3.26, soit liée à ce seuil selon :

$$F_i^{cds}(t) = Q(X_i < K_i(t)), \quad (3.38)$$

c'est-à-dire

$$F_i^{cds}(t) = F_{X_i}(K_i(t)), \quad (3.39)$$

et un seuil de défaut donné par

$$K_i(t) = F_{X_i}^{-1}(F_i^{cds}(t)). \quad (3.40)$$

La valeur de la marge  $F_i^{cds}(t)$  dépendra uniquement des prix observés sur le marché des CDS et, par conséquent, aura la même valeur peu importe la copule choisie pour la modélisation de la dépendance.

A partir de la marge  $F_i(t) = F_i^{cds}(t)$ , en définissant  $t_i = F_i^{-1}(u_i)$  et en appliquant le théorème de l'espérance itérée, la fonction de copule de défauts  $C$  est alors définie comme

$$C(u_1, \dots, u_n) = Q(\tau_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, \tau_n \leq F_n^{-1}(u_n)) \quad (3.41)$$

$$= Q(X_1 \leq K_1(t_1), \dots, X_n \leq K_n(t_n)) \quad (3.42)$$

$$= E[Q(X_1 \leq K_1(t_1), \dots, X_n \leq K_n(t_n) | V)] \quad (3.43)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Q(X_1 \leq K_1(t_1), \dots, X_n \leq K_n(t_n) | v) f(v) dv, \quad (3.44)$$

où  $f(v)$  est la fonction de densité du facteur commun.

Étant donné l'indépendance conditionnelle entre les v.a. induites par le facteur commun  $V$ ,

$$C(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n Q(X_i \leq K_i(t_i) | v) f(v) dv \quad (3.45)$$

### Modèle à un facteur gaussien

Le modèle à un facteur gaussien est par conséquent proposé afin de réduire le niveau de complexité des calculs tout en induisant une structure de dépendance définie par une copule gaussienne pour les  $n$  éléments (crédits) du portefeuille. Le nombre de paramètres de corrélation à estimer dans le modèle passe alors de  $n(n-1)/2$  à  $n$ . En effet, soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire où chaque  $X_i$  représente une fonction de surplus associée à l'élément  $i$  du portefeuille tel que

$$X_i = \rho_i V + \sqrt{1 - \rho_i^2} V_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.46)$$

où  $V$  est un facteur de marché commun à tous les crédits du portefeuille (par exemple l'état de l'économie),  $V_i$  un facteur spécifique au crédit  $i$  et  $\rho_i \in [0, 1]$  une constante réelle. On suppose, comme hypothèses de modélisation, que

1.  $V \sim N(0, 1)$  ;
2. les  $(V_1, \dots, V_n)$  sont i.i.d. selon  $\sim N(0, 1)$  ;
3.  $V$  est indépendante de  $(V_1, \dots, V_n)$ .

Ainsi, conditionnellement au facteur commun  $V$ , les v.a.  $X_i$  sont indépendantes. On a alors  $X_i \sim N(0, 1)$ , et en posant  $a_i = \sqrt{(1 - \rho_i^2)}$  pour  $i \neq j$  et  $i, j \in (1, \dots, n)$ ,

$$\text{Corr}(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \quad (3.47)$$

$$= \frac{\mathbf{E}[X_i X_j] - \mathbf{E}[X_i] \mathbf{E}[X_j]}{1 * 1} \quad (3.48)$$

$$= \mathbf{E}[X_i X_j] - 0 \quad (3.49)$$

$$= \mathbf{E}[\rho_i \rho_j + a_i \rho_j V_i V + a_j \rho_i V_j V + a_i a_j V_i V_j] \quad (3.50)$$

$$= \mathbf{E}[\rho_i \rho_j] + 0 + 0 + 0 \quad (3.51)$$

$$= \rho_i \rho_j. \quad (3.52)$$

Le modèle suppose par conséquent l'estimation de ces  $n$  paramètres de corrélation  $(\rho_1, \dots, \rho_n)$  liés à chacun des  $n$  éléments de crédit du portefeuille. Dans le cas où ces paramètres de corrélation sont constants pour l'ensemble des éléments du portefeuille, alors  $\text{Corr}(X_i, X_j) = \rho^2$ .

Le seuil de défaut est donnée par

$$K_i(t) = \Phi_{X_i}^{-1}(F_i^{cds}(t)), \quad (3.53)$$

où  $\Phi$  est une fonction de répartition gaussienne standard.

A partir du développement général pour la copule de défauts (voir équation 3.41), la fonction de copule  $C$  gaussienne est alors définie comme

$$C(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}(X_1 \leq K_1(t_1), \dots, X_n \leq K_n(t_n) | v) \varphi(v) dv, \quad (3.54)$$

où  $t_i = F_i^{-1}(u_i)$ .

Étant donné l'indépendance conditionnelle entre les v.a. induite par le facteur commun  $V$  gaussien,

$$C_s(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \mathbf{Q}(X_i \leq K_i(t_i) | v) \varphi(v) dv \quad (3.55)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \mathbf{Q}(\rho_i v + \sqrt{1 - \rho_i^2} V_i \leq K_i(t_i) | v) \varphi(v) dv \quad (3.56)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \mathbf{Q}(V_i \leq \frac{K_i(t_i) - \rho_i v}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} | v) \varphi(v) dv \quad (3.57)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \Phi(\frac{K_i(t_i) - \rho_i v}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}) \varphi(v) dv. \quad (3.58)$$

La fonction de répartition gaussienne multivariée est alors donnée par

$$F(t_1, \dots, t_n) = C(F_1(t_1), \dots, F_n(t_n)) \quad (3.59)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n (p_{t_i}^{i|v}) \varphi(v) dv. \quad (3.60)$$

avec

$$p_t^{i|V} = 1 - q_t^{i|V} = \Phi(\frac{K_i(t) - \rho_i V}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}). \quad (3.61)$$

Les prochaines sous-sections présentent les modèles à facteur non-gaussien les plus communs.



### Modèle à deux facteurs Student-t

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire suivant une copule Student-t avec  $\nu$  degrés de liberté et  $\mathbf{Y}$  un vecteur aléatoire gaussien défini précédemment selon l'équation 3.46. A partir de ce vecteur aléatoire  $(Y_1, \dots, Y_n)$ , il est possible d'obtenir  $(X_1, \dots, X_n)$  selon

$$X_i = \sqrt{(\nu/W)} Y_i \quad (3.62)$$

$$= \sqrt{(\nu/W)} (\rho_i V + \sqrt{1 - \rho_i^2} V_i), \quad (3.63)$$

où  $\nu/W$  suit une distribution Chi-carrée avec  $\nu$  degré de liberté ( $\nu/W \sim \chi_\nu^2$ ). De plus, la v.a.  $W$  est indépendante de  $(Y_1, \dots, Y_n)$  et conditionnellement aux facteurs communs  $(V, W)$ , les v.a.  $X_i$  sont indépendantes. La probabilité de défaut conditionnelle aux facteurs communs  $(V, W)$  est alors définie selon

$$p_t^{i|V,W} = 1 - q_t^{i|V,W} = \Phi\left(\frac{K_i(t) - \rho_i V \sqrt{(\nu/W)}}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right) \quad (3.64)$$

et le seuil de défaut  $K_i(t)$  selon

$$K_i(t) = t_\nu^{-1}(F_i^{cds}(t)), \quad (3.65)$$

où  $t_\nu$  est une fonction de répartition Student-t avec  $\nu$  degrés de liberté et  $F_i^{cds}$  la fonction de survie individuelle obtenue à partir des prix observés sur le marché des CDS liés au portefeuille. De plus, dans le cas des modèles à 2 facteurs ( $V$  et  $W$ ), la fonction de répartition multivariée de défaut est donnée par

$$F(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n (p_{t_i}^{i|v,w}) f(v) f(w) dv dw. \quad (3.66)$$

### Modèle à un facteur Double-t

Ce modèle présenté par Hull et White [25] suppose que  $V$ , le risque ou facteur commun à tous les crédits du portefeuille ainsi que  $V_i$ , le risque spécifique à chacun des  $n$  crédits, sont des v.a. indépendantes de distribution Student-t avec respectivement  $\nu_V$  et  $\nu_{V_i}$  degrés de liberté. Le vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  pour ce modèle est alors donné selon

$$X_i = \left(\frac{\nu_V - 2}{\nu_V}\right)^{1/2} (\rho_i V) + \sqrt{(1 - \rho_i^2)} \left(\frac{\nu_{V_i} - 2}{\nu_{V_i}}\right)^{1/2} V_i. \quad (3.67)$$

La probabilité de défaut conditionnelle au facteur commun  $V$  est donnée selon

$$p_t^{i|V} = 1 - q_t^{i|V} = t \left[ \frac{K_i(t) - \rho_i V (\frac{\nu_V - 2}{\nu_V})^{1/2}}{\sqrt{1 - \rho_i^2 (\frac{\nu_{V_i} - 2}{\nu_{V_i}})^{1/2}}} \right], \quad (3.68)$$

où  $t$  est une fonction de répartition Student-t et  $K_i(t)$  le seuil de défaut. Ce seuil de défaut est donné selon

$$K_i(t) = H^{-1}(F_i^{cds}(t)), \quad (3.69)$$

où  $H$  est la fonction de distribution de  $X_i$  et  $F_i^{cds}(t)$  la fonction de survie individuelle obtenue à partir des prix observés sur le marché des CDS.

Cette copule double-t, tout comme pour la copule Student-t, présente une dépendance symétrique dans les queues de sa distribution. Le vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  ne suit toutefois pas une distribution de type Student-t puisque chaque v.a.  $X_i$  résultant de la somme de deux v.a. indépendantes Student-t n'est pas de type Student-t. La v.a. Student-t n'est en effet pas stable sous l'opération de somme; cette propriété de stabilité se démontre directement (par convolution) ou indirectement (au moyen des fonctions caractéristiques). De plus, le calcul de la fonction de répartition de  $H$  est numériquement exigeant, ce qui limite son utilisation dans le cadre de simulations Monte-Carlo. La valeur de seuil  $K_i(t)$ , connaissant la probabilité de défaut individuelle  $p_t^i = F_i^{cds}(t)$ , peut être déterminée implicitement selon :

$$p_t^i = \int_{-\infty}^{\infty} p_t^{i|v} f(v) dv, \quad (3.70)$$

où  $f(v)$  est la fonction de densité du facteur commun  $V$ .

### Modèle à un facteur Normal Inverse Gaussian (NIG)

Le modèle à un facteur NIG a été introduit par Kelaménova-Schmid-Werner [30] comme alternative aux limites imposées par le modèle à un facteur double-t en termes de rapidité des calculs. Ainsi, la distribution NIG (*Normal Inverse Gaussian*), un cas particulier des distributions hyperboliques généralisées (Barndorff-Nielsen [3]), permet de tirer avantage des qualités de la distribution Student-t (queue épaisse)

tout en permettant de calculer, de façon stable, et avec une certaine flexibilité, la fonction de densité, la fonction de répartition et la fonction de répartition inverse de la distribution NIG. Cette distribution possède quatre paramètres permettant de la caractériser  $(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ . Les propriétés de la distribution NIG sont présentées dans [30] et [31].

De façon similaire au modèle à un facteur gaussien présenté précédemment, soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire tel que

$$X_i = \rho_i V + \sqrt{1 - \rho_i^2} V_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.71)$$

où  $V$  est un facteur de marché commun à tous les crédits du portefeuille,  $V_i$  un facteur spécifique au crédit  $i$  et  $\rho_i \in [0, 1]$  une constante réelle. On suppose, comme hypothèses de modélisation, que

1.  $V \sim NIG(\alpha, \beta, -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}}, \alpha)$ ;
2. les  $(V_1, \dots, V_n)$  sont i.i.d. selon  $\sim NIG(a\alpha, a\beta, -a\frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}}, a\alpha)$ ;
3.  $V$  est indépendante de  $(V_1, \dots, V_n)$ ;

où  $a_i = \frac{\sqrt{1 - \rho_i^2}}{\rho_i}$ . Conditionnellement au facteur commun  $V$ , les v.a.  $X_i$  sont indépendantes. À partir des propriétés de la distribution NIG,

$$X_i \sim NIG\left(\frac{\alpha}{\rho_i}, \frac{\beta}{\rho_i}, -\frac{1}{\rho_i} \frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}}, \frac{\alpha}{\rho_i}\right). \quad (3.72)$$

Les paramètres sont choisis de façon à obtenir une moyenne nulle et des variances identiques pour les v.a.  $V$ ,  $V_i$  et  $X_i$ . Pour une valeur de  $\beta > 0$ , il est possible d'obtenir une distribution asymétrique. De plus, pour simplifier la notation, il est commode de poser la fonction de répartition générale pour ce modèle selon  $F_{NIG(s)}(x) = F_{NIG}(x; s\alpha, s\beta, -s\frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}}, s\alpha)$ . La probabilité de défaut conditionnelle au facteur commun  $V$  s'exprime alors selon

$$p_t^{i|V} = 1 - q_t^{i|V} = F_{NIG(a_i)}\left[\frac{K_i(t) - \rho_i V}{\sqrt{(1 - \rho_i^2)}}\right], \quad (3.73)$$

avec  $K_i(t)$ , le seuil de défaut, selon

$$K_i(t) = F_{NIG(1/\rho)}^{-1}(F_i^{cds}(t)), \quad (3.74)$$



où  $F_i^{cds}(t)$  est la fonction de survie individuelle obtenue à partir des prix observés sur le marché des CDS liés au portefeuille. Il est toutefois important de noter que bien que les v.a.  $X_i$  suivent une distribution NIG, le vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  n'est pas distribué selon une distribution NIG.

### Modèle à un facteur archimédien

Ce modèle suppose que  $V$ , le risque commun à tous les  $n$  crédits du portefeuille, est une v.a. aléatoire mixte positive (*positive mixing variable*), et  $V_i$ , le risque spécifique à chaque crédit, est une variable de distribution uniforme sur le segment  $[0, 1]$ . Les v.a.  $V_i, \dots, V_n$  et  $V$  sont indépendantes. Les  $X_i$  sont définis selon

$$X_i = \varphi^{-1}\left(-\frac{\ln(V_i)}{V}\right), \quad (3.75)$$

où  $\varphi^{-1}(s)$  correspond à la fonction génératrice inverse pour une copule Archimédienne.

Les temps de défaut individuels sont également liés aux  $X_i$  par

$$\tau_i = S_i^{-1}(X_i), \quad (3.76)$$

où  $S$  est la fonction de survie définie à l'équation 3.26.

De plus, conditionnellement au facteur commun  $V$ ,  $X_i$  peut être interprété comme la probabilité de défaut individuelle du crédit  $i$  suivant une distribution uniforme sur le segment  $[0, 1]$ . La probabilité de survie, conditionnellement au facteur commun  $V$ , s'exprime alors selon

$$q_t^{i|V} = \mathbf{Q}(X_i \leq S_i(t)|V) \quad (3.77)$$

$$= \mathbf{Q}\left(\varphi^{-1}\left(-\frac{\ln(V_i)}{V}\right) \leq S_i(t)\right) \quad (3.78)$$

$$= \mathbf{Q}(V_i \leq \exp(-V\varphi(S_i(t)))). \quad (3.79)$$

De plus, puisque  $V_i$  est uniforme sur  $[0, 1]$  alors

$$q_t^{i|V} = \exp(-V\varphi(S_i(t))). \quad (3.80)$$

Dans le cas particulier d'une copule de Clayton, la fonction génératrice est donnée par

$$\varphi_{Clayton}(t) = t^{-\theta} - 1, \quad \theta > 0, \quad (3.81)$$

et

$$q_t^{i|V} = \exp(-V(S_i(t)^{-\theta} - 1)), \quad (3.82)$$

où  $V$  suit une distribution Gamma( $1/\theta$ ).

Alors que dans le cas particulier d'une copule de Gumble, la fonction génératrice est donnée par

$$\varphi_{Gumble}(t) = (-\ln t)^\theta, \quad \theta \geq 1, \quad (3.83)$$

et

$$q_t^{i|V} = \exp(-V(-\ln(S_i(t)))^\theta), \quad (3.84)$$

où  $V$  suit une distribution Stable standard de paramètre  $\alpha = 1/\theta$ .

### Modèle à un facteur Marshall-Olkin

Ce modèle suppose que  $V$ , le risque commun à tous les crédits du portefeuille ainsi que  $V_i$ , le risque spécifique à chaque crédit, sont des v.a. indépendantes de distribution exponentielle de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $1 - \lambda$ , où  $\lambda \in [0, 1]$ . Le vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  pour ce modèle est alors donné selon

$$X_i = \min(V_i, V), \quad (3.85)$$

où  $X_i$ , conditionnellement au facteur commun  $V$ , peut être interprété comme que le temps de défaut individuel du crédit  $i$  suivant une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda_{X_i} = 1$ .

Ainsi, pour un élément de crédit individuel, étant donné un risque commun connu, il y a survie si le risque  $V_i$  spécifique à  $i$  et le risque  $V$  commun pour l'ensemble de l'économie est plus grand que le temps  $t$  observé. Cela implique alors que dans le cas extrême où l'économie entière (facteur commun) est dans une situation apocalyptique de défaut, toutes les compagnies seront simultanément en défaut au temps  $V = v$ . La

probabilité de survie conditionnelle au facteur commun  $V$  s'exprime alors selon

$$q_t^{i|V} = Q(V > t)Q(V_i > t) \quad (3.86)$$

$$= \mathbf{1}_{V>t} \mathbf{E}[\mathbf{1}_{V_i>t}] \quad (3.87)$$

$$= \mathbf{1}_{V>-\ln(S_i(t))} S_i(t)^{1-\lambda} \quad (3.88)$$

où  $S_i(t) = \exp(-t)$  représente la fonction de survie individuelle.

### Modèle à un facteur gaussien avec extension aléatoire de la corrélation

Andersen et Sidenius [2] présentent une extension aléatoire de la corrélation pour le modèle à un facteur gaussien, permettant de générer une distribution des pertes à queue épaisse. Cette extension est en effet élégamment introduite par la présence d'un paramètre aléatoire offrant la possibilité d'ajuster la corrélation entre les crédits du portefeuille en fonction de l'état de l'économie. En effet, dans le cas du modèle classique, cette corrélation est fixée constante sur l'ensemble des états de l'économie qui représentée par le facteur commun de marché. Or, empiriquement, il est observé que la corrélation entre les valeurs des titres est plus élevée dans un marché à la hausse qu'un marché à la baisse. Ainsi, en interprétant par exemple un facteur commun de marché ayant une valeur élevée comme un marché haussier (*bull market*), et un facteur de marché ayant une valeur faible comme un marché baissier (*bear market*), il est possible de lier une corrélation (constante pour tous les crédits du portefeuille) pour chacun de ces deux états de l'économie. Formellement, soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire tel que

$$X_i = a(V)V + \nu V_i + \kappa, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.89)$$

où  $V$  est un facteur de marché commun à tous les crédits du portefeuille,  $V_i$  un facteur spécifique au crédit  $i$ ,  $a(V)$  le paramètre aléatoire qui est fonction du facteur commun de marché  $V$  et  $\nu, \kappa$  des paramètres choisis tel que les  $X_i$  soient des v.a.  $N(0, 1)$ .

Comme pour le modèle à un facteur gaussien, on suppose, comme hypothèses de modélisation, que



1.  $V \sim N(0, 1)$ ;
2. les  $(V_1, \dots, V_n)$  sont i.i.d. selon  $\sim N(0, 1)$ ;
3.  $V$  est indépendante de  $(V_1, \dots, V_n)$ .

Ainsi, conditionnellement au facteur commun  $V$ , les v.a.  $X_i$  sont indépendantes. Quant au paramètre aléatoire  $a(V)$ , il peut prendre deux valeurs possibles en fonction d'un seuil  $\theta$  choisi de façon à discriminer entre les deux états économiques possibles.

$$a(V) = \begin{cases} \sqrt{a}, & \text{si } V \leq \theta; \\ \sqrt{b}, & \text{si } V > \theta; \end{cases} \quad (3.90)$$

où  $a, b, \theta$  sont des constantes réelles. La fonction  $a(V)$  est donc une variable aléatoire binaire pouvant prendre la valeur  $\sqrt{a}$  avec une probabilité  $\Phi(\theta)$  et  $\sqrt{b}$  avec une probabilité  $1 - \Phi(\theta)$ . Il est à noter que dans le cas où  $a = b$ , le modèle à un facteur gaussien classique est retrouvé.

#### Calcul de $\nu$ et $\kappa$

Quant aux valeurs de  $\nu$  et  $\kappa$ , ils doivent être choisis tel que  $\mathbf{E}[X_i] = 0$  et  $\mathbf{Var}[X_i] =$

1. Donc, à partir des hypothèses de modélisation,

$$\mathbf{E}[X_i] = \mathbf{E}[a(V)V] + \nu V_i + \kappa \quad (3.91)$$

$$= \mathbf{E}[a(V)V] + \mathbf{E}[\nu V_i] + \mathbf{E}[\kappa] \quad (3.92)$$

$$= \mathbf{E}[a(V)V] + 0 + \kappa \quad (3.93)$$

$\kappa = -\mathbf{E}[a(V)V]$ . Et

$$\mathbf{Var}[X_i] = \mathbf{Var}[a(V)V] + \mathbf{Var}[\nu V_i] + \mathbf{Var}[\kappa^2] \quad (3.94)$$

$$= \mathbf{Var}[a(V)V] + \nu^2 + 0 \quad (3.95)$$

$\nu = \sqrt{(1 - \mathbf{Var}[a(V)])}$  tel que

$$\mathbf{Var}([a(V)V]) = \mathbf{E}[(a(V)V)^2] - \mathbf{E}^2[a(V)V]. \quad (3.96)$$

#### Calcul de $\mathbf{E}[a(V)V]$ et $\mathbf{E}[(a(V)V)^2]$

De plus, pour une v.a. gaussienne  $Y$  centrée réduite, il est possible de démontrer les identités suivantes pour des constantes arbitraires  $c$  et  $d$  (voir lemme 5, L. Andersen, J. Sidenius [2]) :

$$E[\mathbf{1}_{c < x \leq d} x] = \mathbf{1}_{d \geq c}(\varphi(c) - \varphi(d)); \quad (3.97)$$

$$E[\mathbf{1}_{c < x \leq d} x^2] = \mathbf{1}_{d \geq c}(\Phi(d) - \Phi(c)) + \mathbf{1}_{d \geq c}(c\varphi(c) - d\varphi(d)). \quad (3.98)$$

En sachant que  $\Phi(-\infty) = 0$ ,  $\Phi(\infty) = 1$ ,  $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0$ , l'espérance  $E[a(V)V]$  peut alors s'exprimer selon

$$E[a(V)V] = E[-\sqrt{a}\mathbf{1}_{V \leq \theta}V + \sqrt{b}\mathbf{1}_{V > \theta}V] \quad (3.99)$$

$$= (\sqrt{a}\varphi(\theta) - \sqrt{b}\varphi(\theta)). \quad (3.100)$$

Et l'espérance  $E[(a(V)V)^2]$  selon

$$E[(a(V)V)^2] = E[\sqrt{a}\mathbf{1}_{V \leq \theta}V^2 + \sqrt{b}\mathbf{1}_{V > \theta}V^2] \quad (3.101)$$

$$= a[\Phi(\theta) - \theta\varphi(\theta)] + b[1 - \Phi(\theta) + \theta\varphi(\theta)]. \quad (3.102)$$

La probabilité de défaut conditionnelle au facteur commun  $V$  s'exprime alors selon

$$p_t^{i|V} = Q(X_i \leq K_i(t)|V) \quad (3.103)$$

$$= Q(a(V)V + \nu V_i + \kappa \leq K_i(t)|V) \quad (3.104)$$

$$= Q(V_i \leq \frac{K_i(t) - a(V)V - \kappa}{\nu} | V) \quad (3.105)$$

$$= \Phi\left(\frac{K_i(t) - \sqrt{a}\mathbf{1}_{V \leq \theta}V - \sqrt{b}\mathbf{1}_{V > \theta}V - \kappa}{\nu}\right), \quad (3.106)$$

avec  $K_i(t)$ , le seuil de défaut selon

$$K_i(t) = F_{X_i}^{-1}(F_i^{cds}(t)), \quad (3.107)$$

où  $F_{X_i}^{-1}$  est la fonction de répartition des  $X_i$  avec  $F_i^{cds}(t)$  la fonction de survie individuelle obtenue à partir des prix observés sur le marché des CDS liés au portefeuille. Or les v.a.  $X_i$  ne suivent pas une distribution gaussienne, sauf si les paramètres aléatoires sont égaux ( $a = b$ ). Par conséquent, tout comme pour la cas du modèle à un facteur double-t, le calcul de la fonction de répartition  $F_{X_i}$  est numériquement exigeant,

ce qui limite son utilisation dans le cadre de simulations Monte-Carlo. Cette valeur de seuil  $K_i(t)$ , connaissant la probabilité de défaut individuelle non-conditionnelle  $p_t^i = F_i^{cds}(t)$ , peut être déterminée implicitement selon :

$$p_t^i = \int_{-\infty}^{\infty} p_t^{i|v} f_v dv \quad (3.108)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{K_i(t) - \sqrt{a}\mathbf{1}_{v \leq \theta}V - \sqrt{b}\mathbf{1}_{v > \theta}V - \kappa}{\nu}\right) \phi(v) dv \quad (3.109)$$

### Modèle à un facteur NIG avec extension aléatoire de la corrélation

A. Luscher dans [37] présente une extension aléatoire de la corrélation, adaptée pour un modèle à un facteur NIG.

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire tel que

$$X_i = a(V)V + \nu V_i + \kappa, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.110)$$

où  $V$  est un facteur de marché commun à tous les crédits du portefeuille,  $V_i$  un facteur spécifique au crédit  $i$ ,  $a(V)$  le paramètre aléatoire qui est fonction du facteur commun de marché  $V$  et  $\nu, \kappa$  des paramètres choisis tel que les  $X_i$  soient des v.a. NIG.

On suppose, comme hypothèses de modélisation, que

1.  $V \sim NIG(1)$ ;
2. les  $(V_1, \dots, V_n)$  sont i.i.d. selon  $\sim NIG(c)$ ;
3.  $V$  est indépendante de  $(V_1, \dots, V_n)$ .

où, afin de simplifier la notation,  $F_{NIG(s)} = F_{NIG}(x; s\alpha, s\beta, -s\frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}}, s\alpha)$ . De plus, conditionnellement au facteur commun  $V$ , les v.a.  $X_i$  sont indépendantes. Quant à la constante  $c$ , elle est choisie de sorte que, dans le cas où  $a = b$  (les valeurs possibles pour la corrélation aléatoire), le modèle à un facteur NIG est retrouvé. Des choix possibles pour  $c$  sont par exemples :  $c = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}}$  ou  $c = \frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{b}}$ .

#### Calcul de $\nu$ et $\kappa$

Quant aux valeurs de  $\nu$  et  $\kappa$ , ils doivent être choisis tel que  $\mathbf{E}[X_i] = 0$  et  $\mathbf{Var}[X_i] = \mathbf{Var}[V] = \mathbf{Var}[V_i]$ . Or, à partir des propriétés de la distribution NIG,  $\mathbf{Var}[V] =$



$\frac{\alpha^3}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = \gamma$ . Donc, à partir des hypothèses de modélisation,

$$\mathbf{E}[X_i] = \mathbf{E}[a(V)V] + \nu V_i + \kappa \quad (3.111)$$

$$= \mathbf{E}[a(V)V] + \mathbf{E}[\nu V_i] + \mathbf{E}[\kappa] \quad (3.112)$$

$$= \mathbf{E}[a(V)V] + 0 + \kappa \quad (3.113)$$

$\kappa = -\mathbf{E}[a(V)V]$ . Et

$$\mathbf{Var}[X_i] = \mathbf{Var}[a(V)V] + \mathbf{Var}[\nu V_i] + \mathbf{Var}[\kappa^2] \quad (3.114)$$

$$= \mathbf{Var}[a(V)V] + \nu^2 \mathbf{Var}[V] + 0 \quad (3.115)$$

$$= \mathbf{Var}[a(V)V] + \nu^2 \gamma + 0 \quad (3.116)$$

$\nu = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{Var}[a(V)]}{\gamma}}$  tel que

$$\mathbf{Var}[(a(V)V)] = \mathbf{E}[(a(V)V)^2] - \mathbf{E}^2[a(V)V]. \quad (3.117)$$

Calcul de  $\mathbf{E}[a(V)V]$  et  $\mathbf{E}[(a(V)V)^2]$

$$\mathbf{E}[(a(V)V)] = \mathbf{E}[-\sqrt{a}\mathbf{1}_{V \leq \theta}V + \sqrt{b}\mathbf{1}_{V > \theta}V] \quad (3.118)$$

$$= \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\theta} v f_{NIG(1)}(v) dv + \sqrt{b} \int_{\theta}^{\infty} v f_{NIG(1)}(v) dv \quad (3.119)$$

$$\mathbf{E}[(a(V)V)^2] = \mathbf{E}[(a(V)V)^2] \quad (3.120)$$

$$= \mathbf{E}[a\mathbf{1}_{V \leq \theta}V^2 + b\mathbf{1}_{V > \theta}V^2] \quad (3.121)$$

$$= a \int_{-\infty}^{\theta} v^2 f_{NIG(1)}(v) dv + b \int_{\theta}^{\infty} v^2 f_{NIG(1)}(v) dv \quad (3.122)$$

La probabilité de défaut conditionnelle au facteur commun  $V$  s'exprime alors par

$$p_t^{i|V} = \mathbf{Q}(X_i \leq K_i(t)|V) \quad (3.123)$$

$$= \mathbf{Q}(a(V)V + \nu V_i + \kappa \leq K_i(t)|V) \quad (3.124)$$

$$= \mathbf{Q}(V_i \leq \frac{K_i(t) - a(V)V - \kappa}{\nu} | V) \quad (3.125)$$

$$= F_{NIG(c)}\left(\frac{K_i(t) - \sqrt{a}\mathbf{1}_{V \leq \theta}V - \sqrt{b}\mathbf{1}_{V > \theta}V - \kappa}{\nu}\right), \quad (3.126)$$

avec  $K_i(t)$ , le seuil de défaut donné par

$$K_i(t) = F_{X_i}^{-1}(F_i^{cds}(t)), \quad (3.127)$$

où  $F_{X_i}^{-1}$  est la fonction de répartition des  $X_i$  avec  $F_i^{cds}(t)$  la fonction de survie individuelle obtenue à partir des prix observés sur le marché des CDS liés au portefeuille. Or les v.a.  $X_i$  ne suivent pas une distribution NIG, sauf si les paramètres aléatoires sont égaux ( $a = b$ ). Cette valeur de seuil  $K_i(t)$ , connaissant la probabilité de défaut individuelle  $p_t^i = F_i(t)$ , peut être déterminée implicitement selon :

$$p_t^i = \int_{-\infty}^{\infty} p_t^{i|v} f_v dv \quad (3.128)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_{NIG(c)}\left(\frac{K(t) - \sqrt{a}\mathbf{1}_{v \leq \theta}V - \sqrt{b}\mathbf{1}_{v > \theta}V - \kappa}{\nu}\right) f_{NIG(1)}(v) dv. \quad (3.129)$$

### 3.2.4 Construction de la distribution des pertes du portefeuille

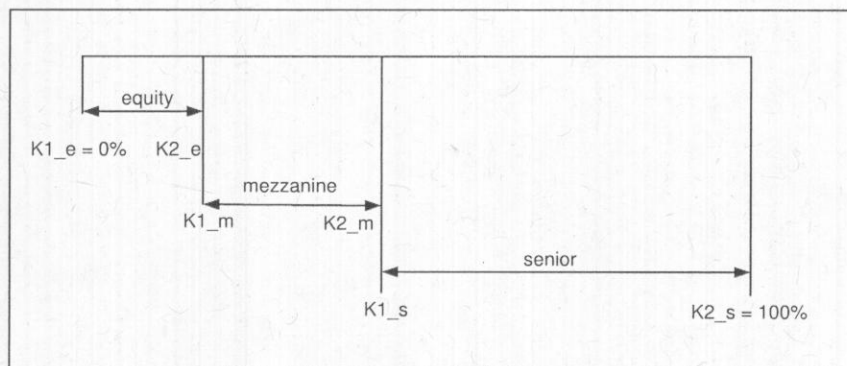
À partir de la détermination d'un vecteur aléatoire  $\tau_1, \dots, \tau_n$  lié au  $n$  éléments du portefeuille selon une structure de dépendance induite par la copule choisie, il est possible de calculer une perte cumulative du portefeuille au temps  $t$ . Plus spécifiquement, en définissant une fonction indicatrice  $I_i(t) = \mathbf{1}_{\tau_i < t}$  au temps  $t$  et une perte individuelle  $L_i^*$ , la perte cumulative du portefeuille est donnée par

$$L^*(t) = \sum_{i=1}^n L_i^* I_i(t). \quad (3.130)$$

De plus, en définissant  $A_i$  la valeur nominale de l'élément  $i$  du portefeuille et  $Rc_i$  son taux de recouvrement, la perte pour chaque élément individuelle en cas de défaut est calculée par

$$L_i^* = (1 - Rc_i)A_i. \quad (3.131)$$

En posant un taux de recouvrement constant pour tous les éléments du portefeuille et en exprimant la valeur nominale du portefeuille par  $N_p = \sum_{i=1}^n A_i$ , la perte cumulative



**Fig. 3.1:** Pertes en % absorbées par chaque tranche d'un CDO.

du portefeuille est alors donnée par

$$L(t)^* = (1 - Rc) \sum_{i=1}^n A_i I_i(t). \quad (3.132)$$

La fraction des pertes totales du portefeuille est donnée par

$$L(t) = \frac{(1 - Rc)}{N_p} \sum_{i=1}^n A_i I_i(t). \quad (3.133)$$

### Distribution des pertes pour une tranche du CDO

Les CDO sont divisés en plusieurs tranches de risque correspondant à divers profils d'investisseurs. Généralement, il existe trois niveaux de tranches : *senior*, *mezzanine* et *equity*. La tranche *senior*, la moins risquée, est la première payée mais la dernière à absorber les pertes. La tranche *equity*, la plus risquée, est la dernière payée mais la première à absorber les pertes. Par conséquent, chaque tranche absorbe une fraction des pertes correspondant aux points d'attachements  $[K_1, K_2]$ , où  $K_1$  est la borne inférieure exprimée en pourcentage de la valeur notionnelle du portefeuille et  $K_2$  la borne supérieure. La figure 3.1 illustre cette situation.

La valeur notionnelle d'une tranche est donnée par  $N_{tr} = (K_2 - K_1)N_p$ . La fraction



des pertes pour une tranche  $[K_1, K_2]$  au temps  $t$  est alors donnée par

$$L_t^{(K_1, K_2)} = \frac{N_p}{N_{tr}} \max[\min(L_t, K_2) - K_1, 0] \quad (3.134)$$

$$= \frac{1}{K_2 - K_1} \max[\min(L_t, K_2) - K_1, 0]. \quad (3.135)$$

Plusieurs méthodes de calcul peuvent être utilisées afin d'évaluer la distribution des pertes du portefeuille. Dans le cadre de ce mémoire, les méthodes suivantes ont été retenues :

- La simulation Monte-Carlo ;
- La méthode semi-analytique par transformée de Fourier (FFT) ;
- L'approximation du large portefeuille homogène (LHP) de Vasicek.

Ces méthodes de calcul seront détaillées au chapitre suivant.

### 3.2.5 Équation générale de valorisation

L'équation de valorisation du prix juste d'une tranche de CDO, sous une mesure de probabilité neutre au risque  $Q$ , consiste d'une part à trouver l'espérance de la valeur actualisée des paiements de la patte de protection  $V_{prot}$  au temps  $t = 0$  et, d'autre part, à trouver l'espérance des paiements actualisés de la patte de la prime  $V_{pri}$  au temps  $t = 0$ . Le prix juste, exprimé en terme d'une prime (*spread*)  $s$  exprimée en % de la valeur notionnelle du portefeuille (comme pour un contrat CDS), est finalement déduit en posant  $V_{prot}(0) = V_{pri}(0)$ .

Ainsi, soit  $B(0, t) = \exp(\int_0^t -r_u du)$ , le facteur d'actualisation à partir du taux  $r_u$  sans risque non stochastique,  $0 < t_i, \dots \leq t_M$  les temps de paiement des primes,  $T = t_M$  l'échéance du CDO,  $s^{(K_1, K_2)}$  le prix juste pour une tranche de CDO sur un intervalle de pertes  $[K_1, K_2]$  et  $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ . Si les paiements sont réguliers alors  $\Delta_i = \Delta$ .

La figure 3.2 illustre les flux transférés entre l'acheteur et le vendeur de protection sur une tranche de CDO donnée ayant un point d'attachement  $K_1 = 12\%$ ,  $K_2 = 22\%$ .

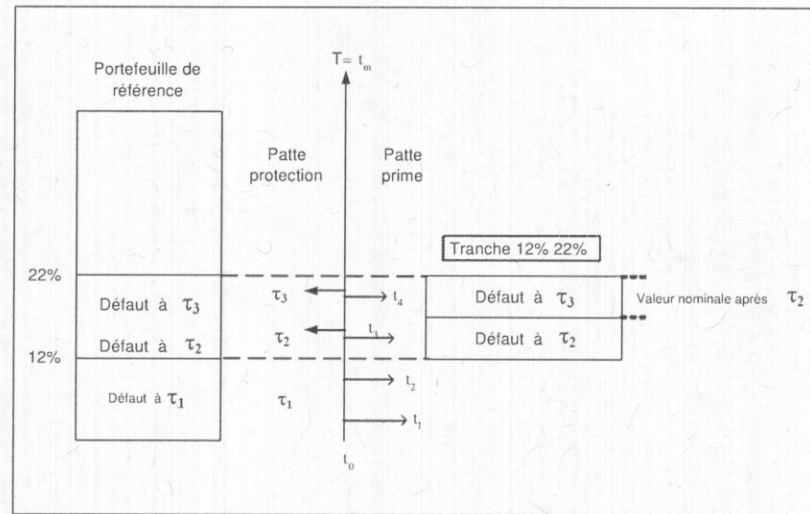


Fig. 3.2: Flux entre la patte protection et la patte prime.

### Patte de la prime

Pour la patte de la prime, la valeur de la prime pour un paiement donné au temps  $t$  dépend de la valeur notionnelle de la tranche à cet instant soit

$$N_{not}(t) = N_{tr}(1 - L_t^{(K_1, K_2)}). \quad (3.136)$$

On a alors,

$$V_{pri}(0) = \sum_{i=1}^M \mathbf{E}[B(0, t_i) N_{not}(t_i) s^{(K_1, K_2)} \Delta_i] \quad (3.137)$$

$$= \sum_{i=1}^M \mathbf{E}[B(0, t_i) N_{tr}(1 - L_{t_i}^{(K_1, K_2)}) s^{(K_1, K_2)} \Delta_i] \quad (3.138)$$

$$= s^{(K_1, K_2)} \Delta N_{tr} \sum_{i=1}^M [B(0, t_i)(1 - \mathbf{E}L_{t_i}^{(K_1, K_2)})]. \quad (3.139)$$

### Patte de protection

La valeur de la patte de protection est donnée par,

$$V_{prot}(0) = \mathbf{E}\left[\int_0^T B(0, s) dL_s^{(K_1, K_2)}\right] \quad (3.140)$$

$$= \int_0^T B(0, s) d\mathbf{E}L_s^{(K_1, K_2)} \quad (3.141)$$

Cette équation peut également être approximée sous forme discrète par

$$V_{prot}(0) \approx N_{tr} \sum_{i=1}^M B(0, t_i) [\mathbf{E}L_{t_i}^{(K_1, K_2)} - \mathbf{E}L_{t_{i-1}}^{(K_1, K_2)}]. \quad (3.142)$$

Il est à noter que, comme hypothèse simplificatrice, le paiement d'un défaut se fait au même moment que le paiement de la prochaine prime suivant ce défaut. Cette approximation au niveau de l'actualisation des paiements de protection a peu d'impact sur la valorisation du CDO dans la mesure où la fréquence des paiements des primes est grande.

### Calcul du prix juste $s^{(K_1, K_2)}$

Finalement, le prix juste  $s^{(K_1, K_2)}$  pour une tranche donnée  $[K_1, K_2]$  est calculé à partir des équations 3.137 et 3.142 en isolant  $s^{(K_1, K_2)}$  tel que  $V_{pri}(0) = V_{prot}(0)$ ,

$$s^{(K_1, K_2)} = \frac{\sum_{i=1}^M B(0, t_i) [\mathbf{E}L_{t_i}^{(K_1, K_2)} - \mathbf{E}L_{t_{i-1}}^{(K_1, K_2)}]}{\Delta \sum_{i=1}^M [B(0, t_{i-1}) (1 - \mathbf{E}L_{t_{i-1}}^{(K_1, K_2)})]}. \quad (3.143)$$

Par conséquent, l'évaluation du prix d'une tranche de CDO consiste essentiellement à calculer l'espérance liée à la fraction des pertes de la tranche ( $\mathbf{E}[L_{t_i}^{(K_1, K_2)}]$ ) dans l'intervalle  $[0, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, M$ .

La fraction des pertes pour une tranche  $[K_1, K_2]$  dans l'intervalle  $[0, t]$  est donnée par l'équation 3.135 et peut être exprimée comme une fonction de ces pertes  $g(L_t)$  selon

$$L_t^{(K_1, K_2)} = \frac{1}{K_2 - K_1} \max[\min(L_t, K_2) - K_1, 0] \quad (3.144)$$

$$= \frac{1}{K_2 - K_1} g(L_t), \quad (3.145)$$



où  $L_t$ , exprime la fraction des pertes pour l'ensemble du portefeuille et est fournie à l'équation 3.133. L'espérance peut alors être calculée selon

$$\mathbf{E}[L_t^{(K_1, K_2)}] = \frac{1}{K_2 - K_1} \mathbf{E}[g(L_t)] \quad (3.146)$$

$$= \frac{1}{K_2 - K_1} \int_0^{1-R_c} g(l) dQ(L_t \leq l) \quad (3.147)$$

$$= \frac{1}{K_2 - K_1} \int_0^1 g(x(1 - R_c)) dQ(L_t \leq x) \quad (3.148)$$

$$\approx \frac{1}{K_2 - K_1} \sum_{i=1}^I g(x_i(1 - R_c)) (Q(L_t \leq x_i) - Q(L_t \leq x_{i-1})) \quad (3.149)$$

où  $g(x(1 - R_c)) = \max[\min(x(1 - R_c), K_2) - K_1, 0]$  et les  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, I$  sont des points, choisis selon un pas régulier, correspondant à la fraction des pertes possibles du portefeuille sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

## Chapitre 4

### Méthodes de calcul des pertes du portefeuille d'un CDO

#### 4.1 Introduction

Tel que présenté au chapitre précédent, la valorisation du CDO implique le calcul des pertes sur le portefeuille sous-jacent selon un modèle choisi lié à une copule permettant de modéliser la dépendance conjointe des crédits du portefeuille ; il faut alors estimer les paramètres inconnus de la copule par une méthode de son choix. Dans le cadre de ce mémoire, le calcul des pertes du portefeuille (plus spécifiquement l'espérance des pertes) est réalisé par les trois méthodes suivantes : par simulation de Monte-Carlo [20][40], par le modèle de Laurent et Gregory [35] selon une méthode semi-analytique (FFT) et par le modèle de Kelamenoova-Schmid-Werner [30] basé sur la méthode d'un large portefeuille homogène (LHP) de Vacicek [53].

### 4.1.1 Calibration de la copule

#### Calibration semi-paramétrique

Puisque les temps de défauts sont des événements rares, et qu'en pratique on a peu de données pour modéliser leur dépendance, il est commun de poser comme hypothèse que le temps de défaut d'un élément du portefeuille est une valeur croissante de la valeur du titre boursier correspondant. La copule des temps de défauts est alors la même que celle des valeurs des titres.

Une méthode semi-paramétrique est présentée afin d'estimer les paramètres de dépendance inconnus de la copule choisie (voir comme référence [20]). Cette méthode est qualifiée de semi-paramétrique puisque les marges de la distribution sont inconnues et doivent également être estimées. Il est à noter que dans le cas d'une copule normale multivariée, le seul paramètre à estimer est la matrice de corrélation  $R$  à partir des observations de la valeur des titres en bourse. Voici les étapes de la méthode :

Soit un échantillon  $\{X_{1t}, \dots, X_{nt}\}_{t=1}^T$  suivant une copule de loi  $C_\Theta$  et  $F_1(x_1t), \dots, F_n(x_nt)$  les marges inconnues associées, où  $n$  est le nombre de titres dans le portefeuille et  $T$  la période d'observation.

1. Estimer les marges  $\widehat{F_i(\cdot)}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  :  

$$\widehat{F_i(\cdot)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}_{\{X_{it} \leq \cdot\}}, \text{ où } \mathbf{1}_{\{X_{it} \leq \cdot\}} \text{ est une fonction indicatrice.}$$
2. Transformer l'échantillon de données en variables pseudo-uniformes :  

$$\widehat{u}_t = (\widehat{u}_{1t}, \dots, \widehat{u}_{nt}) = [\widehat{F_1(x_1)}, \dots, \widehat{F_n(x_n)}], \text{ où } t \in \{1, \dots, T\}.$$
3. Estimer  $\Theta$  avec la méthode du maximum de vraisemblance en maximisant  

$$\sum_{t=1}^T \ln c_\Theta(\widehat{u}_t; \Theta), \text{ où } \Theta \text{ est l'ensemble des paramètres de la copule } C_\Theta \text{ et } c \text{ la}$$
 dérivée partielle mixte de dimension  $n$  de la copule  $C_\Theta$  (voir équation 3.5).

Il est à noter que dans le cas d'un portefeuille composé de  $n = 100$  éléments, il y a alors  $\frac{n(n-1)}{2} = 4950$  paramètres à estimer pour la matrice  $\Theta$  dans le cas gaussien et 100 paramètres dans le cas du modèle à un facteur gaussien. Dans le cas d'une copule ayant un nombre supérieur de paramètres libres à estimer, le degré de complexité



est encore plus élevé. Ainsi, malgré le fait que la méthode à un facteur a permis de réduire la dimension des paramètres à estimer, cet exercice de calibration demeure ardu à partir des données observées.

### Calibration implicite de la copule

Tel que mentionné précédemment, un compromis pratique utilisée en industrie est de résumer l'ensemble de l'information liée à cette matrice de covariance à une seule constante  $\rho_i = \rho$  pour  $i = 1, \dots, n$  dans le cas du modèle à un facteur gaussien. Cette constante  $\rho$  est alors appelée corrélation implicite par analogie à la volatilité implicite du modèle Black-Scholes pour la valorisation des option européennes ; elle est en effet calculée implicitement, de façon à ce que le prix théorique de la tranche la plus risquée (*equity*) corresponde au prix observé sur les marchés pour une période donnée. Cette valeur de corrélation peut alors être utilisée comme paramètre estimé pour une valorisation future. Dans le cas des autres modèles à facteur non-gaussien, le même procédé de calibration est utilisé ; les paramètres de dépendances sont posés constants pour l'ensemble des crédits du portefeuille et sont également estimés de façon à reproduire le prix de la tranche la plus risquée. Cette façon de faire permet également de comparer les différents modèles entre eux. Elle est utilisée dans le cadre de ce mémoire.

## 4.2 Méthode de calcul par Monte-Carlo

Cette méthode permet de générer des scénarios de temps de défauts nécessaires au calcul des pertes pour une tranche donnée. Des temps de défauts, cohérents avec les données du marché des CDS, sont simulés à partir d'une distribution de type copule qui permet d'induire la dépendance désirée.

### 4.2.1 Simulation des instants de défauts : modèle général

La simulation des temps de défauts implique, d'une part, de construire des courbes de crédit afin d'extraire les probabilités de défauts pour chaque élément  $i$  du portefeuille à partir des prix CDS observés sur le marché. D'autre part, à partir d'une copule de son choix dont les paramètres de dépendance sont estimés, il est possible d'échantillonner des observations dans le but de simuler des événements de défauts aléatoires. Ainsi, connaissant les marges  $F_i = F_i^{cds}$  des temps de défauts, et à partir d'une copule  $C$  connue permettant de générer des observations  $U = u_1, \dots, u_n$ , il est possible d'obtenir les temps de défauts tel que défini à la section 3.2.2 :

$$\tau_i = F_i^{-1}(1 - u_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.1)$$

De plus, en posant les hypothèses simplificatrices que le taux de hasard  $h_i$  et le taux de recouvrement sont constants, le temps de défaut de l'équation peut alors s'exprimer selon  $\tau_i = -\frac{\ln(u_i)}{h_i}$  (l'équation 3.31), où  $h_i$  est donné par  $h_i = \frac{s_i^{cds}}{1-Rc_i}$  (équation 3.30). Comme référence pour les méthodes de simulation des copules, on peut consulter [6].

### 4.2.2 Simulation des temps de défauts : modèle à un facteur gaussien

En définissant le seuil de déclenchement stochastique par  $U_i = 1 - \Phi(X_i)$ , les temps de défaut sont alors donnés selon

$$\tau_i = F_i^{-1}(\Phi(X_i)), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.2)$$

où  $\Phi$  est une fonction de répartition du v.a. normale standard et  $X_i = \rho_i V + \sqrt{1 - \rho_i^2} V_i$  est défini selon l'équation 3.46.

#### Échantillonnage à partir d'une copule gaussienne

Voici la procédure pour générer des échantillons aléatoires à partir de la copule  $C^{gauss}$  de corrélation  $\rho$  de dimension  $n$ .

1. Générer  $n+1$  variables gaussiennes indépendantes :  $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \sim N(0, 1)$  ;

2. Calculer les  $x_i = \rho_i z_{n+1} + \sqrt{(1 - \rho_i^2)} z_i$  ;
3. Transformer le vecteur gaussien  $X_i$  en vecteur de loi uniforme sur  $[0, 1]$  selon  $u_i = \Phi(x_i)$ .

Un vecteur  $u = (u_1, \dots, u_n) \sim C^{gauss}$  est alors généré.

#### 4.2.3 Simulation des instants de défauts : modèle à deux facteurs Student-t

En définissant le seuil de déclenchement stochastique par  $U_i = 1 - t_\nu(X_i)$ , les temps de défaut sont alors donnés selon

$$\tau_i = F_i^{-1}(t_\nu(X_i)), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.3)$$

où  $t_\nu$  est une fonction de répartition du v.a. Student-t avec  $\nu$  degrés de liberté et  $X_i = \sqrt{(\nu/W)}(\rho_i V + \sqrt{1 - \rho_i^2} V_i)$  est défini selon l'équation 3.62.

#### Échantillonnage à partir d'une copule Student-t

Voici la procédure pour générer des échantillons aléatoires à partir de la copule  $C^{Student_t}$  de corrélation  $\rho$ ,  $\nu$  degrés de liberté et de dimension  $n$ .

1. Générer  $n+1$  variables gaussiennes indépendantes :  $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \sim N(0, 1)$  ;
2. Calculer les  $x_i^* = \rho_i z_{n+1} + \sqrt{(1 - \rho_i^2)} z_i$  ;
3. Générer une v.a. tel que  $s \sim \chi_\nu^2$  ;
4. Calculer les  $x_i = (\sqrt{(\nu/s)}) x_i^*$  ;
5. Transformer le vecteur  $X_i$  en vecteur de loi uniforme sur  $[0, 1]$  selon  $u_i = \Phi(x_i)$ .

Un vecteur  $u = (u_1, \dots, u_n) \sim C^{Student}$  est alors généré.



#### 4.2.4 Simulation des instants de défauts : modèle à un facteur Clayton et Gumbel

En définissant le seuil de déclenchement stochastique par  $U_i = 1 - X_i$ , les temps de défaut sont alors donnés selon

$$\tau_i = F_i^{-1}(X_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.4)$$

où  $X_i = \varphi^{-1}(-\frac{\ln(V_i)}{V})$  est défini selon l'équation 3.76.

##### Échantillonnage à partir d'une copule de Clayton

Voici la procédure pour générer des échantillons aléatoires à partir de la copule  $C^{Clayton}$  de paramètre  $\theta > 0$  et de dimension  $n$ .

1. Générer une v.a.  $\gamma \sim \text{Gamma}(1/\theta)$ ;
2. Générer  $n$  variables indépendantes uniformes tel que  $u_i \sim U[0, 1]$ ;
3. Calculer les  $x_i = \varphi^{-1}(-\frac{\ln(u_i)}{\gamma})$ , tel que  $\varphi^{-1}(s) = (1 + s)^{-1/\theta}$ ;
4. Poser  $u_i = x_i$  puisque les  $X_i$  sont des v.a. de distribution uniforme.

Un vecteur  $u = (u_1, \dots, u_n) \sim C^{Clayton}$  est alors généré.

##### Échantillonnage à partir d'une copule de Gumbel

Voici la procédure pour générer des échantillons aléatoires à partir de la copule  $C^{Gumble}$  de paramètre  $\theta > 1$  et de dimension  $n$ .

1. Générer une v.a.  $\gamma \sim \text{Stable standard}$  de paramètre  $\alpha = 1/\theta$ ;
2. Générer  $n$  variables indépendantes uniformes tel que  $u_i \sim U[0, 1]$ ;
3. Calculer les  $x_i = \varphi^{-1}(-\frac{\ln(u_i)}{\gamma})$ , tel que  $\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{\frac{1}{\theta}})$ ;
4. Poser  $u_i = x_i$  puisque les  $X_i$  sont des v.a. de distribution uniforme.

Un vecteur  $u = (u_1, \dots, u_n) \sim C^{Gumble}$  est alors généré.

Une procédure commune utilisée pour générer un échantillon aléatoire de loi Stable standard de paramètre  $\alpha$  est la suivante (voir comme référence [43]) :

1. Générer une v.a.  $v$  uniforme sur  $[0, \pi]$  ;
2. Générer une v.a.  $W$  exponentielle de moyenne égale à 1 ;
3. Poser  $\alpha = 1/\theta$  ;
4. Calculer  $z = \frac{\sin((1-\alpha)v) * \sin(\alpha v)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\sin(v)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$  ;
5. Calculer  $\gamma = (z/W)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ .

#### 4.2.5 Simulation des instants de défauts : modèle à un facteur Marshall-Olkin

En définissant le seuil de déclenchement stochastique par  $U_i = \exp(-X_i)$ , les temps de défaut sont alors donnés selon

$$\tau_i = S_i^{-1}(X_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.5)$$

où  $X_i = \min(V_i, V)$  est défini selon l'équation 3.85.

#### Échantillonnage à partir d'une copule de Marshall-Olkin

Voici la procédure pour générer des échantillons aléatoires à partir de la copule  $C^{MO}$  de paramètre  $\alpha$  et de dimension  $n$ .

1. Générer  $n$  v.a. aléatoires  $v_i$  indépendantes de distribution exponentielle et de paramètres  $\lambda_i$ , où  $\lambda_i = (1 - \alpha)$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $\lambda_i = \alpha$  pour  $i = n + 1$ .
2. Calculer les  $x_i = \min(v_i, v_{n+1})$
3. Transformer le vecteur  $X_i$  en vecteur de loi uniforme sur  $[0, 1]$  selon  $u_i = \exp(-x_i)$ .

Un vecteur  $u = (u_1, \dots, u_n) \sim C^{MO}$  est alors généré.

### 4.2.6 Simulation des instants de défauts : modèle à un facteur NIG

En définissant le seuil de déclenchement stochastique par  $U_i = 1 - F_{NIG(s)}(X_i)$ , les temps de défaut sont alors donnés selon

$$\tau_i = F_i^{-1}(F_{NIG(s)}(X_i)), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.6)$$

où  $F_{NIG(s)} = F_{NIG}(x; s\alpha, s\beta, -s\frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}}, s\alpha)$  est une fonction de répartition d'une v.a. NIG de paramètre  $s = \frac{1}{\rho_i}$  et  $X_i = \rho_i V + \sqrt{1 - \rho_i^2} V_i$  est défini selon l'équation 3.71.

### Échantillonnage à partir d'une copule NIG

Voici la procédure pour générer des échantillons aléatoires à partir de la copule  $C^{NIG}$  de paramètre  $a$  et de dimension  $n$ .

1. Générer  $n + 1$  variables NIG indépendantes :  $z = (z_1, \dots, z_n) \sim NIG(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho})$  et  $z_{n+1} \sim NIG(1)$ .
2. Calculer les  $x_i = \rho_i z_{n+1} + \sqrt{1 - \rho_i^2} z_i$
3. Transformer le vecteur gaussien  $X_i$  en vecteur de loi uniforme sur  $[0, 1]$  selon  $u_i = F_{NIG(\frac{1}{\rho_i})}(x_i)$ .

Un vecteur  $u = (u_1, \dots, u_n) \sim C^{NIG}$  est alors généré.

### 4.2.7 Algorithme de valorisation

Tous les éléments sont maintenant réunis afin de calculer le prix juste  $s^{(K_1, K_2)}$  d'une tranche d'un CDO (d'échéance  $T$  sur un intervalle de pertes  $[K_1, K_2]$ ) selon l'équation 3.143 par la méthode de Monte-Carlo. Cette méthode permet essentiellement de calculer, par simulation, les espérances  $\mathbf{E}[L_{t_i}^{(K_1, K_2)}]$  définies selon l'équation 3.146 pour  $t_i, i = 1, \dots, M$ , où  $T = t_M$  représente la durée de vie du CDO.

Voici les différentes étapes pour évaluer le prix d'un CDO pour un portefeuille composé de  $n$  crédits :



1. Choisir un modèle à un ou plusieurs facteurs lié à une copule  $C_s$  ;
2. Calibrer les paramètres de dépendance selon la méthode implicite présentée ;
3. Construire  $n$  courbes de crédit (marges  $F_i^{cds}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) selon 3.26 ;
4. Pour chaque scénario simulé  $j = (1, \dots, K)$  :
  - (a) Générer des événements aléatoires de la copule  $C_s$  tel que  $u = (u_1, \dots, u_n)$  ;
  - (b) Trouver les  $n$  temps de défauts associés à chacun des crédits :  $\tau_i = F_i^{-1}(u_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  à partir de l'équation 4.1 ;
  - (c) Calculer la fonction  $L_{t_i}^{(K_1, K_2)}(j)$  selon l'équation 3.145, pour  $t_i, i = 1, \dots, M$  ;
5. Calculer  $E[L_{t_i}^{(K_1, K_2)}] = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K L_{t_i}^{(K_1, K_2)}(j)$ , pour  $t_i, i = 1, \dots, M$  ;
6. Calculer le prix juste  $s^{(K_1, K_2)}$  selon 3.143.

### 4.3 Méthode de calcul semi-analytique par transformée de Fourier pour un modèle à un facteur

Ce modèle consiste à calculer indirectement la fonction de densité  $f_{L_t}$  de la fraction des pertes  $L_t$  (voir équation 3.133) du portefeuille, sous un modèle à un facteur, en utilisant la notion de fonction caractéristique d'une v.a.

La fonction caractéristique d'une v.a.  $X$ , ayant une fonction de densité  $f_X$ , est donnée par

$$\Phi_X(\omega) = E[\exp^{-j\omega X}] \quad (4.7)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \exp^{-j\omega x} dx, \quad (4.8)$$

où  $j = \sqrt{-1}$  est un nombre imaginaire.  $\Phi_X(\omega)$  est alors défini comme la transformée de Fourier de la fonction de densité  $f_X(x)$ . La transformée inverse de Fourier de  $\Phi_X(\omega)$  est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega) \exp^{j\omega x} d\omega. \quad (4.9)$$

Par conséquent, de façon générale, chaque fonction  $X$  possède sa propre fonction caractéristique qui, comme son nom l'indique, caractérise la loi de la v.a.  $X$ .

A titre de rappel, la fraction des pertes pour les  $n$  crédits du portefeuille s'exprime par

$$L(t) = \frac{(1 - Rc)}{N_p} \sum_{i=1}^n A_i I_i(t), \quad (4.10)$$

où  $N_p$  est la valeur nominale du portefeuille,  $A_i$  la valeur nominale de l'élément  $i$  du portefeuille,  $Rc_i$  son taux de recouvrement et  $I_i(t)$  une fonction indicatrice telle que  $I_i(t) = \mathbf{1}_{\tau_i < t}$  au temps  $t$  liée au crédit  $i$ .

Ainsi, sous un modèle à un facteur choisi, la transformée de Fourier de la fonction de densité de  $L_t$ , étant donné le facteur commun  $V$ , s'exprime par

$$\Phi_{L_t|V}(\omega) = E[\exp^{-j\omega L_t} | V]. \quad (4.11)$$

En posant, afin d'alléger les calculs,  $Rc_i = 1$  et  $N_p = 1$ , alors

$$\Phi_{L_t|V}(\omega) = E[\exp^{-j\omega L_t} | V] \quad (4.12)$$

$$= E[\exp^{-j\omega[A_1 I_1(t), \dots, A_n I_n(t)]} | V]. \quad (4.13)$$

De plus, puisque les temps de défaut sont indépendants, conditionnellement au facteur commun  $V$ , alors

$$\Phi_{L_t|V}(\omega) = \prod_{i=1}^n E[\exp^{-j\omega A_i I_i(t)} | V]. \quad (4.14)$$

Par la définition de l'espérance, on obtient

$$E[\exp^{-j\omega A_i I_i(t)} | V] = [\exp^{-j\omega A_i(1)} p_t^{i|V}] + [\exp^{-j\omega A_i(0)} q_t^{i|V}], \quad (4.15)$$

et

$$\Phi_{L_t|V}(\omega) = \prod_{i=1}^n \{[\exp^{-j\omega A_i(1)}] p_t^{i|V} + [\exp^{-j\omega A_i(0)}] q_t^{i|V}\}, \quad (4.16)$$

où  $q_t^{i|V}$ ,  $p_t^{i|V}$  représentent respectivement les probabilités de survie et de défaut conditionnelle à  $V$  déterminées selon le modèle à un facteur choisi. Ces expressions ont été développées au chapitre précédent pour différents modèles à un facteur (gaussien, NIG, double-t, Marshall-Olkin, Clayton).

Par la propriété de la probabilité totale, en intégrant sur toutes les valeurs possibles du facteur commun  $V$ , la transformée de Fourier de la fonction de densité de  $L_t$  non-conditionnelle s'exprime selon

$$\Phi_{L_t}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n [1 + q_t^{i|V} (\exp^{-j\omega A_i} - 1)] f_V(v) dv, \quad (4.17)$$

où  $f_V$  est la fonction de densité de  $V$ .

Finalement, la fonction de densité de  $L_t$  ( $f_{L_t}$ ) est déterminée en calculant numériquement la transformée inverse de Fourier de  $\Phi_{L_t}(\omega)$ . Comme référence, le document technique suivant (*The Fourier Transform Method*, [9]), préparé par Moody's Investors Service présente des aspects techniques, théoriques et pratiques de cette méthode par transformée de Fourier (FFT) pour les dérivés sur crédit.

#### 4.3.1 Algorithme de valorisation

Tous les éléments sont maintenant réunis afin de calculer le prix juste  $s^{(K_1, K_2)}$  d'une tranche d'un CDO (d'échéance  $T$  sur un intervalle de pertes  $[K_1, K_2]$ ) selon l'équation 3.143 par la méthode de calcul semi-analytique par transformée de Fourier. Cette méthode permet essentiellement de calculer, par intégrale numérique et transformée inverse de Fourier, la fonction de densité de la fraction des pertes. Les espérances  $\mathbf{E}[L_{t_i}^{(K_1, K_2)}]$  définies selon l'équation 3.149 peuvent alors être évaluée pour  $t_i, i = 1, \dots, M$ , où  $T = t_M$ .

Voici les différentes étapes pour évaluer le prix d'un CDO pour un portefeuille composé de  $n$  crédits :

1. Choisir un modèle à un ou plusieurs facteurs lié aux probabilités  $q_t^{i|V}$ ,  $p_t^{i|V}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
2. Calibrer les paramètres de dépendance selon la méthode implicite présentée;
3. Construire  $n$  courbes de crédit (marges  $F_i, i \in \{1, \dots, n\}$ ) selon 3.26;
4. Pour chaque temps  $t_i, i = 1, \dots, M$  durant la durée de vie  $T = t_M$  du CDO ;
  - (a) Calculer  $\Phi_{L_{t_i}}(\omega_j)$  selon 4.17 par intégrale numérique, pour chaque pas  $\omega_j$  de la transformée de Fourier de résolution  $\text{ResF}$ ,  $\omega_j, j = 0, \dots, \text{ResF}/2$ ;



- (b) Calculer la fonction de densité (discrète) de la fraction des pertes ( $f_{L_{t_i}}$ ) par transformée inverse de Fourier (algorithme FFT inverse) du vecteur obtenu  $[\Phi_{L_{t_i}}(\omega_0), \dots, \Phi_{L_{t_i}}(\omega_{ResF/2-1}), \overline{\Phi_{L_{t_i}}(\omega_0)}, \dots, \overline{\Phi_{L_{t_i}}(\omega_{ResF/2-1})}]$ ;
  - (c) Dédire la fonction de répartition discrète  $F_{L_{t_i}}$ ;
  - (d) Calculer  $\mathbf{E}[L_{t_i}^{(K_1, K_2)}]$  selon l'équation 3.149;
5. Calculer le prix juste  $s^{(K_1, K_2)}$  selon 3.143.

#### 4.4 Méthode de calcul par l'approximation du large portefeuille homogène (LHP)

Ce modèle suppose que les  $n$  crédits du portefeuille sont homogènes, de valeur nominale  $A$  et de taux de recouvrement constant  $R_c$ . De plus, sous l'hypothèse d'un modèle à un facteur (les temps de défaut ( $\tau_i < t$ ) sont indépendants conditionnellement au facteur commun  $V$ ), les paramètres de défaut sont posés constants pour l'ensemble du portefeuille. La probabilité conditionnelle de défaut  $p_t^{i|V} = Q(\tau_i \leq t | V)$  est donc la même pour l'ensemble des éléments du portefeuille ( $p_t^{i|V} = p_t(V)$ ). La fraction des pertes totales du portefeuille  $L(t)$  (équation 3.133) pour un temps  $t$  durant la durée du CDO est donnée par

$$L(t) = \frac{A(1 - R_c)}{N_p} \sum_{i=1}^n I_i(t), \quad (4.18)$$

où  $I_i(t) = \mathbf{1}_{\tau_i < t}$ ,  $i = (1, \dots, n)$  sont des fonctions indicatrices indépendantes conditionnellement au facteur  $V$ .

$L(t)$  est donc formée de la somme de  $n$  v.a. de type Bernouilli, où l'événement du succès correspondant à un défaut de probabilité  $p_t(V)$ . Et par définition,  $L(t)$  est une v.a. binomiale de probabilité  $p_t(V)$ . La probabilité conditionnelle que la fraction des pertes  $L(t)$  soit égale à  $L_k = \frac{k}{n}(1 - R_c)$  correspondant alors à la probabilité que  $k$  parmi  $n$  crédits soient en défaut.

$$P[L(t) = L_k] = \binom{n}{k} p_t(V)^k (1 - p_t(V))^{n-k}. \quad (4.19)$$

Et la probabilité inconditionnelle de la fraction des pertes, en intégrant sur le facteur commun  $V$ , par

$$P[L(t) = L_k] = \binom{n}{k} \int_0^{\infty} p_t(V)^k (1 - p_t(V))^{n-k} f_V dv, \quad (4.20)$$

où  $f_V$  est la fonction de densité du facteur commun  $V$ . La fonction de répartition de la fraction des pertes est directement donnée par

$$F_{L_t}^n(l) = \sum_{k=1}^{[nl]} P[L(t) = L_k]. \quad (4.21)$$

#### 4.4.1 Approximation du large portefeuille homogène

L'hypothèse du large portefeuille homogène permet d'éviter de calculer l'intégrale pour évaluer 4.20 en utilisant l'approximation de Vasicek lorsque le nombre de crédits dans le portefeuille est très large ( $n \rightarrow \infty$ ). Dans le cadre du modèle à un facteur, l'hypothèse du large portefeuille homogène permet de justifier que conditionnellement à la réalisation d'un événement pour le facteur commun ( $V = v$ ), la portion des pertes du portefeuille  $L(t)$  est alors donnée par  $p_t(v)$  car, pour  $\forall \varepsilon > 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$P[|L(t) - p_t(v)| > \varepsilon | V = v] \rightarrow 0. \quad (4.22)$$

Cette approximation revient alors à calculer  $F_{L_t}^n(l) \approx F_{L_t}^\infty(l)$ , c'est-à-dire,

$$F_{L_t}^\infty(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} P[L_t \leq l] = P[p_t(V) \leq l], \quad (4.23)$$

où  $l$  est la fraction des pertes du portefeuille.

#### Calcul de $F_{L_t}^\infty$ , cas du modèle à un facteur gaussien

Puisque selon 3.61,

$$p_t(V) = \Phi\left(\frac{K - \rho V}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right), \quad (4.24)$$

$F_{L_t}^\infty$  est alors donnée par

$$\mathbf{Q}[p_t(V) \leq l] = \mathbf{Q}\left[\Phi\left(\frac{K(t) - \rho V}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \leq l\right] \quad (4.25)$$

$$= \mathbf{Q}\left[V \leq \frac{\sqrt{1 - \rho^2}\Phi^{-1}(l) - K(t)}{\rho}\right] \quad (4.26)$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{1 - \rho^2}\Phi^{-1}(l) - K(t)}{\rho}\right). \quad (4.27)$$

où  $K(t) = \Phi^{-1}(F^{cds}(t))$  et  $F^{cds}$  est la fonction de survie individuelle obtenue à partir des prix observés sur le marché des CDS liés au portefeuille.

### Calcul de $F_{L_t}^\infty$ , cas du modèle à un facteur NIG

De façon similaire au modèle à un facteur gaussien, selon 3.73,

$$p_t(V) = F_{NIG(a)}\left[\frac{K(t) - \rho V}{\sqrt{(1 - \rho^2)}}\right]. \quad (4.28)$$

$F_{L_t}^\infty$  est alors donnée par

$$\mathbf{Q}[p_t(V) \leq l] = \mathbf{Q}\left[F_{NIG(a)}\left[\frac{K(t) - \rho V}{\sqrt{(1 - \rho^2)}}\right] \leq l\right] \quad (4.29)$$

$$= \mathbf{Q}\left[V \leq \frac{\sqrt{1 - \rho^2}F_{NIG(a)}^{-1}(l) - K(t)}{\rho}\right] \quad (4.30)$$

$$= F_{NIG(1)}\left(\frac{\sqrt{1 - \rho^2}F_{NIG(a)}^{-1}(l) - K(t)}{\rho}\right), \quad (4.31)$$

où  $a = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho}$  et  $K(t) = F_{NIG(1/\rho)}^{-1}(F^{cds}(t))$ .

### Calcul de $F_{L_t}^\infty$ , cas du modèle à un facteur gaussien stochastique

Selon 3.103,

$$p_t(V) = \mathbf{Q}\left(V_i \leq \frac{K(t) - a(V)V - \kappa}{\nu}\right), \quad (4.32)$$

où

$$a(V) = \begin{cases} \sqrt{a}, & \text{si } V \leq \theta; \\ \sqrt{b}, & \text{si } V > \theta; \end{cases} \quad (4.33)$$



$F_{L_t}^\infty = 1 - \mathbf{Q}[p_t(V) > l]$ , où selon Andersen et Sidenius [2],

$$\mathbf{Q}[p_t(V) > l] = \mathbf{Q}\left[\frac{K(t) - a(V)V - \kappa}{\nu} > \Phi^{-1}(l)\right] \quad (4.34)$$

$$= \mathbf{Q}[a(V)V \leq K(t) - \kappa\Phi^{-1}(l) - \nu] \quad (4.35)$$

En posant  $\Omega(l) = K(t) - \kappa\Phi^{-1}(l) - \nu$ , où  $K(t)$  est calculé selon 3.109.

$$\mathbf{Q}[p_t(V) > l] = \mathbf{Q}[a(V)V \leq \Omega(l)] \quad (4.36)$$

$$= \mathbf{Q}[a(V)V \leq \Omega(l), V \leq \theta] + \mathbf{Q}[a(V)V \leq \Omega(l), V > \theta] \quad (4.37)$$

$$= \mathbf{Q}[\sqrt{a}V \leq \Omega(l), V \leq \theta] + \mathbf{Q}[\sqrt{b}V \leq \Omega(l), V > \theta] \quad (4.38)$$

$$= \Phi\left(\min\left(\frac{\Omega(l)}{\sqrt{a}}, \theta\right)\right) + 1_{\frac{\Omega(l)}{\sqrt{b}} > \theta}(\Phi\left(\frac{\Omega(l)}{\sqrt{b}}\right) - \Phi(\theta)) \quad (4.39)$$

**Calcul de  $F_{L_t}^\infty$ , cas du modèle à un facteur NIG stochastique**

Par symétrie avec le modèle à un facteur gaussien stochastique,

$F_{L_t}^\infty = 1 - \mathbf{Q}[p_t(V) > l]$ , où selon A. Luscher dans [37],

$$\mathbf{Q}[p_t(V) > l] = \mathbf{Q}\left[\frac{K(t) - a(V)V - \kappa}{\nu} > F_{NIG(c)}^{-1}(l)\right] \quad (4.40)$$

$$= \mathbf{Q}[a(V)V \leq K(t) - \kappa F_{NIG(c)}^{-1}(l) - \nu]. \quad (4.41)$$

En posant  $\Omega(l) = K(t) - \kappa F_{NIG(c)}^{-1}(l) - \nu$ , où  $K(t)$  est calculé selon 3.129 et  $c = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}}$ ,  
 $c = \frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{b}}$

$$\mathbf{Q}[p_t(V) > l] = \mathbf{Q}[a(V)V \leq \Omega(l)] \quad (4.42)$$

$$= \mathbf{Q}[a(V)V \leq \Omega(l), V \leq \theta] + \mathbf{Q}[a(V)V \leq \Omega(l), V > \theta] \quad (4.43)$$

$$= \mathbf{Q}[\sqrt{a}V \leq \Omega(l), V \leq \theta] + \mathbf{Q}[\sqrt{b}V \leq \Omega(l), V > \theta] \quad (4.44)$$

$$= F\left(\min\left(\frac{\Omega(l)}{\sqrt{a}}, \theta\right)\right) + 1_{\frac{\Omega(l)}{\sqrt{b}} > \theta}(F\left(\frac{\Omega(l)}{\sqrt{b}}\right) - F(\theta)), \quad (4.45)$$

où  $F = F_{NIG(1)}$  et  $F_{NIG(s)} = F_{NIG}(x; s\alpha, s\beta, -s\frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}}, s\alpha)$ .

## 4.5 Algorithme de valorisation

Tous les éléments sont maintenant réunis afin de calculer le prix juste  $s_{(K_1, K_2)}$  d'une tranche d'un CDO (d'échéance  $T$  sur un intervalle de pertes  $[K_1, K_2]$ ) selon

l'équation 3.143 par la méthode de calcul de l'approximation du large portefeuille homogène LHP. Cette méthode permet essentiellement de calculer, analytiquement, la fonction de répartition de la fraction des pertes ( $F_{L_{t_i}}$ ). Les espérances  $\mathbf{E}[L_{t_i}^{(K_1, K_2)}]$ , définies selon l'équation 3.149, peuvent alors être évaluée pour  $t_i, i = 1, \dots, M$ , où  $T = t_M$ .

Voici les différentes étapes pour évaluer le prix d'un CDO pour un portefeuille composé de  $n$  crédits :

1. Choisir un modèle à un ou plusieurs facteurs lié aux probabilités  $q_t^{i|V}, p_t^{i|V}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  ;
2. Calibrer les paramètres de dépendance selon la méthode implicite présentée ;
3. Construire  $n$  courbes de crédit (marges  $F_i, i \in \{1, \dots, n\}$ ) selon 3.26 ;
4. Pour chaque temps  $t_i, i = 1, \dots, M$  durant la durée de vie  $T = t_M$  du CDO ;
  - (a) Calculer la fonction de répartition de la fraction des pertes ( $F_{L_{t_i}}$ ) par l'approximation de Vasicek ;
  - (b) Calculer  $\mathbf{E}[L_{t_i}^{(K_1, K_2)}]$  selon l'équation 3.149
5. Calculer le prix juste  $s^{(K_1, K_2)}$  selon 3.143.

## Chapitre 5

### Comparaison numérique des modèles et des méthodes de calcul

#### 5.0.1 Description des données

En raison de la liquidité et de la disponibilité des données, les tranches de CDO valorisées dans cette section sont basées sur l'indice iTraxx Europe. Les figures 5.1 et 5.2 résument les principales caractéristiques de cet indice ainsi que des tranches de CDO associées.

Indice Markit iTraxx Europe	Tranches Markit iTraxx- Europe
125 entités de type investissement « investment grade »	
<b>Industries :</b> Automobiles : 8%; Consommateur : 24% ; Énergie : 16%; Finance : 20%; Industriel : 16%; Techno./Média/Télécoms. : 16%	0-3% : Equity 3-6% : Mezzanine-Junior 6-9% : Mezzanine-Senior 9-12% : Senior (Junior) 12-22% : Super Senior
<b>Principaux Pays :</b> Grande-Bretagne, Allemagne, France <b>Échéances (ans) :</b> 3, 5, 7 et 10 <b>Roulement :</b> 20 mars, 20 septembre	

Fig. 5.1: Caractéristiques de l'indice Markit iTraxx Europe.



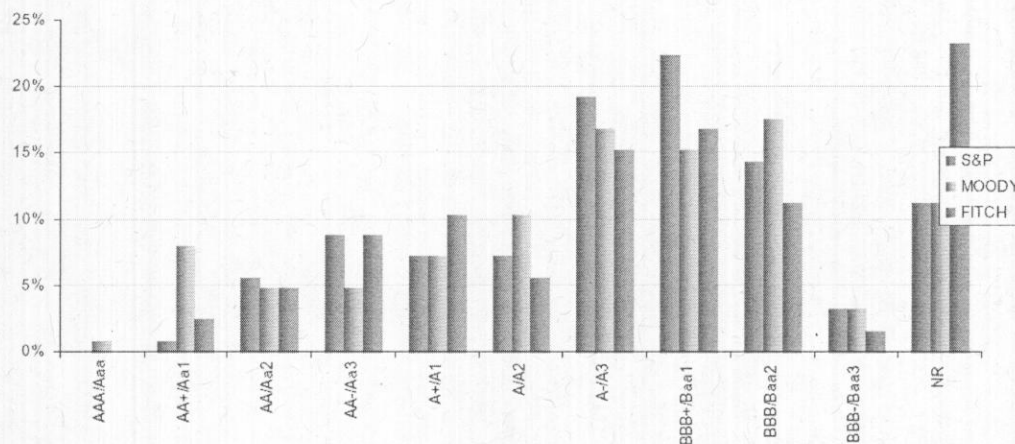


Fig. 5.2: Cote de crédit des entités selon Markit group.

Les données utilisées sont extraites du redifuseur de données Bloomberg pour la période allant du 21 septembre 2007 au 16 juin 2008 (série 8), durant la crise des crédits hypothécaires (*subprimes*). Une série de données journalières, correspondant au meilleur cours moyen (acheteur/vendeur) en fin de journée, est obtenue pour l'indice principal et pour chacune des tranches standardisées associées à ce dernier pour les échéances 5, 7 et 10 ans.

Le graphique 5.3 illustre l'évolution des primes négociées sur ces produits, reflétant la perception du risque des investisseurs crédit sur le marché européen. L'échelle de l'ordonnée de gauche est exprimée en point de base (bps) pour toutes les tranches à l'exception de la tranche *equity* (0–3%) qui est plutôt exprimée en pourcentage de la valeur notionnelle initiale du portefeuille (*upfront fees*) selon l'échelle de droite. Pour l'indice principal, on peut observer sur ce marché une situation relativement stable au mois d'octobre 2007, une détérioration graduelle atteignant son sommet au mois de mars 2008 suite à la quasi-faillite du géant américain de la finance Bear Sterns et une stabilisation graduelle au mois de juin 2008. Trois dates (2007-10-15, 2008-03-17 et 2008-06-16), en lien avec ces périodes, ont été choisies comme données pour les exemples numériques.

Ainsi, les tranches *mezzanine* et *senior* sont cotées en fonction d'une prime  $s^{(K_1, K_2)}$

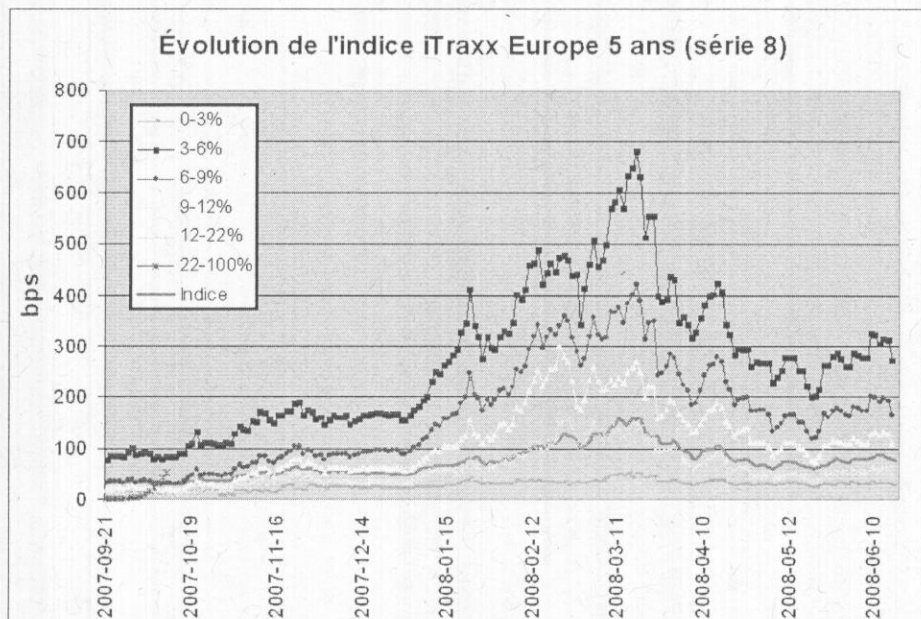


Fig. 5.3: Indice iTraxx Europe-5ans, série-8.

exprimée en point de base (bps) et dont le prix théorique est fourni selon l'équation 3.143. Pour la tranche *equity*, le prix est plutôt coté selon un versement de paiement initial (exprimé en % du montant notionnel initial  $N_{tr}$ ) et une prime fixe (*running spread*) de 500 bps. Le prix théorique de ce paiement initial (*up front fee*) est alors donné selon

$$V_{pri}(0)^{upfront} = V_{pri}(0) + upfront * N_{tr}. \quad (5.1)$$

Le prix juste est finalement calculé en isolant *upfront* tel que  $V_{pri}(0)^{upfront} = V_{prot}(0)$ , avec  $s^{(K_1, K_2)} = 500$  bps,  $V_{prot}(0)$  donné selon (3.142) et  $V_{pri}(0)$  donné selon 3.137.

Pour les tranches standardisées, les valeurs des primes varient conformément avec l'indice principal. La corrélation linéaire (coefficient de corrélation linéaire au carré) entre chacune des tranches et l'indice principal est la suivante :  $[0, 3\%]$  : 84%,  $[3, 6\%]$  : 96.0%,  $[6, 9\%]$  : 95%,  $[9, 12\%]$  : 93%,  $[12, 22\%]$  : 94%. On peut observer que toutes les tranches, sauf *equity*, sont fortement corrélées avec l'indice principal ; la corrélation plus faible avec la tranche *equity* (84%) pourrait par exemple s'expli-

quer par l'exécution, de la part de fonds de couverture (*hedge funds*), de stratégies locales sur cette tranche, causant de façon ponctuelle une dynamique offre/demande différente. Quant à la variation maximale des primes sur les tranches durant la période étudiée, elle est la suivante :  $[0, 3\%] : 531\%$ ,  $[3, 6\%] : 790\%$ ,  $[6, 9\%] : 1318\%$ ,  $[9, 12\%] : 1583\%$ ,  $[12, 22\%] : 1393\%$ . Les primes des tranches supérieures ont en effet subi une plus grande variation que ceux des tranches plus risquées. Cela pourrait s'expliquer par le fait que certains investisseurs se sont retrouvés avec des placements jugés beaucoup plus risqués que prévu (considérant la cote de crédit attribuée) et difficiles à revendre, commandant une prime de risque bien supérieure.

Finalement, pour l'ensemble des modèles analysés, les hypothèses simplificatrices suivantes sont utilisées :

1. Les 125 entités du portefeuille sont homogènes ;
2. Les entités du portefeuille ont la même probabilité de défaut ;
3. La probabilité de défaut est calculée à partir de l'indice iTraxx Europe ;
4. Le taux de recouvrement est fixé selon le taux historique sur les obligations senior non sécurisées : 40% ;
5. Les paramètres de dépendance sont constants pour l'ensemble du portefeuille ;
6. Le taux d'intérêt est fixé constant : 4.5%, en conformité avec les taux (sur l'ensemble de la courbe 3 mois-10 ans) en vigueur en Europe durant cette période ;
7. Le paiement de la prime est effectué sur une base trimestrielle ;
8. Le paiement de défaut survient simultanément au paiement de la prime subséquente la plus rapprochée.

### 5.0.2 Implantation des modèles en Matlab

Tous les modèles implantés ont été programmés en langage Matlab. Quant aux intégrales numériques, elles ont été effectuées à partir de formules de quadrature de Gauss. On peut, comme référence consulter l'annexe-2 du document technique suivant (*The Fourier Transform Method*, [9]). Dans le cadre de ce mémoire, la fonction



gaussd.m, écrite par Per A. Brodtkorb et disponible sur le site de partage de fichiers Mathwork Central, est utilisée pour ces intégrales numériques. De plus, l'ensemble des fonctions statistiques de la distribution NIG, également disponibles sur le site MATLAB Central et écrites par Ralf Werner, sont utilisées pour l'implantation du modèle à un facteur *Normal Inverse Gaussian (NIG)*.

### 5.0.3 Calcul des corrélations implicites et de base

La corrélation de crédit, généralement définie comme le degré de relation entre deux entités de crédit d'un portefeuille, est le paramètre principal dans la valorisation standard des tranches sur indice. En effet, tel que mentionné précédemment, il est commun de coter sur les marchés, simultanément à la valeur de ces tranches, leur corrélation implicite de façon similaire à la volatilité implicite du modèle Black-Scholes pour les options. Ainsi, pour une tranche donnée, un investisseur, qui est un vendeur de protection contre le paiement de primes, peut par exemple comparer sa vision de la corrélation avec la corrélation implicite cotée et par conséquent conclure que cette tranche est sous évaluée ou surévaluée. En industrie, le modèle qualifié de standard est le modèle à un facteur gaussien de type large portefeuille homogène (LHP). Ce modèle est choisi en raison de sa simplicité, où un seul paramètre (la corrélation) doit être estimé pour calculer le prix d'une tranche donnée.

#### Effet de la corrélation sur la distribution des pertes

Comme la valorisation d'une tranche de CDO dépend essentiellement de la distribution des pertes sur le portefeuille sous-jacent, il est par conséquent intéressant d'analyser comment la distribution des pertes pour ce portefeuille varie en fonction du paramètre de corrélation pour le modèle standard. Les graphiques de la figure 5.4 illustre cette situation pour la journée du 16 juin 2008 sur l'indice iTraxx Europe 5 ans. On peut ainsi constater qu'une augmentation de la corrélation signifie que les entités du portefeuille réagissent davantage de façon similaire, augmentant par conséquent le risque de contagion de défaut, alors qu'une corrélation plus faible tend à favoriser

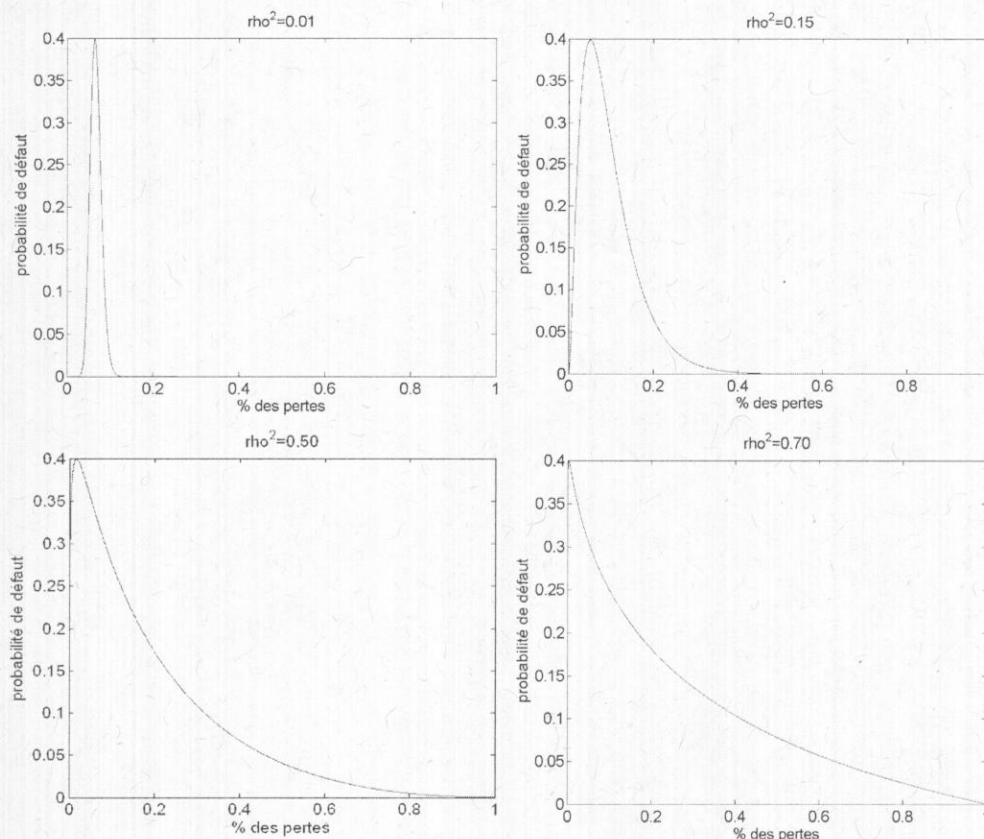


Fig. 5.4: distribution des pertes en fonction de la corrélation

l'apparition de défauts de façon plus isolée. On peut également observer que pour des corrélations de plus en plus élevées, la queue des distributions devient de plus en plus épaisse, augmentant la probabilité de défaut très élevé pour un pourcentage de pertes données. Ainsi, pour des facteurs de corrélation de 1% et 15%, la probabilité que les pertes soient supérieures à 60% de la valeur du portefeuille est nulle, alors que dans le cas d'une corrélation de 50%, cette probabilité n'est plus négligeable. Elle augmente encore davantage pour une corrélation de 70%. Il est toutefois important de mentionner que bien qu'une augmentation de la corrélation augmente le risque de défaut pour des pertes élevées, parallèlement elle diminue la probabilité de défaut pour des pertes plus faibles.

## Effet de la corrélation sur la prime des tranches

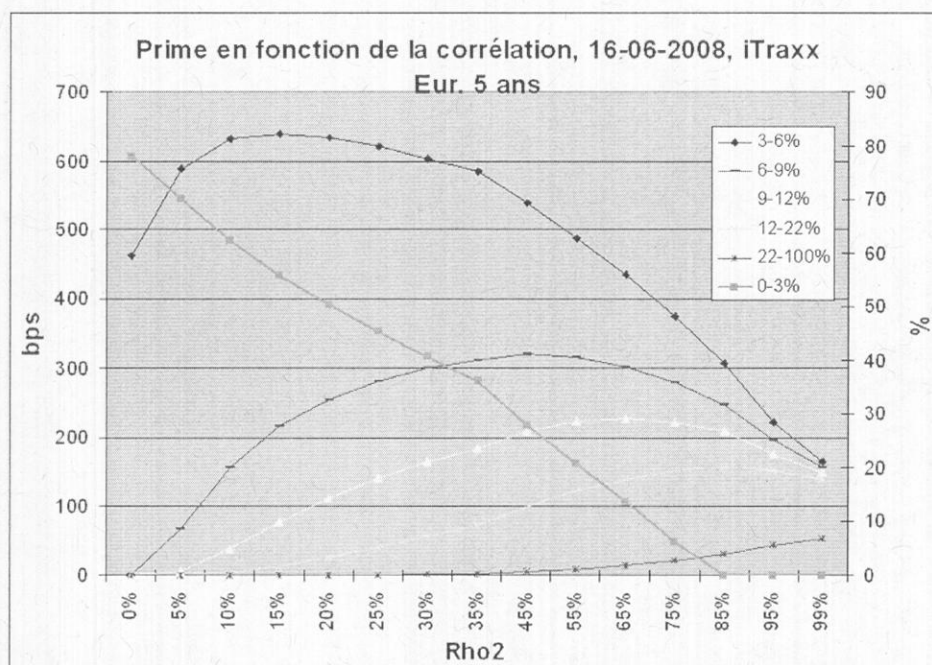


Fig. 5.5: Prime en fonction de la corrélation.

Le graphique 5.5 illustre l'effet spécifique de la corrélation sur chacune des tranches pour la journée du 16 juin 2008 sur l'indice iTraxx Europe 5 ans. Les corrélations implicites calculées à partir des prix du marché sont indiquées à l'aide du symbole carré pour chaque tranche. On peut observer que pour la tranche *equity* (0 – 3%), la valeur de la prime baisse lorsque la corrélation augmente ; alors que pour le tranche *super senior* (22 – 100%) c'est l'inverse qui se produit. Un investisseur sur la tranche *equity* peut par conséquent être considéré comme détenant une position longue sur la corrélation alors qu'un investisseur sur la tranche *super senior* peut plutôt être considéré comme détenteur d'une position courte. Ainsi, conformément aux graphiques de la figure 5.4, l'investisseur sur la tranche *super senior* (absorbant les pertes supérieures à 22%) exigera une prime plus élevée en raison du risque plus élevé sur sa tranche pour une corrélation plus élevée ; alors que le détenteur de la



tranche *equity* (pertes plafonnées à 3%) se verra attribuer une prime moins élevée en raison du risque réduit sur sa tranche. Pour les investisseurs sur les autres tranches intermédiaires, particulièrement pour les tranches *mezzanine junior* (3–6%) et *mezzanine senior* (6–9%), il n'existe toutefois pas de relation monotone semblable. On peut simplement observer que le maximum de la valeur de la prime pour ces tranches est atteint pour des valeurs de corrélation respectives de 15% et 45%, ce qui suppose que ces tranches sont plus à risque pour des corrélations moyennes à moyennes élevées. De plus, pour la tranche (6–9%), deux solutions pour la corrélation implicite sont calculées.

### Effet sourire (*smile*) de la corrélation implicite

Afin d'étudier l'effet sourire (*smile*), la corrélation implicite  $\rho_{k_1, k_2}^2$  a été calculée pour les dates 2007-10-15, 2008-03-17 et 2008-06-16 (échéances de 5, 7 et 10 ans) pour chaque tranche  $[k_1, k_2]$  à partir des prix (primes ou *spreads*) observés sur le marché (voir tableau 5.6). Le tableau 5.7 illustre les résultats obtenus implicitement.

ITRXEB58 Index	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%
2007-10-15	12,4	80,9	29,7	17,8	10,6
2008-03-17	52,5	<b>682,0</b>	<b>421,0</b>	270,4	150,6
2008-06-16	28,4	<b>272,9</b>	<i>167,0</i>	109,5	50,3
ITRXEB78 Index	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%
2007-10-15	18,9	<i>139,3</i>	58,8	31,9	18,8
2008-03-17	58,8	<b>759,2</b>	<b>464,2</b>	<b>312,2</b>	173,6
2008-06-16	36,6	<b>368,0</b>	<i>211,7</i>	131,6	64,3
ITRXEB08 Index	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%
2007-10-15	22,5	<b>323,8</b>	<i>134,5</i>	62,3	31,9
2008-03-17	63,2	<b>881,8</b>	<b>529,3</b>	<b>355,3</b>	<b>187,1</b>
2008-06-16	43,4	<b>515,1</b>	<b>283,4</b>	<b>167,1</b>	83,1

Fig. 5.6: Primes observées pour les échéances 5-7 et 10 ans.

Les résultats identifiés par des caractères en **gras** ne semblent pas cohérents (ils s'éloignent d'ailleurs des résultats historiques et de ceux des tranches adjacentes). Pour les résultats identifiés par des caractères *italiques soulignés*, deux valeurs de

ITRXEB58 Index	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%
2007-10-15	29,00%	11,60%	18,10%	23,90%	33,80%
2008-03-17	43,57%	<b>79,00%</b>	<b>92,00%</b>	4,80%	19,20%
2008-06-16	44,70%	<b>88,30%</b>	<del>1,19%-98%</del>	19,50%	28,00%
ITRXEB78 Index	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%
2007-10-15	34,30%	<del>4,79%-89%</del>	14,00%	28,80%	29,90%
2008-03-17	42,70%	<b>73,00%</b>	<b>88,00%</b>	<b>98,00%</b>	10,80%
2008-06-16	43,50%	<b>80,00%</b>	<del>2,99%-95,59%</del>	10,90%	22,10%
ITRXEB08 Index	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%
2007-10-15	41,75%	<b>52,00%</b>	<del>8,59%-92%</del>	13,50%	23,70%
2008-03-17	42,50%	<b>64,00%</b>	<b>81,00%</b>	<b>96,00%</b>	-
2008-06-16	42,20%	<b>62,00%</b>	<b>85,00%</b>	<b>99,40%</b>	15,70%

Fig. 5.7: Corrélation implicite pour les échéances 5-7 et 10 ans.

corrélation sont obtenues, la solution cohérente (la plus faible) est alors choisie. Les autres résultats, identifiés par des caractères de plus grande taille, sont toutefois jugés cohérents. L'effet *smile* est parfaitement observé uniquement pour la journée du 2007-10-15 avec une échéance de 5 ans (voir graphique 5.8).

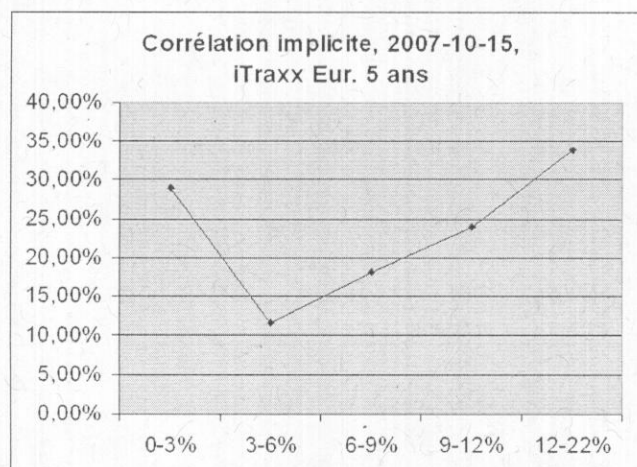


Fig. 5.8: Corrélation implicite.

Cet effet *smile* s'explique principalement par le fait que le modèle standard basé sur la copule gaussienne ne parvient pas à capturer la structure de dépendance in-

duite par les prix cotés sur les tranches, l'hypothèse du modèle étant un taux de corrélation constant sur l'ensemble des tranches. Toutefois, d'autres facteurs peuvent également expliquer cette différence. En effet, une seconde hypothèse souvent citée est la segmentation du marché où chaque joueur s'intéresse spécifiquement à une tranche donnée et a, par conséquent, une opinion spécifique (sur la corrélation) sur ce segment de marché. Les banques et les fonds spéculatifs achètent ainsi généralement la tranche *equity*, les particuliers et les banques d'investissement la tranche *mezzanine* et les compagnies d'assurances la tranche *senior*. Une troisième hypothèse porte sur les conditions de la demande locale ou des facteurs dits techniques. Par exemple pour la période étudiée, caractérisée par la crise des crédits hypothécaires, certains fonds de couverture ont malgré tout parié que le nombre de défauts en Europe n'augmenterait pas. Ces fonds de couverture exécutaient par conséquent des stratégies de type *delta-hedging* en vendant de la protection (récolte d'une grande prime initiale *upfront fee*) sur les tranches *equity* et en achetant simultanément de la protection moins coûteuse sur l'indice iTraxx Europe. Cette stratégie a eu pour effet de pousser la corrélation implicite de la tranche *equity* vers le haut. La corrélation implicite de la tranche *equity* est d'ailleurs passée de 29% le 15-10-2007 à 44.7% le 16-06-2008. Finalement, pour une même tranche et pour une même journée étudiée, on peut également observer une différence de corrélation implicite en fonction des différentes échéances (5-7 ou 10 ans), reflétant une perception de corrélation différente sur ces échéances.

Toutefois, bien qu'intuitivement attrayante, cette mesure de corrélation implicite comporte clairement plusieurs lacunes. En effet, en observant les résultats du tableau 5.7, on constate qu'il existe parfois deux solutions lors du calcul de la corrélation implicite, aucune solution ou une solution non cohérente.

### Corrélation de base

Comme alternative à la corrélation implicite  $\rho_{K_1, K_2}^2$ , la corrélation de base est proposée (voir comme référence [44]). L'idée derrière cette notion est de profiter de la propriété de monotonie de la tranche *equity*, garantissant ainsi une solution unique et



cohérente pour la calcul de la corrélation implicite. Les tranches supérieures à *equity*, avec des points d'attachement  $[K_1, K_2]$ , sont alors exprimées comme une différence entre deux tranche *equity* avec des points d'attachements  $[0, K_2]$  et  $[0, K_1]$  et des corrélations de base respectives  $\rho_{K_2}^2$  et  $\rho_{K_1}^2$ . En effectuant quelques manipulations mathématiques (voir [52]), il est possible d'exprimer les pertes pour une tranche  $[K_1, K_2]$  de l'équation 3.135 par :

$$L_t^{(K_1, K_2)} = \frac{1}{K_2 - K_1} [\max[(L_t - K_1), 0] - \max[(L_t - K_2), 0]] \quad (5.2)$$

$$= \frac{1}{K_2 - K_1} [-\min[(K_1 - L_t), 0] + \min[(K_2 - L_t), 0]] \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{K_2 - K_1} [-\min[K_1, L_t] + L_t + \min[K_2, L_t] - L_t] \quad (5.4)$$

$$= \frac{1}{K_2 - K_1} [K_2 * L_t^{(K_2, 0)} - K_1 * L_t^{(K_1, 0)}], \quad (5.5)$$

et l'espérance des pertes par :

$$\mathbf{E}[L_t^{(K_1, K_2)}] = \frac{1}{K_2 - K_1} [K_2 * \mathbf{E}[L_t^{(K_2, 0)}] - K_1 * \mathbf{E}[L_t^{(K_1, 0)}]]. \quad (5.6)$$

Ainsi, de façon itérative et connaissant comme point de départ la corrélation implicite sur la tranche *equity*  $[0, 3\%]$ , il est possible de calculer la corrélation de base pour chacune des tranches *equity* fictives suivantes :  $[0, 6\%]$ ,  $[0, 9\%]$ ,  $[0, 12\%]$  et  $[0, 22\%]$  ; la seule inconnue pour chaque itération étant la corrélation implicite pour la tranche *equity* fictive ciblée. Voici les étapes en utilisant l'expression développée en 5.6 :

1. Calculer implicitement la corrélation  $\rho_{K=3\%}^2$  de base pour la tranche *equity*  $[0, 3\%]$  à partir du prix observé sur le marché. Cette corrélation est la même que celle de la corrélation implicite  $\rho_{K=0-3\%}^2$  évaluée à la section précédente ;
2. Calculer implicitement la valeur de la corrélation de base  $\rho_{K=6\%}^2$  de la tranche *equity*  $[0, 6\%]$  à partir du prix observé sur la tranche  $[3-6\%]$  et de la valeur de la corrélation de base pour la tranche *equity*  $[0-3\%]$  calculée en 1) ;
3. Calculer implicitement la valeur de la corrélation de base  $\rho_{K=9\%}^2$  de la tranche *equity*  $[0, 9\%]$  à partir du prix observé sur la tranche  $[6-9\%]$  et de la valeur de la corrélation de base pour la tranche *equity*  $[0-6\%]$  calculée en 2) ;

4. Répéter l'étape 3, de façon similaire, pour les tranches *equity* fictives [0-12%] et [0-22%].

Le graphique 5.9 illustre la corrélation de base pour les mêmes données du tableau 5.7.

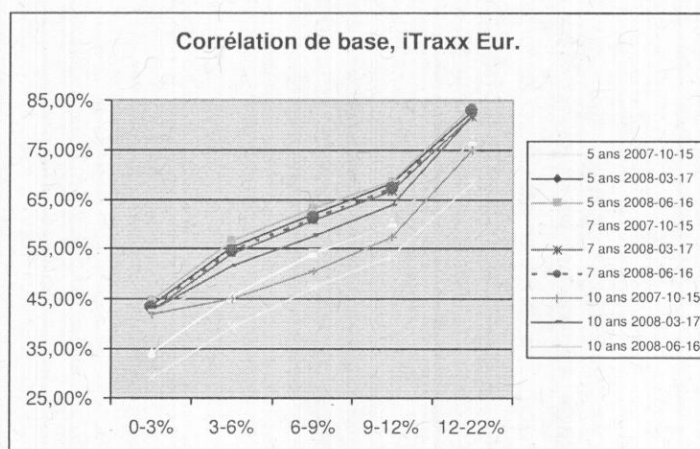


Fig. 5.9: Corrélation de base pour les échéances 5-7 et 10 ans.

Un point important à soulever est que cette corrélation de base est simplement une façon plus pratique de décrire les corrélations et ne corrige en rien l'incapacité du modèle à un facteur gaussien standard à capturer la structure de dépendance induite par les prix sur le marché. L'alternative est plutôt la sélection d'un autre modèle à un ou plusieurs facteurs. La section suivante présente les résultats comparatifs obtenus pour les différents modèles alternatifs étudiés.

#### 5.0.4 Comparaison des modèles à un facteur

Les modèles à un facteur sélectionnés pour la comparaison sont : gaussien, gaussien stochastique, NIG, NIG stochastique, Student-t (deux facteurs), Clayton, Gumble et Marshall-Olkin (MO). Les modèles ont été calibrés sur la tranche *equity* tout en minimisant l'erreur sur les autres tranches ; aucune méthode d'optimisation n'a toutefois été utilisée. Deux types d'erreurs ont été calculées : une erreur en points de

base (bps) définie comme la somme des erreurs absolues sur les tranches supérieures, et une erreur des moindres carrés (e.m.c), exprimée en pourcentage, définie comme la racine carrée de la somme des erreurs relatives au carré sur ces mêmes tranches. La méthode de calcul utilisée (Monte-Carlo (M-C), transformée de Fourier (FFT) ou large portefeuille homogène (LHP)) est également indiquée dans le tableau.

Indice: iTraxx Eur. 5 ans (série8), 2007-10-15, 29.6 bps								
modèle	Tranche					Erreurs		Méthode
	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	bps	e.m.c	
marché	12,4	80,9	29,7	17,8	10,6			
Gauss	12,4	167,4	62,8	27,4	6,7	133,1	168%	LHP
Student-t	X	X	X	X	X	X	X	M-C-5000
MO	12,4	11,3	20,2	14,8	6,1	86,6	102%	M-C-5000
Clayton	12,4	178,2	61,7	24,3	5,1	141,3	174%	FFT
Gumble	12,5	95,8	52,6	37,3	22,7	139,3	200%	M-C-5000
NIG	12,4	84,0	43,6	29,6	17,8	36,1	106%	LHP
GAUSS_S	12,4	120,2	41,3	35,5	15,1	73,2	125%	LHP
NIG_S	12,4	74,9	37,2	25,5	16,8	27,4	78%	LHP
Paramètres								
	$\rho^2$	$\alpha$	$\beta$	a	b	$\theta$	$\nu$	$\lambda$
Gauss	0,29							
Student-t	X						X	
MO								0,28
Clayton						0,123		
Gumble						1,12		
NIG	0,319	1	-0,5					
GAUSS_S				0,373	0,22	-2,1		
NIG_S		1,1	-0,5	0,35	0,32	-3,4		

Fig. 5.10: Résultats comparatifs des modèles-iTraxx 5ans-2007-10-15.

Les résultats obtenus indiquent que les copules Student-t et de Clayton se comportent de façon très similaires (en termes d'erreurs) à ceux de la copule gaussienne pour les trois journées analysées. Avec des erreurs de type e.m.c. variant entre 177% et 199% pour la copule Student-t et entre 174% et 197% pour la copule de Clayton, ces modèles ne semblent pas être des alternatives supérieures au modèle gaussien dont l'erreur varie entre 168% et 188%. De plus, aucune calibration n'a été trouvée pour le modèle Student-t pour la journée du 2007-10-15. En termes de distributions cumulatives (pour la journée du 2008-06-16, échéance de 5 ans), le graphique 5.13 permet également d'observer des similitudes pour les probabilités des pertes du portefeuille sous-jacent. Le modèle MO, caractérisé par une distribution à queue très épaisse,



Indice: iTraxx Eur. 5 ans (série8), 2008-03-17, 159.1 bps								
modèle	Tranche					Erreurs		Méthode
	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	bps	e.m.c	
marché	52,5	682,0	421,0	270,4	150,6			
Gauss	52,5	1181,6	765,5	538,6	288,1	1249,7	174%	LHP
Student-t	52,0	1129,1	785,8	546,2	294,5	1232,3	177%	M-C-5000
MO	52,3	288,1	157,9	142,1	174,2	809,2	99%	M-C-5000
Clayton	52,5	1246,3	809,2	561,6	285,1	1378,2	187%	FFT
Gumble	52,5	972,75	668	508,9	370,9	996,6	186%	M-C-5000
NIG	52,5	682,2	419,5	312,2	223,0	115,9	51%	LHP
GAUSS_S	52,4	1131,5	706,1	480,4	241,8	1035,9	137%	LHP
NIG_S	52,4	691,8	419,1	317,3	217,0	125,0	47%	LHP
Paramètres								
	$\rho^2$	$\alpha$	$\beta$	a	b	$\theta$	$\nu$	$\lambda$
Gauss	0,4357							
Student-t	0,34							6
MO								0,7
Clayton						0,3215		
Gumble						1,43		
NIG	0,664	1,5	-0,8					
GAUSS_S				0,7	0,39	-3		
NIG_S		1,5	-0,7	0,94	0,78	-3		

Fig. 5.11: Résultats comparatifs des modèles-iTraxx 5ans-2008-03-17.

amplifie grandement la probabilité de défaut pour des pertes très grandes. Dans un contexte de crise des crédits pour la période étudiée, ce modèle capture un peu mieux la structure de dépendance avec une erreur de type e.m.c. variant entre 99% et 102%. En contrepartie, on peut observer que les primes exigées pour chacune des tranches supérieures à *equity* sont assez rapprochées, ce qui est plutôt irréaliste lorsque l'on se rapporte à la dynamique générale des prix historiques. Le modèle avec la copule de Gumble, bien qu'il présente également une distribution à queue épaisse, ne semble pas reproduire correctement les prix observés sur le marché, particulièrement pour les tranches supérieures. Ce modèle, avec une erreur e.m.c. variant entre 186% et 300%, n'est pas une alternative intéressante au modèle gaussien pour les données analysées. Le modèle NIG semble quant à lui être un compromis intéressant entre le modèle gaussien et le modèle MO ; ce modèle capture en effet de façon plus satisfaisante la structure de dépendance avec des erreurs e.m.c variant plutôt entre 51% et 106%. Le graphique 5.14 permet de comparer les distributions cumulatives pour ces quatre modèles (Gauss, MO, NIG, Gumble).

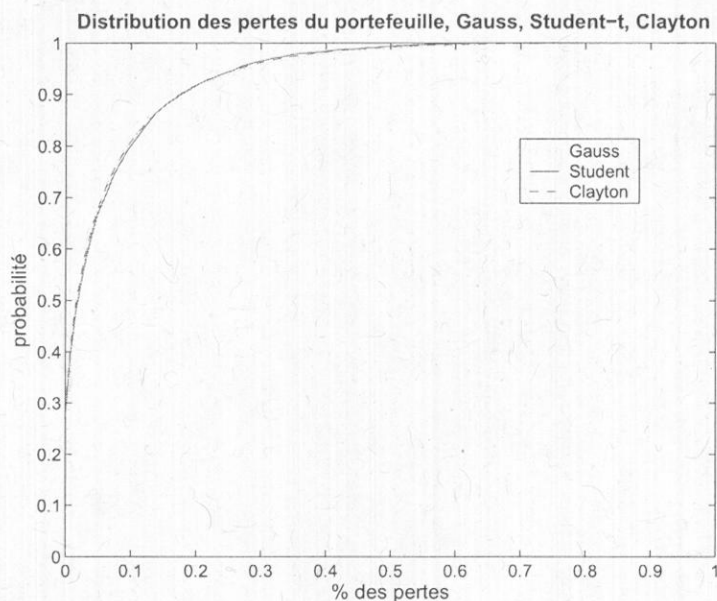
Indice: iTraxx Eur. 5 ans (série8), 2008-06-16, 76.0 bps								
modèle	Tranche					Erreurs		Méthode
	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	bps	e.m.c	
marché	28,4	272,9	167,0	109,5	50,3			
Gauss	28,4	540,3	319,7	208,4	98,4	567,0	188%	LHP
Student-t	28,6	586,1	346,0	213,8	88,3	634,6	199%	M-C-5000
MO	28,3	81,4	93,1	65,9	70,1	329,0	100%	M-C-5000
Clayton	28,4	574,7	335,2	212,7	93,6	616,4	197%	FFT
Gumble	28,4	444,8	324,1	243,1	160,1	620,3	300%	M-C-5000
NIG	28,3	270,3	166,8	124,8	89,5	57,2	79%	LHP
GAUSS_S	28,4	456,2	239,3	140,0	58,3	294,0	86%	LHP
NIG S	28,4	232,95	132,72	103,94	78,1	107,7	61%	LHP
Paramètres								
	$\rho^2$	$\alpha$	$\beta$	a	b	$\theta$	$\nu$	$\lambda$
Gauss	0,447							
Student-t	0,275							6
MO								0,6
Clayton						0,276		
Gumble						1,37		
NIG	0,593	1,4	-0,75					
GAUSS_S				0,7	0,35	-2,1		
NIG S		1,4	-0,75	0,84	0,64	-2,1		

Fig. 5.12: Résultats comparatifs des modèles-iTraxx 5ans-2008-06-16.

En comparaison avec le modèle gaussien standard, le modèle gaussien stochastique permet l'introduction d'une queue plus épaisse pour la distribution des pertes. Ce modèle améliore ainsi la structure de dépendance avec des erreurs e.m.c. variant entre 86% et 125%. Cette amélioration est cependant moins intéressante que pour le modèle NIG. Le graphique 5.15 illustre ces distributions cumulatives respectives (gaussien, gaussien stochastique). Dans le cas du modèle NIG stochastique, l'extension aléatoire permet également d'améliorer la structure de dépendance par rapport au modèle NIG avec des erreurs e.m.c. variant entre 47% et 78%. Cette amélioration est toutefois moins significative que pour le modèle gaussien. Le graphique 5.16 illustre ces distributions cumulatives respectives (NIG, NIG stochastique).

### 5.0.5 Comparaison des méthodes de calcul

En terme de rapidité d'exécution (ou temps de roulement), le tableau 5.17 résume les temps de calcul des primes (en secondes) pour une tranche donnée d'échéance de 5 ans. L'ordinateur utilisé est un IBM ThinkPad avec un processeur de 1.5 Ghz et



**Fig. 5.13:** Distribution des pertes (Gauss, Student-t, Clayton).

512 Mo de mémoire vive. Du fait que la copule gaussienne et NIG ont été implantées en utilisant l'ensemble des trois méthodes de calcul (M-C avec 5000 itérations, FFT et LHP), elles permettent une analyse comparative des méthodes. On peut en effet noter que la méthode LHP est beaucoup plus rapide que les méthodes FFT et M-C. En effet, dans le cas gaussien, la méthode LHP est environ 50 fois plus rapide que la méthode FFT et 70 fois plus rapide que la méthode M-C. Alors que dans le cas NIG, ce facteur est d'environ 120 fois entre la méthode LHP et les méthodes FFT et M-C. Quant aux combinaisons modèle/méthode de calcul de type gaussien/LHP et NIG/LHP avec une extension aléatoire du coefficient de corrélation, bien que la précision des résultats surpasse légèrement celle des modèles associés sans extension stochastique, le prix à payer est élevé en terme de temps de calcul (près de 70 fois plus lent).



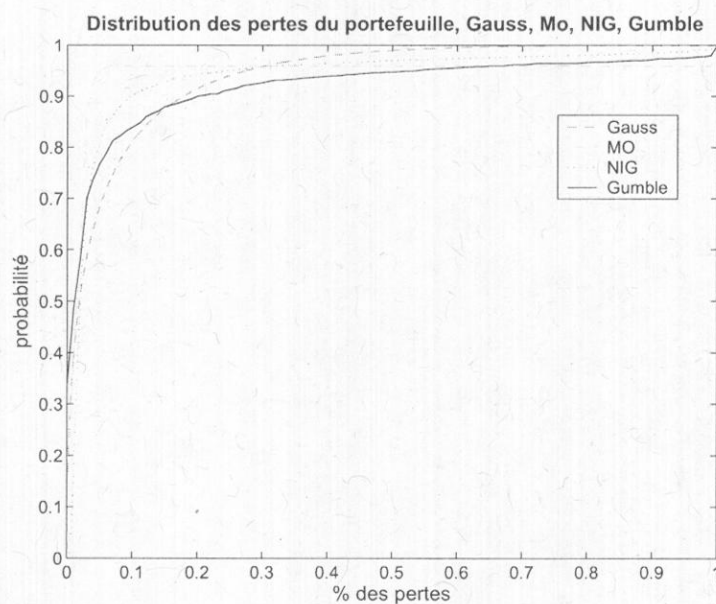


Fig. 5.14: Distribution des pertes (Gauss, NIG, MO, Gumble).

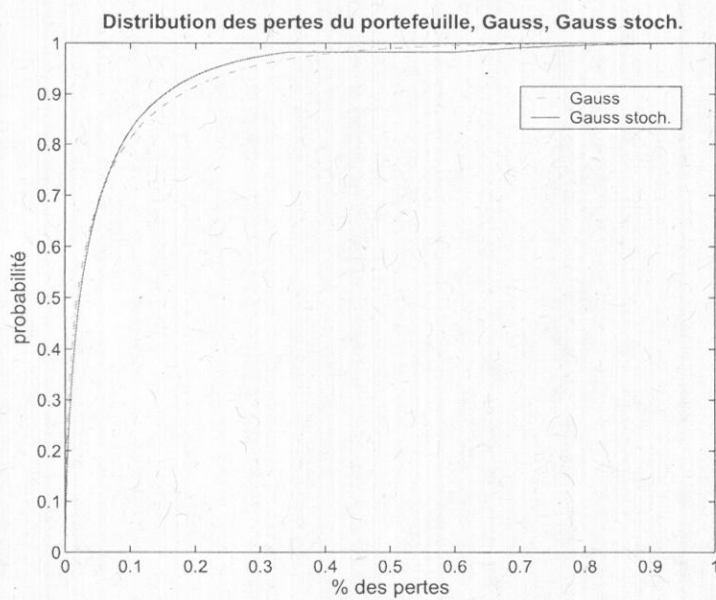


Fig. 5.15: Distribution des pertes (Gauss, Gauss-stoch.).

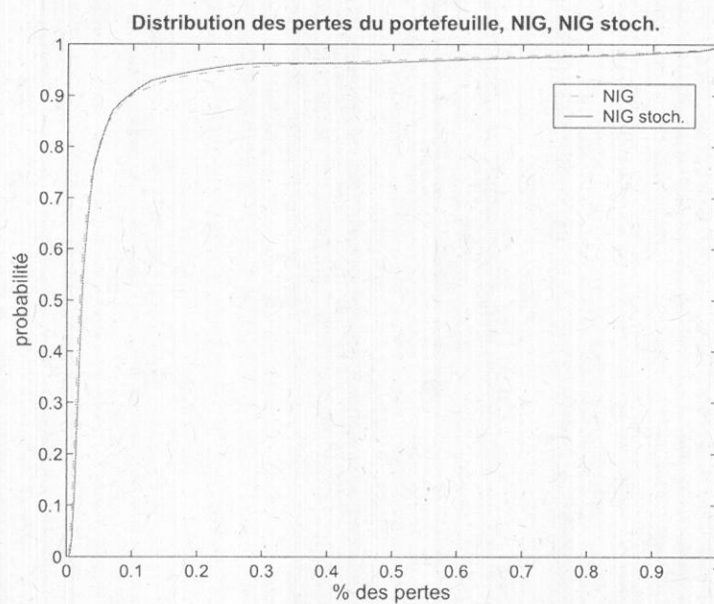


Fig. 5.16: Distribution des pertes (NIG, NIG-stoch.).

Modèle	M-C (5000)	FFT	LHP
Gauss	71	51	1,1
Nig	1517	1696	14
Gauss stoch	X	X	73
Nig stoch.	X	X	980
MO	74	X	X
Student_t	141	X	X
Gumble	71	X	X
Clayton	76	44	X

Fig. 5.17: Temps de simulation des modèles en secondes (Matlab 6.5).

## Chapitre 6

### Conclusion

Ce projet a permis de comparer différents modèles de valorisation d'un CDO synthétique. Pour modéliser le comportement des éléments du portefeuille, le modèle à un facteur, un cas particulier du modèle général de type copule, a été présenté où une structure de dépendance simplifiée est introduite à l'aide d'une copule. Les modèles à un facteur qui ont été sélectionnés pour la comparaison sont : gaussien, gaussien stochastique, NIG, NIG stochastique, Student-t (deux facteurs), Clayton, Gumble et Marshall-Olkin (MO). Trois méthodes de calcul ont été utilisées pour obtenir la distribution des pertes du portefeuille : Monte-Carlo (M-C), semi-analytique par transformée de Fourier (FFT) et l'approximation du large portefeuille homogène (LHP). Les données utilisées sont basées sur l'indice iTraxx Europe et sur les tranches de CDO standardisées associées pour les échéances 5, 7 et 10 ans. Ces données ont été extraites du redifusé de données Bloomberg pour la période allant du 21 septembre 2007 au 16 juin 2008, durant la crise des crédits hypothécaires (*subprimes*).

Le modèle à un facteur gaussien, qui est considéré comme le modèle *de facto* en industrie, a d'abord été analysé. Tel que prévu, les résultats obtenus indiquent que ce modèle ne capture pas adéquatement la dynamique des prix observés. Un



effet sourire (*smile*) est également observé pour les tranches du portefeuille. Ainsi, la corrélation implicite, qui devrait être constante, diffère d'une tranche à l'autre. De plus, les valeurs de corrélations implicites obtenues pour les tranches supérieures à *equity* sont, dans certains cas, incohérentes : aucune solution ou deux solutions peuvent parfois être trouvées. Comme alternative, la corrélation de base est proposée où chaque tranche fictive est exprimée comme une différence entre deux tranches *equity*. Cette corrélation de base est toutefois simplement une façon plus pratique de décrire les corrélations ; elle ne corrige en rien l'incapacité du modèle à un facteur gaussien à capturer la structure de dépendance induite par les prix sur le marché. Des extensions du modèle à un facteur gaussien ont ensuite été analysées par la sélection de copules permettant d'obtenir potentiellement une distribution des pertes à queues plus épaisses. Les résultats obtenus indiquent que les copules Student-t, de Clayton et de Gumble ne sont pas des alternatives intéressantes au modèle gaussien pour la période étudiée. Le modèle MO, caractérisé par une distribution à queue très épaisse, capture un peu mieux la structure de dépendance dans un contexte de crise des crédits. Le modèle NIG semble quant à lui être le meilleur compromis entre le modèle gaussien et le modèle MO ; la présence de trois paramètres pour modéliser la dépendance permet de mieux calibrer les prix théoriques calculés avec ceux observés sur le marché. Quant aux modèles gaussien et NIG avec extension stochastique de la corrélation, ils permettent de capturer un peu mieux la structure de dépendance comparativement aux modèles de base respectifs. La fait de lier une corrélation variable en fonction du facteur commun du modèle (qui peut être interprété comme l'état de l'économie) apporte un plus grand degré de réalisme dans la modélisation. Parmi tous les modèles analysés, c'est le modèle NIG avec extension stochastique qui offre les meilleurs résultats. Malgré tout, une calibration simultanée pour l'ensemble des tranches du CDO, à partir d'une sélection de paramètres de dépendance et stochastique, n'est pas possible pour ce modèle pour les journées analysées.

Il est intéressant de souligner que parmi l'ensemble des combinaisons modèle/méthode de calcul, la combinaison NIG/LHP est particulièrement intéressante comme compromis entre précision et vitesse de calcul. Le principal

avantage des méthodes FFT et M-C est toutefois une plus grande flexibilité pour la modélisation des entités du portefeuille. De plus, contrairement à la méthode LHP, ces méthodes ne doivent pas obligatoirement être basées sur un portefeuille d'entités homogènes. Enfin, la méthode M-C, bien que la plus lente parmi les méthodes de calcul, demeure la plus intuitive et la plus flexible, permettant la valorisation de différents types de CDO.

Quant aux principales limites des modèles à un facteur présentés, elles sont liées à leur nature statique. En effet, d'une part, la distribution des pertes a été calculée pour la durée de vie du CDO, c'est-à-dire pour une seule période d'évaluation statique. Les pertes pour différents horizons de temps n'étaient pas disponibles et la valorisation d'une tranche de CDO a été effectuée en calculant l'espérance de la valeur actualisée des pertes sur cette distribution "statique" des pertes. Par conséquent, les probabilités de défaut et les paramètres de dépendance étaient fixés constants pour la durée de vie du CDO, ce qui semble intuitivement contraire à la réalité que ces modèles veulent traduire. Dans ce cadre de modélisation statique, les paramètres ont été calculés à partir des données observées initialement sur les marchés, sans considérer, au fil du temps, toutes nouvelles informations. D'autre part, le fait d'avoir fixé constante la structure de dépendance entre tous les éléments du portefeuille est également très peu réaliste. De plus, la nature statique de ces modèles complique l'implantation d'une stratégie de couverture dynamique puisqu'il n'existe pas de moyen direct d'analyser la variation des primes d'une tranche de CDO d'une période à une autre. Comme alternative, des modèles dynamiques multipériodes sont proposés (voir par exemple Walker [54], Lamb et Perraudin [33], Jarrow et al. [28] et Duffie et al. [13]). Ces modèles tentent d'intégrer de façon dynamique toutes nouvelles informations obtenues (prix sur le marché des CDS, variables macro-économiques, etc.) permettant de faire varier les probabilités de défaut et les paramètres de dépendance de façon plus réaliste d'une période d'observation à une autre.

Les modèles de valorisation de CDO ont été critiqués suite à la récente crise des crédits dans leur capacité à correctement capturer la dynamique des prix (par-

ticulièrement le modèle à un facteur gaussien); la valorisation *mark to market* (évaluation au cours du marché) et *mark to model* (évaluation théorique) étant fort différente pour les CDO moins liquides. Il est à prévoir qu'une restructuration dans cet univers fera disparaître ces segments moins liquides et plus complexes comme par exemple les CDO sur des prêts douteux ou les CDO de CDO ( $CDO^2$  ou  $CDO^3$ ). Une nouvelle génération de modèles devraient également voir le jour afin de tenter de mieux représenter la réalité. Néanmoins, ces améliorations ou extensions se feront, très certainement, au dépend d'une augmentation de la complexité des modèles. Certes, le développement de ces nouveaux modèles sera attrayant et stimulant pour les théoriciens du secteur des dérivés de crédit. Toutefois, dans la pratique, ils seront davantage complexes à comprendre, à calibrer et à manipuler pour une grande proportion d'investisseurs qui préfèrent généralement des modèles plus simples.



## Bibliographie

- [1] Andersen, L., J. Sidenius et S. Basu (2003). *All your hedges in one basket*, Risk Magazine, p.67-72.
- [2] Andersen, L. et J. Sidenius (2005). *Extensions to the Gaussian Copula : Random Recovery and Random Factor Loadings*, Journal of Credit Risk, vol. 1, no.1, p.29-70.
- [3] Barndorff-Nielsen, O.E. (1997). *Normal inverse gaussian distributions and stochastic volatility modelling*, Scandinavian Journal of Statistics, vol. 24, no.1, p.1-13.
- [4] Bluhm, C. (2003). *CDO Modelling : Techniques, Exemples and Applications*, Working Paper, HypoVereinsbank.
- [5] Burtschell, X., J. Gregory et J-P. Laurent (2005). *A comparative analysis of CDO pricing model*, Working paper, BNP Paris, France.
- [6] Cherubini, U., E. Luciano et W. Vecchiato (2004). *Copula methods in finance*, Wiley Finance, p.181-194.
- [7] Clayton, DG. (1978). *A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence*, Biometrika, vol. 65, p.141-151.
- [8] Davis, M et V. Lo (1999). *Infectious Defaults*, Working Paper, Imperial College, London.
- [9] Debuyscher, A. et M. Szego (2003). *The Fourier Transform Method-Technical Document*, Working Paper, Moody's Investors Service, 2003.

- [10] Duffie, D. et K. J. Singleton (1999). *Modelling Term Structure Of Defaultable Bond*, The Review Of Financial Studies Special, vol. 12, no.4, p. 687-720.
- [11] Duffie, D. (1999). *Credit Swap Valuation*, Financial Analysts Journal, p. 73-87.
- [12] Duffie, D. et N. Garleanu (2001)., *Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations*, Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.
- [13] Duffie, D., A. Eckner, G. Horel et L. Saita (2008). *Frailty Correlated Default*.
- [14] Durrleman, V., A. Nikeghbali et T. Roncalli (2000). *Which copula is the right one ?*, Working paper, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.
- [15] Embrechts, P., A. McNeil et D. Straumann (1999). *Correlation and dependance in risk management : Properties and pitfalls*, Working Paper, Risklab, ETH Zurich.
- [16] Embrechts, P., F. Lindskog et A. McNeil (2001). *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, Working Paper, Risklab, ETH Zurich.
- [17] Frees, E.W. et E. A. Valdez (1997). *Understanding Relationships Using Copulas*, Actuarial Reserch Conférence, Alberta.
- [18] Frey, R. et A. McNeil (2001). *Modelling Dependent Defaults*, Working Paper, University of Zurich, Federal Institute of Technology, Zurich.
- [19] Friend, A. et E. Rogge (2004). *Correlation at first sight*, Working paper, ABN AMRO, Financial Markets, London.
- [20] Galiani, S.S. (2003). *Copula Functions and their Application in Pricing and Risk Managing Multiame Credit Derivative Products*, M.Sc. report, Kings College London, 68 p.
- [21] Glasserman, P. et J. Li (2003). *Importance Sampling for Portfolio Credit Risk*, Working paper, Colombia Business School, New-York.
- [22] Houweling, P. et A. Vorst (2004). *Pricing Default Swaps : Empirical Evidence*, Journal of International Money and Finance.

- [23] Hull, J. et A. White (2000). *Valuing Default Credit Swap I : No Counterparty Default Risk*, Working Paper, J. Rotman School of Management, University of Toronto.
- [24] Hull, J. et A. White (2001). *Valuing Default Credit Swap II : Modelling Default Correlations*, Working Paper, J. Rotman School of Management, University of Toronto.
- [25] Hull, J. et A. White (2003). *Valuation of a CDO and an n to Default CDS Without Monte Carlo Simulation*, Working Paper, J. Rotman School of Management, University of Toronto.
- [26] Jarrow, R. et S. M. Turnbull (1995). *Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk*, Journal of Finance, vol. 50, p. 53-85.
- [27] Jarrow, R. et F. Yu (2000). *Counterparty Risk and the Pricing of Defaultable Securities*, Working Paper, Johnson GSM, Cornell University.
- [28] Jarrow, R., L. Li, M. Mesler et D. R. van Deventer (2007). *CDO valuation : Fact and Fiction*, Working paper, Kamakura corporation.
- [29] Joshi, M.S. et D. Kainth (2003). *Rapid and accurate development of prices and Greeks for nth to default credit swaps in the Li model*, Working paper, Royal Bank of Scotland, Scotland.
- [30] Kalemanova, A., B. Schmid et R. Werner (2005). *The Normal Inverse Gaussian Distribution for Synthetic CDO Pricing*, Working Paper, RiskLab Germany.
- [31] Kalemanova, A. et R. Werner (2006). *A short note on the efficient implementation of the NIG distribution*, Working Paper, RiskLab Germany.
- [32] Kiff, J., F. L. Michaud et J. Mitchell (2003). *Une revue analytique des instruments de transfert de risque de crédit*, RSF, Banque de France.
- [33] Lamb, R. et W. Perraudin (2008). *Dynamic Default Rate*, Imperial College, London.
- [34] Laurent, J.P. et J. Gregory (2004). *In the Core of Correlation*, Working paper, BNP Paris, France.



- [35] Laurent, J.P. et J. Gregory (2003). *Basket Default Swaps, CDO'S and Factor Copulas*, Working paper, BNP Paris, France.
- [36] Li, D. (1999). *On Default Correlation : A Copula Fonction Approach*, Working paper, The RiskMetrics Group, no. 99-07, New-York.
- [37] Lüscher, A. (2005). *Synthetic CDO pricing using the double normal inverse Gaussian copula with stochastic factor loading*, Department of Mathematics ETH Zurich, 72 p.
- [38] Mashal, R., M. Naldi et A. Zeevi (2003). *Extreme Events and Multi-Name Credit Derivatives*, Working Paper.
- [39] Marshall, A. et I. Olkin (1967). *A multivariate exponential distribution*, Journal of the American Statistical Association, vol. 62, no.317, p. 30-44.
- [40] Meneguzzo, D. et W. Vecchiato (2002). *Copula Sensitivity in Collateralized Debt Obligations and Basket Default Swaps Pricing and Risk Monitoring*, Risk Management Dept., Inteseta Bank, Milan.
- [41] Merton, R.C. (1974). *On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates*, Journal of Finance, vol. 29, p. 449-470.
- [42] Nelsen, R.B. (1999). *An Introduction to Copulas*, Springer Verlag, 270 p.
- [43] Nolan, J. (2008). *Stable Distributions : models for heavy tailed data*, Math. Stats. department, American University, 34 p.
- [44] O'kane, D. et L. Livesey (2004). *Base Correlation explained*, Working Paper, Fixed Income Quantitative Credit Research, Lehman Brothers.
- [45] Picone, D. (2001). *Collateralized Debt Obligations*, Working Paper, City University Business School, London Royal Bank of Scotland.
- [46] Schirm, A. (2004). *Credit Risk Securitisation : Price Discovery for Synthetic CDOs*, Working Paper, University of Mannheim, Germany.
- [47] Schönbucher, P. et D. Schubert (2001). *Copula Dependend Default Risk in Intensity Models*, Working Paper, Departement of Statistics, Bonn University.
- [48] Schönbucher, P. (2002). *Taken To The Limit : Simple And Not-So-Simple Loan Loss Distributions*, Working Paper, Departement of Statistics, Bonn University.

- [49] Schönbucher, P. et E. Rogge (2003). *Modelling Dynamic Portfolio Credit Risk*, Working Paper, ETH Zurich, Zurich, Imperial College, London.
- [50] Sklar, A. (1959). *Fonctions de répartition à  $n$  dimensions et leurs marges*, Publication de l'Institut de Statistique l'Université de Paris, vol.9, p. 879-885.
- [51] Tavakoli, J.M. (2003). *Collateralized Debt Obligations and Structured Finance*, Wiley Finance.
- [52] Torresetti, R., D. Brigo et A. Pallavicini (2006). *Implied Correlation in CDO tranches : a paradigm to be handled with care*, Working Paper, Credit Models, Banca IMI, Milan.
- [53] Vasicek, O. (1987). *Probability of loss on loan portfolio*, Working paper, KMV Corporation.
- [54] Walker, M.B. (2006). *CDO Models- Towards the Next Generation : Incomplete Markets and Term Structure*, Department of Physics, University of Toronto, Toronto.
- [55] Zhou, C. (1997). *Default Correlation : An Analytical Result*, Working paper, Federal Reserve Board, Washington.
- [56] Committee on the Global Financial System- CGFS (2005). *The role of ratings in structured finance : issues and implications*, Bank for international settlements (BIS).
- [57] British Banker's Association (2006). *Credit Derivatives Report*.
- [58] International Swap Dealers Association, [réf. du 1 août 2008].  
<<http://www.isda.org/publications/isdacredit-deri-def-sup-comm.html>>.
- [59] Reuters (2008). *CDO deals resurface but down 90 pct in Q1-report*, New-York.
- [60] Risk Magazine (2007). *Berating agencies*, Risk Magazine, (septembre).