

**HEC MONTRÉAL**

**Modélisation du prix d'une denrée**

par

Mohammed Elboudi

**Sciences de la gestion  
ingénierie financière**

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du grade de maîtrise ès sciences  
(M.Sc.)

Mai 2007

©Mohammed Elboudi, 2007



Nov. 71  
2007

## DÉCLARATION DE L'ÉTUDIANTE, DE L'ÉTUDIANT ÉTHIQUE EN RECHERCHE AUPRÈS DES ÊTRES HUMAINS

### Recherche sans collecte directe d'informations

Cette recherche n'impliquait pas une collecte directe d'informations auprès de personnes (exemples : entrevues, questionnaires, appels téléphoniques, groupes de discussion, tests, observations participantes, communications écrites ou électroniques, etc.)

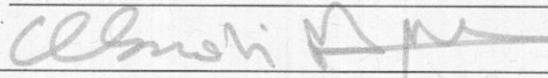
Cette recherche n'impliquait pas une consultation de documents, de dossiers ou de banques de données existants qui ne font pas partie du domaine public et qui contiennent des informations sur des personnes.

Titre de la  
recherche :

Modélisation du prix d'une denrée.

Nom de l'étudiant : Mohammed Elboudi

Signature :



Date :

2007-05-01

## Remerciements

Je souhaite adresser ici, tous mes remerciements à ma directrice de recherche Geneviève Gauthier pour son précieux aide, pour ces conseils judicieux, pour le temps qu'elle a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

J'exprime ma gratitude à l'institut de finance mathématique de Montréal (IFM2) pour son soutien financier qui m'a permis de mener à bien ce projet de recherche. Je tiens aussi à remercier tous mes professeurs qui ont assuré ma formation dans cette maîtrise.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

## Table des matières

1 Introduction .....	1
2 Revue de la littérature .....	2
2.1 Résumé des modèles .....	14
2.1.1 Le modèle de Brennan [1958] .....	14
2.1.2 Le modèle de Fama et French [1987] .....	14
2.1.3 Le modèle de Poterba et Summers [1988] .....	15
2.1.4 Le modèle de Deaton et Laroque [1996] .....	16
2.1.5 Tableau comparatif des modèles d'évolution du prix d'une denrée .....	17
3 Modèles d'évolution du prix .....	19
3.1 Modèle 1 .....	20
3.2 Modèle 2 .....	22
4 Estimation des paramètres .....	24
4.1 Méthode du maximum de vraisemblance utilisant un seul contrat à terme .....	24
4.1.1 Fonction de vraisemblance .....	25
4.1.2 Validation des estimés par la méthode Monte Carlo .....	31
4.1.3 Résultats et analyses .....	33
4.2 Méthode du maximum de vraisemblance utilisant plusieurs contrats à terme .....	42
4.2.1 Modèle 1 .....	42
4.2.2 Modèle 2 .....	43
4.2.3 Validation des estimés du modèle par la méthode Monte Carlo .....	46
5 Étude empirique .....	49

5.1 Résultats et analyses .....	50
5.1.1 Estimation des paramètres du modèle 1 .....	51
5.1.2 Estimation des paramètres du modèle 2 .....	61
5.1.3 Validation et comparaison des deux modèles .....	72
5.2 Conclusion .....	83
Annexe .....	84
Bibliographie .....	124

## Liste des figures

- Figure 1 : Cette figure présente la comparaison (in sample) entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés par le modèle 1 en utilisant le contrat  $F1$ , et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat  $F1$  .....54
- Figure 2 : Cette figure présente la comparaison (in sample) entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés par le modèle 1 en utilisant le contrat 24, et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat 24.....55
- Figure 3 : En considérant le modèle 1, pour chaque contrat  $F1$ ,  $F2$ ,  $F23$  et  $F24$ , nous avons utilisé les paramètres correspondants trouvés dans le tableau des résultats pour estimer les écarts entre le logarithme des prix hebdomadaires. Et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004.....56
- Figure 4 : Cette figure présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés par le modèle 1 en considérant le cas où  $n = 24$ , et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat  $F1$ .....58
- Figure 5 : Cette figure présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés par le modèle 1 en considérant le cas où  $n = 24$ , et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat  $F24$ .....59
- Figure 6 : En considérant le cas où  $n = 24$  pour le modèle 1, cette figure présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés, et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 des deux premiers contrats  $F1$ ,  $F2$  et des deux derniers contrats  $F23$  et  $F24$ .....60
- Figure 7 : Dans le cas où un seul contrat futur est considéré pour le modèle 2, cette figure présente la comparaison entre les niveaux hebdomadaires du taux de rendement de détention estimés (in sample) pour le premier et le vingt-quatrième contrats du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004.....63

Figure 8 : Dans le cas où un seul contrat futur est considéré pour le modèle 2, cette figure présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés (in sample) en utilisant les paramètres trouvés de chaque contrat. Et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 des contrats <i>F1</i> et <i>F24</i> .....	64
Figure 9 : Dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés pour le modèle 2, cette figure présente l'évolution hebdomadaire du taux de rendement de détention estimé du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 dans les trois cas $n = 6$ , $n = 12$ et $n = 24$ .....	67
Figure 10 : La moyenne sur cinq jours des volumes des vingt-quatre contrats futurs transigés.....	68
Figure 11 : Cette figure présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés (in sample) par le modèle 2 en considérant $n = 24$ , et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat <i>F1</i> .....	69
Figure 12 : Cette figure présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés (in sample) par le modèle 2 en considérant $n = 24$ , et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat <i>F24</i> .....	70
Figure 13 : En considérant le cas où $n = 24$ pour le modèle 2, cette figure présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés, et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 des deux premiers contrats <i>F1</i> , <i>F2</i> et des deux derniers contrats <i>F23</i> et <i>F24</i> .....	71
Figure 14 : Dans le cas où un seul contrat est considéré pour le modèle 2, nous avons simulé les taux des rendements de détention du contrat <i>F1</i> et <i>F24</i> en utilisant les paramètres résultants de chaque contrat. Cette figure présente la comparaison entre les niveaux hebdomadaires du taux de rendement de détention estimés (out of sample) pour les contrats <i>F1</i> et <i>F24</i> du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007.....	73
Figure 15 : Dans le cas où le contrat <i>F1</i> est considéré pour le modèle 1 et 2, cette figure présente la	

comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés (out of sample), et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 du contrat $F1$ .....	74
Figure 16 : En considérant un le contrat $F24$ pour le modèle 1 et 2, cette figure présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés, et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 du contrat $F24$ .....	75
Figure 17 : En considérant $n = 24$ pour le modèle 1 et 2, cette figure présente l'évolution hebdomadaire du taux de rendement de détention estimé (out of sample) du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007.....	77
Figure 18 : Dans le cas où plusieurs contrats sont considérés pour le modèle 1 et 2, cette figure présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés en utilisant les paramètres trouvés pour $n = 24$ . Et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 du contrat $F1$ .....	78
Figure 19 : Dans le cas où plusieurs contrats sont considérés pour le modèle 1 et 2, cette figure présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés en utilisant les paramètres trouvés pour $n = 24$ . Et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 du contrat $F24$ .....	79
Figure 20 : Dans le cas où plusieurs contrats futurs sont considérés pour le modèle 1, cette figure présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés en utilisant les paramètres trouvés pour $n = 24$ . Et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 des contrats $F1, F2, F23$ et $F24$ .....	80
Figure 21 : Dans le cas où plusieurs contrats futurs sont considérés pour le modèle 2, cette figure présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés en utilisant les paramètres trouvés pour $n = 24$ . Et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 des contrats $F1, F2, F23$ et $F24$ .....	81



## Liste des tableaux

Tableau 1 : Le temps moyen et le nombre d'itération moyen nécessaires à la convergence de l'algorithme d'optimisation pour le modèle 1.....	34
Tableau 2 : Résultats de l'étude de Monte Carlo effectuée pour 5000 trajectoires afin de valider la qualité des estimés de la méthode de vraisemblance pour le modèle 1.....	35
Tableau 3 : Les proportions estimées et intervalles de confiance du modèle 1 dans les différents cas de $N$ dans le cas où un seul contrat est utilisé.....	36
Tableau 4 : Le temps moyen et le nombre d'itération moyen nécessaires à la convergence de l'algorithme d'optimisation pour le modèle 2.....	37
Tableau 5 : Résultats de l'étude de Monte Carlo effectuée pour 5000 trajectoires afin de valider la qualité des estimés de la méthode de vraisemblance pour le modèle 2.....	39
Tableau 6 : Les proportions estimées et intervalles de confiance du modèle 2 dans les différents cas de $N$ dans le cas où un seul contrat est utilisé.....	40
Tableau 7 : Suite du tableau représentant les proportions estimés et intervalles de confiance du modèle 2 dans les différents cas de $N$ .....	41
Tableau 8 : Résultats de l'étude de Monte Carlo effectuée pour 5000 trajectoires afin de valider la qualité des estimés de la méthode de vraisemblance pour le modèle 2 dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés.....	47
Tableau 9 : Les proportions estimées du modèle 2 dans les différents cas de $N$ dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés.....	48
Tableau 10 : Séries et nombre d'observations.....	50
Tableau 11 : Résultats d'estimation des paramètres du modèle 1 en considérant un seul contrat futur.....	52

Tableau 12 : Résultats d'estimation des paramètres du modèle 1 dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés.....	57
Tableau 13 : Résultats d'estimation des paramètres du modèle 2 dans le cas où un seul contrat est utilisé.....	61
Tableau 14 : Résultats d'estimation des paramètres pour le modèle 2.....	66
Tableau 15 : Les critères de performance <i>MPE</i> et <i>RMSE</i> (out of sample) du modèle 1 et du modèle 2 dans le cas où un seul contrat est considéré.....	82
Tableau 16 : Les critères de performance <i>MPE</i> et <i>RMSE</i> du modèle 1 et du modèle 2 dans le cas où plusieurs contrats futurs sont utilisés.....	82

# 1 Introduction

La modélisation du prix d'une denrée joue un rôle très important dans l'évaluation des instruments financiers contingents aux commodités, et les projets d'investissement pour extraire ou produire une ressource naturelle. Plusieurs chercheurs ont développé une variété de théories et de modèles pour comprendre et représenter le comportement du prix au cours du temps. Un des résultats le plus intéressant de ces études, est que le rendement de détention devrait être une variable stochastique. Cependant, l'introduction d'une deuxième source de risque pour une composante non négociable sur les marchés mène à un modèle de marché incomplet.

Nous allons revoir certains modèles qui représentent l'évolution du prix d'une denrée et de son rendement de détention, et vérifier l'impact du changement de ces modèles sur les prix des produits dérivés sur denrées les plus fréquemment utilisés. Par ailleurs, dans le mémoire d'Émilie Blouin "Tarification d'option panier", il y a l'hypothèse que le rendement de détention et le prix de la denrée sont fortement corrélés. En d'autres termes, le même mouvement brownien qui a été utilisé pour modéliser le prix de la denrée est utilisé aussi pour le rendement de détention. Alors, un des objectifs de ce mémoire est de vérifier empiriquement si cette hypothèse est réaliste.

## 2 Revue de la littérature

La théorie de l'entreposage est une des premières théories qui explique la relation étroite entre le taux de rendement de détention et la disponibilité future de la marchandise sur le marché. Holbrook Working est parmi les premiers qui ont développé cette théorie. Dans son article de 1949, il a observé que la différence entre les prix des contrats futurs portant sur le blé, dépend de la quantité de récolte prévue entre les deux mois mai et septembre, et que cette quantité va influencer aussi bien le prix du contrat futur de mai que le prix du contrat futur de septembre. Ainsi, il a défini une relation inter-temporelle entre les prix des contrats futurs. Cette relation donne le prix de l'entreposage d'une marchandise entre deux dates  $T_1$  et  $T_2$ , comme la différence entre le prix du contrat futur d'échéance  $T_1$  et le prix du contrat futur d'échéance  $T_2$ . Or, dans le cas où le prix du contrat futur est une fonction décroissante de la maturité, le prix de l'entreposage devient négatif. Cette situation apparaît lorsque les provisions sont rares. Par conséquent, la théorie du prix de l'entreposage ne peut pas être appliquée dans ce cas. En fait, Kaldor [1939] a introduit le concept du rendement de détention de la marchandise pour expliquer la différence négative entre le prix du contrat futur et le prix comptant. Effectivement, ce rendement peut compenser la perte causée par l'exercice de l'entreposage de la marchandise. Ainsi, Working [1949] a défini le coût net de l'emménagement d'une marchandise comme le coût de l'emménagement moins le rendement marginal de détention. Cependant, la théorie du prix de l'entreposage peut être étendue aux valeurs négatives, en conséquence, la différence entre le prix du contrat futur et le prix comptant devient en fonction des coûts de l'entreposage, des intérêts courus et du rendement de détention de la marchandise.

Brennan [1958] s'intéressait à l'impact de l'offre et de la demande de la marchandise pour généraliser la théorie de l'entreposage. Il a introduit une autre variable : la prime de risque pour comprendre la relation entre le rendement de détention et la différence entre les prix des contrats futurs. D'autre part, il est possible d'expliquer la différence entre le rendement de détention et

les dépenses marginales par le concept de la prime de risque. En effet, un agent détenant une marchandise peut se couvrir contre la baisse des prix en utilisant des contrats futurs. Par la suite, il peut générer un rendement qui dépasse le coût d'entreposage de la marchandise. Ainsi, pour les agents qui se couvrent contre la baisse (hausse) des prix, le prix futur doit être inférieur (supérieur) au prix comptant espéré d'une valeur égale à la prime de risque. En d'autres termes, si le prix comptant prévu reste inchangé alors le prix futur va être inférieur (supérieur) au prix comptant espéré. Brennan a utilisé des données empiriques des produits agricoles pour tester son modèle. Pour chaque produit, il a pu évaluer la prime de risque entre deux périodes. En fait, il a calculé la valeur de ce paramètre en déduisant le coût marginal d'entreposage de la différence des prix des contrats futurs. Brennan a défini le coût total de l'entreposage d'une marchandise comme la dépense de l'entreposage physique plus la valeur du facteur de risque moins le rendement de détention.

Fama et French [1987] ont étudié la théorie de l'entreposage et la théorie qui conçoit le prix du contrat futur comme somme de deux composantes : la prime de risque et le prix futur espéré. Ils ont défini la base comme la différence entre le prix du contrat futur et le prix comptant. Rappelons que la théorie de l'entreposage (Working [1948], Brennan[1958]) exprimait la base en fonction des frais de l'entreposage, des intérêts courus et du rendement de détention de la marchandise. Fama et French l'expriment comme l'espérance de la somme de la prime de risque et de la variation du prix comptant de la marchandise. Afin de comparer les deux modèles, ils ont examiné l'écart type et le test de régression de la base défini par chaque modèle. Pour le test empirique, ils ont utilisé les données historiques de quatre types de commodités : les métaux, les produits agricoles, les produits du bois et les produits animaux. Leurs résultats se résument comme suit : pour le premier modèle, la variation de la base est à l'origine de la variation du taux d'intérêt et du changement saisonnier du rendement de détention. Pour le deuxième modèle, malgré qu'ils aient trouvé que l'espérance de

la prime de risque varie par rapport au temps pour cinq produits, l'approche de base qui considère que le prix du contrat futur se compose de la prime de risque et du prix futur espéré est moins évidente pour la majorité des produits testés.

Poterba et Summers [1988] ont utilisé le taux de variance pour évaluer la partie transitoire du prix du titre. Empiriquement, ils ont observé que les rendements de certains produits ont une corrélation positive sur un court terme, et une corrélation négative sur un long terme. De plus, ils ont montré que la présence d'une corrélation négative peut signaler la divergence du prix de certains ensembles de valeurs fondamentales. À la suite de ces constatations, ils s'intéressaient au comportement du retour vers la moyenne des prix. Ils ont expliqué qu'à partir d'un certain rang, la différence entre le prix et la valeur fondamentale peut être éliminée par les forces spéculatives. En conséquence, le prix retournera vers sa moyenne à long terme. C'est pourquoi, ils ont proposé que la variation de la prime de risque puisse être une source du comportement de retour vers la moyenne.

Deaton et Laroque [1996] s'intéressaient à la variation brusque des prix des marchandises. Pour ces motifs, ils ont développé le modèle de l'entreposage compétitif. Ce modèle est basé sur la relation entre le prix et le choc provoqué par le changement de l'offre et de la demande. Sous l'hypothèse de l'absence de l'entreposage spéculative, cette relation devient linéaire et le choc suit un processus d'auto-régression du premier ordre. En vue de généraliser leur modèle, ils ont considéré que le choc suit un processus de Markov stationnaire. Sous l'hypothèse du risque neutre, Deaton et Laroque ont montré que la différence entre le prix du contrat futur et le prix comptant ne peut pas dépasser la valeur des frais de l'entreposage durant la vie du contrat. Ceci peut être traduit par une relation de dépendance entre les prix de la marchandise, et cette relation peut être modifiée par l'activité des spéculateurs. Effectivement, lorsque les spéculateurs détenant la marchandise prévoient une baisse des prix des contrats futurs, ils vont essayer de liquider leur stock. Par la suite, il y aura une

augmentation de l'offre sur le marché, ce qui va modérer le prix de la marchandise.

Sous l'hypothèse des chocs indépendants et identiquement distribués, le modèle de l'entrepasage compétitif implique l'existence d'un seuil  $p^*$ , tel que, si le prix comptant est supérieur à  $p^*$ , alors il n'y a pas d'entrepasage et le prix prévu pour la prochaine période sera indépendant du prix comptant. D'autre part, si le prix est inférieur à  $p^*$ , alors les spéculateurs prévoient une hausse du prix de la marchandise. Dans ce cas il est possible de trouver un prix critique au-dessus duquel la moyenne des hausses prévues devient suffisamment grande pour couvrir les frais de l'entrepasage de la marchandise.

Deaton et Laroque ont testé la performance de leur modèle sur des données empiriques de douze produits. Sous l'hypothèse des chocs indépendants et identiquement distribués, lorsque la variation des prix résulte de la variation de l'offre seulement (par exemple dans le cas d'un changement météorologique), ils ont trouvé que le modèle de l'entrepasage donne des résultats acceptables pour le blé, le riz et le coton. Par contre, lorsque la variation de la demande est la source de la variation des prix, le modèle ne donne pas de bons résultats, en particulier pour le cacao, le café et le thé. Deaton et Laroque ont mis de côté l'hypothèse des chocs indépendants, et ils ont testé leur modèle sur la même base de données. Alors, ils ont conclu qu'en général, sous l'hypothèse des chocs indépendants et identiquement distribués le modèle de l'entrepasage compétitif donne des résultats incohérents avec les données empiriques.

Dans ce qui précède, nous avons présenté une brève description de quelques importantes théories. Ces théories proposent différents concepts pour expliquer la relation entre le prix comptant et le prix du contrat futur d'une denrée. De plus, elles nous présentent plusieurs outils pour comprendre la réaction de cette relation sous l'influence des différents paramètres observables et non observables comme : le niveau de l'offre et de la demande ; le taux d'intérêt ; la prime du risque ; le rendement de détention et les coûts d'entrepasage de la marchandise. Dans ce qui suit, nous allons présenter

une variété de modèles, qui représentent l'évolution aléatoire du prix comptant et du prix du contrat futur d'une denrée.

Signalons à ce propos que le taux de rendement de détention d'une marchandise est un paramètre non observable sur le marché. Non seulement il interprète le bénéfice sous forme d'un rendement annuel continu associé à la détention du bien sous-jacent, mais aussi, il reflète la probabilité d'une pénurie de ce bien. Et plus cette probabilité est forte plus ce taux de rendement est grand. Effectivement, dans les périodes où la marchandise est relativement rare ou qu'elle n'est pas disponible dans le marché, le taux de rendement de détention va être assez grand ce qui met en évidence la relation positive de dépendance entre le prix et le taux de rendement de détention.

Une des premières modélisations du prix d'une denrée a été proposée par Black [1976]. Sous l'hypothèse du taux d'intérêt constant, des frais de transactions et des taxes égalent à zéro, Black a considéré que le prix comptant d'un actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique dont la moyenne et la variance sont déterministes. Dans ces conditions, il a pu dériver une formule analytique pour les prix des contrats futurs.

Parmi les faiblesses de ce modèle à un facteur, il y a l'hypothèse que le taux de rendement de détention de la marchandise est un paramètre constant. Ce qui est incohérent avec l'évolution du prix de certaines denrées dans le marché, en particulier les marchandises destinées à la consommation comme le pétrole. De plus, ce modèle implique que le prix futur et le prix comptant de l'actif sous-jacent ont la même volatilité ce qui n'est pas vérifié par les données historiques. Une première modification de ce modèle a été faite par Brennan et Schwartz [1985], qui ont considéré que la dynamique du prix de la commodité suit un processus de diffusion dont la dérive peut être stochastique. Ils ont montré que le rendement de détention est inversement proportionnel à la quantité de la marchandise disponible dans l'entrepôt. En effet, si la quantité offerte sur le marché est très grande (faible) non seulement le prix de la marchandise va baisser (augmenter) mais aussi



le rendement de détention va être bas (élevé). Ainsi, ils ont considéré que le rendement de détention d'une denrée est une fonction du prix comptant, du temps et du taux d'intérêt sans risque supposé être constant.

Sous l'hypothèse du taux d'intérêt et du taux de rendement de détention non stochastique. Gibson et Schwartz [1989] ont exprimé le taux de rendement de détention en fonction du prix du contrat futur et du taux d'intérêt, en dérivant la formule donnant le prix d'un contrat futur. Par la suite, ils ont basé leur test sur des données empiriques du pétrole, et ils ont constaté que le taux de rendement de détention exhibait un comportement de retour vers la moyenne. À la suite de cette constatation, Gibson et Schwartz [1990] ont relâché l'hypothèse d'un taux de rendement de détention constant, ils ont développé un modèle à deux facteurs qui tient compte du comportement de retour vers la moyenne de ce paramètre. Ils ont considéré que le prix de la marchandise suit un mouvement brownien géométrique et le taux de rendement de détention suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Par conséquent, ils ont obtenu l'équation aux dérivées partielles satisfaite par tout droit contingent au prix du pétrole. Cette équation dépend de la prime de risque et du taux de détention non observable sur le marché. Leur modèle était capable d'expliquer la différence de volatilité du prix comptant et du prix du contrat futur. Ils ont testé la performance de leur modèle sur des données empiriques des prix des contrats futurs du pétrole. Ils ont montré que le processus de diffusion proposé pour le taux de rendement de détention est conforme aux données du marché, en plus, ils ont remarqué que le comportement de retour vers la moyenne est cohérent avec la théorie de l'entreposage. Par ailleurs, ils ont supposé que la prime de risque de marché du taux de rendement de détention soit périodiquement constante. Pour leurs premiers tests, ce paramètre a été estimé mensuellement pour un intervalle d'un mois. Ils ont trouvé que la précision des prix donnés par leur modèle décroît avec la maturité et qu'il est performant pour l'évaluation des contrats à court terme. Cependant, il donne une surévaluation des contrats à long terme. Ils ont expliqué cette faiblesse

par deux facteurs :

1. Empiriquement, la faible liquidité des contrats futurs entraîne une baisse des prix des contrats à long terme.
2. Le modèle suppose que la prime de risque de marché du taux de rendement de détention demeure constante au cours d'un mois.

En vue d'améliorer la performance de leur modèle, ils ont diminué l'intervalle d'estimation de la prime de risque. Ainsi, le modèle à deux facteurs suggéré devient un moyen satisfaisant pour évaluer les contrats à court terme portant sur le pétrole.

Dans un cadre général, ce modèle peut être appliqué pour évaluer tout produit contingent aux prix d'une marchandise dont le comportement stochastique du taux de détention est vérifié. Une des difficultés de cette application est l'implémentation du modèle qui fait appel à des méthodes numériques pour résoudre l'équation aux dérivées partielles dépendant de plusieurs paramètres qui ne sont pas observables, tel que, la prime de risque et le taux de rendement de détention.

Le comportement de retour vers la moyenne apparaît comme un phénomène d'équilibre pour certains produits. Ce caractère a d'importantes implications en pratique, et le négliger quand il existe provoque des biais systématiques dans l'évaluation des produits dérivés et des projets d'investissement portant sur une commodité. Plusieurs propositions ont été développées pour expliquer l'origine de ce comportement. Bessembinder et al. [1995] ont considéré le comportement de retour vers la moyenne comme conséquence de deux sources. La première est la relation de covariance positive entre le prix du sous-jacent et le rendement de détention. Ils ont montré que le gain ou la perte espérée en capital est compensée par la variation du rendement de détention, ce qui permet à la commodité d'offrir un rendement compétitif. La deuxième est la corrélation négative entre le taux d'intérêt et le prix de la commodité. Ils ont observé que le retour vers la moyenne

survient lorsque le changement du taux d'intérêt provoque un changement opposé dans le prix. De plus, ils ont trouvé que le caractère du retour vers la moyenne implique une relation négative entre le prix et la pente de la structure du prix du contrat futur. Bessembinder et al. [1995] ont testé la performance de leur modèle sur des prix historiques des produits agricoles, du pétrole et du métal. Ils ont trouvé que l'effet de retour vers la moyenne pour les produits agricoles et le pétrole est plus important, et il augmente avec la relation positive entre le prix et le rendement de détention. Par contre, il est plus faible pour le métal.

Schwartz [1997] a étudié trois modèles pour représenter la dynamique d'une commodité. Le premier est à un facteur où le logarithme du prix sous-jacent suit un processus de retour vers la moyenne d'Ornstein-Uhlenbeck. Le deuxième est à deux facteurs où il a considéré le comportement de retour vers la moyenne pour le taux de rendement de détention. Le troisième est à trois facteurs où il a relâché l'hypothèse forte d'une structure à terme plate des taux d'intérêt, il a considéré ce paramètre comme une troisième source d'incertitude. Compte tenu de ce fait, il a adopté un processus de Vasicek [1977] pour la dynamique des taux d'intérêt. Ainsi, il a trouvé une solution analytique pour les prix des contrats futurs.

Schwartz a testé ces modèles sur des prix empiriques des contrats futurs de différentes échéances portant sur le pétrole, le cuivre et l'or. Il a trouvé que le premier modèle ne peut pas représenter adéquatement les données sur le marché pour le pétrole et le cuivre. Par contre, le deuxième et le troisième modèle sont très performants, en particulier, le troisième modèle donne avec une grande précision des résultats conformes aux prix empiriques du pétrole et du cuivre. En fait, la présence d'un taux d'intérêt stochastique dans le modèle à trois facteurs n'améliore que légèrement la performance du modèle à deux facteurs de Gibson et Schwartz [1990] pour les contrats à court terme. Ceci peut être expliqué par le fait que, la volatilité du taux d'intérêt est nettement inférieure à celle des taux de rendement de détention pour ce segment de contrat.

Schwartz a testé ces modèles sur les volatilités des prix des contrats futurs. En comparant les résultats avec les données historiques, il a trouvé que le premier modèle sous-estime la valeur de la volatilité et il est incapable de décrire la structure à terme de la volatilité, tandis que les deux autres modèles donnent une meilleure représentation de cette structure. De même, il a remarqué que la volatilité du prix du contrat futur donnée par le deuxième modèle tend vers celle donnée par le troisième modèle lorsque la volatilité du taux d'intérêt tend vers zéro.

Dans la même optique que Schwartz [1997], Hilliard et Reis [1998] ont testé théoriquement trois modèles pour modéliser le prix du contrat futur et le prix d'option sur une commodité. En comparant le modèle à un facteur et le modèle à deux facteurs, ils ont montré que les deux modèles donnent des prix des contrats futurs qui ne sont pas significativement différents, quand la valeur initiale du taux de rendement de détention est proche de la valeur moyenne à long terme. Cependant, la différence entre les deux modèles augmente avec la maturité des contrats à terme ou si l'estimateur du paramètre de la vitesse du retour vers la moyenne devient assez grand. Le modèle à deux facteurs donne la volatilité des prix futurs en fonction du prix sous-jacent, du taux de rendement de détention, de la corrélation entre ces deux dernières variables, de la vitesse du retour vers la moyenne et de la maturité. Cette volatilité peut être la même que celle du prix sous-jacent si la volatilité du taux de rendement de détention ou la maturité du contrat futur sont nulles. En particulier, sous la première condition la formule analytique d'évaluation d'option sur les contrats à terme devient la même que celle dérivée par Black [1976]. Effectivement, la seule différence est le terme de volatilité supposée être constante sous les hypothèses de Black, alors qu'elle ne l'est pas dans le cadre du modèle à deux facteurs.

Une des faiblesses du modèle à trois facteurs de Schwartz [1997] se résulte dans le processus de diffusion postulé pour les taux d'intérêt, la distribution induite par ce processus est de loi normale, par conséquent, les taux peuvent être négatifs. Aussi, ce processus a le désavantage de ne pas

ajuster la structure à terme initiale des taux d'intérêt, il peut générer des taux non cohérents avec l'information disponible sur le marché. Pour éliminer les biais introduits par le modèle des taux d'intérêt, Hilliard et Reis [1998] ont développé un modèle à trois facteurs dont la dynamique du taux d'intérêt est représentée par un modèle d'absence d'arbitrage de Heath-Jarrow-Morton. Celui-ci assure que les prix des obligations du marché sont les mêmes que les prix générés par le modèle des taux d'intérêt. Le modèle à trois facteurs suggéré donne une solution analytique pour les prix à terme qui dépend de la vitesse d'ajustement du retour vers la moyenne et du taux d'intérêt. Par ailleurs, pour refléter certains événements imprévisibles qui peuvent causer des variations brusques et considérables dans le prix d'une marchandise, Hilliard et Reis [1998] ont gardé la même modélisation du taux de rendement de détention et du taux d'intérêt présenté dans le modèle à trois facteurs et ils ont introduit un autre terme d'incertitude dans le processus de diffusion du prix sous-jacent. Bien que l'ajout de cette composante de sauts dans le modèle d'évolution des prix ne modifie pas les prix théoriques des contrats à terme, l'impact sur le prix des options sur les contrats à terme est assez évident. En effet, ce réajustement va impliquer une distribution du prix sous-jacent et du contrat futur caractérisé par un degré d'aplatissement et de symétrie différent de la distribution de la loi log-normale. En conséquence, le prix d'option sur les contrats à terme va être différent du prix obtenu en utilisant le modèle à trois facteurs sans considérer la condition des sauts dans le prix sous-jacent.

Casassus et Collin-Dufresne [2001] ont développé un modèle à trois facteurs où ils ont identifié une structure de covariance inconditionnelle entre le taux de rendement de détention, le prix sous-jacent et le taux d'intérêt. Ceci est différent des autres modèles qui ont imposé des restrictions sur la distribution jointe de ces dernières variables. Par ailleurs, Casassus et Collin-Dufresne [2001] ont montré l'existence d'une relation de corrélation entre le taux d'intérêt et le taux de rendement de détention. En effet, les frais de l'entreposage d'une marchandise deviennent plus coûteux lorsque

les taux d'intérêts augmentent. De plus, la courbe de la structure à terme des taux d'intérêt est un indicateur de la prospection économique, et lorsque les prospections sont avantageuses les agents détenant la marchandise vont profiter d'un taux de rendement de détention.

Par ailleurs, Brennan [1991], Gibson et Schwartz [1990], Amin, Ng et Pirrong [1995] et Schwartz [1997] ont considéré que la corrélation entre le prix d'une marchandise et le taux de rendement de détention est un paramètre constant. Par contre Casassus et Collin-Dufresne [2001] ont relâché cette hypothèse. Ils ont montré que la structure de cette corrélation est instantanément constante et elle doit être une fonction du temps. Cependant, les modèles précédents, comme le modèle de Schwartz [1997], ont été basés sur l'hypothèse d'une prime de risque de marché constante. En revanche, Casassus et Collin-Dufresne [2001] ont proposé que ce paramètre doit être une variable linéaire.

À l'instar de Bessembinder et al. [1995], Casassus et Collin-Dufresne [2001] se sont intéressés à l'origine du comportement du retour vers la moyenne. Ils ont distingué entre deux sources provocatrices : la première est la relation de dépendance entre le taux de rendement de détention et le logarithme du prix sous-jacent ; la deuxième est la corrélation négative entre la prime de risque et le prix du sous-jacent.

Casassus et Collin-Dufresne [2001] ont testé la performance de leur modèle sur des prix empiriques du cuivre, du pétrole, de l'argent et de l'or. Par la suite, ils ont trouvé que le taux de rendement de détention du pétrole et du cuivre a une volatilité très grande relativement à celle de l'argent et de l'or qui est très proche de zéro avec une faible variabilité. En générale, Ils ont trouvé que, pour toutes les commodités la corrélation instantanée est positive entre le taux de rendement de détention et le prix du titre. De plus, la contribution du taux d'intérêt est assez faible dans le changement du taux de rendement de détention.

Concernant leur test sur l'origine du comportement de retour vers la moyenne, ils l'ont étudié

sous la mesure neutre au risque et sous la mesure historique. Pour expliquer ce comportement stochastique, ils ont conclu qu'il est important de considérer la relation entre le taux de rendement de détention, le niveau du prix comptant et le taux d'intérêt. Ce qui met en évidence la cohérence de ce comportement avec la théorie de l'entreposage. De même, ils ont montré que l'hypothèse de la variance par rapport au temps de la prime de risque, et la corrélation négative entre ce dernier paramètre et le prix du sous-jacent est à l'origine du comportement de retour vers la moyenne sous la mesure historique.

D'autre part, ils ont montré que pour toutes les commodités étudiées, le niveau de dépendance du taux de rendement de détention est très significatif. Il est assez élevé pour les denrées utilisées comme entrant dans la production. Par exemple, il est très élevé pour le pétrole, moyen pour le cuivre et faible pour l'argent. Aussi, la variation de la prime de risque par rapport au temps apparaît très élevé pour les actifs détenus à des fins d'investissement, elle est insignifiante pour le pétrole et très élevée pour l'argent et l'or.

Malgré la faiblesse du processus de diffusion du taux d'intérêt suggéré dans ce dernier modèle à trois facteurs. Casassus et Collin-Dufresne [2001] ont amélioré les modèles des précédentes recherches (ex. Gibson et Schwartz [1990] et Schwartz [1997]). Ils ont développé plusieurs relations analytiques entre différents paramètres observables et non observables, tel que, la relation entre le taux de rendement de détention, le taux d'intérêt et le prix comptant. Aussi, la relation qui lie les différentes corrélations entre les trois variables d'état. En conséquence, ce modèle est capable de capturer le maximum d'information disponible sur le marché pour représenter adéquatement la dynamique du prix d'une denrée.

## 2.1 Résumé des modèles

### 2.1.1 Le modèle de Brennan [1958]

Le modèle peut être résumé comme suit :

$$P_t = f_t(C_t),$$

$$P_t = f_t(S_{t-1} + X_t - S_t),$$

$$m_t = o_t(S_t) + r_t(S_t) - c_t(S_t),$$

où

$P_t$  : le prix de la marchandise à l'instant  $t$  ;

$C_t$  : la consommation à l'instant  $t$  ;

$f_t$  : la fonction de la demande ;

$S_t$  : la quantité stockée de la marchandise à l'instant  $t$  ;

$X_t$  : la quantité produite de la marchandise à l'instant  $t$  ;

$m_t$  : le coût net de l'entreposage à l'instant  $t$  ;

$o_t$  : le total des dépenses de l'entreposage physique ;

$r_t$  : le facteur du risque ;

$c_t$  : le rendement de détention.

### 2.1.2 Le modèle de Fama et French [1987]

La base selon la théorie de l'entreposage :

$$F(t, T) - S(t) = S(t)R(t, T) + W(t, T) - C(t, T).$$



La base selon la théorie de la prime du risque :

$$\begin{aligned}F(t, T) - S(t) &= E_t [P(t, T)] + E_t [S(T) - S(t)], \\E_t [P(t, T)] &= F(t, T) - E_t [S(T)],\end{aligned}$$

avec :

$F(t, T)$  : le prix du contrat futur d'échéance  $T$  à l'instant  $t$  ;

$S(t)$  : le prix comptant à l'instant  $t$  ;

$R(t, T)$  : le taux d'intérêt ;

$W(t, T)$  : le coût total de l'entreposage de la marchandise ;

$C(t, T)$  : le rendement total de détention de la marchandise ;

$E_t$  : l'espérance conditionnelle tenant compte de l'information disponible à l'instant  $t$ .

### 2.1.3 Le modèle de Poterba et Summers [1988]

$$P_t = E_t \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \prod_{i=0}^{j-1} (1 + r_{t+i})^{-1} (1 + g_{t+i}) \right] D_t \right],$$

où

$P_t$  : le prix du titre à l'instant  $t$  ;

$E_t$  : l'espérance conditionnelle ;

$r_{t+i}$  : le rendement de la période  $t + i$  ;

$g_{t+i}$  : le taux de dividende entre  $t + i$  et  $t + i + 1$  ;

$D_t$  : le montant du dividende payé pour la période  $t$ .

#### 2.1.4 Le modèle de Deaton et Laroque [1996]

$$p_t = P(z_t),$$

$$P(z_t) = a + bz_t,$$

$$z_{t+1} - \mu = \rho(z_t - \mu) + \sigma\varepsilon_{t+1},$$

où

$p_t$  : le prix de la marchandise à l'instant  $t$  ;

$a, b < 0$  : sont des paramètres à déterminer ;

$z_t$  : le choc stochastique ;

$\mu$  : la moyenne de  $z_t$  ;

$\sigma$  : l'écart type de  $z_t$  ;

$\varepsilon_t$  : un bruit blanc qui suit une loi normale standard ;

$\rho$  : un paramètre d'auto régression.

### 2.1.5 Tableau comparatif des modèles d'évolution du prix d'une denrée

Modèle	EDS	Prix théorique du contrat à terme
Black [1976]	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_1 S_t dZ_t^1,$ $\delta = \text{constant}, r = \text{constant}.$	$F_t = S_t e^{(r-\delta)(T-t)}.$
Brennan et Schwartz [1985]	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_1 S_t dZ_t^1,$ $\delta(S, t) = cS, r = \text{constant}.$	$\frac{1}{2} F_{ss} \sigma_1^2 S_t^2 + F_s (rS_t - \delta) - F_\tau = 0,$ <p>EDP sujet à</p> $F(S, \tau = 0) = S.$
Gibson et Schwartz [1990]	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_1 S_t dZ_t^1,$ $d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t) dt + \sigma_2 S_t dZ_t^2,$ $r = \text{constant}.$	$\frac{1}{2} F_{ss} \sigma_1^2 S_t^2 + F_{S\delta} S_t \rho \sigma_1 \sigma_2 + F_S S_t (r - \delta_t)$ $+ \frac{1}{2} F_{\delta\delta} \sigma_2^2 + F_\delta \kappa(\alpha - \delta_t) - F_\tau - rF = 0,$ <p>EDP sujet à</p> $F(S_t, \delta_t, \tau) = 0, F(S_T, \delta_T, 0) = 0.$
Schwartz [1997]	$dS_t = (r_t - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t dZ_t^1,$ $d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t) dt + \sigma_2 dZ_t^2,$ $dr_t = a(m - r_t) dt + \sigma_3 dZ_t^3.$	$F(S_t, \delta_t) = S_t \exp\left(\frac{-\delta_t(1-e^{-\kappa\tau})}{\kappa} + A(\tau)\right),$ $F(S_t, \delta_t, r_t) = S_t \exp\left(\frac{-\delta_t(1-e^{-\kappa\tau})}{\kappa}\right.$ $\left. + \frac{-r_t(1-e^{-a\tau})}{a} + C(\tau)\right).$
Hilliard et Reis [1998]	$dS_t = (r_t - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t dZ_t^1,$ $d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t) dt + \sigma_2 S_t dZ_t^2,$ $dr_t = (f_v(t, v) + k_r f(t, v) - k_r r_t$ $+ \frac{\sigma_r^2}{2k_r} (1 - e^{-2k_r(v-t)})) dt + \sigma_3 dZ_t^3.$	$F(S_t, \delta_t, r_t) = S_t M(\tau) D_1(\tau) D_2(\tau)$ $\times D_3(\tau) e^{-H\delta_t} \frac{1}{p(t, T)}.$
Casassus et Collin-Dufresne [2001]	$dX_t = (r_t - \delta_t - \frac{1}{2}\sigma_x^2) dt + \sigma_x dZ_t^1,$ $S_t = e^{X_t},$ $d\delta_t^1 = \kappa_\delta(\theta_\delta - \delta_t^1) dt + \sigma_\delta dZ_t^2,$ $\delta_t = \delta_t^1 + \alpha_r r_t + \alpha_x X_t,$ $dr_t = \kappa_r(\theta_r - r_t) dt + \sigma_r dZ_t^3.$	$F(t, T) = e^{A(T-t) + B(T-t)},$ $\frac{dA_\tau}{d\tau} = \frac{1}{2} B_\tau^t B_\tau, A_0 = \phi_0,$ $\frac{dB_\tau}{d\tau} = -k^t B_\tau, B_0 = \phi_y,$ <p>avec <math>X_t = \phi_0 + \phi_y^t Y_t, Y_t^t = (Y_t^1, Y_t^2, Y_t^3),</math></p> $dY_t = -k^Q Y_t dt + dZ_t^Q.$

où :

$S_t$  : le prix de la denrée à l'instant  $t$  ;

$\delta_t$  : le taux de rendement de détention de la denrée ;

$r_t$  : le taux d'intérêt sans risque ;

$F_t$  : le prix futur d'échéance  $T$  à l'instant  $t$ .

### 3 Modèles d'évolution du prix

Nous revoyons deux modèles d'évolution du cours d'une denrée. Chaque modèle décrit le prix du contrat à terme correspondant. Ensuite, nous présentons la méthode d'estimation utilisée pour calibrer chacun des modèles. Le premier modèle est un modèle à un facteur où le taux de rendement de détention est supposé non stochastique. Le deuxième modèle est un modèle à deux facteurs où le premier facteur est le prix comptant de la marchandise  $S_t$  et le deuxième facteur est le taux de rendement de détention  $\delta_t$ . Pour les deux modèles nous allons supposer que le taux d'intérêt reste constant au cours du temps. Mentionnons que dans l'étude empirique, nous allons tester les deux modèles en comparant les prix du contrat à terme déterminés par chaque modèle avec des prix des contrats à terme observés sur le marché.

Tout d'abord, il est important de noter que le prix d'une denrée  $S_t$  peut être considéré comme un instrument financier négociable. En fait, il y a un certain bénéfice lié à la détention de cette denrée, ce bénéfice peut être évalué par un taux de rendement de détention. Cependant, en vue de déterminer le portefeuille autofinancé, nous allons nous inspirer des concepts introduits dans l'ouvrage de Baxter et Rennie [1996]. Ainsi, nous considérons un portefeuille constitué initialement de  $S_0$ , et à chaque instant  $t$  où il y a une perception de bénéfice, ceci sera utilisé pour acheter un peu plus de marchandises. Dans ce contexte, nous définissons une autre variable aléatoire  $Y_t$  qui représentera la valeur du portefeuille associé à la denrée :

$$Y_t = S_t e^{\int_0^t \delta_s ds} \quad (1)$$

où  $\delta_s$  est le taux de rendement de détention de la marchandise et le processus stochastique  $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$  modélisera l'évolution du portefeuille autofinancé.

### 3.1 Modèle 1

C'est le modèle à un facteur introduit par Schwartz [1997], pour lequel nous admettons les hypothèses suivantes :

1. Le taux d'intérêt reste constant au cours du temps ;
2. Le logarithme du prix d'une denrée suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck ;
3. Le taux de rendement de détention de la denrée reste constant au cours du temps ;
4. L'écart-type instantané du rendement de la denrée est constant.

Sous les hypothèses ci-dessus nous formulons les équations différentielles stochastiques du titre non risqué  $B_t$ , compte bancaire qui nous servira de numéraire, et de l'actif  $S_t$  comme suit :

$$dB_t = rB_t dt, \quad (2)$$

$$dS_t = \kappa\left(\mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \ln S_t\right)S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3)$$

$$dS_t = \kappa(\mu - \ln S_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (4)$$

où

$$\mu = \mu^* - \frac{\delta}{\kappa}, \quad (5)$$

$r$  : le taux d'intérêt sans risque.

$\kappa > 0$  : la vitesse de retour vers la moyenne à long terme du logarithme du prix de la marchandise.

$\mu > 0$  : la moyenne à long terme du logarithme du prix de la marchandise.

$\sigma > 0$  : l'écart-type instantané du rendement de la marchandise.

$\delta$  : le taux de rendement de détention de la denrée ;

$W = \{W_t : 0 \leq t\}$  : le mouvement brownien standard construit sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ .

Rappelons que la filtration  $F = \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t\}$  décrit l'information disponible à chaque instant  $t$ .

Soulignons que ce modèle a l'avantage de générer des valeurs positives pour  $S_t$  tout en considérant un effet de retour vers la moyenne pour le logarithme du prix de la marchandise. En effet, nous définissons  $X_t = \ln S_t$  et appliquons le lemme d'Itô, le détail de calcul est présenté dans l'annexe A. Nous avons obtenu :

$$dX_t = \kappa(\alpha - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad (6)$$

$$\alpha = \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa}, \quad (7)$$

et la solution forte de l'équation différentielle stochastique (6) est donnée par :

$$X_t = X_0 e^{-\kappa t} + \alpha(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dW_s, \quad (8)$$

ce qui montre que le logarithme du prix est distribué selon une loi normale. De la même façon, nous avons dérivé l'équation différentielle stochastique représentant l'évolution de la valeur du portefeuille autofinancé associé à la marchandise  $S_t$ . La démonstration est présentée dans l'annexe B, nous avons obtenu :

$$dY_t = \kappa(\mu^* - \ln S_t)Y_t dt + Y_t \sigma dW_t. \quad (9)$$

Dans l'annexe C, nous avons montré que notre modèle de marché est complet. En conséquence, il n'admet pas d'opportunité d'arbitrage et tout droit contingent est accessible. De plus, sous la mesure neutre au risque, le prix d'un tel droit est donné par l'espérance des flux monétaires futurs actualisés au taux d'intérêt sans risque. Plus particulièrement, nous avons déterminé le prix d'un

contrat à terme  $F(S_t, t, T)$  dans l'annexe C.3, il est formulé comme suit :

$$F(S_t, t, T) = S_t \exp((r - \delta)(T - t)). \quad (10)$$

### 3.2 Modèle 2

C'est un modèle à deux facteurs pour lequel nous admettons les hypothèses suivantes :

1. Le taux d'intérêt reste constant au cours du temps ;
2. Le prix d'une denrée suit un processus dont la dérive dépend de son taux de rendement de détention ;
3. Le taux de rendement de détention de la denrée suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck ;
4. Les écarts-types instantanés du rendement de la denrée et du rendement du taux de détention sont constants ;
5. La corrélation entre le brownien du prix de la denrée et le brownien de son rendement de détention est supposée constante.

Sous les hypothèses ci-dessus nous formulons les équations différentielles stochastiques de la dynamique des processus du prix d'une part du titre non risqué  $B_t$  et du prix d'une denrée  $S_t$ , comme suit :

$$dB_t = rB_t dt, \quad (11)$$

$$dS_t = (\mu - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t^S, \quad (12)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dW_t^\delta, \quad (13)$$



où

$r$  : le taux d'intérêt sans risque.

$\mu > 0$  : le rendement instantané de la marchandise.

$\sigma_1 > 0$  : l'écart-type instantané du rendement de la marchandise.

$\kappa > 0$  : la vitesse de retour vers la moyenne.

$\alpha > 0$  : la moyenne à long terme du taux de rendement de détention de la marchandise.

$\sigma_2 > 0$  : l'écart-type instantané du taux de rendement de détention de la marchandise.

$W = \left\{ W_t = \begin{pmatrix} W_t^S \\ W_t^\delta \end{pmatrix} : 0 \leq t \leq T \right\}$  est le processus stochastique bidimensionnel qui représente la source d'incertitude dans le modèle 2. Les deux composantes  $W^S$  et  $W^\delta$  sont des mouvements browniens standards corrélés construits sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ , nous notons  $\rho$  cette corrélation.

Dans l'annexe D, nous avons dérivé l'équation différentielle stochastique représentant la dynamique de la valeur du portefeuille autofinancé  $Y_t$ , nous avons trouvé :

$$dY_t = \mu Y_t dt + \sigma_1 Y_t dW_t^S. \quad (14)$$

De plus, dans l'annexe E nous avons démontré que notre modèle de marché est incomplet et qu'il n'admet pas d'opportunité d'arbitrage. Toutefois, en supposant que la prime de risque est une constante  $\lambda^*$ , nous avons trouvé que le prix d'un contrat à terme vérifie l'équation suivante (voir l'annexe E.3) :

$$F(S_t, t, T) = S_t \exp \left[ \left( r - \alpha + \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} \right) (T - t) + \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^2} \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \right. \\ \left. + \left( \alpha - \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \delta_t + \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right]. \quad (15)$$

## 4 Estimation des paramètres

Avant d'utiliser un modèle, nous devons estimer ses paramètres. Pour cela nous allons utiliser une technique d'estimation qui permet d'incorporer toute l'information relative à la distribution des variables aléatoires. Cette technique est la méthode du maximum de vraisemblance qui permet l'estimation simultanée de plusieurs paramètres de chaque modèle. Rappelons brièvement qu'un estimateur est consistant lorsque celui-ci converge vers la valeur exacte à mesure que la taille de l'échantillon augmente, et qu'il est asymptotiquement efficient, lorsque de tous les estimateurs non biaisés, la plus petite variance est obtenue avec cet estimateur. Toutefois, chaque modèle associe le prix d'un contrat futur à un processus stochastique, ce qui implique l'existence d'autant de processus que de contrats futurs avec différentes maturités. En conséquence, il faut prendre en considération le facteur de corrélation des contrats futurs dans l'estimation des paramètres. Cela signifie que dans le cas de l'indépendance, la prévision des marchés liée à un contrat ne tient pas compte de l'information des autres. Dans le cas de la dépendance, l'interaction entre les contrats conduit au problème de multi processus associé à une dimension élevée qui ajoute un certain niveau de difficulté au problème d'estimation. Dans ce qui suit, nous allons présenter l'implémentation de la fonction de vraisemblance des deux modèles. Dans le cas de l'indépendance, nous allons considérer un seul contrat à terme. Et dans le cas de la dépendance, nous allons considérer plusieurs contrats à terme.

### 4.1 Méthode du maximum de vraisemblance utilisant un seul contrat à terme

En général, puisque le prix de la denrée est observable et que sa distribution est connue pour le modèle 1, nous allons appliquer d'une façon directe la technique du maximum de vraisemblance. Cependant, pour le modèle 2, nous avons besoin des séries chronologiques sur le taux de rendement

de détention pour estimer les paramètres du processus décrivant son évolution. Or, le taux  $\delta_t$  n'est pas observable sur le marché, alors, l'absence des données historiques rend l'estimation difficile des paramètres  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\sigma_2$ ,  $\rho$ , et  $\lambda^*$ . Afin de pallier à ce problème, nous allons nous inspirer de la méthodologie développée par Duan [1994] qui consiste à utiliser les données empiriques sur les variables observables en vue de trouver des estimés du maximum de vraisemblance pour les paramètres du processus de diffusion des variables non observables. Cette technique a été appliquée pour estimer les paramètres du modèle des taux courts de Vasicek et les paramètres nécessaires à l'évaluation d'une assurance dépôt (Duan [1994]) ; les paramètres du modèle de risque de crédit de Merton (Zaanoun [2000]) et les paramètres du taux de rendement de détention d'une marchandise (Blouin [2001]).

Par ailleurs, si nous avons un échantillon constitué de  $N$  observations  $(y_1, \dots, y_N)$  sur  $N$  variables  $(Y_1, \dots, Y_N)$  de même distribution, la fonction de vraisemblance de cet échantillon est définie comme suit :

$$L(y_1, y_2, \dots, y_N; \theta) = f(y_1, y_2, \dots, y_N | \theta),$$

où  $\theta$  représente le vecteur des paramètres à estimer, et  $f(\bullet | \theta)$  est la fonction de densité conjointe de l'échantillon. En principe, nous prenons la valeur de  $\theta$  qui maximise la vraisemblance d'obtenir l'échantillon que nous avons effectivement observé, c'est-à-dire, la valeur du vecteur  $\theta$  qui maximise la fonction de vraisemblance.

#### 4.1.1 Fonction de vraisemblance

##### Modèle 1 :

Nous allons considérer la variable  $X_t = \ln S_t$ . Ainsi, estimer les paramètres du processus de diffusion de  $S_t$  revient à estimer les paramètres du processus de diffusion de  $X_t$ . Cependant, la fonction de vraisemblance sachant l'ensemble d'observations  $\{X_{t\Delta_t} : t \in \{1, \dots, N\}\}$ , où  $\Delta_t$  est la

longueur de l'intervalle temps entre deux observations consécutives, est donnée par :

$$\begin{aligned}
& L(X_{\Delta t}, \dots, X_{N\Delta t}; \mu^*, \kappa, \sigma, \delta) \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{N-1} \times \left( \frac{\sqrt{2\kappa}}{\sigma\sqrt{1-e^{-2\kappa\Delta t}}} \right)^{N-1} \\
&\quad \times \prod_{i=2}^N \exp \left[ -\frac{\kappa(X_{i\Delta t} - X_{(i-1)\Delta t})e^{-\kappa\Delta t} - \left( \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \right) (1 - e^{-\kappa\Delta t})^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa\Delta t})} \right]. \tag{16}
\end{aligned}$$

Dans l'annexe F, nous avons décrit la démarche suivie pour obtenir la fonction (16). Puisque, la transformation logarithmique est monotone, le maximum des fonctions  $L(X_{\Delta t}, \dots, X_{N\Delta t}; \mu^*, \kappa, \sigma, \delta)$  et  $\ln L(X_{\Delta t}, \dots, X_{N\Delta t}; \mu^*, \kappa, \sigma, \delta)$  est atteint au même point. Par conséquent, nous allons chercher les valeurs des paramètres qui maximisent la fonction  $\ln L(X_{\Delta t}, \dots, X_{N\Delta t}; \mu^*, \kappa, \sigma, \delta)$ .

$$\begin{aligned}
& \ln L(X_{\Delta t}, \dots, X_{N\Delta t}; \mu^*, \kappa, \sigma, \delta) \\
&= -\frac{(N-1)}{2} \ln 2\pi + \frac{(N-1)}{2} [\ln 2\kappa - 2 \ln \sigma - \ln(1 - e^{-2\kappa\Delta t})] \\
&\quad - \frac{\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa\Delta t})} \sum_{i=2}^N \left( X_{i\Delta t} - X_{(i-1)\Delta t})e^{-\kappa\Delta t} - \left( \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \right) (1 - e^{-\kappa\Delta t}) \right)^2. \tag{17}
\end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que nous avons effectué des tests préalables pour estimer le vecteur  $\theta = (\mu^*, \kappa, \sigma, \delta)$  en maximisant la fonction (17). Il s'est avéré que les résultats obtenus n'étaient pas stables, en particulier les estimés de  $\mu^*$  et  $\delta$ . À cet égard, nous posons

$$\alpha = \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa},$$

et le vecteur des paramètres à estimer deviendra  $\theta = (\alpha, \kappa, \sigma)$ , tout en maximisant la fonction

suivante :

$$\begin{aligned}
L_1(\alpha, \kappa, \sigma) &= \frac{(N-1)}{2} \ln 2\kappa - (N-1) \ln \sigma - \frac{(N-1)}{2} \ln(1 - e^{-2\kappa\Delta t}) \\
&\quad - \frac{\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa\Delta t})} \sum_{i=2}^N (X_{i\Delta t} - X_{(i-1)\Delta t} e^{-\kappa\Delta t} - \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta t}))^2,
\end{aligned} \tag{18}$$

**Modèle 2 :**

Pour estimer les paramètres du modèle 2, nous avons besoin des séries chronologiques des variables  $S_t$  et  $\delta_t$ . Toutefois, le taux de rendement de détention d'une marchandise n'est pas observable sur le marché. C'est pour quoi nous allons utiliser la méthode de transformation de données en exploitant la relation fonctionnelle déterminée par l'équation (15) :

$$\begin{aligned}
F(S_t, t\Delta t, T_t\Delta t) &= \psi(\delta_{t\Delta t}, S_{t\Delta t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*) \\
&= S_{t\Delta t} \exp \left[ \left( r - \alpha + \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} \right) (T_t - t)\Delta t + \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^2} \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(T_t-t)\Delta t}}{\kappa} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \alpha - \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \delta_{t\Delta t} + \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa(T_t-t)\Delta t}}{\kappa} \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

Signalons que la fonction inverse  $\psi^{-1}(\bullet, S_{t\Delta t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*)$  existe et elle est donnée par la formule suivante (voir l'annexe G) :

$$\begin{aligned}
\delta_{t\Delta t} &= \psi^{-1}(F_{t\Delta t}, S_{t\Delta t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*) \\
&= \frac{\kappa}{1 - e^{-\kappa(T_t-t)\Delta t}} \left[ \ln \left( \frac{S_{t\Delta t}}{F_{t\Delta t}} \right) + \left( r - \alpha + \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} \right) (T_t - t)\Delta t \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^2} \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(T_t-t)\Delta t}}{\kappa} \right) \right] + \alpha - \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} + \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2}.
\end{aligned}$$

Mentionnons qu'afin d'alléger la notation nous avons posé  $F_{t\Delta_t} = F(S_t, t\Delta_t, T_t\Delta_t)$ . De toute évidence le taux de rendement de détention  $\delta_{t\Delta_t}$  non observable peut être déterminé en fonction des variables observables : le prix du contrat à terme sur la marchandise  $F_{t\Delta_t}$  et le prix de la marchandise  $S_{t\Delta_t}$ . En conséquence, à l'aide de la méthode de transformation des données nous pouvons obtenir la fonction de vraisemblance du modèle 2 qui utilise les variables observables au lieu des variables non observables. En effet, soit l'échantillon composé de  $N$  observations  $V = \left\{ \mathbf{V}_{t\Delta_t} = \begin{pmatrix} S_{t\Delta_t} \\ F_{t\Delta_t} \end{pmatrix} : t \in \{1, 2, \dots, N\} \right\}$ . Dans l'annexe G, nous avons détaillé la démarche suivie pour obtenir la fonction de vraisemblance de cet échantillon. Elle est définie comme suit :

$$\begin{aligned} & L(\mathbf{V}_{\Delta_t}, \dots, \mathbf{V}_{N\Delta_t}; \mu, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*) \\ &= \prod_{i=2}^N \frac{\kappa}{(1 - e^{-\kappa(T_i - i)\Delta_t}) S_{i\Delta_t} F_{i\Delta_t}} \\ & \prod_{i=2}^N \frac{1}{2\pi \sqrt{\|\Sigma_P\|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\phi^{-1}(\mathbf{V}_{i\Delta_t}) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_P(\mathbf{V}_{(i-1)\Delta_t}))' \Sigma_P^{-1} (\phi^{-1}(\mathbf{V}_{i\Delta_t}) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_P(\mathbf{V}_{(i-1)\Delta_t})) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

où  $\phi$  est la transformation bijective définie par

$$(\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t}) \xrightarrow{\phi} (S_{t\Delta_t}, F_{t\Delta_t}),$$

tel que

$$\phi(\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t}) = (S_{t\Delta_t}, \psi(\delta_{t\Delta_t}, S_{t\Delta_t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*)).$$

et

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_P(\mathbf{V}_{(i-1)\Delta_t}) = \begin{pmatrix} \ln(S_{(t-1)\Delta_t}) + \left( \mu - \frac{\sigma_1^2}{2} - \delta_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} - \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) \right) \Delta_t \\ \delta_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) \end{pmatrix},$$

et la matrice de variance-covariance  $\Sigma_p$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t^2 + \sigma_1^2 \Delta_t - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) \Delta_t & \rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) - \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t \\ \rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) - \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t & \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t \end{pmatrix}$$

Il est intéressant de noter à ce propos que la méthode du maximum de vraisemblance nous permet de trouver un estimé statistique pour la corrélation entre le prix de la denrée et son rendement de détention.

Par ailleurs, nous allons prendre les valeurs des paramètres :  $\mu, \sigma_1, \kappa, \alpha, \sigma_2, \rho$  et  $\lambda^*$  qui maximisent la fonction de vraisemblance (20) en vue de trouver les valeurs les plus vraisemblables selon nos observations sur l'ensemble  $V$ . Puisque la transformation logarithmique est monotone, le maximum de  $L(\mathbf{V}_{\Delta_t}, \dots, \mathbf{V}_{N\Delta_t}; \mu, \sigma_1, \kappa, \alpha, \sigma_2, \rho, \lambda^*)$  et  $\ln L(\mathbf{V}_{\Delta_t}, \dots, \mathbf{V}_{N\Delta_t}; \mu, \sigma_1, \kappa, \alpha, \sigma_2, \rho, \lambda^*)$  est atteint au même point. Ainsi, les estimés des paramètres :  $\mu, \sigma_1, \kappa, \alpha, \sigma_2, \rho$  et  $\lambda^*$  sont les solutions de la maximisation de la fonction suivante :

$$\begin{aligned} & \ln L(\mathbf{V}_{\Delta_t}, \dots, \mathbf{V}_{N\Delta_t}; \mu, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*) \\ &= -(N-1) \ln 2\pi + \sum_{i=2}^N \ln \left[ \frac{\kappa}{\sqrt{\|\Sigma_p\|} \times (1 - e^{-\kappa(T_i - i)\Delta_t}) S_{i\Delta_t} F_{i\Delta_t}} \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N (\phi^{-1}(\mathbf{V}_{i\Delta_t}) - \hat{\mu}_P(\mathbf{V}_{(i-1)\Delta_t}))' \Sigma_p^{-1} (\phi^{-1}(\mathbf{V}_{i\Delta_t}) - \hat{\mu}_P(\mathbf{V}_{(i-1)\Delta_t})). \end{aligned}$$

Comme les termes constants n'ont aucune influence dans le problème d'optimisation, nous allons

prendre les solutions de la maximisation de la fonction ci-dessous

$$\begin{aligned}
& L_2(\mu, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*) \\
&= (N-1) \left[ \ln \kappa - \frac{1}{2} \ln \|\Sigma_P\| \right] - \sum_{i=2}^N (\ln S_{i\Delta_t} + \ln F_{i\Delta_t}) - \sum_{i=2}^N \ln(1 - e^{-\kappa(T_i - i)\Delta_t}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N (\phi^{-1}(\mathbf{V}_{i\Delta_t}) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_P(\mathbf{V}_{(i-1)\Delta_t}))' \Sigma_P^{-1} (\phi^{-1}(\mathbf{V}_{i\Delta_t}) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_P(\mathbf{V}_{(i-1)\Delta_t})),
\end{aligned}$$

où

$$\|\Sigma_P\| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \left[ \Delta_t \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) - \rho^2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right)^2 \right],$$

et l'inverse de la matrice de variance-covariance  $\Sigma_P$  est donnée par la matrice

$$\left( \begin{array}{cc}
\frac{\sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right)}{\|\Sigma_P\|} & \frac{\sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t - \rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right)}{\|\Sigma_P\|} \\
\frac{\sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t - \rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right)}{\|\Sigma_P\|} & \frac{\sigma_1^2 \Delta_t + \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) \Delta_t}{\|\Sigma_P\|}
\end{array} \right)$$



Ainsi, si nous faisons les calculs matriciels, nous pourrons écrire la fonction  $L_2$  sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
& L_2(\mu, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*) \\
= & (N-1) \left[ \ln \kappa - \frac{1}{2} \ln \left( \sigma_1^2 \sigma_2^2 \left[ \left( \frac{1-e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t - \rho^2 \left( \frac{1-e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right)^2 \right] \right) \right] - \sum_{i=2}^N (\ln S_{i\Delta_t} + \ln F_{i\Delta_t}) \\
& - \sum_{i=2}^N \ln(1 - e^{-\kappa(T_t-i)\Delta_t}) - \frac{1}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2 \left[ \left( \frac{1-e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t - \rho^2 \left( \frac{1-e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right)^2 \right]} \\
& \times \sum_{i=2}^N \left[ \sigma_2^2 \left( \frac{1-e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \left[ \ln(S_{i\Delta_t}) - \ln(S_{(i-1)\Delta_t}) - \left( \mu - \frac{\sigma_1^2}{2} - \delta_{(i-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} - \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) \right) \Delta_t \right]^2 \right. \\
& + 2 \left[ \sigma_2^2 \left( \frac{1-e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t - \rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1-e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) \right] \\
& \times \left[ \ln(S_{i\Delta_t}) - \ln(S_{(i-1)\Delta_t}) - \left( \mu - \frac{\sigma_1^2}{2} - \delta_{(i-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} - \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) \right) \Delta_t \right] \\
& \times [F_{i\Delta_t} - \delta_{(i-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} - \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t})] + \left[ \sigma_2^2 \left( \frac{1-e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t^2 + \sigma_1^2 \Delta_t \right. \\
& \left. - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1-e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) \Delta_t \right] \times [F_{i\Delta_t} - \delta_{(i-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} - \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t})]^2, \tag{21}
\end{aligned}$$

où

$$\delta_{(i-1)\Delta_t} = \psi^{-1}(F_{(i-1)\Delta_t}, S_{(i-1)\Delta_t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*).$$

#### 4.1.2 Validation des estimés par la méthode Monte Carlo

Afin de valider la qualité des estimés obtenus par la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance nous allons effectuer une étude de Monte Carlo qui consiste à répéter un certain nombre de fois une procédure constituée de deux étapes.

##### Étape 1 : Construction d'une base de données

### Modèle 1 :

Tout d'abord, nous allons simuler une trajectoire du logarithme du prix de la denrée  $X = \{X_{t\Delta_t} = \ln S_{t\Delta_t} : t \in \{1, \dots, N\}\}$ . Pour ce faire, nous utiliserons :

$$X_{t\Delta_t} = X_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) + \sqrt{\frac{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa\Delta_t})}{2\kappa}} Z_{t\Delta_t}, \quad (22)$$

où l'ensemble  $\{Z_{k\Delta_t} : k \in \{1, \dots, N\}\}$  est constituée d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale  $N(0, 1)$ . Cependant, nous allons fixer au départ la valeur initiale  $X_0$ , la longueur de l'intervalle d'observation  $\Delta_t$ , le nombre d'observation  $N$  et le vecteur des paramètres  $\theta = (\alpha, \kappa, \sigma)$  avec

$$\alpha = \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa}.$$

### Modèle 2 :

Sachons que le titre risqué et son taux de rendement de détention vérifient les deux équations :

$$\begin{aligned} S_{t\Delta_t} &\approx S_{(t-1)\Delta_t} \exp \left[ \left( \mu - \delta_{t\Delta_t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \Delta_t + \sigma_1 (W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S) \right], \\ \delta_{t\Delta_t} &= \delta_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) + \sigma_2 e^{-\kappa t \Delta_t} \int_{(t-1)\Delta_t}^{t\Delta_t} e^{\kappa s} dW_s^\delta, \end{aligned}$$

où les deux mouvements browniens  $W^S$  et  $W^\delta$  sont corrélés. Nous allons simuler une trajectoire du titre  $S = \{S_{t\Delta_t} : t = 1, \dots, N\}$  et du taux  $\delta = \{\delta_{t\Delta_t} : t = 1, \dots, N\}$  en utilisant les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} S_{t\Delta_t} &= S_{(t-1)\Delta_t} \exp \left[ \left( \mu - \delta_{t\Delta_t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \Delta_t + \sigma_1 \rho \sqrt{\Delta_t} Z_{t\Delta_t}^1 + \sigma_1 \sqrt{(1 - \rho^2) \Delta_t} Z_{t\Delta_t}^2 \right], \\ \delta_{t\Delta_t} &= \delta_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) + \sqrt{\frac{\sigma_2^2(1 - e^{-2\kappa\Delta_t})}{2\kappa}} Z_{t\Delta_t}^1, \end{aligned}$$

où  $\{Z_{k\Delta t}^1 : k \in \{1, \dots, N\}\}$  et  $\{Z_{k\Delta t}^2 : k \in \{1, \dots, N\}\}$  sont deux suites indépendantes constituées de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi normale  $N(0, 1)$ . Toutefois, nous allons fixer au départ les valeurs initiales  $S_0$  et  $\delta_0$ , la longueur du pas du temps  $\Delta t$ , le nombre d'observation  $N$ , le vecteur des paramètres  $\theta = (\mu, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*)$ , le taux d'intérêt sans risque  $r$  et l'échéance  $T_t = T$  qui va être une maturité constante. Nous avons choisi  $T$  égal à 2 ans. Par la suite, nous allons utiliser l'équation (15) pour déduire une trajectoire du prix théorique du contrat à terme  $F = \{F_{t\Delta t} : t = 1, \dots, N\}$ .

## Étape 2 : Détermination des estimés des paramètres

Étant donné les réalisations simulées, l'estimé du vecteur de paramètres  $\theta$  est la valeur qui maximise la fonction de vraisemblance  $L_i$  pour chaque modèle  $i = 1, 2$ . Afin de résoudre les problèmes de maximisation, nous utiliserons la méthode numérique dite «d'ascension rapide» adaptée aux fonctions quadratiques. C'est un algorithme développé par Goldfeld, Quandt et Trotter [1996]. Cependant, pour minimiser les chances que cet algorithme soit captif d'un optimum local, nous avons étudié dans l'annexe H, la convexité de la fonction de vraisemblance de chaque modèle.

Signalons en passant que la plus grande difficulté dans l'implémentation de la méthode d'estimation dans l'étude empirique, réside dans l'optimisation de la fonction de vraisemblance. En particulier l'existence et l'unicité de l'optimum global. Afin de pallier à ce problème, notre étude s'appuiera sur les travaux de Herbert E. Robbins [1968]. Par conséquent, nous allons présenter le vecteur des paramètres estimés  $\theta$ , avec un estimé de la probabilité de ne pas avoir atteint l'optimum global (voir l'annexe I), et une probabilité d'occurrence. Cette dernière est déduite en divisant le nombre de fois où le vecteur estimé est apparu comme solution optimale, sur le nombre de points d'amorçage utilisés pour lancer l'algorithme d'optimisation.

### 4.1.3 Résultats et analyses

#### Modèle 1 :

Après avoir testé notre simulation sur des données réelles, nous avons choisi les paramètres suivants pour effectuer l'étude de Monte Carlo : le vecteur des paramètres  $\theta = (\alpha = 0.22, \kappa = 2.5, \sigma = 0.05)$  avec  $\mu^* = 0.3$  et  $\delta = 0.2$ ; la valeur initiale  $X_0 = 1.6$ , la longueur du pas du temps  $\Delta_t = \frac{1}{365}$ , l'échéance  $T$  égale à 2 ans et le nombre de trajectoire à simuler égale à 5000. Afin d'étudier l'influence du nombre d'observations  $N$ , sur l'estimation des paramètres, nous avons étudié les cas suivants :  $N \in \{365, 730, 1095, 1460, 1825, 10000\}$ .

Après avoir simulé et estimé 5000 fois le modèle, pour l'ensemble des  $N$  observations considérées, nous avons constaté que l'algorithme d'optimisation converge 5000 fois pour les 5000 trajectoires simulés. En vue de comparer la rapidité de la convergence, nous avons enregistré pour chaque simulation le temps et le nombre d'itération nécessaires pour atteindre un optimum. Ainsi, l'algorithme a réalisé le meilleure temps dans la cas où  $N = 730$  observations et le minimum d'itération possible dans le cas où  $N \geq 1460$  observations. Le tableau 1 résume ces constatations :

Table 1: Le temps moyen et le nombre d'itération moyen nécessaires à la convergence de l'algorithme d'optimisation pour le modèle 1.

	Temps moyen en seconde	Nombre moyen d'itérations
365 observations	0.14	4.6
730 observations	0.13	4.2
1095 observations	0.13	4.0
1460 observations	0.14	3.9
1825 observations	0.14	3.9
10000 observations	0.33	3.9

Cependant, le tableau 2 reporte les résultats des estimations obtenus . Pour tous les cas étudiés,

nous remarquons que la médiane et la moyenne de tous les estimés sont très proches de leurs vraies valeurs. De plus, la réduction des écarts types s'améliore avec l'augmentation du nombre d'observations  $N$ . Par ailleurs, pour chaque paramètre estimé, nous avons calculé à différents seuils de confiance, la proportion des 5000 intervalles de confiance qui contenaient le vrai paramètre. Ces intervalles de confiance sont construits en utilisant la distribution asymptotique de l'estimateur, c'est à dire la loi normale. Le tableau 3 reporte les résultats obtenus. Mentionnons en outre que l'intervalle de confiance présenté pour chaque paramètre, est calculé en utilisant la moyenne et l'écart type estimé de ce dernier. Après analyse, il ressort que dans les différents cas de  $N$ , les estimés  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\kappa}$  et  $\hat{\sigma}$  sont probablement distribués selon une loi normale.

Table 2: Résultats de l'étude de Monte Carlo effectuée pour 5000 trajectoires afin de valider la qualité des estimés de la méthode de vraisemblance pour le modèle 1

		$\alpha$	$\kappa$	$\sigma$
	Valeur exacte	0.2195	2.500	0.0500
365 observations	Moyenne	0.2194	2.5076	0.0498
	Médiane	0.2204	2.5045	0.0499
	Écart-type	0.0361	0.1448	0.0019
730 observations	Moyenne	0.2191	2.5046	0.0499
	Médiane	0.2191	2.5032	0.0499
	Écart-type	0.0185	0.105	0.0013
1095 observations	Moyenne	0.2198	2.506	0.0499
	Médiane	0.2200	2.503	0.0499
	Écart-type	0.0134	0.0917	0.0011
1460 observations	Moyenne	0.2195	2.5046	0.0499
	Médiane	0.2197	2.5039	0.0499
	Écart-type	0.0110	0.0914	0.0009
1825 observations	Moyenne	0.2197	2.5045	0.0500
	Médiane	0.2197	2.504	0.0500
	Écart-type	0.0097	0.0874	0.0008
10000 observations	Moyenne	0.2196	2.5057	0.0500
	Médiane	0.2197	2.5049	0.0500
	Écart-type	0.0038	0.0811	0.0004

Table 3: Les proportions estimées et intervalles de confiance du modèle 1 dans les différents cas de  $N$  dans le cas où un seul contrat est utilisé.

		$\alpha_{95\%}$		$\alpha_{75\%}$		$\alpha_{50\%}$		$\alpha_{25\%}$	
		Pr	IC	Pr	IC	Pr	IC	Pr	IC
$N = 365$	$\alpha$	0.94	[0.149, 0.290]	0.74	[0.178, 0.261]	0.49	[0.195, 0.244]	0.24	[0.208, 0.231]
	$\kappa$	0.94	[2.224, 2.791]	0.75	[2.341, 2.674]	0.50	[2.410, 2.605]	0.26	[2.461, 2.554]
	$\sigma$	0.94	[0.046, 0.053]	0.75	[0.048, 0.052]	0.50	[0.049, 0.051]	0.25	[0.049, 0.050]
$N = 730$	$\alpha$	0.95	[0.183, 0.255]	0.74	[0.198, 0.240]	0.50	[0.207, 0.232]	0.24	[0.213, 0.225]
	$\kappa$	0.95	[2.299, 2.710]	0.74	[2.384, 2.625]	0.49	[2.434, 2.575]	0.25	[2.471, 2.538]
	$\sigma$	0.95	[0.047, 0.052]	0.74	[0.048, 0.051]	0.50	[0.049, 0.051]	0.25	[0.049, 0.050]
$N = 1095$	$\alpha$	0.95	[0.194, 0.246]	0.75	[0.204, 0.235]	0.50	[0.211, 0.229]	0.25	[0.216, 0.224]
	$\kappa$	0.96	[2.326, 2.686]	0.77	[2.401, 2.611]	0.51	[2.444, 2.568]	0.25	[2.477, 2.535]
	$\sigma$	0.95	[0.048, 0.052]	0.75	[0.048, 0.051]	0.50	[0.049, 0.051]	0.25	[0.049, 0.050]
$N = 1460$	$\alpha$	0.95	[0.194, 0.246]	0.75	[0.204, 0.235]	0.50	[0.211, 0.229]	0.25	[0.216, 0.224]
	$\kappa$	0.96	[2.326, 2.686]	0.77	[2.401, 2.611]	0.51	[2.444, 2.568]	0.25	[2.477, 2.535]
	$\sigma$	0.95	[0.048, 0.052]	0.75	[0.048, 0.051]	0.50	[0.049, 0.051]	0.25	[0.049, 0.050]
$N = 1825$	$\alpha$	0.95	[0.201, 0.238]	0.76	[0.209, 0.231]	0.51	[0.213, 0.226]	0.26	[0.217, 0.223]
	$\kappa$	0.95	[2.333, 2.676]	0.76	[2.404, 2.605]	0.50	[2.445, 2.563]	0.26	[2.477, 2.532]
	$\sigma$	0.95	[0.048, 0.052]	0.73	[0.049, 0.051]	0.48	[0.049, 0.050]	0.24	[0.049, 0.050]
$N = 10^4$	$\alpha$	0.96	[0.212, 0.227]	0.76	[0.215, 0.224]	0.50	[0.217, 0.222]	0.25	[0.218, 0.221]
	$\kappa$	0.95	[2.347, 2.665]	0.75	[2.412, 2.599]	0.50	[2.451, 2.560]	0.25	[2.480, 2.531]
	$\sigma$	0.95	[0.049, 0.051]	0.75	[0.049, 0.050]	0.50	[0.049, 0.050]	0.24	[0.049, 0.050]

1.IC est l'intervalle de confiance calculé en utilisant la moyenne et l'écart type estimés au tableau 2.

2.Pr est la proportion des 5000 intervalles de confiance qui contenaient le vrai paramètre. Ces intervalles de confiance sont construits en utilisant la loi normale.

## Modèle 2 :

Après avoir effectué notre simulation sur des données réelles, nous avons choisi les paramètres suivants pour reproduire l'étude de Monte Carlo : le vecteur des paramètres  $\theta = (\mu = 0.04, \sigma_1 = 0.02, \alpha = 0.08, \kappa = 1.5, \sigma_2 = 0.025, \rho = 0.5, \lambda^* = 5)$  ; les valeurs initiales  $(S_0 = 45, \delta_0 = 0.09)$  ; le taux d'intérêt  $r = 0.05$  ; la longueur du pas du temps  $\Delta_t = \frac{1}{365}$  ; l'échéance  $T$  égale à 2 ans et le nombre de trajectoire à simuler égale à 5000. Comme dans le cas du modèle 1, pour le nombre d'observation  $N$ , nous avons étudié les cas suivants :  $N \in \{365, 730, 1095, 1460, 1825, 10000\}$ .

Le modèle 2 a été simulé et estimé pour tout  $N$  considéré. Toutefois, pour chaque nombre d'observations  $N$ , l'algorithme d'optimisation a convergé 5000 fois pour les 5000 trajectoires simulés. Cependant, nous remarquons que le meilleur temps moyen réalisé est dans le cas où  $N = 730$ . Alors qu'à partir de  $N \geq 1460$  observations, il demeure relativement élevé. Par contre, le nombre moyen d'itérations s'améliore au fur et à mesure que le nombre d'observations augmente. Le tableau 4 résume ces observations.

Table 4: Le temps moyen et le nombre d'itération moyen nécessaires à la convergence de l'algorithme d'optimisation pour le modèle 2.

	Temps moyen en seconde	Nombre moyen d'itérations
365 observations	1.95	26
730 observations	1.63	14
1095 observations	1.82	12
1460 observations	2.25	11
1825 observations	2.63	11
10000 observations	14.11	11

Les résultats du modèle 2 sont reportés dans le tableau 5. Pour tous les cas de  $N$  choisis, il apparaît clairement que les estimés du maximum de vraisemblance  $\hat{\mu}, \hat{\sigma}_1, \hat{\alpha}, \hat{\kappa}, \hat{\sigma}_2, \hat{\rho}$  et  $\hat{\lambda}^*$  ne sont pas biaisés.



Néanmoins, la précision de l'estimé  $\hat{\lambda}^*$  n'est pas satisfaisante dans le cas où la taille de l'échantillon  $N$  est moins de 730 observations. En effet, nous remarquons que l'écart-type de  $\hat{\lambda}^*$  demeure élevé pour les premiers cas, au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente la précision de  $\hat{\lambda}^*$  s'améliore. Dans le tableau 6, nous avons présenté les probabilités estimées à différents seuils de confiance pour les différents cas de  $N$ . Après analyse, nous avons remarqué que dans le cas où  $N = 365$ , la normalité asymptotique n'est pas encore atteinte pour  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\lambda}^*$ . Effectivement, l'estimation de la probabilité au niveau  $\alpha_{95\%}$  est égale à 87% pour  $\hat{\mu}$ , et à 82% pour  $\hat{\lambda}^*$ . C'est à partir de  $N = 730$ , que la probabilité estimée de  $\hat{\mu}$  a eu une légère amélioration par rapport à celle de  $\hat{\lambda}^*$ . Il en ressort que les estimés du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle 2, en utilisant un seul contrat, semblent avoir une distribution normale.

Table 5: Résultats de l'étude de Monte Carlo effectuée pour 5000 trajectoires afin de valider la qualité des estimés de la méthode de vraisemblance pour le modèle 2

		$\mu$	$\sigma_1$	$\alpha$	$\kappa$	$\sigma_2$	$\rho$	$\lambda^*$
	Valeur exacte	0.0400	0.0200	0.0800	1.5000	0.0250	0.5000	5.0000
365 observations	Moyenne	0.0447	0.0200	0.0795	1.5267	0.0251	0.4984	5.2198
	Médiane	0.0406	0.0199	0.0799	1.5175	0.0250	0.4994	4.9743
	Écart-type	0.0298	0.0007	0.0257	0.3273	0.0020	0.0393	3.1692
730 observations	Moyenne	0.0408	0.0200	0.0801	1.5105	0.0251	0.4996	5.0132
	Médiane	0.0395	0.0200	0.0800	1.5052	0.0250	0.5003	4.9704
	Écart-type	0.0229	0.0005	0.0129	0.1518	0.0015	0.0274	1.6721
1095 observations	Moyenne	0.0401	0.0200	0.0799	1.5075	0.0251	0.4998	4.9998
	Médiane	0.0400	0.0200	0.0799	1.5062	0.0251	0.5002	5.0020
	Écart-type	0.0182	0.0004	0.0124	0.1095	0.0013	0.0232	1.1867
1460 observations	Moyenne	0.0405	0.0200	0.0804	1.5081	0.0251	0.5000	5.0452
	Médiane	0.0406	0.0200	0.0804	1.5033	0.0250	0.5003	5.0576
	Écart-type	0.0161	0.0004	0.0118	0.0958	0.0013	0.0198	0.9738
1825 observations	Moyenne	0.0400	0.0200	0.0800	1.5072	0.0251	0.5000	5.0103
	Médiane	0.0399	0.0200	0.0799	1.5041	0.0250	0.5005	5.0054
	Écart-type	0.0144	0.0003	0.0109	0.0869	0.0012	0.0176	0.8358
10000 observations	Moyenne	0.0402	0.0200	0.0803	1.5068	0.0251	0.5001	5.0163
	Médiane	0.0400	0.0200	0.0801	1.5056	0.0251	0.5002	5.0084
	Écart-type	0.0070	0.0001	0.0065	0.0686	0.0011	0.0075	0.4033

Table 6: Les proportions estimées et intervalles de confiance du modèle 2 dans les différents cas de  $N$  dans le cas où un seul contrat est utilisé.

		$\alpha_{95\%}$		$\alpha_{75\%}$		$\alpha_{50\%}$		$\alpha_{25\%}$	
		Pr	IC	Pr	IC	Pr	IC	Pr	IC
$N = 365$	$\mu$	0.87	[0.014, 0.103]	0.71	[0.010, 0.079]	0.51	[0.025, 0.065]	0.28	[0.035, 0.054]
	$\sigma_1$	0.94	[0.018, 0.021]	0.74	[0.019, 0.021]	0.50	[0.019, 0.020]	0.25	[0.019, 0.020]
	$\alpha$	0.95	[0.029, 0.130]	0.76	[0.049, 0.109]	0.50	[0.062, 0.097]	0.24	[0.071, 0.088]
	$\kappa$	0.94	[0.885, 2.168]	0.74	[1.150, 1.903]	0.48	[1.306, 1.747]	0.24	[1.422, 1.631]
	$\sigma_2$	0.94	[0.021, 0.029]	0.75	[0.023, 0.027]	0.49	[0.024, 0.026]	0.24	[0.024, 0.026]
	$\rho$	0.94	[0.421, 0.575]	0.76	[0.453, 0.544]	0.51	[0.472, 0.525]	0.25	[0.486, 0.511]
	$\lambda^*$	0.82	[0.992, 11.431]	0.68	[1.574, 8.865]	0.49	[3.082, 7.357]	0.27	[4.210, 6.230]
$N = 730$	$\mu$	0.93	[0.004, 0.086]	0.74	[0.014, 0.067]	0.53	[0.025, 0.056]	0.28	[0.033, 0.048]
	$\sigma_1$	0.95	[0.019, 0.021]	0.75	[0.019, 0.021]	0.50	[0.019, 0.020]	0.25	[0.019, 0.020]
	$\alpha$	0.93	[0.055, 0.105]	0.76	[0.065, 0.095]	0.52	[0.071, 0.089]	0.26	[0.076, 0.084]
	$\kappa$	0.95	[1.213, 1.808]	0.75	[1.336, 1.685]	0.50	[1.408, 1.613]	0.25	[1.462, 1.559]
	$\sigma_2$	0.95	[0.022, 0.028]	0.75	[0.023, 0.027]	0.50	[0.024, 0.026]	0.25	[0.025, 0.025]
	$\rho$	0.95	[0.446, 0.553]	0.76	[0.468, 0.531]	0.50	[0.481, 0.518]	0.25	[0.491, 0.508]
	$\lambda^*$	0.92	[1.736, 8.290]	0.74	[3.090, 6.937]	0.52	[3.885, 6.141]	0.26	[4.480, 5.546]
$N = 1095$	$\mu$	0.94	[0.004, 0.076]	0.77	[0.019, 0.061]	0.53	[0.028, 0.052]	0.26	[0.034, 0.046]
	$\sigma_1$	0.95	[0.019, 0.021]	0.75	[0.019, 0.020]	0.49	[0.019, 0.020]	0.24	[0.019, 0.020]
	$\alpha$	0.94	[0.056, 0.104]	0.75	[0.066, 0.094]	0.51	[0.071, 0.088]	0.27	[0.076, 0.084]
	$\kappa$	0.95	[1.293, 1.722]	0.76	[1.382, 1.633]	0.50	[1.434, 1.581]	0.25	[1.473, 1.542]
	$\sigma_2$	0.95	[0.022, 0.027]	0.75	[0.024, 0.027]	0.51	[0.024, 0.025]	0.25	[0.024, 0.025]
	$\rho$	0.94	[0.454, 0.545]	0.74	[0.473, 0.526]	0.48	[0.484, 0.515]	0.24	[0.492, 0.507]
	$\lambda^*$	0.94	[2.674, 7.326]	0.75	[3.635, 6.365]	0.52	[4.199, 5.800]	0.25	[4.622, 5.378]
$N = 1460$	$\mu$	0.93	[0.009, 0.072]	0.77	[0.022, 0.059]	0.52	[0.030, 0.051]	0.26	[0.035, 0.046]
	$\sigma_1$	0.94	[0.019, 0.021]	0.74	[0.019, 0.020]	0.50	[0.019, 0.020]	0.25	[0.019, 0.020]
	$\alpha$	0.94	[0.057, 0.103]	0.75	[0.067, 0.094]	0.51	[0.072, 0.088]	0.27	[0.077, 0.084]
	$\kappa$	0.95	[1.320, 1.696]	0.75	[1.398, 1.618]	0.50	[1.443, 1.573]	0.26	[1.478, 1.539]
	$\sigma_2$	0.95	[0.023, 0.027]	0.75	[0.024, 0.026]	0.51	[0.024, 0.026]	0.26	[0.025, 0.025]
	$\rho$	0.95	[0.461, 0.539]	0.74	[0.477, 0.523]	0.49	[0.487, 0.513]	0.24	[0.494, 0.506]
	$\lambda^*$	0.94	[3.137, 6.954]	0.75	[3.925, 6.165]	0.51	[4.388, 5.702]	0.26	[4.735, 5.355]

Table 7: Suite du tableau représentant les proportions estimées et intervalles de confiance du modèle 2 dans les différents cas de  $N$ .

		$\alpha_{95\%}$		$\alpha_{75\%}$		$\alpha_{50\%}$		$\alpha_{25\%}$	
		Pr	IC	Pr	IC	Pr	IC	Pr	IC
$N = 1825$	$\mu$	0.95	[0.012, 0.068]	0.76	[0.023, 0.057]	0.51	[0.030, 0.050]	0.25	[0.035, 0.045]
	$\sigma_1$	0.95	[0.019, 0.021]	0.74	[0.019, 0.020]	0.49	[0.019, 0.020]	0.25	[0.019, 0.020]
	$\alpha$	0.95	[0.059, 0.101]	0.76	[0.068, 0.093]	0.51	[0.073, 0.087]	0.26	[0.077, 0.083]
	$\kappa$	0.95	[1.337, 1.677]	0.75	[1.407, 1.607]	0.52	[1.449, 1.566]	0.27	[1.479, 1.535]
	$\sigma_2$	0.95	[0.023, 0.027]	0.76	[0.024, 0.026]	0.51	[0.024, 0.026]	0.26	[0.025, 0.025]
	$\rho$	0.95	[0.465, 0.534]	0.75	[0.478, 0.520]	0.49	[0.488, 0.512]	0.25	[0.494, 0.506]
	$\lambda^*$	0.95	[3.372, 6.648]	0.76	[4.049, 5.972]	0.51	[4.447, 5.574]	0.25	[4.744, 5.277]
$N = 10^4$	$\mu$	0.95	[0.027, 0.054]	0.76	[0.032, 0.048]	0.51	[0.035, 0.045]	0.25	[0.038, 0.042]
	$\sigma_1$	0.95	[0.019, 0.020]	0.75	[0.019, 0.020]	0.49	[0.019, 0.020]	0.24	[0.020, 0.020]
	$\alpha$	0.95	[0.068, 0.093]	0.75	[0.073, 0.088]	0.50	[0.076, 0.085]	0.26	[0.078, 0.082]
	$\kappa$	0.95	[1.372, 1.641]	0.74	[1.428, 1.586]	0.49	[1.460, 1.553]	0.25	[1.485, 1.529]
	$\sigma_2$	0.95	[0.023, 0.027]	0.74	[0.024, 0.026]	0.48	[0.024, 0.026]	0.25	[0.025, 0.025]
	$\rho$	0.95	[0.485, 0.515]	0.75	[0.491, 0.509]	0.50	[0.495, 0.505]	0.24	[0.498, 0.502]
	$\lambda^*$	0.95	[4.226, 5.807]	0.76	[4.552, 5.480]	0.51	[4.744, 5.288]	0.25	[4.888, 5.145]

1.IC est l'intervalle de confiance calculé en utilisant la moyenne et l'écart type estimés au tableau 2.

2.Pr est la proportion des 5000 intervalles de confiance qui contenaient le vrai paramètre. Ces intervalles de confiance sont construits en utilisant la loi normale.

## 4.2 Méthode du maximum de vraisemblance utilisant plusieurs contrats à terme

Afin d'étudier l'impact du facteur de corrélation des contrats futurs sur l'estimation des paramètres, nous allons appliquer la méthode du maximum de vraisemblance utilisant plusieurs contrats à terme. Dans ce paragraphe, nous allons décrire le développement mathématique qui permet d'établir l'implémentation de la méthode d'estimation pour les deux modèles en considérant plusieurs contrats à terme. Pour cela, notons par  $F(t, T)$  le prix théorique du contrat futur,  $\bar{F}(t, T)$  le prix observé sur le marché,  $n$  le nombre de contrat à considérer et  $N$  le nombre d'observations.

### 4.2.1 Modèle 1

Tout d'abord, nous allons maximiser la fonction de vraisemblance (18) en vue d'estimer le vecteur des paramètres  $\theta = (\alpha, \kappa, \sigma)$ , avec

$$\alpha = \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa}. \quad (23)$$

Par la suite, rappelons que l'équation (10) donne le prix théorique du contrat futur déduit à partir du modèle 1. En d'autre terme, pour tout couple  $(t, T_i)$  nous avons :

$$\ln F(t, T_i) = \ln S_t + (r - \delta)(T_i - t).$$

Sachant que  $X_t = \ln S_t$  est un observable, pour estimer le taux de rendement de détention  $\delta$ , nous effectuerons la méthode des moindres carrés. C'est-à-dire, pour une série de  $n$  contrats à terme et

$N$  observations, la fonction à minimiser sera :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^N [\ln \bar{F}(t, T_i) - \ln F(t, T_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^N [\ln \bar{F}(t, T_i) - X_t - (r - \delta)(T_i - t)]^2. \end{aligned}$$

Nous définissons la fonction d'estimation suivante :

$$G_{n,N}(\delta) = - \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^N [\ln \bar{F}(t, T_i) - X_t - (r - \delta)(T_i - t)]^2,$$

et nous appliquerons la méthode «d'ascension rapide» pour la maximiser. Une fois  $\alpha, \kappa, \sigma$  et  $\delta$  déterminés, nous utiliserons l'équation (23) pour estimer  $\mu^*$  :

$$\mu^* = \alpha + \frac{\delta}{\kappa} + \frac{\sigma^2}{2\kappa}.$$

#### 4.2.2 Modèle 2

D'une part, nous avons vu qu'à l'instant  $t\Delta_t$ , le prix comptant de la denrée vérifie l'équation suivante

$$\ln S_{t\Delta_t} - \ln S_{(t-1)\Delta_t} \approx \left( \mu - \delta_{t\Delta_t} - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \Delta_t + \sigma_1 (W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S),$$

D'autre part, l'équation (19) nous donne pour tout couple  $(t, T_i)$  :

$$\begin{aligned} \ln F(t\Delta_t, T_i) &= \ln S_{t\Delta_t} - \delta_{t\Delta_t} \left( \frac{1 - e^{-\kappa(T_i - t\Delta_t)}}{\kappa} \right) + \left( r - \alpha + \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} \right) (T_i - t\Delta_t) \\ &+ \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^2} \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(T_i - t\Delta_t)}}{\kappa} \right) + \left( \alpha - \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} + \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa(T_i - t\Delta_t)}}{\kappa}. \end{aligned}$$

Ainsi, sachant que  $\delta_t$  est non observable, nous utiliserons la technique du filtre de Kalman pour déduire la fonction de vraisemblance (voir l'annexe J). Ci-dessous, nous présentons l'équation de mesure, de transition et le choix des valeurs initiales.

**Équation de mesure :** Pour tout  $t$ , nous posons :

$$Z_t = \begin{bmatrix} \ln S_{t\Delta_t} - \ln S_{(t-1)\Delta_t} \\ \ln F(t\Delta_t, T_1) - \ln S_{t\Delta_t} \\ \ln F(t\Delta_t, T_2) - \ln S_{t\Delta_t} \\ \dots \\ \ln F(t\Delta_t, T_n) - \ln S_{t\Delta_t} \end{bmatrix}, H_t = \begin{bmatrix} -\Delta_t \\ \frac{1 - e^{-\kappa(T_1 - t\Delta_t)}}{\kappa} \\ \frac{1 - e^{-\kappa(T_2 - t\Delta_t)}}{\kappa} \\ \dots \\ \frac{1 - e^{-\kappa(T_n - t\Delta_t)}}{\kappa} \end{bmatrix} \text{ et } h_t = \begin{bmatrix} \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \Delta_t \\ A_t(T_1) \\ A_t(T_2) \\ \dots \\ A_t(T_n) \end{bmatrix},$$

où

$$A_t(T_i) = \left( r - \alpha + \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} \right) (T_i - t\Delta_t) + \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^2} \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(T_i - t\Delta_t)}}{\kappa} \right) + \left( \alpha - \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} + \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa(T_i - t\Delta_t)}}{\kappa}.$$

Nous obtiendrons l'équation de mesure suivante :

$$Z_t = H_t \delta_t + h_t + \varepsilon_t,$$

où

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \sigma_1 (W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\varepsilon_t$  est une variable aléatoire de dimension  $n$ , supposée normalement distribuée avec une moyenne nulle et matrice de covariance

$$Q_t^\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \Delta_t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

**Équation de transition :** Nous allons utiliser l'équation différentielle stochastique (13). Si nous effectuons une approximation d'Euler, nous aurons l'équation de transition suivante

$$\delta_{t\Delta_t} = W\delta_{(t-1)\Delta_t} + w + \eta_t,$$

où

$$W = 1 - \kappa\Delta_t ; w = \kappa\alpha\Delta_t ; \eta_t = \sigma_2 (W_{t\Delta_t}^\delta - W_{(t-1)\Delta_t}^\delta),$$

et  $\eta$  est une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne nulle et de variance

$$Var(\eta_t) = \sigma_2^2 \Delta_t.$$



**Les conditions initiales :** Pour amorcer le processus itératif de Kalman, nous devons préciser les valeurs initiales liées à la variable  $\delta_t$ . Il s'agit de  $\hat{\delta}_0^- = E[\delta_0]$  et  $P_0 = Q_0^\delta$ , où  $Q_0^\delta$  est la variance de  $\delta_0$ . En vue de trouver une approximation de  $E[\delta_0]$ , pour chaque  $T_i$ , nous utiliserons l'équation :

$$\ln \bar{F}(t_0, T_i) = \ln S_{t_0} + (r - \delta_{0,i})(T_i - t_0),$$

où  $t_0$  est l'instant qui précède la première observation. Ainsi, nous choisissons les conditions initiales comme suit :

$$\hat{\delta}_0^- = r + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\ln S_{t_0} - \ln \bar{F}(t_0, T_i)}{T_i - t_0},$$

pour  $P_0$ , nous allons considérer qu'elle peut être estimée par :

$$\begin{aligned} P_0 &= \text{Var}(\delta_0) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \hat{\delta}_0^- - r - \frac{\ln S_{t_0} - \ln \bar{F}(t_0, T_i)}{T_i - t_0} \right]^2. \end{aligned}$$

L'expression de la fonction de vraisemblance que l'on cherche à maximiser est donnée par (voir l'annexe J):

$$\ln L_{n,N}(\mu, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*) = -\frac{nN}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \ln \|F_t\| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \nu_t' F_t^{-1} \nu_t,$$

avec

$$\begin{aligned} F_t &= [H_t P_t^- H_t^T - Q_t^\varepsilon], \\ \nu_t &= Z_t - (H_t \hat{\delta}_t^- + h_t). \end{aligned}$$

### 4.2.3 Validation des estimés du modèle par la méthode Monte Carlo

Comme dans le cas où un seul contrat futur est considéré. Nous allons procéder à la validation des estimés en utilisant la simulation de Monte Carlo. Pour le modèle 1, nous avons déjà fait une validation dans la section précédente. Il nous reste à l'effectuer pour le modèle 2. Pour cela, nous avons fait des tests préliminaires sur des données réelles afin de choisir les paramètres initiaux. Par conséquent, nous avons pris  $n$  égale à trois contrats futurs dont les échéances sont successivement 6 mois, un an et deux ans ; les valeurs initiales ( $\ln S_0 = 3.17, \delta_0 = 0.47$ ) ; le taux d'intérêt  $r = 0.05$  ;  $\theta = (\mu = 3.1995, \sigma_1 = 0.5847, \alpha = 0.2007, \kappa = 0.0228, \sigma_2 = 0.0262, \rho = 0.7766, \lambda^* = -0.2788)$  ;  $P_0 = \begin{bmatrix} 0.0024 & -0.0032 \\ -0.0032 & 0.022 \end{bmatrix}$  ; la longueur du pas du temps  $\Delta_t = \frac{1}{365}$ . Pour le nombre d'observations  $N$ , nous avons étudié les cas suivants :  $N \in \{365, 730, 1825, 10000\}$  et le nombre de trajectoires à simuler est égale à 5000. Le tableau 8 résume les estimations du modèle 2.

En analysant les résultats obtenus, nous remarquons que pour tous les cas de  $N$  choisis, il apparaît que les estimés du maximum de vraisemblance  $\hat{\mu}, \hat{\sigma}_1, \hat{\alpha}, \hat{\kappa}, \hat{\sigma}_2, \hat{\rho}$  et  $\hat{\lambda}^*$  ne sont pas biaisés. Et que les précisions des estimés s'améliorent au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente. Par ailleurs, le tableau 9 présente les probabilités estimées à différents seuils de confiance pour les différents cas de  $N$ . Nous constatons que la normalité asymptotique n'est pas parfaitement atteinte dans le cas où  $N = 365$ . Par contre, nous commençons à avoir une nette amélioration à partir de  $N = 730$ . Il en résulte que les estimés du maximum de vraisemblance du modèle 2, dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés, semblent avoir une distribution normale.

Table 8: Résultats de l'étude de Monte Carlo effectuée pour 5000 trajectoires afin de valider la qualité des estimés de la méthode de vraisemblance pour le modèle 2 dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés.

		$\mu$	$\sigma_1$	$\alpha$	$\kappa$	$\sigma_2$	$\rho$	$\lambda^*$
	Valeur exacte	3.1995	0.5847	0.2007	0.0228	0.0262	0.7766	-0.2788
365 observations	Moyenne	3.1999	0.5960	0.1997	0.0199	0.0243	0.7858	-0.2794
	Médiane	3.1995	0.5871	0.2007	0.0171	0.0186	0.7767	-0.2788
	Écart-type	0.1324	0.0432	0.0178	0.0434	0.0705	0.0346	0.0180
730 observations	Moyenne	3.2000	0.5880	0.2011	0.0201	0.0270	0.7746	-0.2789
	Médiane	3.1989	0.5600	0.2003	0.0197	0.0251	0.7730	-0.2790
	Écart-type	0.1280	0.0360	0.0113	0.0286	0.0642	0.0301	0.0121
1825 observations	Moyenne	3.2100	0.5850	0.2006	0.0230	0.0261	0.7764	-0.2784
	Médiane	3.1989	0.5790	0.2001	0.0222	0.0260	0.7762	-0.2785
	Écart-type	0.1012	0.0201	0.0096	0.0141	0.0180	0.0193	0.0101
10000 observations	Moyenne	3.1991	0.5844	0.2006	0.0227	0.0264	0.7767	-0.2788
	Médiane	3.1990	0.5840	0.2000	0.0228	0.0262	0.7765	-0.2786
	Écart-type	0.080	0.016	0.0040	0.0071	0.0120	0.0110	0.0100

Table 9: Les proportions estimées du modèle 2 dans les différents cas de  $N$  dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés.

		$\alpha_{95\%}$	$\alpha_{75\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{25\%}$
		Pr	Pr	Pr	Pr
$N = 365$	$\mu$	0.91	0.72	0.50	0.26
	$\sigma_1$	0.94	0.74	0.50	0.25
	$\alpha$	0.94	0.76	0.50	0.24
	$\kappa$	0.95	0.75	0.49	0.25
	$\sigma_2$	0.95	0.74	0.50	0.25
	$\rho$	0.94	0.75	0.51	0.25
	$\lambda^*$	0.90	0.70	0.49	0.27
$N = 730$	$\mu$	0.94	0.74	0.51	0.25
	$\sigma_1$	0.95	0.76	0.50	0.25
	$\alpha$	0.94	0.76	0.51	0.26
	$\kappa$	0.95	0.75	0.50	0.26
	$\sigma_2$	0.95	0.74	0.50	0.25
	$\rho$	0.95	0.76	0.51	0.25
	$\lambda^*$	0.93	0.74	0.52	0.26
$N = 1825$	$\mu$	0.94	0.75	0.50	0.26
	$\sigma_1$	0.95	0.76	0.49	0.24
	$\alpha$	0.94	0.75	0.51	0.25
	$\kappa$	0.95	0.75	0.50	0.25
	$\sigma_2$	0.95	0.75	0.51	0.26
	$\rho$	0.95	0.74	0.49	0.24
	$\lambda^*$	0.94	0.74	0.50	0.26
$N = 10^4$	$\mu$	0.94	0.75	0.50	0.24
	$\sigma_1$	0.95	0.74	0.51	0.26
	$\alpha$	0.95	0.74	0.51	0.25
	$\kappa$	0.94	0.75	0.50	0.26
	$\sigma_2$	0.95	0.74	0.51	0.24
	$\rho$	0.95	0.74	0.50	0.25
	$\lambda^*$	0.94	0.75	0.49	0.26

## 5 Étude empirique

Dans ce paragraphe nous allons mettre en œuvre la comparaison des deux modèles en utilisant les données empiriques. L'instrument que nous avons choisi pour notre étude, est le pétrole. Et la source des observables sera le marché NYMEX. Sur ce dernier, nous avons constaté que le marché des contrats futurs sur le pétrole, domine le marché au comptant et celui des options par le volume et par le montant des opérations. En général, il y a une seule maturité par mois et les contrats futurs commencent à être négocié à partir de l'horizon de 3 ans. Tout d'abord, nous allons considérer que pour une série de  $n$  contrats futurs de différentes maturités, nous avons  $N + 1$  prix théoriques et  $N + 1$  prix observés :

$$\{(F(t, T_i), \bar{F}(t, T_i)) : i \in \{1, \dots, n\}; t \in \{0, \dots, N\}\}.$$

Pour mesurer la performance de nos estimations, nous allons introduire deux critères basés sur l'écart entre l'observation et l'estimation des prix futurs. En particulier, nous calculerons la moyenne des erreurs *MPE* (the mean pricing errors) et la moyenne quadratique des erreurs *RMSE* (the root mean squared errors). Notons qu'en vue de simplifier nos calculs, nous avons choisi le logarithme des prix :

$$MPE_{n,N} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^N [\ln \bar{F}(t, T_i) - \ln F(t, T_i)],$$
$$RMSE_{n,N} = \sqrt{\frac{1}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^N [\ln \bar{F}(t, T_i) - \ln F(t, T_i)]^2}.$$

Nous avons réparti notre analyse sur deux rubriques. La première décrit les résultats des deux modèles et la comparaison entre les prix estimés avec ceux utilisés pour l'estimation des paramètres

(in sample). La deuxième représente les résultats portant sur la prévision des prix (out of sample) et les critères de performance de l'estimation.

## 5.1 Résultats et analyses

Sur le marché NYMEX, nous allons utiliser les prix de fermetures hebdomadaires des contrats futurs et comptants du pétrole. La période d'observation que nous avons choisie est du 26 avril 1996 jusqu'au 2 février 2007. Les données servant à l'estimation est du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004, et celles utilisées pour la validation est du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007. Dans le cas où plusieurs contrats sont considérés, nous effectuerons la procédure d'estimation pour trois séries de futurs  $n = 6$ ,  $n = 12$  et  $n = 24$ . Pour cela, nous notons  $F1$  le premier contrat futur du cycle de juin,  $F2$  le premier contrat futur du cycle de juillet, et ainsi de suite.

Table 10: Séries et nombre d'observations.

Série	Contrats futurs	Nombre d'observation
$n = 6$	$F1, F3, F5, F7, F9, F11$	2508
$n = 12$	$F1, F2, F3, \dots, F11, F12$	5016
$n = 24$	$F1, F2, F3, \dots, F23, F24$	10032

Notons que pour le taux d'intérêt sans risque, nous utiliserons le taux provenant des bons de trésor américain à trois mois. De plus, nous avons supposé que ce taux reste constant. C'est pourquoi nous prendrons la moyenne des observations sur la même période choisie précédemment,  $r = 0.045$ .

### 5.1.1 Estimation des paramètres du modèle 1

Dans le cas où un seul contrat futur est considéré, nous utiliserons la fonction de vraisemblance (18) :

$$L_1(\mu^*, \kappa, \sigma, \delta) = \frac{(N-1)}{2} \ln 2\kappa - (N-1) \ln \sigma - \frac{(N-1)}{2} \ln(1 - e^{-2\kappa\Delta t}) - \frac{\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa\Delta t})} \sum_{i=2}^N \left( X_{i\Delta t} - X_{(i-1)\Delta t} e^{-\kappa\Delta t} - \left( \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \right) (1 - e^{-\kappa\Delta t}) \right)^2,$$

où

$$\alpha = \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa}.$$

D'après l'équation (10), nous avons

$$\delta = r + \frac{X_t - \ln F(t, T)}{(T - t)}.$$

Ainsi, pour estimer le vecteur des paramètres  $\theta = (\mu^*, \kappa, \sigma)$ , nous allons maximiser la fonction suivante :

$$L_1(\mu^*, \kappa, \sigma) = \frac{(N-1)}{2} \ln 2\kappa - (N-1) \ln \sigma - \frac{(N-1)}{2} \ln(1 - e^{-2\kappa\Delta t}) - \frac{\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa\Delta t})} \sum_{i=2}^N \left( X_{i\Delta t} - X_{(i-1)\Delta t} e^{-\kappa\Delta t} - \left( \mu^* - \frac{r}{\kappa} - \frac{X_{i\Delta t} - \ln F_{i\Delta t}}{\kappa(T - i\Delta t)} - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \right) (1 - e^{-\kappa\Delta t}) \right)^2,$$

et pour estimer  $\delta$ , nous appliquerons la méthode des moindres carrés :

$$\sum_{t=0}^N [\ln \bar{F}(t, T_i) - \ln F(t, T_i)]^2 = \sum_{t=0}^N [\ln \bar{F}(t, T_i) - X_t - (r - \delta)(T_i - t)]^2.$$

Dans le tableau 11, nous constatons que les estimés du contrat  $F1$  sont très proches de ceux du contrat  $F2$ . Et la même chose pour les estimés des contrats  $F23$  et  $F24$ . Or, si nous tenons compte des écarts types résultants, nous constatons que les valeurs des estimés ne sont pas significativement différentes pour les différents contrats considérés.

Table 11: Résultats d'estimation des paramètres du modèle 1 en considérant un seul contrat futur.

Paramètre	Contrat $F1$	Contrat $F2$	Contrat $F23$	Contrat $F24$
$\mu^*$	3.89 (1.13) [100%]	3.81 (0.90) [100%]	3.67 (0.58) [100%]	3.66 (0.57) [100%]
$\kappa$	0.32 (0.49) [100%]	0.37 (0.48) [100%]	0.46 (0.50) [100%]	0.47 (0.49) [100%]
$\sigma$	0.40 (0.01) [100%]	0.40 (0.01) [100%]	0.40 (0.01) [100%]	0.40 (0.01) [100%]
$\delta$	0.14 (0.06) [100%]	0.13 (0.06) [100%]	0.11 (0.02) [100%]	0.11 (0.02) [100%]
$P.R$	0%	0%	0%	0%
$L_1$	1003.01	1001.12	999.82	999.77
$MPE$	0.020	0.010	-0.009	-0.010
$RMSE$	0.129	0.128	0.121	0.130

1.  $P.R$  est la probabilité de ne pas avoir atteint l'optimum global (Herbert E. Robbins [1968]).  
2. (Erreur d'estimation) est l'écart type de l'estimé.  
3. [Probabilité d'occurrence] est le nombre de fois où le vecteur estimé est apparu comme solution optimale, sur le nombre de points d'amorçage qui est égal à 1000 points.  
4. La période d'estimation est du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004.

Par ailleurs, si nous nous intéressons aux figures 1 et 2, nous remarquons que l'écart entre la courbe estimée et celle observée du contrat  $F1$  est plus étroit que l'écart entre la courbe estimée et celle observée du contrat  $F24$ . De plus, nous constatons que les prix estimés de ce dernier restent au dessus des prix observés sur une grande partie de la période considérée. En d'autres termes, le modèle 1 surestime, en général, les prix des contrats futurs de longues maturités. À cet égard, si nous comparons le pourcentage des erreurs des prix des deux premiers et des deux derniers contrats, nous remarquerons que l'écart devient plus en plus grand pour les contrats d'échéances lointaines. En effet, dans la figure 3, les erreurs des deux derniers contrats sont dans l'intervalle  $[-10\%, 20\%]$ , alors qu'elles restent dans l'intervalle  $[-5\%, 15\%]$  pour les deux premiers contrats. Il ressort que la



maturité du contrat utilisé a un impact sur la performance du modèle 1. Ce qui peut être expliqué par la nature de la liquidité du contrat considéré.

Comparaison entre le Log des prix observés et estimés du contrat 1 en utilisant le modèle 1

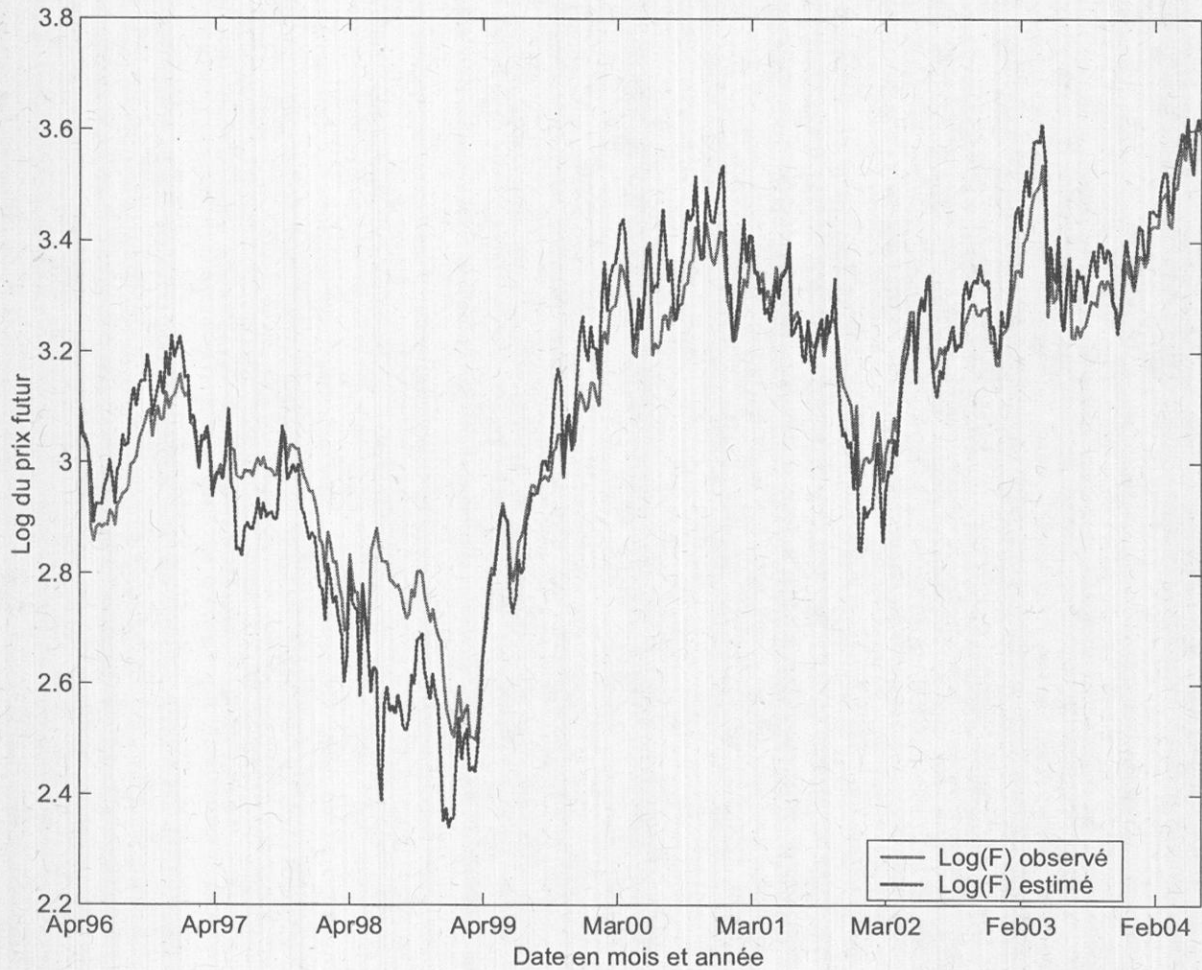


Figure 1: La figure ci-dessus présente la comparaison (in sample) entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés par le modèle 1 en utilisant le contrat  $F1$ , et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat  $F1$ .



Figure 2: La figure ci-dessus présente la comparaison (in sample) entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés par le modèle 1 en utilisant le contrat 24, et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat 24.

L'écart entre le Log des prix observés et estimés des deux premiers et des deux derniers contrats par le modèle 1

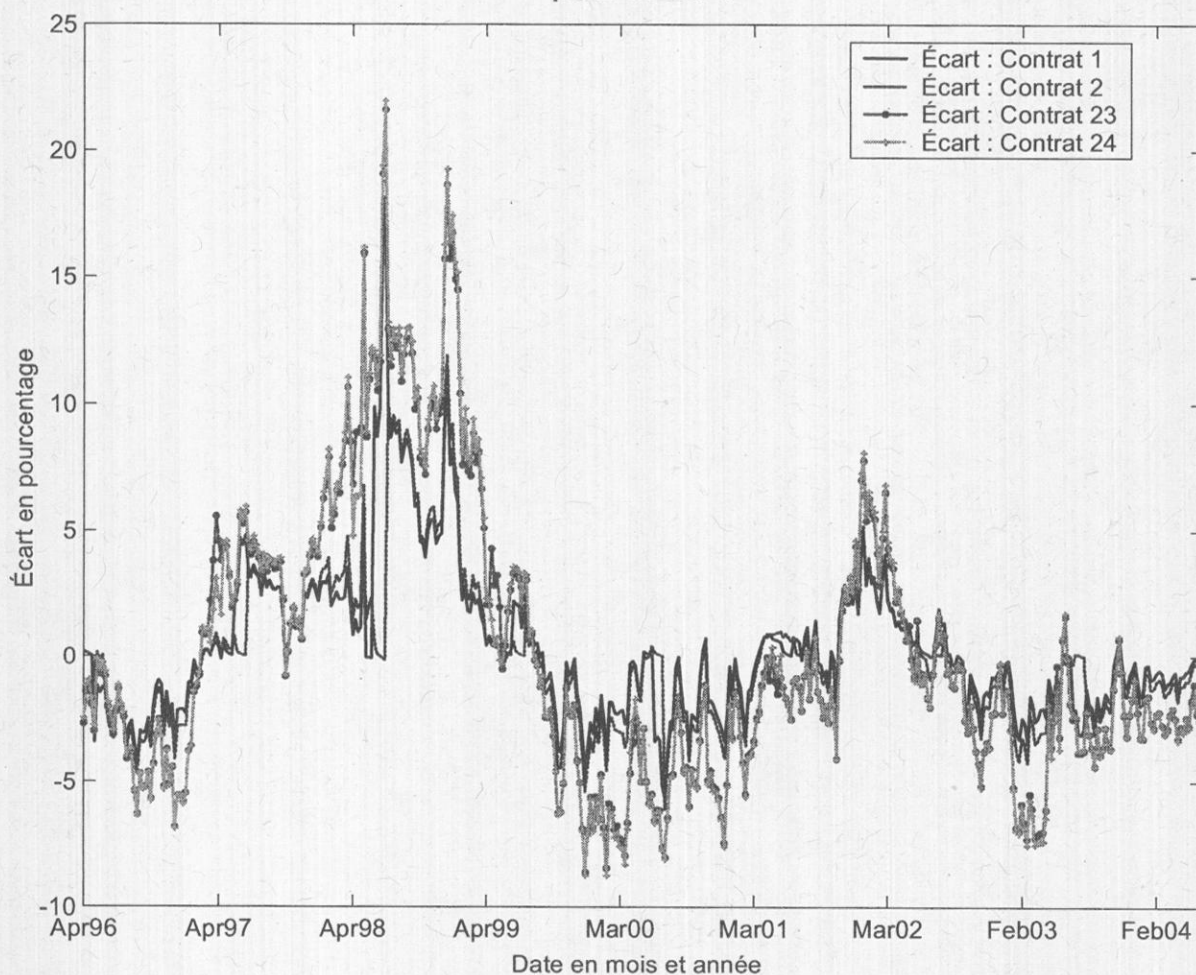


Figure 3: En considérant le modèle 1, pour chaque contrat  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_{23}$  et  $F_{24}$ , nous avons utilisé les paramètres correspondants trouvés dans le tableau des résultats pour estimer les écarts entre le logarithme des prix hebdomadaires, et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004.

Le tableau 12 présente les paramètres résultants de notre estimation dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés. Pour les trois séries étudiées, nous remarquons que les paramètres sont assez proches et qu'il n'y a pas une grande variation. Par ailleurs, si nous nous intéressons aux paramètres  $MPE$  et  $RMSE$ , nous constatons qu'ils sont assez proches de zéro pour les trois séries considérées. En conséquence, il apparaît que l'optimum est atteint pour les différents cas de  $n$ .

Table 12: Résultats d'estimation des paramètres du modèle 1 dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés.

Paramètre	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
$\mu^*$	3.4972 (0.20) [100%]	3.4979 (0.26) [100%]	3.4801 (0.14) [100%]
$\kappa$	0.80 (0.49) [100%]	0.80 (0.49) [100%]	0.80 (0.49) [100%]
$\sigma$	0.40 (0.01) [100%]	0.40 (0.01) [100%]	0.40 (0.01) [100%]
$\delta$	0.13 (0.020) [100%]	0.13(0.017) [100%]	0.12 (0.006) [100%]
$P.R$	0%	0%	0%
$G_{nN}$	-18.45	-36.97	-160.92
$MPE_{n,N}$	0.031	-0.003	-0.005
$RMSE_{n,N}$	0.132	0.127	0.127

1.  $P.R$  est la probabilité de ne pas avoir atteint l'optimum global.  
2. (Erreur d'estimation) est l'écart type de l'estimé.  
3. [Probabilité d'occurrence] est le nombre de fois où le vecteur estimé est apparu comme solution optimale, sur le nombre de points d'amorçage qui est égale à 1000

En utilisant les paramètres résultants dans le cas où  $n = 24$ , nous avons estimé les prix qui ont servi à notre estimation (in sample). En somme, les deux figures 4 et 5 présentent la comparaison entre les courbes des prix estimés et ceux observés des contrats  $F1$  et  $F24$ . Nous constatons qu'elles ont les mêmes tendances et qu'elles sont assez proches pour le contrat de courte maturité  $F1$ . Cependant, la figure 6 montre qu'en général les écarts des logarithmes des prix des deux premiers contrats restent dans l'intervalle  $[-5\%, 15\%]$ . En revanche, ils sont dans un intervalle plus large  $[-10\%, 20\%]$  pour les deux derniers contrats.

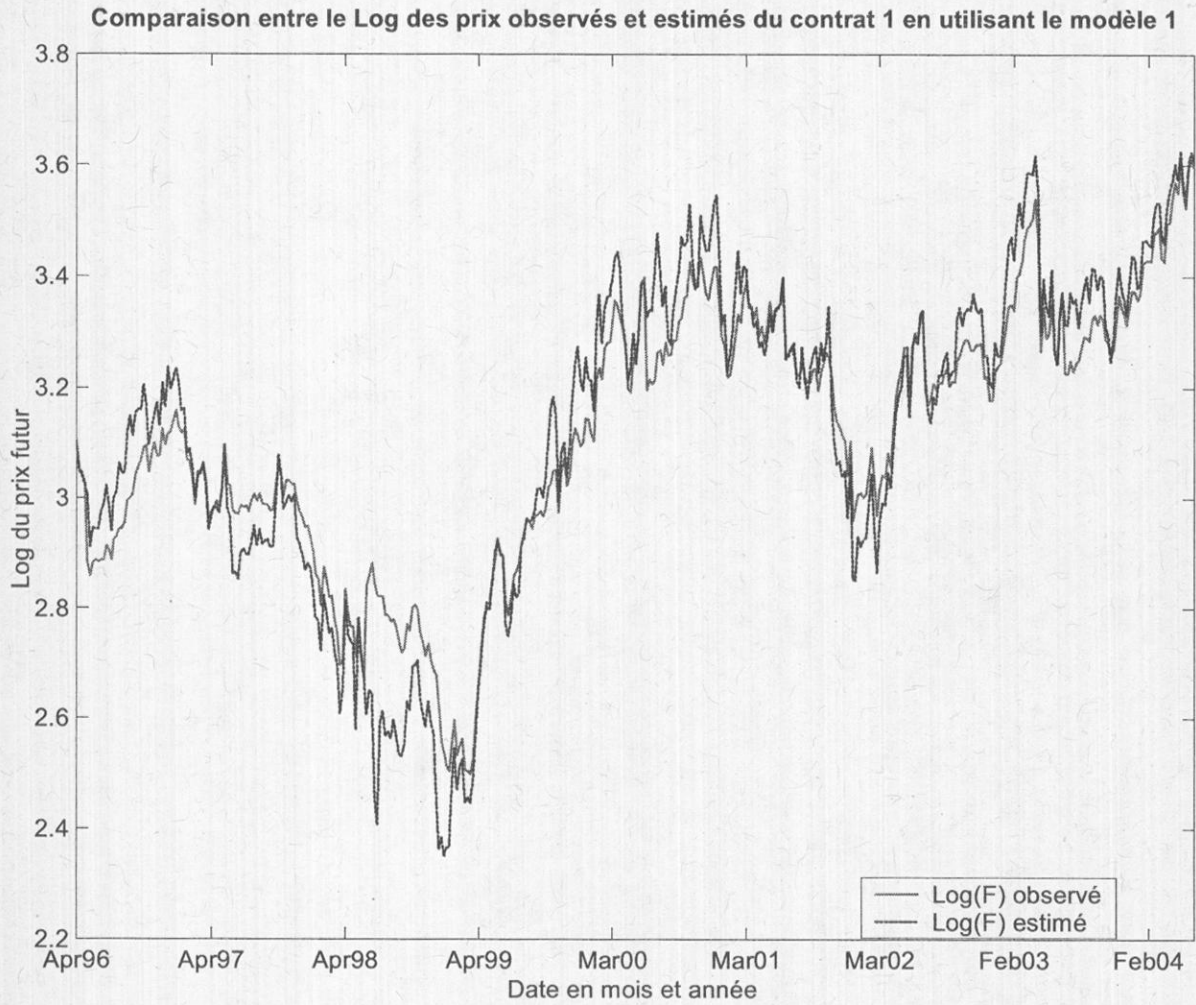


Figure 4: La figure ci-dessus présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés par le modèle 1 en considérant le cas où  $n = 24$ , et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat  $F1$ .



Figure 5: La figure ci-dessus présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés par le modèle 1 en considérant le cas où  $n = 24$ , et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat  $F'24$ .

L'écart entre le Log des prix observés et estimés des deux premiers et deux derniers contrats par le modèle 1

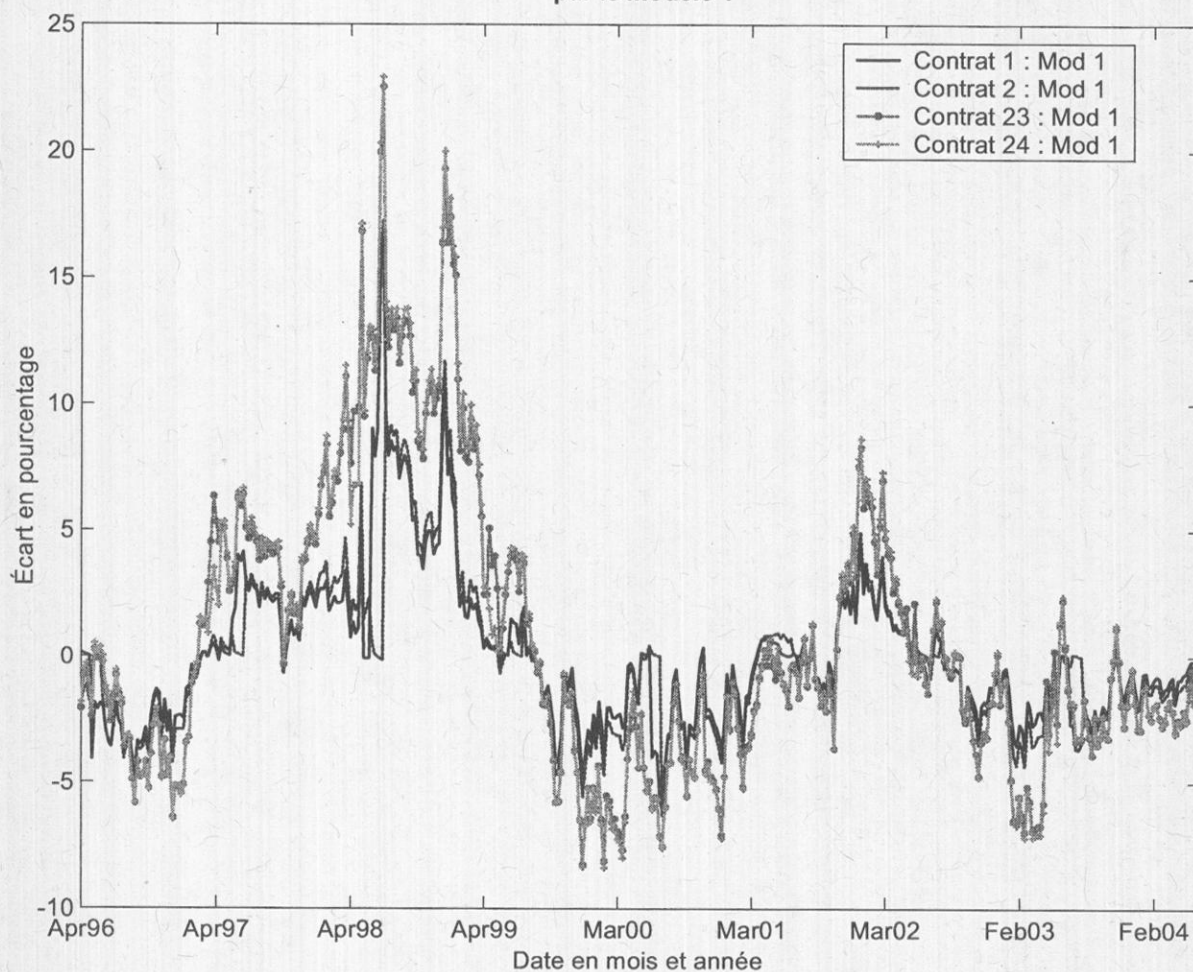


Figure 6: En considérant le cas où  $n = 24$  pour le modèle 1, la figure ci-dessus présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 des deux premiers contrats  $F_1, F_2$  et des deux derniers contrats  $F_{23}$  et  $F_{24}$ .



### 5.1.2 Estimation des paramètres du modèle 2

Dans le cas où un seul contrat futur est considéré, nous avons maximisé la fonction (21) en utilisant le contrat  $F1$  dont l'échéance est la plus proche et le contrat  $F24$  dont l'échéance est la plus loin. Le tableau 13 résume les résultats obtenus.

Table 13: Résultats d'estimation des paramètres du modèle 2 dans le cas où un seul contrat est utilisé.

Paramètre	Contrat $F1$	Contrat $F24$
$\mu$	0.19 (0.15) [96%]	0.30 (0.14) [94%]
$\sigma_1$	0.45 (0.016) [96%]	0.41 (0.01) [94%]
$\alpha$	0.023 (0.11) [96%]	0.15 (0.13) [94%]
$\kappa$	11.98 (0.80) [96%]	1.08 (0.15) [94%]
$\sigma_2$	3.37 (0.29) [96%]	0.43 (0.04) [94%]
$\rho$	0.78 (0.02) [96%]	0.93 (0.01) [94%]
$\lambda^*$	-0.20 (0.36) [96%]	0.42 (0.36) [94%]
$P.R$	4%	5%
$L_2$	-271.46	-72.82
$MPE$	-0.0001	-0.003
$RMSE$	0.018	0.044
1. $P.R$ est la probabilité de ne pas atteindre l'optimum global . 2. (Erreur d'estimation) est l'écart type de l'estimé. 3. [Probabilité d'occurrence] est le nombre de fois où le vecteur estimé est apparu comme solution optimale, sur le nombre de points d'amorçage qui est égale à 1000.		

En analysant les paramètres résultants des deux contrats, nous remarquons que les estimés  $\mu$ ,  $\sigma_1$  et  $\rho$  sont assez proches, alors que  $\lambda^*$  a changé de signe pour le contrat  $F24$ . si nous nous intéressons aux paramètres  $MPE$  et  $RMSE$ , nous constatons qu'ils sont très proches de zéro. Il en ressort que l'optimum est atteint pour les deux contrats. Par contre, nous remarquons que  $\alpha$ ,  $\kappa$  et  $\sigma_2$  estimés pour le contrat  $F1$  sont plus grands que leurs correspondants estimés pour le contrat  $F24$ . Toutefois, dans la figure 7 nous comparons les courbes des taux de rendement de détention estimés

(in sample) des deux contrats. Nous remarquons que le niveau du taux correspondant au contrat  $F1$  est plus important que celui du contrat  $F24$ . Ceci peut être expliqué par le fait que le contrat  $F1$  est plus liquide sur le marché que le contrat  $F24$ . Effectivement, dans les périodes où la demande de la marchandise est relativement élevée, le taux de rendement de détention devient assez grand ce qui montre la relation de dépendance positive entre le prix et son taux de rendement de détention. Signalons encore une fois, que l'intervalle des erreurs des contrats à long terme dans la figure 8, est plus large que celui des contrats à court terme.

Comparaison du taux du rendement de détention estimé par le modèle 2

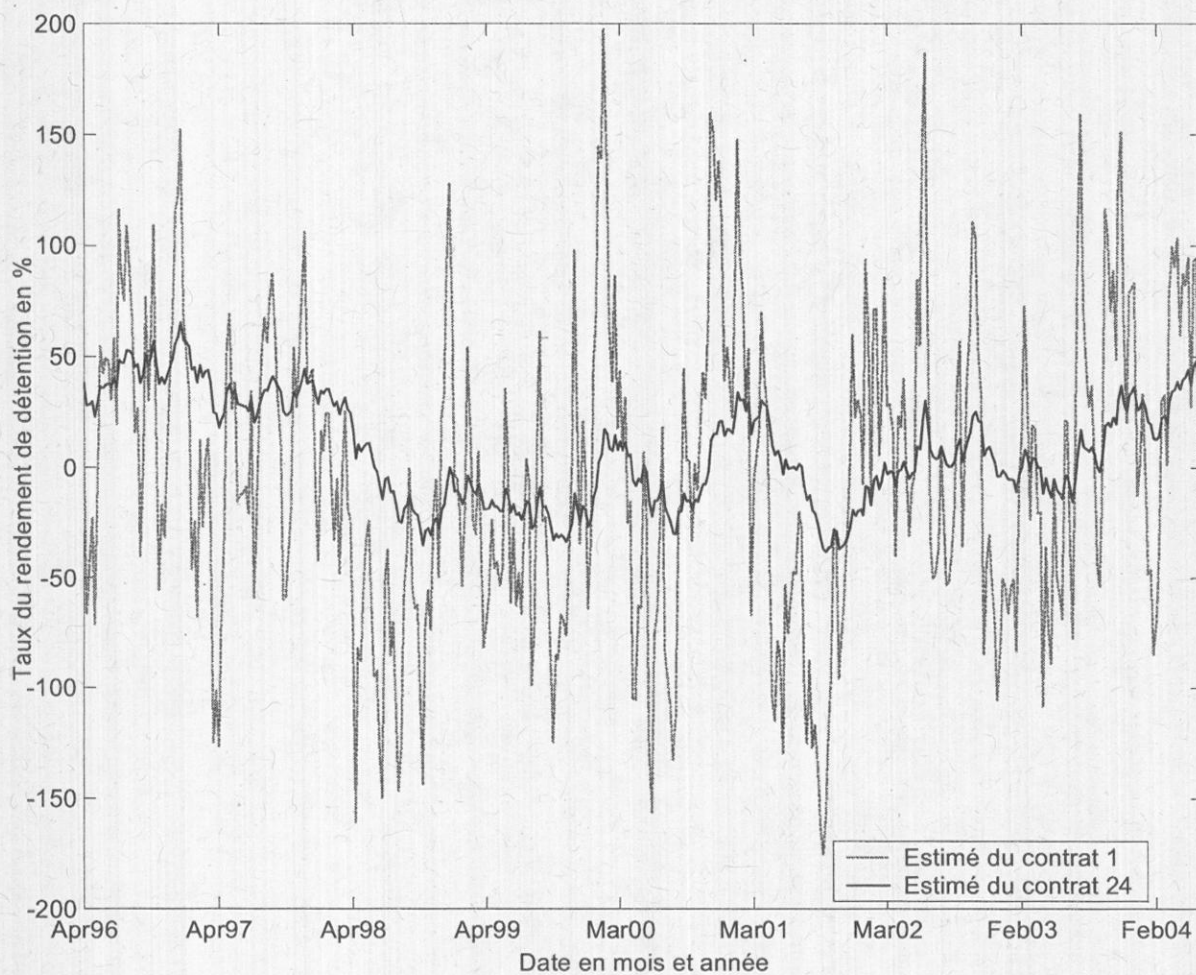


Figure 7: Dans le cas où un seul contrat futur est considéré pour le modèle 2, la figure ci-dessus présente la comparaison entre les niveaux hebdomadaires du taux de rendement de détention estimés (in sample) pour le premier et le vingt-quatrième contrat du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004.

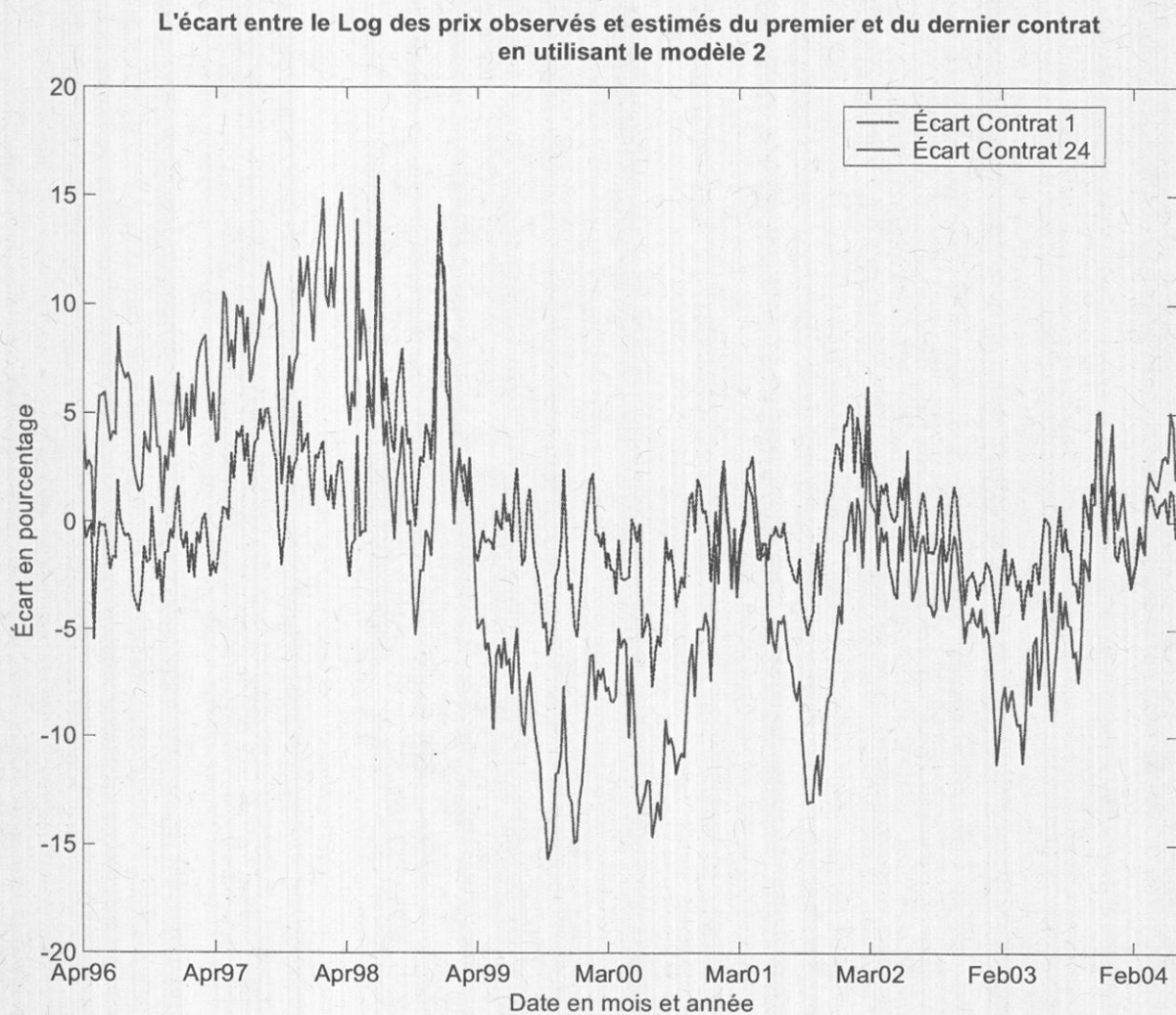


Figure 8: Dans le cas où un seul contrat futur est considéré pour le modèle 2, la figure ci-dessus présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés (in sample) en utilisant les paramètres trouvés de chaque contrat et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 des contrats  $F1$  et  $F24$ .

Dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés, le tableau 14 résume les résultats de nos estimations.

Table 14: Résultats d'estimation des paramètres pour le modèle 2.

Paramètre	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
$\mu$	0.29 (0.099) [98%]	0.27 (0.11) [98%]	0.56 (0.10) [98%]
$\sigma_1$	0.40 (0.009) [98%]	0.40 (0.009) [98%]	0.41 (0.009) [98%]
$\alpha$	0.12 (0.052) [98%]	0.12 (0.037) [98%]	0.16 (0.028) [98%]
$\kappa$	1.03 (0.131) [98%]	1.08 (0.121) [98%]	1.95 (0.038) [98%]
$\sigma_2$	0.24 (0.021) [98%]	0.26 (0.020) [98%]	0.56 (0.033) [98%]
$\rho$	0.42 (0.410) [98%]	0.24 (0.326) [98%]	0.18 (0.12) [98%]
$\lambda^*$	0.15 (0.001) [98%]	0.013 (0.022) [98%]	0.22 (0.001) [98%]
$P.R$	2%	2%	2%
$\ln L_{n,N}$	1.6059E+004	3.3134E+04	7.6848E+04
$MPE_{n,N}$	-0.019	-0.016	-0.025
$RMSE_{n,N}$	0.150	0.147	0.137
1. $P.R$ est la probabilité de ne pas avoir capté l'optimum global. 2. (Erreur d'estimation) est l'écart type de l'estimé. 3. [Probabilité d'occurrence] est le nombre de fois où le vecteur estimé est apparu comme solution optimale, sur 1000 points d'amorçage.			

Si nous comparons les résultats des tableaux 13 et 14, il apparaît que les estimés du contrat  $F24$  dans le cas où un seul contrat est utilisé, sont assez proches des résultats dans le cas où plusieurs contrats sont considérés. En outre, nous remarquons que les résultats des deux premières séries sont assez proches, sauf les estimés de la prime du risque et de la corrélation qui ont baissé pour la deuxième série. Par contre, les estimés de  $\alpha$ ,  $\kappa$  et  $\sigma_2$ , deviennent assez importants dans le cas de la troisième série. Toutefois, nous avons utilisé ces derniers paramètres pour estimer les courbes du taux de rendement de détention dans les différents cas de  $n$ , c'est la figure 9. Nous constatons que la courbe où  $n = 24$  reste dans le même intervalle que celui de la courbe estimée pour le contrat  $F24$  dans le cas où un seul contrat est utilisé (figure 7). De ce fait, nous avons vérifié la moyenne des volumes des vingt-quatre contrats transigés sur le marché pendant cinq jours. En observant

la figure 10, nous découvrons qu'en général, le nombre de contrats à long terme de faible liquidité est très significatif. Ainsi, nous convenons que la nature de la liquidité des contrats a un grand impact sur les estimés de  $\alpha$ ,  $\kappa$  et  $\sigma_2$ . Il est important d'intégrer le facteur de la liquidité dans les estimations de notre modèle. Pour cela, nous proposons une ébauche pour un troisième modèle multi-facteur que nous n'allons pas étudier dans ce mémoire. En fait, nous allons garder la même équation différentielle stochastique de la dynamique du processus du prix, et nous allons ajouter une autre composante dans celle du taux de rendement de détention :

$$dS_t = (\mu - \delta_t^*)S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t^S,$$

$$\delta_t^* = l(t) \delta_t,$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dW_t^\delta,$$

où  $l(t)$  est une fonction linéaire du temps.

Par ailleurs, les figures 11, 12 et 13 ont été estimées en utilisant les paramètres résultants dans le cas où  $n = 24$ . Nous comparons les courbes du logarithme des prix estimés et observés des deux premiers et des deux derniers contrats. Nous constatons qu'elles ont les mêmes tendances et qu'en général les écarts sont dans l'intervalle  $[-10\%, 10\%]$ .

Comparaison du taux du rendement de détention estimé par le modèle 2

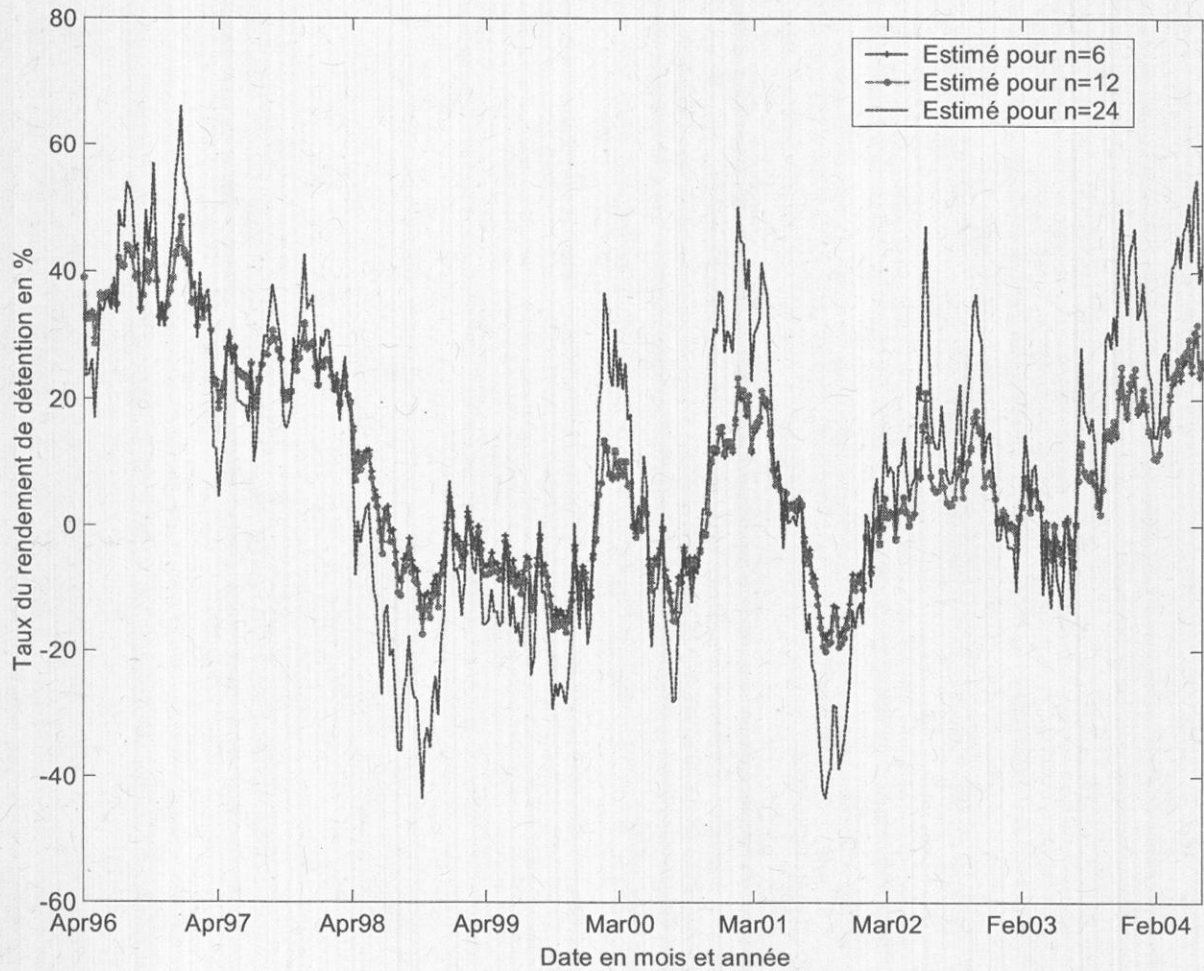


Figure 9: Dans le cas où plusieurs contrats sont utilisés pour le modèle 2, la figure ci-dessus présente l'évolution hebdomadaire du taux de rendement de détention estimé du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 dans les trois cas  $n = 6$ ,  $n = 12$  et  $n = 24$ .

Le volume moyen des vingt-quatre contrats.

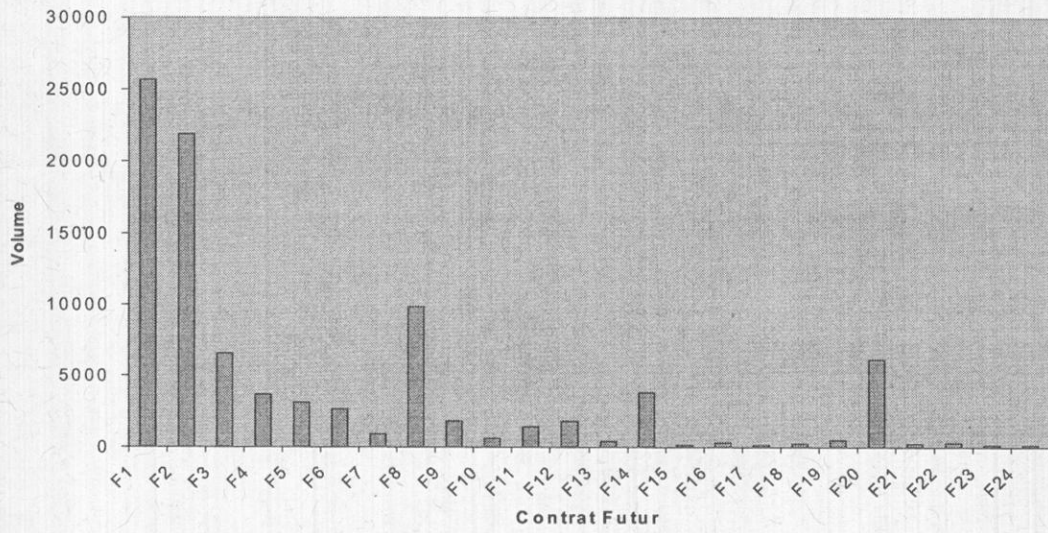


Figure 10: La moyenne sur cinq jours des volumes des vingt-quatre contrats futurs transigés.



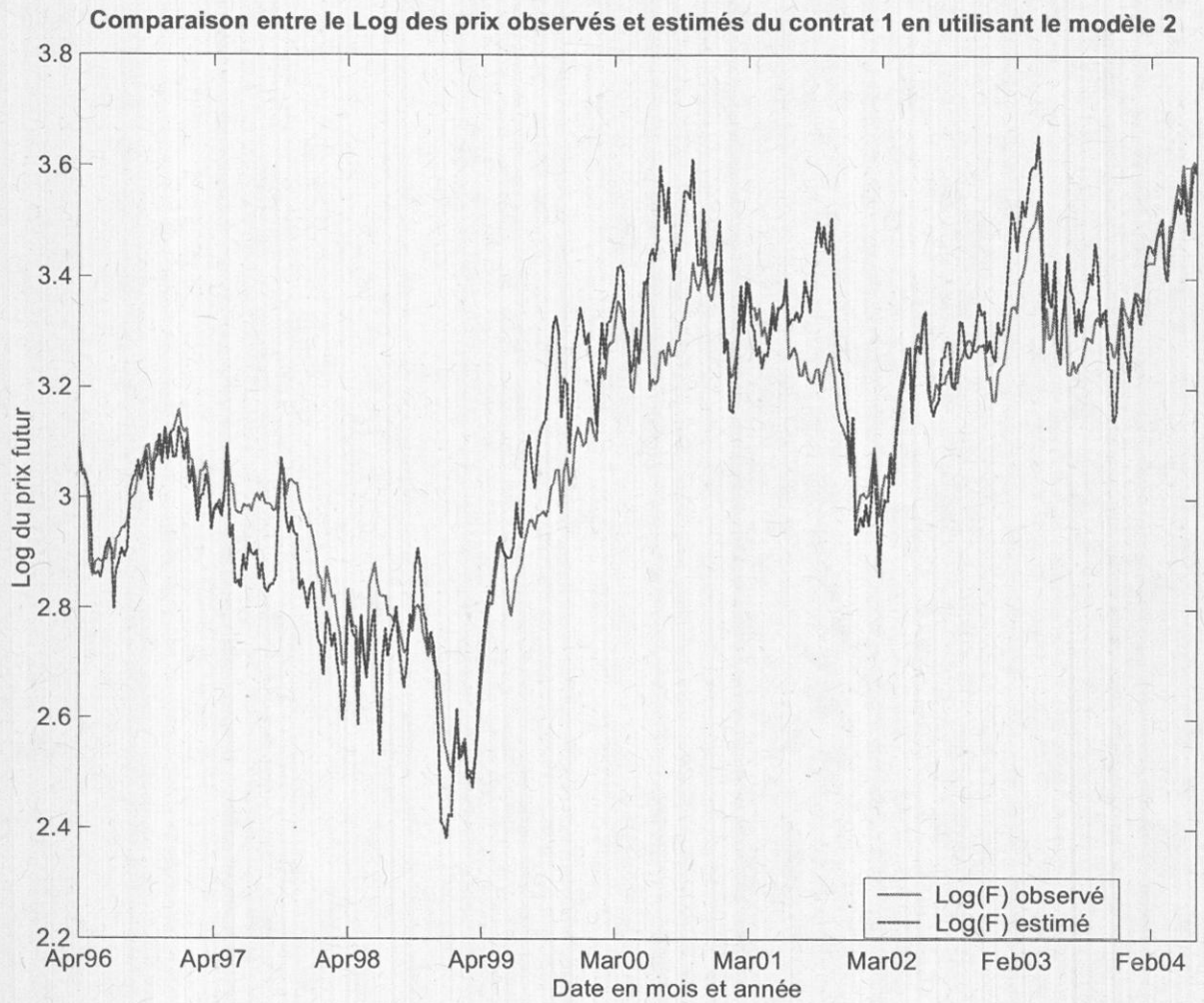


Figure 11: La figure ci-dessus présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés (in sample) par le modèle 2 en considérant  $n = 24$ . Et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat  $F1$ .

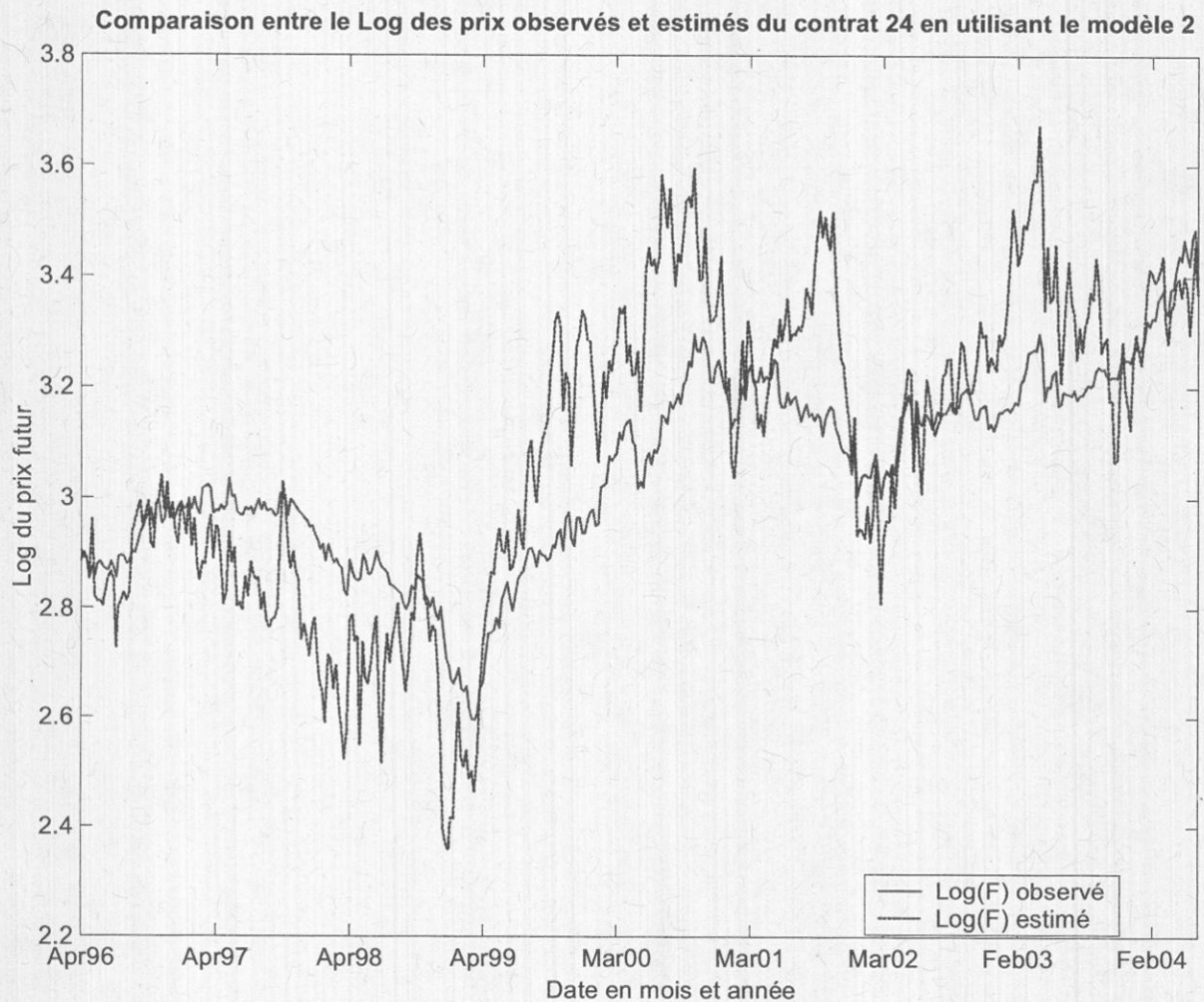


Figure 12: La figure ci-dessus présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés (in sample) par le modèle 2 en considérant  $n = 24$ . Et le logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 du contrat  $F_{24}$ .

L'écart entre le Log des prix observés et estimés des deux premiers et des deux derniers contrats en utilisant le modèle 2

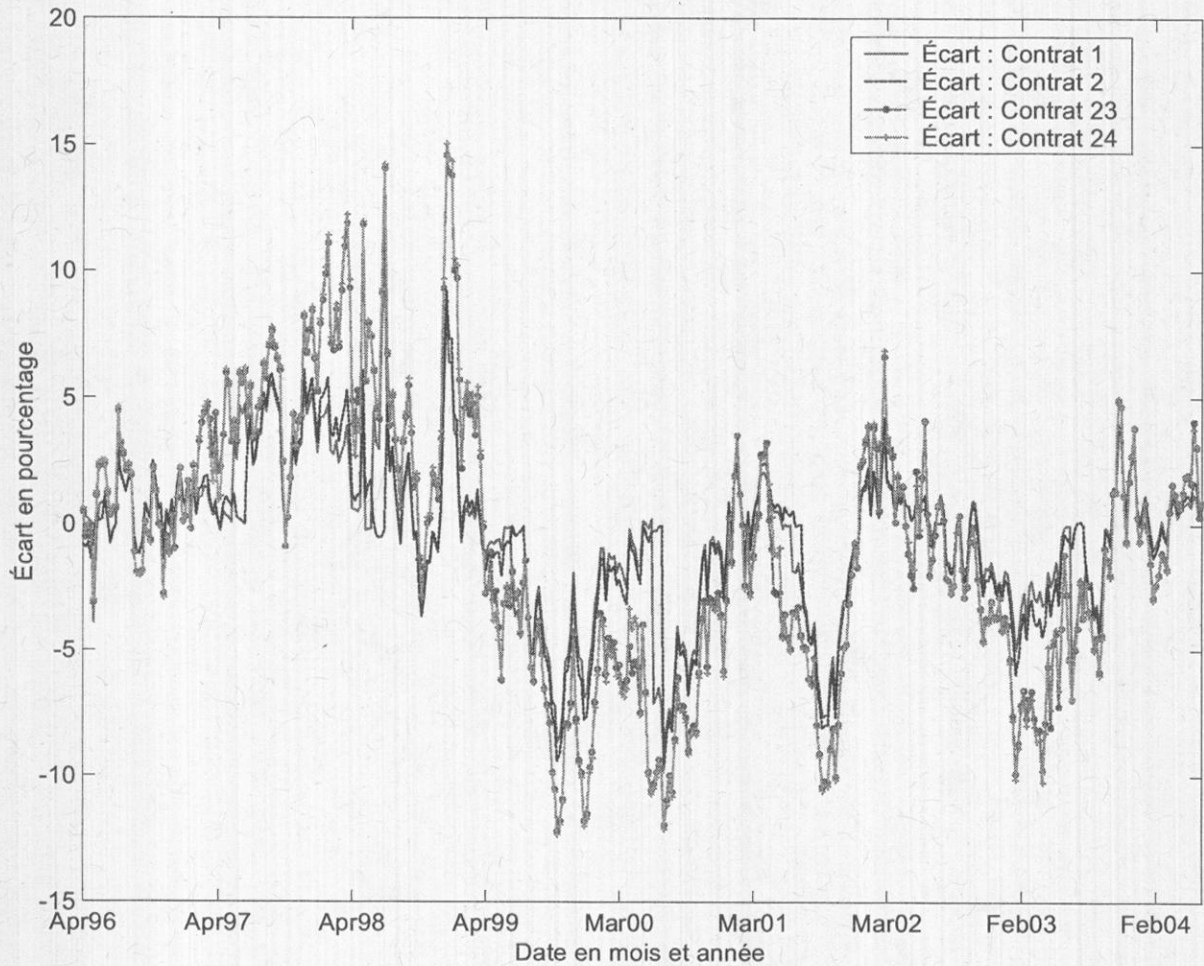


Figure 13: En considérant le cas où  $n = 24$  pour le modèle 2, la figure ci-dessus présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés. Et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 26 avril 1996 jusqu'au 23 avril 2004 des deux premiers contrats  $F1, F2$  et des deux derniers contrats  $F23$  et  $F24$ .

### 5.1.3 Validation et comparaison des deux modèles

Pour notre validation, nous avons estimé les prix hebdomadaires (out of sample) du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 des différents contrats futurs en utilisant les paramètres résultants de chaque modèle.

Dans le cas où un seul contrat est considéré, nous avons simulé les taux des rendements de détention du contrat  $F1$  et  $F24$  en utilisant les paramètres résultants de chaque contrat. Dans la figure 14, si nous comparons les niveaux estimés, nous remarquerons que le taux correspondant au contrat  $F1$  continue à dominer celui du contrat  $F24$ . De même, nous constatons que les prix estimés du modèle 2 sont plus proches des observables que les prix estimés du modèle 1. En effet, les deux figures 15 et 16 nous montrent que pour une grande partie de la période de la validation, le modèle 1 continue à sous-estimer les prix des contrats futurs en particulier le contrat  $F24$ .

Comparaison du taux du rendement de détention estimé par le modèle 2

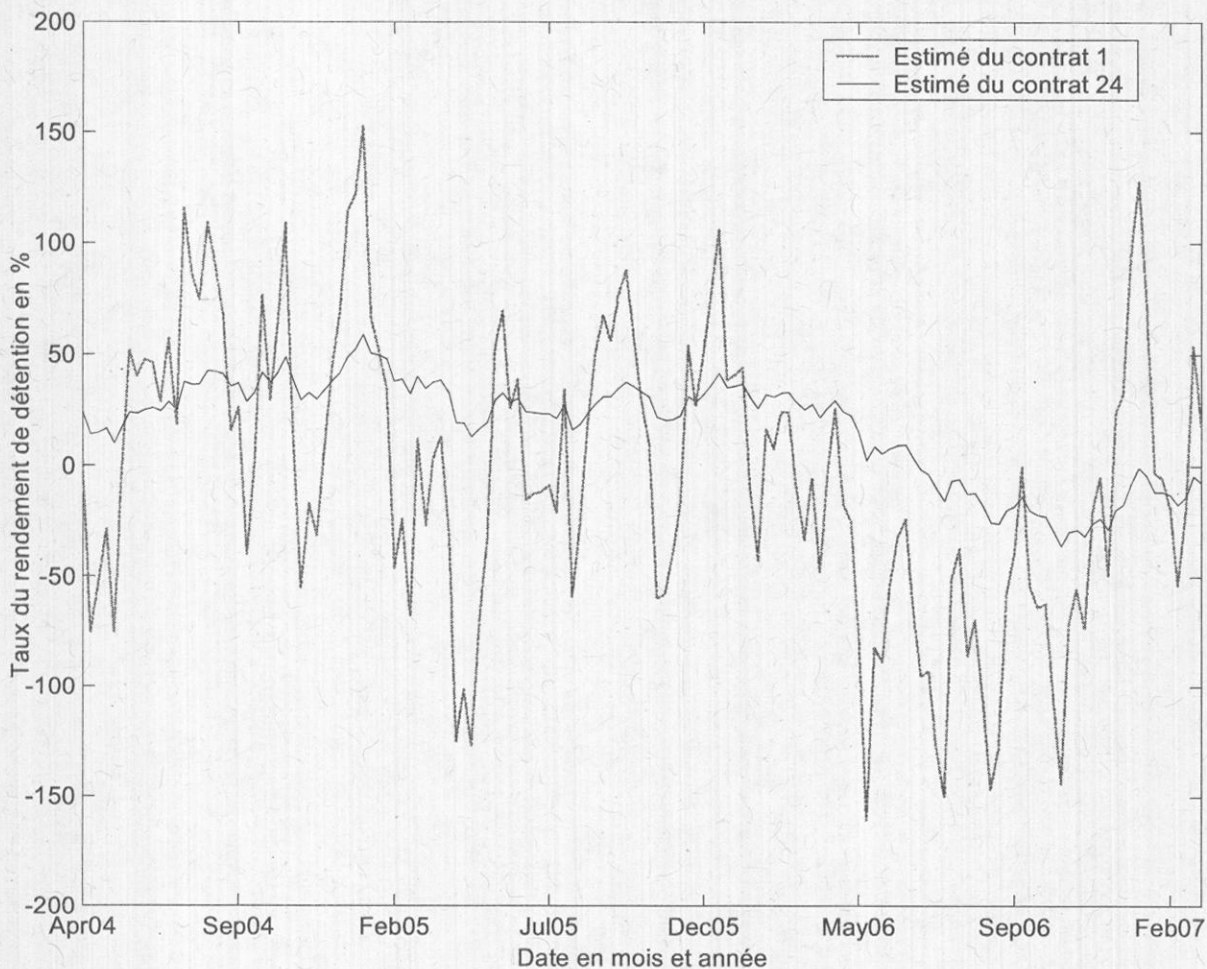


Figure 14: Dans le cas où un seul contrat est considéré pour le modèle 2, nous avons simulé les taux des rendements de détention du contrat  $F1$  et  $F24$  en utilisant les paramètres résultants de chaque contrat. La figure ci-dessus présente la comparaison entre les niveaux hebdomadaires du taux de rendement de détention estimés (out of sample) pour les contrats  $F1$  et  $F24$  du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007.

Comparaison entre le Log des prix estimés du contrat 1 en utilisant les modèles 1 et 2

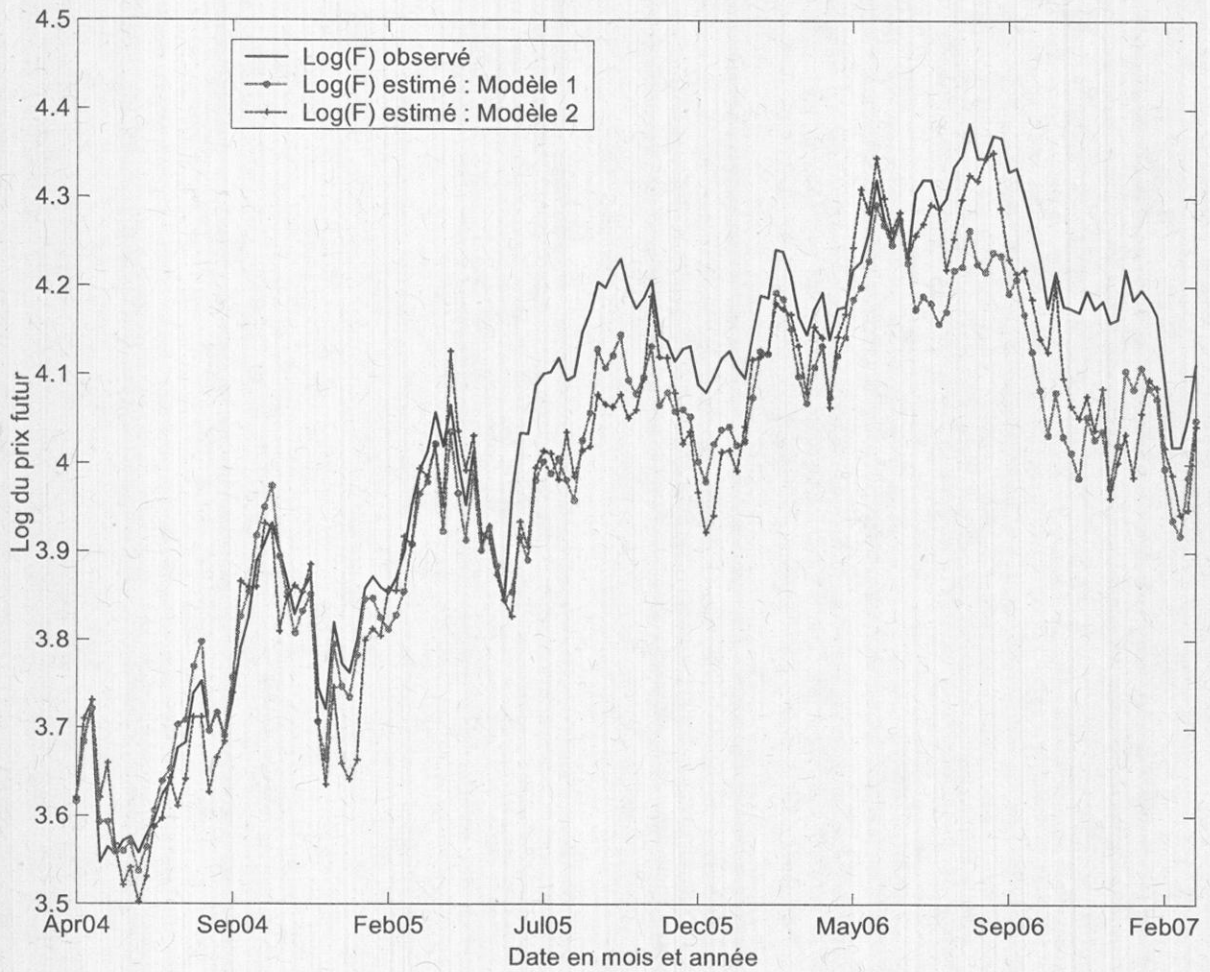


Figure 15: Dans le cas où le contrat  $F1$  est considéré pour le modèle 1 et 2, la figure ci-dessus présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés (out of sample), et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 du contrat  $F1$ .

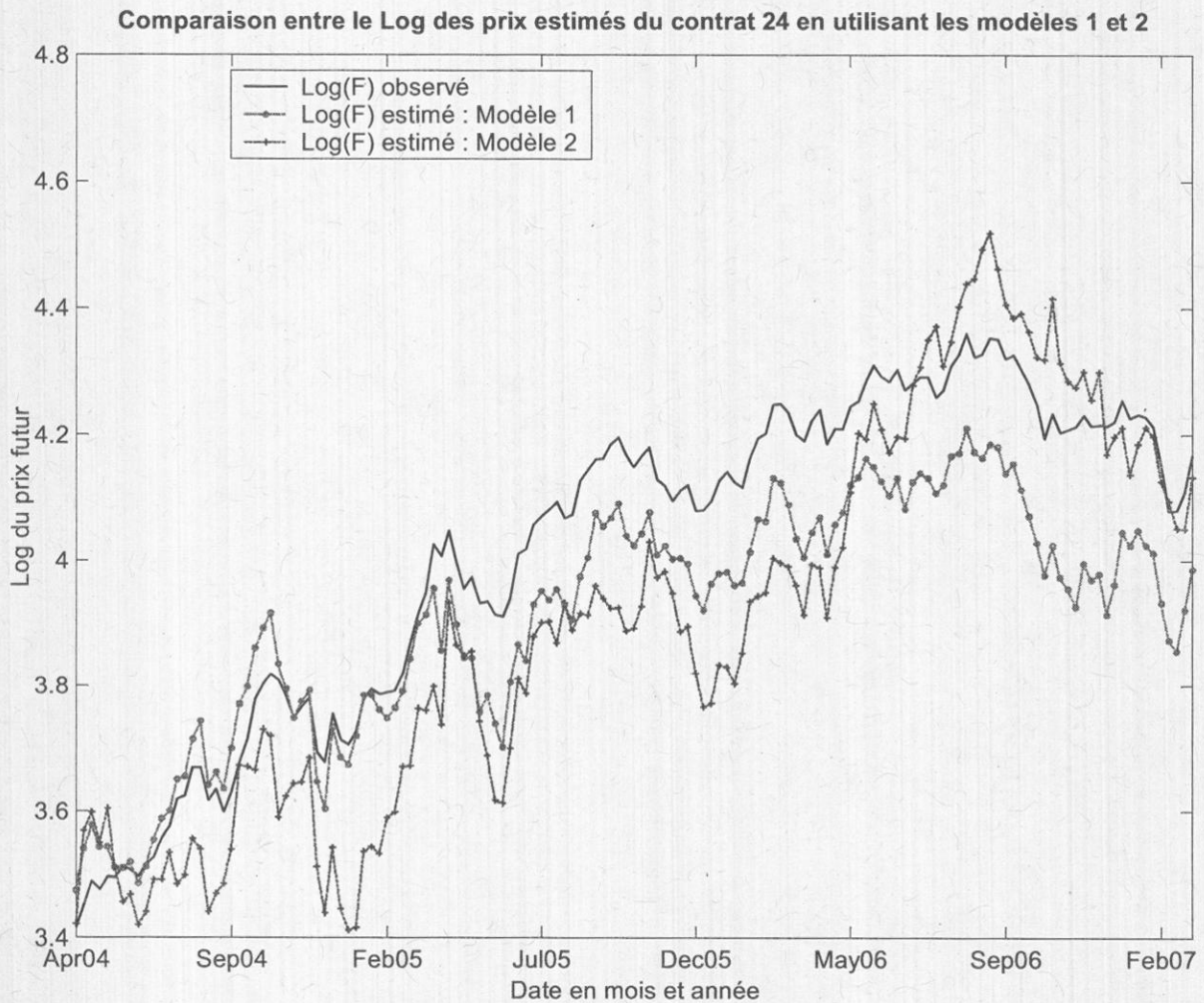


Figure 16: En considérant un le contrat  $F_{24}$  pour le modèle 1 et 2, la figure ci-dessus présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés. Et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 du contrat  $F_{24}$ .

Dans le cas où plusieurs contrats sont considérés, nous avons comparé les prix estimés avec ceux observés des deux premiers et des deux derniers contrats. En outre, les deux figures 18 et 19 nous permettent de constater que les estimations du modèle 2 sont toujours plus proches des observables que celles du modèle 1. En effet, presque pour toute la période de la validation, le modèle 1 sous-estime les prix des contrats futurs. En général, les écarts résultants du modèle 1 restent dans l'intervalle  $[-2\%, 4\%]$  pour les contrats du court terme, tandis que pour les contrats du long terme, ces écarts ont augmentés de 4%. Ils demeurent dans l'intervalle  $[-2\%, 8\%]$ , voir la figure 20. Par contre, non seulement la courbe des estimations du modèle 2 a la même tendance que celle des observables, mais encore les écarts ne dépassent pas 6%, voir la figure 21.



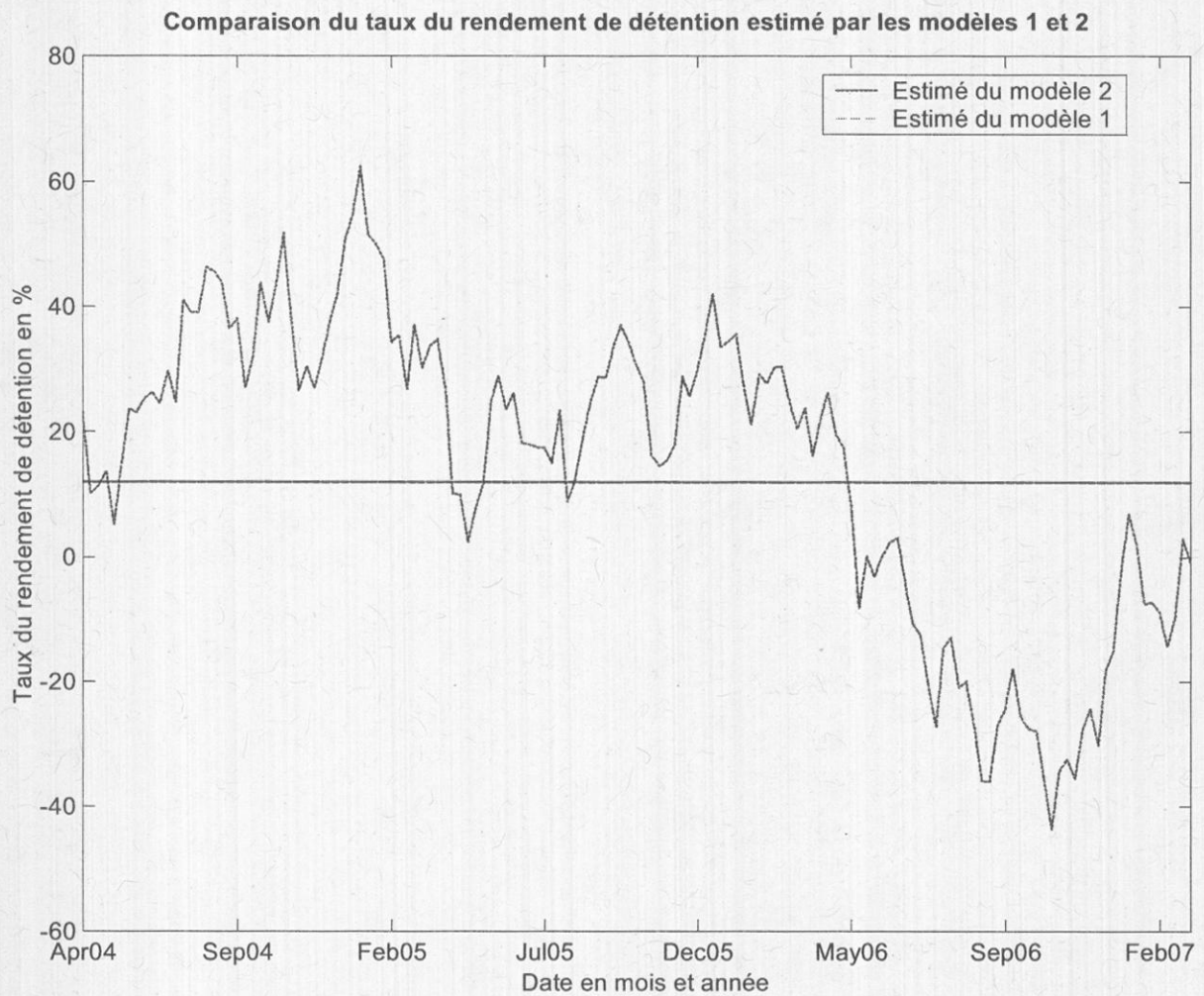


Figure 17: En considérant  $n = 24$  pour le modèle 1 et 2, la figure ci-dessus présente l'évolution hebdomadaire du taux de rendement de détention estimé (out of sample) du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007.

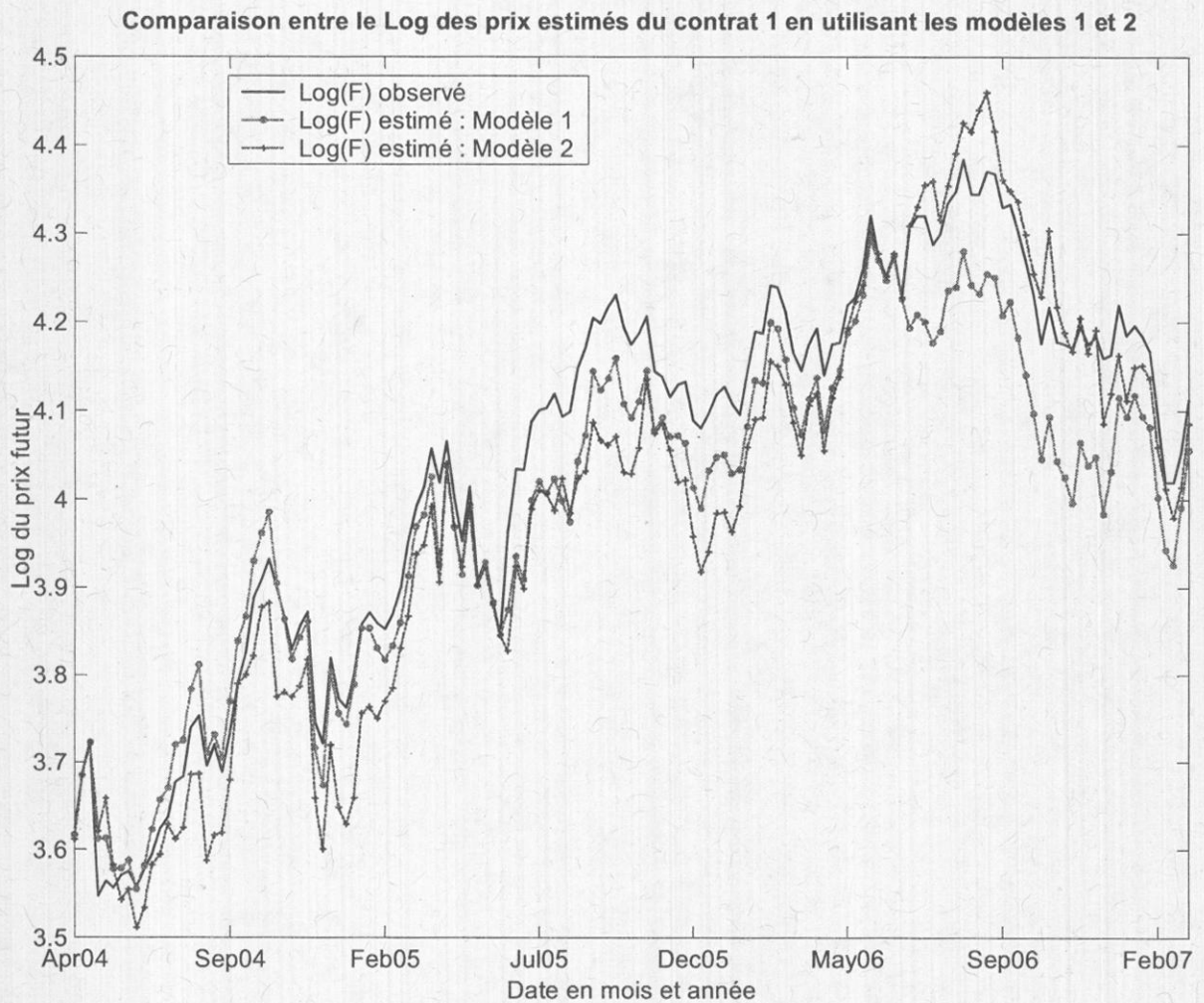


Figure 18: Dans le cas où plusieurs contrats sont considérés pour le modèle 1 et 2, la figure ci-dessus présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés en utilisant les paramètres trouvés pour  $n = 24$ , et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 du contrat  $F1$ .

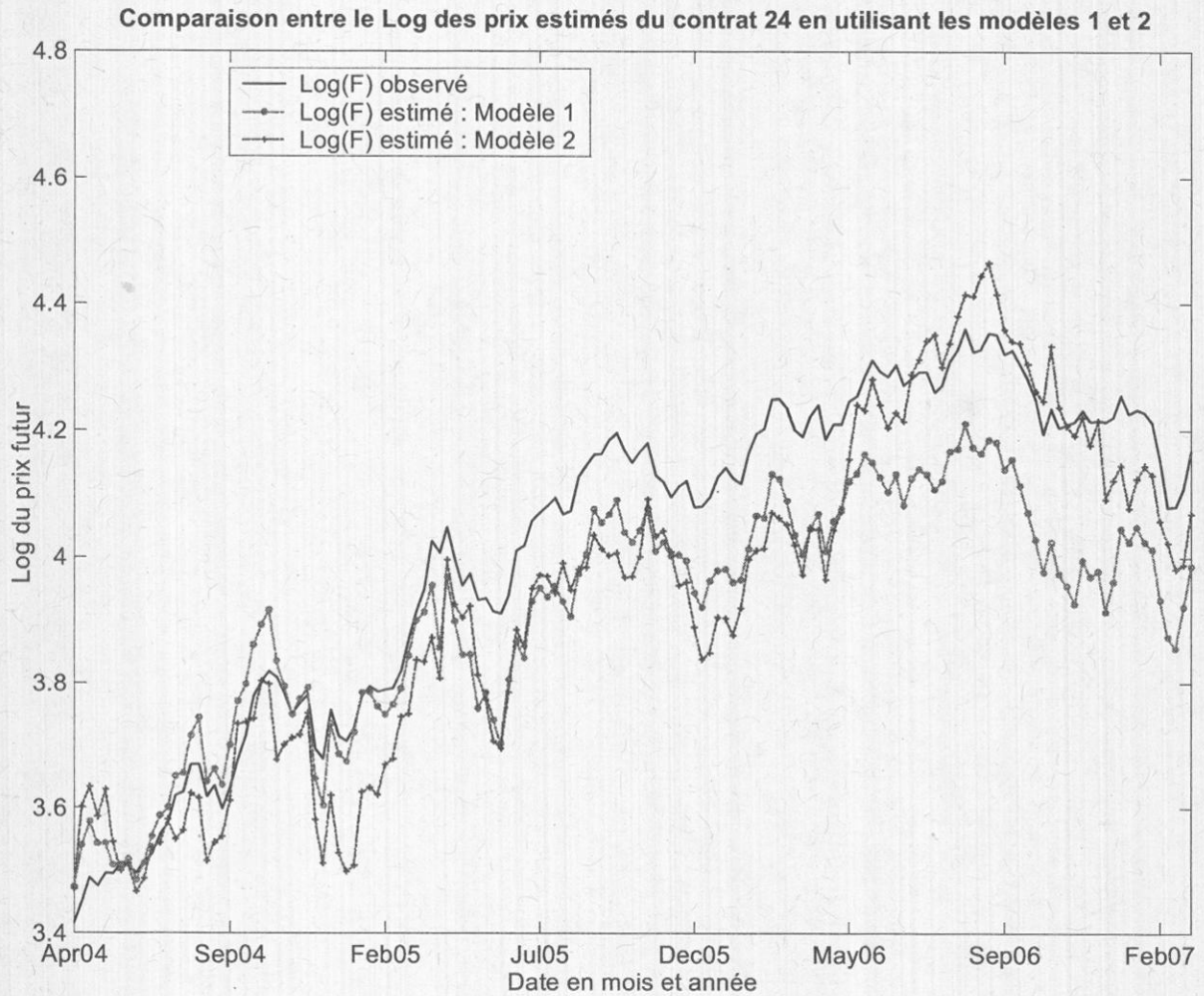


Figure 19: Dans le cas où plusieurs contrats sont considérés pour le modèle 1 et 2, la figure ci-dessus présente la comparaison entre le logarithme des prix hebdomadaires estimés en utilisant les paramètres trouvés pour  $n = 24$ , et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 du contrat  $F^{24}$ .

L'écart entre le Log des prix observés et estimés des deux premiers et des deux derniers contrats en utilisant le modèle 1

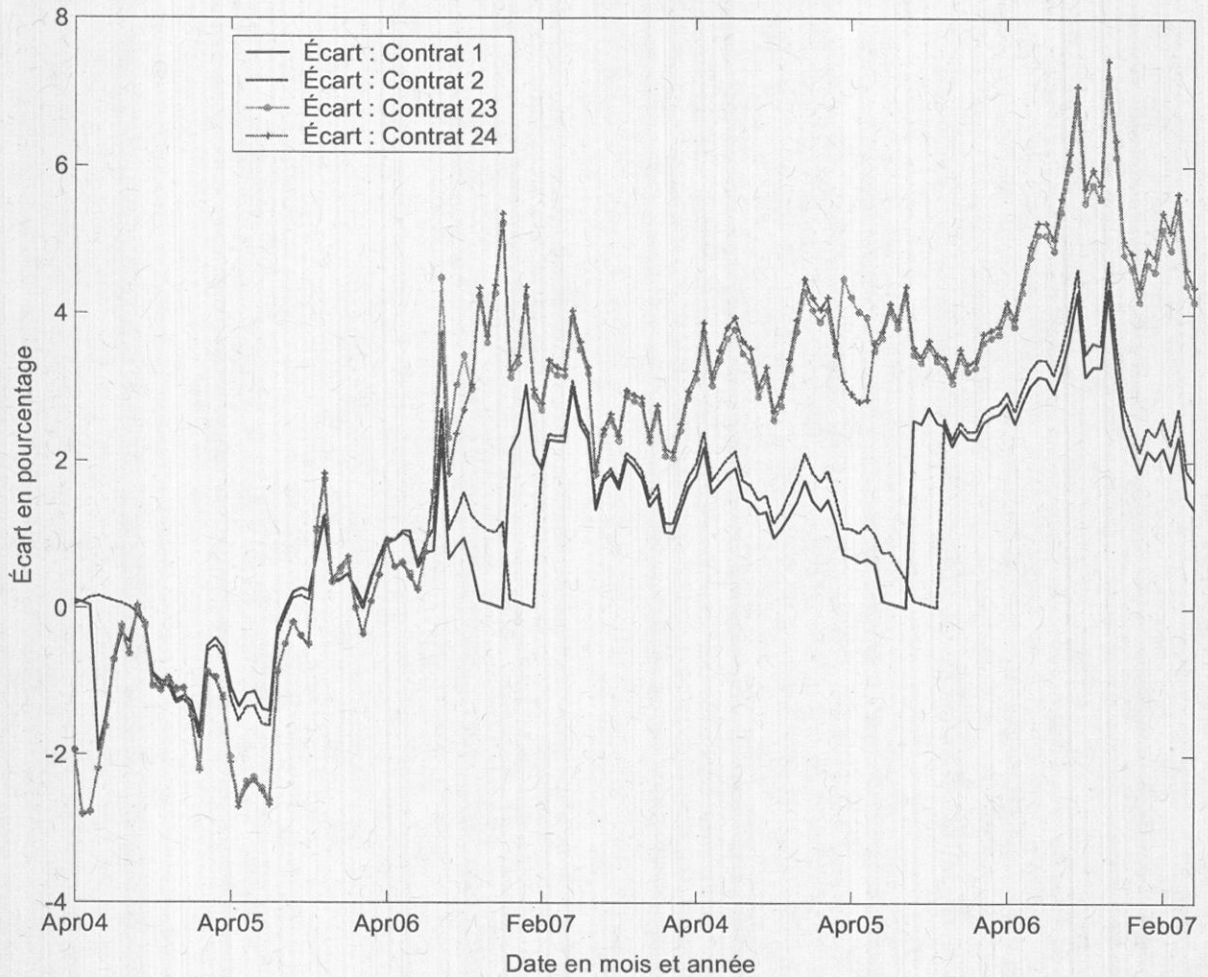


Figure 20: Dans le cas où plusieurs contrats futurs sont considérés pour le modèle 1, la figure ci-dessus présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés en utilisant les paramètres trouvés pour  $n = 24$ , et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 des contrats  $F_1, F_2, F_{23}$  et  $F_{24}$ .

L'écart entre le Log des prix observés et estimés des deux premiers et des deux derniers contrats en utilisant le modèle 2

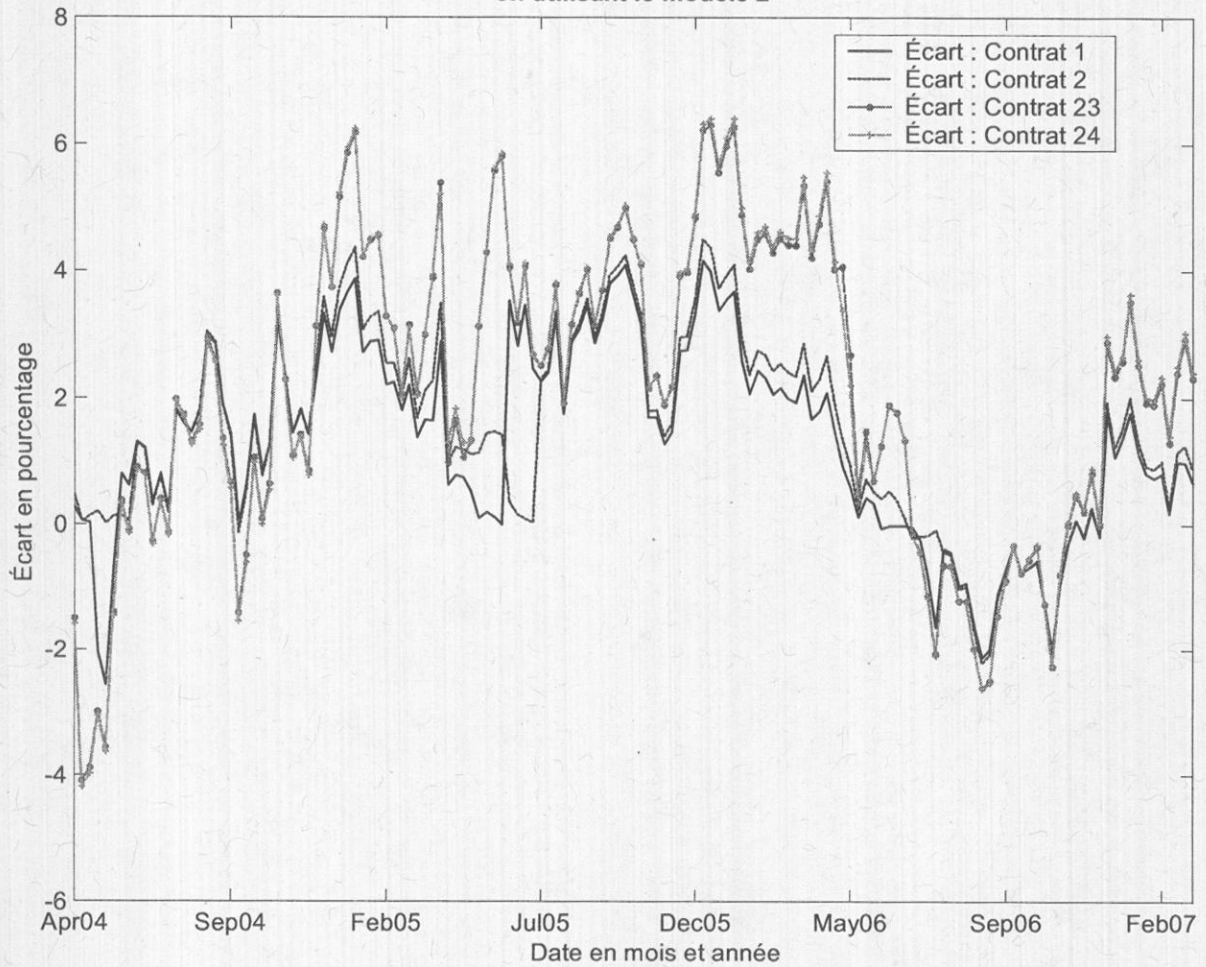


Figure 21: Dans le cas où plusieurs contrats futurs sont considérés pour le modèle 2, la figure ci-dessus présente la comparaison entre les écarts du logarithme des prix hebdomadaires estimés en utilisant les paramètres trouvés pour  $n = 24$ , et du logarithme des prix hebdomadaires observés du 30 avril 2004 jusqu'au 2 février 2007 des contrats  $F_1, F_2, F_{23}$  et  $F_{24}$ .

En résumé, dans les deux cas où un contrat ou plusieurs contrats sont considérés, nous avons constaté plus haut que la différence entre les deux modèles augmente avec la maturité des contrats futurs. En effet, le modèle 1 suppose que le taux de rendement de détention reste constant au cours du temps, ce qui n'est pas cohérent avec l'évolution du prix du pétrole sur le marché. Cette faiblesse devient de plus en plus importante pour les contrats à long terme. Compte tenu de ce fait, nous avons calculé la moyenne des erreurs et la moyenne quadratique des erreurs (out of sample) dans les tableaux 15 et 16 :

Table 15: Les critères de performance MPE et RMSE (out of sample) du modèle 1 et du modèle 2 dans le cas où un seul contrat est considéré.

Paramètre	Estimé du contrat $F1$		Estimé du contrat $F24$	
	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 1	Modèle 2
$MPE_{n,N}$	0.099	0.092	0.079	0.049
$RMSE_{n,N}$	0.132	0.129	0.114	0.100

Table 16: Les critères de performance MPE et RMSE du modèle 1 et du modèle 2 dans le cas où plusieurs contrats futurs sont utilisés.

Paramètre	Modèle 1	Modèle 2
$MPE_{n,N}$	0.074	0.031
$RMSE_{n,N}$	0.109	0.085

Si nous comparons les différents paramètres  $MPE$  et  $RMSE$ , il est intéressant de noter que le facteur de corrélation des prix des contrats futurs, n'a pas beaucoup amélioré la performance du modèle 1. En revanche, nous notons une nette améliorations dans le cas du modèle 2. Ainsi, dans les cas où un seul contrat ou plusieurs contrats sont considérés, il apparaît que le modèle 2 est plus performant que le modèle 1.

## 5.2 Conclusion

En général, le comportement de retour vers la moyenne est un phénomène d'équilibre qui peut être associé spécifiquement aux commodités. C'est pourquoi nous avons testé deux modèles qui tiennent compte de ce comportement. Il apparaît que le modèle à un facteur non seulement surévalue les prix futurs dans le cas où un seul contrat est considéré, mais aussi le facteur de la corrélation des contrats futurs n'a pas d'impact sur sa performance. En revanche, le modèle à deux facteurs est plus performant que celui à un facteur pour l'évaluation des contrats à court terme. Ce qui peut être considéré comme une des récompenses de l'introduction d'une deuxième source d'incertitude dans le modèle. Il est intéressant de noter à ce propos que l'hypothèse utilisée dans le mémoire d'Émilie Blouin "Tarification d'option panier" [2001], qui suppose que le taux de rendement de détention et le prix sont fortement corrélés, n'est pas valide. Effectivement, dans le test empirique, la corrélation estimée par le modèle à deux facteurs était toujours différent de 1.

En somme, il serait utile de prendre en considération la nature de la liquidité des contrats dans le modèle à deux facteurs. Ce paramètre peut être compté parmi ceux qui augmentent sa faiblesse. En fait, il a beaucoup d'influence sur l'estimation et l'évaluation des contrats, en particulier ceux à long terme.

## A. Démonstration de l'équation (6) et (8)

Nous commençons par la démonstration de l'ÉDS (6), ensuite nous allons dériver sa solution forte décrite par l'équation (8).

Notre premier modèle suppose que le prix d'une denrée  $S_t$  suit le processus stochastique suivant :

$$dS_t = \kappa(\mu - \ln S_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

avec

$$\mu = \mu^* - \frac{\delta}{\kappa}.$$

Considérons le logarithme du prix  $X_t = \ln S_t$ . Nous appliquons le lemme d'Itô, nous aurons

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{\partial X}{\partial S}(S_t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial S^2}(S_t) d\langle S \rangle_t \\ &= \frac{1}{S_t} [\kappa(\mu - X_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t] + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) (\sigma S_t)^2 dt \\ &= \kappa \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa} - X_t \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Nous posons  $\alpha = \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$ , et l'équation précédente devient

$$dX_t = \kappa(\alpha - X_t)dt + \sigma dW_t. \quad (24)$$

C'est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, sa solution forte est donnée par

$$X_t = X_0 e^{-\kappa t} + \alpha(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dW_s.$$



## B. Démonstration de l'équation (9)

Nous allons appliquer le lemme d'Itô pour démontrer l'équation (9) qui représente l'équation différentielle stochastique de la valeur du portefeuille autofinancé :

$$Y = \left\{ S_t e^{\int_0^t \delta_s ds} : t \geq 0 \right\}.$$

Or le taux de rendement de détention de la denrée est supposé constant pour le modèle 1, nous avons donc  $Y_t = S_t e^{\delta t}$ . Nous appliquons le lemme d'Itô, nous obtenons :

$$\begin{aligned} dY_t &= dS_t e^{\delta t} \\ &= e^{\delta t} dS_t + \delta S_t e^{\delta t} dt \\ &= e^{\delta t} (\kappa(\mu - \ln S_t) S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \delta S_t e^{\delta t} dt \\ &= \kappa(\mu - \ln S_t) Y_t dt + \sigma Y_t dW_t + \delta Y_t dt \\ &= \kappa \left( \mu + \frac{\delta}{\kappa} - \ln S_t \right) Y_t dt + \sigma Y_t dW_t, \end{aligned}$$

comme

$$\mu = \mu^* - \frac{\delta}{\kappa},$$

alors

$$dY_t = \kappa (\mu^* - \ln S_t) Y_t dt + \sigma Y_t dW_t.$$

## C. Le modèle 1 est un modèle de marché complet

Dans ce qui suit, nous allons montrer l'existence et l'unicité de la mesure neutre au risque en vue de prouver que le modèle 1 est un modèle de marché complet.

### C.1 la prime de risque

Avant de déterminer la mesure neutre au risque nous allons trouver la prime de risque. Pour cela, nous définissons le processus  $Z = \{Z_t = B_t^{-1}Y_t : t \geq 0\}$  où la variable  $Z_t$  représente la valeur actualisée à l'instant  $t$  du portefeuille composé d'une denrée et de ses bénéfices. Nous avons :

$$\begin{aligned} dZ_t &= B_t^{-1}dY_t + Y_tdB_t^{-1} + d\langle B^{-1}Y \rangle_t \\ &= B_t^{-1} \left[ \kappa \left( \mu + \frac{\delta}{\kappa} - \ln S_t \right) Y_t dt + \sigma Y_t dW_t \right] - rB_t^{-1}Y_t dt \\ &= \kappa \left( \mu + \frac{\delta - r}{\kappa} - \ln S_t \right) Z_t dt + Z_t \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (25)$$

Pour tout  $t \geq 0$  posons  $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$ . L'équation différentielle stochastique (25) devient :

$$\begin{aligned} dZ_t &= \kappa \left( \mu + \frac{\delta - r}{\kappa} - \ln S_t \right) Z_t dt + Z_t \sigma [d\tilde{W}_t - \lambda_t dt] \\ &= \kappa \left( \mu + \frac{\delta - r}{\kappa} - \ln S_t - \frac{\sigma}{\kappa} \lambda_t \right) Z_t dt + Z_t \sigma d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

En conséquence,  $Z$  est une martingale si et seulement si pour tout  $t \geq 0$ , nous avons

$$\mu + \frac{\delta - r}{\kappa} - \ln S_t - \frac{\sigma}{\kappa} \lambda_t = 0.$$

Il suffit donc de poser

$$\lambda_t = \frac{1}{\sigma} [\kappa(\mu - \ln S_t) + \delta - r], \quad (26)$$

$\lambda_t$  est la prime de risque.

## C.2 La mesure martingale

Tout d'abord nous allons montrer l'existence d'une mesure neutre au risque  $Q$ , pour ce faire, nous aurons recours au théorème de Cameron-Martin-Girsanov. Par la suite nous montrerons l'unicité de cette mesure martingale  $Q$ .

Afin d'appliquer le théorème de Cameron-Martin-Girsanov, nous devons vérifier que :

1. Le processus  $\lambda = \{\lambda_t : t \in \{0, 1, \dots, T\}\}$  est  $F$ -prévisible ;
2. La condition de Novikov est satisfaite, à savoir,  $E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right) \right] < \infty$ .

En effet,  $X_t = \ln S_t$  suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck  $F$ -adapté. Comme  $\lambda_t$  est une transformation linéaire de  $X_t$  (voir l'équation (26)), alors  $\lambda_t$  est aussi un processus  $F$ -adapté. Et puisque les trajectoires sont continues, alors  $\lambda_t$  est  $F$ -prévisible.

Il reste à vérifier la condition de Novikov :

$$\begin{aligned}
& E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right) \right] \\
&= E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{1}{\sigma} [\kappa(\mu - X_t) + \delta - r] \right)^2 dt \right) \right] \\
&= E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T [\kappa(\mu - X_t) + \delta - r]^2 dt \right) \right] \\
&= E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T [\kappa^2(\mu^2 - 2\mu X_t + X_t^2) + 2\kappa\mu(\delta - r) - 2\kappa(\delta - r)X_t + (\delta - r)^2] dt \right) \right] \\
&= E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T [\kappa^2\mu^2 - (2\kappa^2\mu + 2\kappa(\delta - r))X_t + \kappa^2 X_t^2 + 2\kappa\mu(\delta - r) + (\delta - r)^2] dt \right) \right] \\
&= E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T [\kappa^2\mu^2 + 2\kappa\mu(\delta - r) + (\delta - r)^2 - (2\kappa^2\mu + 2\kappa(\delta - r))X_t + \kappa^2 X_t^2] dt \right) \right] \\
&= E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T [(\kappa\mu + \delta - r)^2 - (2\kappa^2\mu + 2\kappa(\delta - r))X_t + \kappa^2 X_t^2] dt \right) \right] \\
&= E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2\sigma^2} \left[ (\kappa\mu + \delta - r)^2 T - (2\kappa^2\mu + 2\kappa(\delta - r)) \int_0^T X_t dt + \kappa^2 \int_0^T X_t^2 dt \right] \right) \right]. \quad (27)
\end{aligned}$$

Nous allons poser :

$$\begin{aligned}
\eta_T &= \frac{(\kappa\mu + \delta - r)^2}{2\sigma^2} T, \\
\theta &= -\frac{\kappa^2\mu + \kappa(\delta - r)}{\sigma^2}, \\
\vartheta &= \frac{\kappa^2}{2\sigma^2}.
\end{aligned}$$

L'équation (27) devient :

$$\begin{aligned}
 E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right) \right] &= E_P \left[ \exp \left( \eta_T + \theta \int_0^T X_t dt + \vartheta \int_0^T X_t^2 dt \right) \right] \\
 &= \exp(\eta_T) E_P \left[ \exp \left( \theta \int_0^T X_t dt + \vartheta \int_0^T X_t^2 dt \right) \right] \\
 &= \exp(\eta_T) E_P \left[ \exp \left( \theta \int_0^T X_t dt \right) \times \exp \left( \vartheta \int_0^T X_t^2 dt \right) \right].
 \end{aligned}$$

Nous appliquons l'inégalité de Hölder<sup>1</sup>, nous obtenons

$$E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right) \right] \leq \exp(\eta_T) E_P^{\frac{1}{p}} \left[ \exp \left( p\theta \int_0^T X_t dt \right) \right] E_P^{\frac{1}{q}} \left[ \exp \left( q\vartheta \int_0^T X_t^2 dt \right) \right].$$

En conséquence, la condition de Novikov sera satisfaite si nous avons

$$E_P \left[ \exp \left( p\theta \int_0^T X_t dt \right) \right] < \infty \text{ et } E_P \left[ \exp \left( q\vartheta \int_0^T X_t^2 dt \right) \right] < \infty.$$

Avant d'évaluer ces deux espérances, nous allons calculer les intégrales  $\int_0^T X_t dt$  et  $\int_0^T X_t^2 dt$  et ce en utilisant la solution forte de l'équation différentielle stochastique de  $X_t$  donnée par l'équation (8) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T X_t dt &= \int_0^T \left[ \alpha + (X_0 - \alpha)e^{-\kappa t} + \int_0^t \sigma e^{-\kappa(t-s)} dW_s \right] dt \\
 &= \alpha T + (X_0 - \alpha) \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} + \int_0^T \left( \int_0^t \sigma e^{-\kappa(t-s)} dW_s \right) dt \\
 &= \alpha T + (X_0 - \alpha) \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} + \int_0^T \left( \int_s^T \sigma e^{-\kappa(t-s)} dt \right) dW_s \\
 &= \alpha T + (X_0 - \alpha) \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} + \sigma \int_0^T \frac{1 - e^{-\kappa(T-s)}}{\kappa} dW_s.
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>L'inégalité de Hölder :

Si  $f$  et  $g$  sont positives et intégrables sur  $[a, b]$ , et soient  $1 \leq p, q < \infty$  avec  $1/p + 1/q = 1$ , alors :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left[ \int_a^b f^p(x) \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_a^b g^q(x) \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Remarquons que  $\int_0^T X_t dt$  est de loi normale :  $\int_0^T X_t dt \sim N(\tilde{\mu}_T, \tilde{\sigma}_T^2)$ , avec

$$\tilde{\mu}_T = \alpha T + (X_0 - \alpha) \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa},$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_T^2 &= \sigma^2 \int_0^T \left( \frac{1 - e^{-\kappa(T-s)}}{\kappa} \right)^2 ds \\ &= \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \int_0^T (1 - 2e^{-\kappa(T-s)} + e^{-2\kappa(T-s)}) ds \\ &= \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \left[ T - \frac{2}{\kappa}(1 - e^{-\kappa T}) + \frac{1}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa T}) \right]. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} E_P \left[ \exp \left( p\theta \int_0^T X_t dt \right) \right] &= \exp \left( p\theta E_P \left[ \int_0^T X_t dt \right] + \frac{1}{2} p^2 \theta^2 \text{Var} \left[ \int_0^T X_t dt \right] \right) \\ &= \exp \left( p\theta \tilde{\mu}_T + \frac{1}{2} p^2 \theta^2 \tilde{\sigma}_T^2 \right), \end{aligned}$$

alors  $E_P \left[ \exp \left( p\theta \int_0^T X_t dt \right) \right] < \infty$ .

Il nous reste à vérifier que la deuxième espérance  $E_P \left[ \exp \left( q\theta \int_0^T X_t^2 dt \right) \right]$  est finie. De la même manière que précédemment, nous allons commencer par l'évaluation de  $\int_0^T X_t^2 dt$  en remplaçant  $X_t$

par sa solution forte.

$$\begin{aligned}
& \int_0^T X_t^2 dt \\
&= \int_0^T \left[ X_0 e^{-\kappa t} + \alpha(1 - e^{-\kappa t}) + \int_0^t \sigma e^{-\kappa(t-s)} dW_s \right]^2 dt \\
&= \int_0^T \left[ (X_0 e^{-\kappa t} + \alpha(1 - e^{-\kappa t}))^2 + 2(X_0 e^{-\kappa t} + \alpha(1 - e^{-\kappa t})) \int_0^t \sigma e^{-\kappa(t-s)} dW_s \right. \\
&\quad \left. + \sigma^2 e^{-2\kappa t} \left( \int_0^t e^{\kappa s} dW_s \right)^2 \right] dt \\
&= \int_0^T \left[ X_0^2 e^{-2\kappa t} + 2\alpha X_0 (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) + 2\sigma X_0 e^{-2\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dW_s + \alpha^2 (1 - 2e^{-\kappa t} + e^{-2\kappa t}) \right. \\
&\quad \left. + 2\alpha\sigma (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) \int_0^t e^{\kappa s} dW_s + \sigma^2 e^{-2\kappa t} \left( \int_0^t e^{\kappa s} dW_s \right)^2 \right] dt \\
&= (X_0^2 - 2\alpha X_0 + \alpha^2) \left( \frac{1 - e^{-2\kappa T}}{2\kappa} \right) + 2\alpha(X_0 - \alpha) \left( \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} \right) \\
&\quad + \alpha^2 T + 2\sigma(X_0 - \alpha) \int_0^T \left( \int_s^T e^{-2\kappa t} e^{\kappa s} dt \right) dW_s + 2\alpha\sigma \int_0^T \left( \int_s^T e^{-\kappa(t-s)} dt \right) dW_s \\
&\quad + \sigma^2 \int_0^T e^{-2\kappa t} \left( \int_0^t e^{\kappa s} dW_s \right)^2 dt \\
&= (X_0^2 - 2\alpha X_0 + \alpha^2) \left( \frac{1 - e^{-2\kappa T}}{2\kappa} \right) + 2\alpha(X_0 - \alpha) \left( \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} \right) + \alpha^2 T \\
&\quad + \frac{\sigma(X_0 - \alpha)}{\kappa} \int_0^T (e^{-\kappa s} - e^{-\kappa(2T-s)}) dW_s + \frac{2\alpha\sigma}{\kappa} \int_0^T (1 - e^{-\kappa(T-s)}) dW_s \\
&\quad + \sigma^2 \int_0^T e^{-2\kappa t} \left( \int_0^t e^{\kappa s} dW_s \right)^2 dt.
\end{aligned}$$

Si nous définissons :

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_T &= (X_0^2 - 2\alpha X_0 + \alpha^2) \left( \frac{1 - e^{-2\kappa T}}{2\kappa} \right) + 2\alpha (X_0 - \alpha) \left( \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} \right) + \alpha^2 T, \\ \hat{\theta}_s &= \frac{\sigma (X_0 - \alpha)}{\kappa} e^{-s\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-s)}) - \frac{2\alpha\sigma}{\kappa} e^{-\kappa(T-s)} + \frac{2\alpha\sigma}{\kappa}, \\ \hat{\vartheta}_s &= \sigma e^{-\kappa(t-s)}.\end{aligned}$$

Nous obtiendrons

$$\int_0^T X_t^2 dt = \hat{\eta}_T + \int_0^T \hat{\theta}_s dW_s + \int_0^T \left( \int_0^t \hat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 dt.$$

Et la deuxième espérance deviendra

$$\begin{aligned}E_P \left[ \exp \left( q\vartheta \int_0^T X_t^2 dt \right) \right] &= E_P \left[ \exp \left( q\vartheta \left[ \hat{\eta}_T + \int_0^T \hat{\theta}_s dW_s + \int_0^T \left( \int_0^t \hat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 dt \right] \right) \right] \\ &= \exp(q\vartheta \hat{\eta}_T) E_P \left[ \exp \left( q\vartheta \int_0^T \hat{\theta}_s dW_s \right) \times \exp \left( q\vartheta \int_0^T \left( \int_0^t \hat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 dt \right) \right].\end{aligned}$$

Nous appliquons, encore une fois, l'inégalité de Hölder pour  $\hat{p}$  et  $\hat{q}$  tel que  $\frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{\hat{q}} = 1$ , nous avons

$$\begin{aligned}& E_P \left[ \exp \left( q\vartheta \int_0^T \hat{\theta}_s dW_s \right) \times \exp \left( q\vartheta \int_0^T \left( \int_0^t \hat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 dt \right) \right] \\ & \leq E_P^{\frac{1}{\hat{p}}} \left[ \exp \left( \hat{p}q\vartheta \int_0^T \hat{\theta}_s dW_s \right) \right] \times E_P^{\frac{1}{\hat{q}}} \left[ \exp \left( \hat{q}q\vartheta \int_0^T \left( \int_0^t \hat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 dt \right) \right].\end{aligned}$$

Donc, pour montrer que  $E_P \left[ \exp \left( q\vartheta \int_0^T X_t^2 dt \right) \right] < \infty$ , il suffit de vérifier que les deux espérances  $E_P \left[ \exp \left( \hat{p}q\vartheta \int_0^T \hat{\theta}_s dW_s \right) \right]$  et  $E_P \left[ \exp \left( \hat{q}q\vartheta \int_0^T \left( \int_0^t \hat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 dt \right) \right]$  sont finies.



Tout d'abord, remarquons que  $\int_0^T \hat{\theta}_s dW_s$  suit une loi normale :  $\int_0^T \hat{\theta}_s dW_s \sim N(0, \hat{\sigma}_T^2)$ , avec

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_T^2 &= \int_0^T \hat{\theta}_s^2 ds \\
&= \int_0^T \left[ \frac{\sigma(X_0 - \alpha)}{\kappa} e^{-s\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-s)}) - \frac{2\alpha\sigma}{\kappa} e^{-\kappa(T-s)} + \frac{2\alpha\sigma}{\kappa} \right]^2 ds \\
&= \int_0^T \left[ \frac{\sigma(X_0 - \alpha)}{\kappa} (e^{-\kappa s} - e^{-\kappa(2T-s)}) + \frac{2\alpha\sigma}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-s)}) \right]^2 ds \\
&= \int_0^T \left[ \frac{\sigma^2(X_0 - \alpha)^2}{\kappa^2} (e^{-\kappa s} - e^{-\kappa(2T-s)})^2 + \frac{4\alpha\sigma^2(X_0 - \alpha)}{\kappa^2} (e^{-\kappa s} - e^{-\kappa(2T-s)})(1 - e^{-\kappa(T-s)}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\alpha^2\sigma^2}{\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-s)})^2 \right] ds \\
&= \int_0^T \frac{\sigma^2(X_0 - \alpha)^2}{\kappa^2} (e^{-2\kappa s} - 2e^{-2\kappa T} + e^{-2\kappa(2T-s)}) ds \\
&\quad + \int_0^T \frac{4\alpha\sigma^2(X_0 - \alpha)}{\kappa^2} (e^{-\kappa s} - e^{-\kappa(2T-s)} - e^{-\kappa T} + e^{-\kappa(3T-2s)}) ds \\
&\quad + \int_0^T \frac{4\alpha^2\sigma^2}{\kappa^2} (1 - 2e^{-\kappa(T-s)} + e^{-2\kappa(T-s)}) ds \\
&= \frac{\sigma^2(X_0 - \alpha)^2}{\kappa^2} \left[ \frac{e^{-2\kappa T} - 1}{-2\kappa} - 2Te^{-2\kappa T} + \frac{e^{-2\kappa T} - e^{-4\kappa T}}{2\kappa} \right] \\
&\quad + \frac{4\alpha\sigma^2(X_0 - \alpha)}{\kappa^2} \left[ \frac{e^{-\kappa T} - 1}{-\kappa} - \frac{e^{-\kappa T} - e^{-2\kappa T}}{\kappa} - Te^{-\kappa T} + \frac{e^{-\kappa T} - e^{-3\kappa T}}{2\kappa} \right] \\
&\quad + \frac{4\alpha^2\sigma^2}{\kappa^2} \left[ T - 2\left(\frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa}\right) + \frac{1 - e^{-2\kappa T}}{2\kappa} \right] \\
&= \frac{\sigma^2(X_0 - \alpha)^2}{2\kappa^3} e^{-2\kappa T} [e^{2\kappa T} - 1 - 4\kappa T + 1 - e^{-2\kappa T}] \\
&\quad + \frac{4\alpha\sigma^2(X_0 - \alpha)}{2\kappa^3} e^{-2\kappa T} [2(e^{2\kappa T} - e^{\kappa T}) - 2(e^{\kappa T} - 1) - 2\kappa T e^{\kappa T} + e^{\kappa T} - e^{-\kappa T}] \\
&\quad + \frac{4\alpha^2\sigma^2}{2\kappa^3} e^{-2\kappa T} [2\kappa T e^{2\kappa T} - 4(e^{2\kappa T} - e^{\kappa T}) + e^{2\kappa T} - 1] \\
&= \frac{\sigma^2(X_0 - \alpha)^2}{2\kappa^3} e^{-2\kappa T} [e^{2\kappa T} - e^{-2\kappa T} - 4\kappa T] \\
&\quad + \frac{4\alpha\sigma^2(X_0 - \alpha)}{2\kappa^3} e^{-2\kappa T} [2e^{2\kappa T} - (4 + 2\kappa T)e^{\kappa T} + e^{\kappa T} - e^{-\kappa T} + 2] \\
&\quad + \frac{4\alpha^2\sigma^2}{2\kappa^3} e^{-2\kappa T} [(2\kappa T - 3)e^{2\kappa T} + 4e^{\kappa T} - 1].
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E_P \left[ \exp \left( \widehat{p}q\vartheta \int_0^T \widehat{\theta}_s dW_s \right) \right] &= \exp \left( \widehat{p}q\vartheta E_P \left[ \int_0^T \widehat{\theta}_s dW_s \right] + \frac{1}{2} (\widehat{p}q\vartheta)^2 \text{Var}_P \left[ \int_0^T \widehat{\theta}_s dW_s \right] \right) \\ &= \exp \left( \frac{(\widehat{p}q\vartheta \widehat{\sigma}_T)^2}{2} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Il nous reste que la deuxième espérance. Nous avons

$$E_P \left[ \exp \left( \widehat{q}q\vartheta \int_0^T \left( \int_0^t \widehat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 dt \right) \right] = E_P \left[ \exp \left( \int_0^T \left( \sqrt{\widehat{q}q\vartheta} \int_0^t \widehat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 dt \right) \right].$$

Nous utilisons l'inégalité de Jensen<sup>2</sup> pour avoir

$$\exp \left[ \int_0^T \left( \sqrt{\widehat{q}q\vartheta} \int_0^t \widehat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 dt \right] \leq \frac{1}{T} \int_0^T \exp \left[ \left( \sqrt{\widehat{q}q\vartheta T} \int_0^t \widehat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 \right] dt.$$

Donc, nous obtenons

$$E_P \left[ \exp \left[ \int_0^T \left( \sqrt{\widehat{q}q\vartheta} \int_0^t \widehat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 dt \right] \right] \leq \frac{1}{T} E_P \left[ \int_0^T \exp \left[ \left( \sqrt{\widehat{q}q\vartheta T} \int_0^t \widehat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 \right] dt \right].$$

Afin d'interchanger l'espérance et l'intégrale dans le deuxième terme de cette inégalité, nous utilisons le théorème de Fubini. En d'autre terme, nous avons

$$E_P \left[ \int_0^T \exp \left[ \left( \sqrt{\widehat{q}q\vartheta T} \int_0^t \widehat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 \right] dt \right] = \int_0^T E_P \left[ \exp \left[ \left( \sqrt{\widehat{q}q\vartheta T} \int_0^t \widehat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 \right] \right] dt.$$

<sup>2</sup>L'inégalité de Jensen :

Si  $\varphi$  est une fonction convexe, alors :  $\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$ .

D'une part, remarquons que  $\int_0^t \hat{\vartheta}_s dW_s \sim N(0, \check{\sigma}^2)$ , avec

$$\begin{aligned}\check{\sigma}^2 &= \int_0^t \hat{\vartheta}_s^2 ds \\ &= \int_0^t \sigma^2 e^{-2\kappa(t-s)} ds \\ &= \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right).\end{aligned}$$

D'autre part, rappelons que pour une variable aléatoire  $Z$  de loi gaussien standard  $Z \sim N(0, 1)$ , la variable  $Z^2$  est une variable distribuée selon une loi de khi-deux avec un degré de liberté ( $Z^2 \sim \chi^2(1)$ ). En particulier, la loi de khi-deux à un degré de liberté est une loi gamma  $Z^2 \sim \text{Gam}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ , et sa fonction génératrice des moments est donnée par

$$E_P[e^{cZ^2}] = \begin{cases} \frac{1}{(1-2c)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } c < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent

$$E_P \left[ \exp \left[ \left( \sqrt{\hat{q}q\vartheta T} \int_0^t \hat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 \right] \right] = \begin{cases} \frac{1}{\left( 1 - 2\vartheta T \hat{q}q\sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right) \right)} & \text{si } \vartheta T \hat{q}q\sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right) < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous intégrons cette expression sur l'intervalle  $[0, T]$ . Nous obtenons :

$$\int_0^T E_P \left[ \exp \left[ \left( \sqrt{\hat{q}q\vartheta T} \int_0^t \hat{\vartheta}_s dW_s \right)^2 \right] \right] dt = \begin{cases} \frac{1 - e^{-2\kappa T}}{2\kappa} & \text{si } \vartheta T \hat{q}q\sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right) < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

En conclusion, la condition de Novikov et, par le fait même, les conditions de C-M-G seront vérifiées si

$$\vartheta T \hat{q} q \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right) < \frac{1}{2}.$$

Nous choisissons  $\hat{p} = p$  et  $\hat{q} = q$  et nous remplaçons  $\vartheta$  par sa valeur, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{2\sigma^2} T q^2 \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right) &< \frac{1}{2} \\ q^2 (1 - e^{-2\kappa t}) &< \frac{2}{\kappa T}. \end{aligned}$$

Comme le paramètre  $q$  est arbitraire, nous allons le choisir tel que pour tout  $0 \leq t \leq T$  la dernière inégalité sera satisfaite. Pour cela, nous allons prendre

$$q < \left( \frac{2}{\kappa T (1 - e^{-2\kappa T})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, il existe une mesure de probabilité  $Q$  équivalente à  $P$  sous laquelle

$$\tilde{W} = \left\{ \tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds : 0 \leq t \leq T \right\}$$

est un  $(\{\mathcal{F}_t\}, Q)$ -mouvement brownien standard. Enfin, l'unicité de la mesure martingale  $Q$  découle de l'unicité de la prime de risque  $\lambda_t$ .

### C.3 Le prix d'un contrat à terme

Nous venons de montrer que le modèle 1 est un modèle de marché qui n'admet pas d'opportunité d'arbitrage, et tous les droits contingents sont accessibles. Cependant, pour trouver le prix théorique d'un contrat à terme, nous allons utiliser un résultat qui fut démontré dans la littérature (Hull [1997]) à savoir que le prix d'un contrat à terme est donné par l'espérance sous la mesure martingale du

prix de l'actif sous-jacent à l'échéance du contrat :

$$\begin{aligned}
 F(S, t, T) &= E_Q[S_T | \mathcal{F}_t] \\
 &= E_Q[e^{X_T} | \mathcal{F}_t] \\
 &= \exp \left( E_Q[X_T | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} \text{Var}_Q[X_T | \mathcal{F}_t] \right).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Comme l'évolution du logarithme du prix, sous la mesure martingale, satisfait l'équation

$$\begin{aligned}
 dX_t &= \kappa(\alpha - X_t)dt + \sigma[d\tilde{W}_t - \lambda_t dt] \\
 &= \kappa\left(\alpha - X_t - \frac{\sigma}{\kappa}\lambda_t\right)dt + \sigma d\tilde{W}_t \\
 &= \kappa\left(\alpha - X_t - \frac{\sigma}{\kappa} \times \frac{1}{\sigma}[\kappa(\mu - X_t) + \delta - r]\right)dt + \sigma d\tilde{W}_t \\
 &= \kappa\left(\alpha - \mu - \frac{\delta - r}{\kappa}\right)dt + \sigma d\tilde{W}_t \\
 &= \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma d\tilde{W}_t.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Alors, le prix du contrat à terme est donné par

$$\begin{aligned}
 F(S, t, T) &= \exp(X_t + (r - \delta)(T - t)) \\
 &= S_t \exp((r - \delta)(T - t)).
 \end{aligned}$$

## D. Démonstration de l'équation (14)

Rappelons que le processus représentant l'évolution de la valeur du portefeuille autofinancé est défini comme suit

$$Y = \left\{ Y_t = S_t e^{\int_0^t \delta_s ds} : t \geq 0 \right\}.$$

Nous allons appliquer le lemme d'Itô pour démontrer l'équation (14). Soit  $R_t = \int_0^t \delta_s ds$ , nous avons donc  $Y_t = S_t e^{R_t}$  et

$$\begin{aligned} dY_t &= dS_t e^{R_t} \\ &= e^{R_t} [(\mu - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t^S] + S_t \delta_t e^{R_t} dt \\ &= \mu Y_t dt + \sigma_1 Y_t dW_t^S. \end{aligned}$$

## E. Le modèle 2 est un modèle de marché incomplet

Dans cette section, nous allons montrer que le modèle 2 est un modèle de marché incomplet qui n'admet pas d'opportunité d'arbitrage. Pour ce faire, nous allons déterminer au moins une mesure martingale.

### E.1 La prime de risque

Avant de déterminer la mesure martingale, nous allons trouver la prime de risque. Tout d'abord, représentons l'évolution de la valeur actualisée du portefeuille autofinancé par le processus  $Z = \{Z_t = B_t^{-1}Y_t : t \geq 0\}$ , et appliquons le lemme d'Itô. Nous obtenons

$$\begin{aligned}dZ_t &= Y_t dB_t^{-1} + B_t^{-1} dY_t \\&= Y_t[-rB_t^{-1}dt] + B_t^{-1}[\mu Y_t dt + \sigma_1 Y_t dW_t^S] \\&= (\mu - r)B_t^{-1}Y_t dt + \sigma_1 B_t^{-1}Y_t dW_t^S \\&= (\mu - r)Z_t dt + \sigma_1 Z_t dW_t^S.\end{aligned}$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , posons :

$$\tilde{W}^S(t) = W^S(t) + \int_0^t \lambda_s ds,$$

et

$$\tilde{W}^\delta(t) = W^\delta(t) + \int_0^t \lambda_s^* ds.$$

L'équation différentielle stochastique du processus  $Z_t$  devient

$$\begin{aligned}dZ_t &= (\mu - r)Z_t dt + \sigma_1 Z_t (d\tilde{W}_t^S - \lambda_t dt) \\&= (\mu - r - \sigma_1 \lambda_t)Z_t dt + \sigma_1 Z_t d\tilde{W}_t^S.\end{aligned}$$

En conséquence,  $Z$  est une martingale si et seulement si  $\forall t \in [0, T]$

$$\mu - r - \sigma_1 \lambda_t = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_t = \frac{\mu - r}{\sigma_1}. \quad (30)$$

Pour la prime de risque  $\lambda_t^*$  associée au mouvement brownien du rendement de détention, nous allons supposer qu'elle reste constante au cours du temps :

$$\lambda_t^* = \lambda^*. \quad (31)$$

## E.2 La mesure martingale

Pour déterminer la mesure martingale nous allons appliquer le théorème de Cameron-Martin-Girsanov. Pour ce faire, il suffit de vérifier la condition de Novikov puisque les deux primes de risque  $\lambda_t$  et  $\lambda_t^*$  sont constantes quelque soit  $t$ . Nous avons

$$\begin{aligned} E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right) \right] &= E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{\mu - r}{\sigma_1} \right)^2 dt \right) \right] \\ &= E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma_1} \right)^2 T \right) \right] \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma_1} \right)^2 T \right) < \infty, \end{aligned}$$

et



$$\begin{aligned}
E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^{*2} dt \right) \right] &= E_P \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^{*2} dt \right) \right] \\
&= E_P \left[ \exp \left( \frac{\lambda^{*2}}{2} T \right) \right] \\
&= \exp \left( \frac{\lambda^{*2}}{2} T \right) < \infty.
\end{aligned}$$

En conséquence, il existe une mesure  $Q$  équivalente à  $P$  sur l'espace  $(\Omega, F)$  et les deux mouvements définis par  $\tilde{W}_t^s = W_t^s + \int_0^t \lambda_s ds$ ,  $\tilde{W}_t^\delta = W_t^\delta + \int_0^t \lambda_s^* ds$  sont des  $(\{\mathcal{F}_t\}, Q)$ -mouvements browniens. En d'autres termes, sous cette mesure martingale, notre modèle de marché devient

$$\begin{aligned}
dS_t &= (\mu - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t (d\tilde{W}_t^S - \lambda_t dt), \\
d\delta_t &= \kappa(\alpha - \delta_t) dt + \sigma_2 (d\tilde{W}_t^\delta - \lambda_t^* dt).
\end{aligned}$$

Nous remplaçons  $\lambda_t$  par son expression (équation (30)) pour avoir

$$dS_t = (r - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t d\tilde{W}_t^S, \quad (32)$$

$$d\delta_t = \kappa \left( \alpha - \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \delta_t \right) dt + \sigma_2 d\tilde{W}_t^\delta. \quad (33)$$

### E.3 Le prix d'un contrat à terme

Sous une mesure martingale, le prix d'un contrat à terme est donné par

$$F(S, t, T) = E^Q[S_T | \mathcal{F}_t].$$

Afin de calculer cette espérance, nous devons déterminer  $S_T$ . Pour ce faire, nous allons utiliser les

équations différentielles stochastiques (32) et (33). Cependant, nous allons décrire de nouveau notre modèle de marché à l'aide de deux mouvements browniens indépendants  $\tilde{W}_t^1$  et  $\tilde{W}_t^2$  construits sur l'espace probablisé  $(\Omega, \mathcal{F}, F, Q)$ . Ainsi, nous avons la relation suivante

$$\begin{pmatrix} \tilde{W}_t^S \\ \tilde{W}_t^\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\tilde{W}_t^2 + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{W}_t^1 \\ \tilde{W}_t^2 \end{pmatrix}.$$

Notre modèle de marché peut être reformulé comme suit :

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t \left( \rho d\tilde{W}_t^2 + \sqrt{1-\rho^2} d\tilde{W}_t^1 \right), \\ d\delta_t &= \kappa(\alpha^* - \delta_t) dt + \sigma_2 d\tilde{W}_t^2. \end{aligned}$$

où

$$\alpha^* = \alpha - \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa}.$$

Nous appliquons le lemme d'Itô :

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \frac{1}{S_t} \left[ (r - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t \left( \rho d\tilde{W}_t^2 + \sqrt{1-\rho^2} d\tilde{W}_t^1 \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (\sigma_1 S_t)^2 dt \\ &= \left( r - \delta_t - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt + \sigma_1 \rho d\tilde{W}_t^2 + \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} d\tilde{W}_t^1 \\ &= \left( -\delta_t - \frac{\rho^2 \sigma_1^2}{2} \right) dt + \sigma_1 \rho d\tilde{W}_t^2 + \left( r - \frac{1-\rho^2}{2} \sigma_1^2 \right) dt + \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} d\tilde{W}_t^1. \end{aligned}$$

Nous intégrons sur l'intervalle  $[t, T]$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \ln S_T &= \ln S_t - \int_t^T \left( \delta_u + \frac{\rho^2 \sigma_1^2}{2} \right) du + \sigma_1 \rho \int_t^T d\tilde{W}_u^2 \\ &\quad + \int_t^T \left( r - \frac{1-\rho^2}{2} \sigma_1^2 \right) du + \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1. \end{aligned}$$

Nous remplaçons  $\delta_u$  par sa solution forte, nous avons

$$\begin{aligned}
\ln S_T &= \ln S_t - \int_t^T \left[ \delta_t e^{-\kappa(u-t)} + \alpha^*(1 - e^{-\kappa(u-t)}) + \sigma_2 e^{-\kappa u} \int_t^u e^{\kappa v} d\tilde{W}_v^2 + \frac{\rho^2 \sigma_1^2}{2} \right] du \\
&\quad + \sigma_1 \rho \int_t^T d\tilde{W}_u^2 + \int_t^T \left( r - \frac{1 - \rho^2}{2} \sigma_1^2 \right) du + \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1 \\
&= \ln S_t - \left[ (\delta_t - \alpha^*) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \alpha^*(T-t) + \int_t^T \left( \int_t^u \sigma_2 e^{-\kappa(u-v)} d\tilde{W}_v^2 \right) du + \frac{\rho^2 \sigma_1^2}{2} (T-t) \right] \\
&\quad + \sigma_1 \rho \int_t^T d\tilde{W}_u^2 + \left( r - \frac{1 - \rho^2}{2} \sigma_1^2 \right) (T-t) + \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1 \\
&= \ln S_t - (\delta_t - \alpha^*) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} - \alpha^*(T-t) - \int_t^T \left( \int_v^T \sigma_2 e^{-\kappa(u-v)} du \right) d\tilde{W}_v^2 - \frac{\rho^2 \sigma_1^2}{2} (T-t) \\
&\quad + \sigma_1 \rho \int_t^T d\tilde{W}_u^2 + \left( r - \frac{1 - \rho^2}{2} \sigma_1^2 \right) (T-t) + \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1 \\
&= \ln S_t - \left( \alpha^* + \frac{\rho^2 \sigma_1^2}{2} \right) (T-t) - (\delta_t - \alpha^*) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} - \int_t^T \sigma_2 \frac{1 - e^{-\kappa(T-v)}}{\kappa} d\tilde{W}_v^2 \\
&\quad + \sigma_1 \rho \int_t^T d\tilde{W}_u^2 + \left( r - \frac{1 - \rho^2}{2} \sigma_1^2 \right) (T-t) + \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1 \\
&= \ln S_t + \left( r - \alpha^* - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) (T-t) - (\delta_t - \alpha^*) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1 \\
&\quad + \int_t^T \left( \sigma_1 \rho - \sigma_2 \frac{1 - e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} \right) d\tilde{W}_u^2.
\end{aligned}$$

Montrons que les deux variables :  $\sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1$  et  $\int_t^T \left( \sigma_1 \rho - \sigma_2 \frac{1 - e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} \right) d\tilde{W}_u^2$  sont indépendantes. Comme il s'agit de variables gaussiennes, il suffit de vérifier que leur covariance est

nulle.

$$\begin{aligned}
& Cov_Q \left[ \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1, \int_t^T \left( \sigma_1 \rho - \sigma_2 \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} \right) d\tilde{W}_u^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= E^Q \left[ \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1 \times \int_t^T \left( \sigma_1 \rho - \sigma_2 \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} \right) d\tilde{W}_u^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \int_t^T \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} \times \left( \sigma_1 \rho - \sigma_2 \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} \right) \underbrace{d\langle \tilde{W}^1, \tilde{W}^2 \rangle_u}_0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, le prix d'un contrat à terme est donné par

$$\begin{aligned}
F(S, t, T) &= E^Q [e^{\ln S_T} | \mathcal{F}_t] \\
&= E^Q \left[ S_t \exp \left[ \left( r - \alpha^* - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) (T-t) + (\alpha^* - \delta_t) \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^T \left( \sigma_1 \rho - \sigma_2 \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} \right) d\tilde{W}_u^2 + \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1 \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= E^Q \left[ S_t \exp \left[ \left( r - \alpha^* - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) (T-t) + (\alpha^* - \delta_t) \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^T \left( \sigma_1 \rho - \sigma_2 \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa} \right) d\tilde{W}_u^2 \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \times E^Q \left[ \exp \left( \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} \int_t^T d\tilde{W}_u^1 \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].
\end{aligned}$$

Nous savons que si  $X$  est de loi normale alors  $E[\exp(X)|\mathcal{F}_t] = \exp\left(E[X|\mathcal{F}_t] + \frac{1}{2}\text{Var}[X|\mathcal{F}_t]\right)$ . Donc

$$\begin{aligned}
 F(S, t, T) &= S_t \exp \left[ \left( r - \alpha^* - \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \rho^2 \sigma_1^2 - 2 \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \right) (T - t) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \alpha^* - \delta_t + \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^2} \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \right] \\
 &\quad \times \exp \left[ \frac{1}{2} \sigma_1^2 (1 - \rho^2) (T - t) \right] \\
 &= S_t \exp \left[ \left( r - \alpha + \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} \right) (T - t) + \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^2} \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \alpha - \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \delta_t + \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right].
 \end{aligned}$$

## F. La fonction de vraisemblance du modèle 1

Rappelons que la solution forte de l'équation différentielle stochastique (6) satisfaite par le logarithme du prix de la marchandise  $X_t = \ln S_t$  pour tout  $t \geq 0$  est

$$X_{t\Delta_t} = X_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) + \sigma e^{-\kappa\Delta_t} \int_0^{\Delta_t} e^{\kappa u} dW_u^1,$$

avec  $\alpha = \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$  et  $\Delta_t$  est le pas de discrétisation de l'espace temps, il représente le temps entre deux observations consécutives exprimé en fraction d'année. La distribution conditionnelle de  $X_{t\Delta_t}$  sachant l'information disponible à l'instant  $(t-1)\Delta_t$  est donnée par

$$(X_{t\Delta_t} | X_{(t-1)\Delta_t}, \dots, X_{\Delta_t}) \sim N \left( X_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}), \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \right).$$

Puisque le logarithme du prix de la denrée  $X_{t\Delta_t}$  est un processus markovien, nous avons

$$f_{X_{t\Delta_t} | X_{(t-1)\Delta_t}, X_{(t-2)\Delta_t}, \dots, X_{\Delta_t}}(X_{t\Delta_t}) = f_{X_{t\Delta_t} | X_{(t-1)\Delta_t}}(X_{t\Delta_t}),$$

c'est-à-dire, la variable  $X_{t\Delta_t}$  est distribuée selon une distribution conditionnelle normale, et sa fonction de densité conditionnelle est

$$\begin{aligned} f_{X_{t\Delta_t} | X_{(t-1)\Delta_t}}(X_{t\Delta_t}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right)}} \exp \left[ -\frac{(X_{t\Delta_t} - X_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} - \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}))^2}{2\sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right)} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2\kappa}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1 - e^{-2\kappa\Delta_t})}} \exp \left[ -\frac{\kappa(X_{t\Delta_t} - X_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} - \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}))^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa\Delta_t})} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de vraisemblance du modèle 1 sachant l'ensemble d'observations  $X = \{X_{t\Delta_t} =$

$\ln S_{t\Delta_t} : t \in \{1, \dots, N\}$  est

$$\begin{aligned} & L(X_{\Delta_t}, \dots, X_{N\Delta_t}; \mu^*, \kappa, \sigma, \delta) \\ &= f_{X_{\Delta_t}}(X_{\Delta_t}) \times \prod_{i=2}^N f_{X_{i\Delta_t} | X_{(i-1)\Delta_t}}(X_{i\Delta_t} | X_{(i-1)\Delta_t}), \end{aligned}$$

si nous posons

$$f_{X_{\Delta_t}}(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X = X_{\Delta_t} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} & L(X_{\Delta_t}, \dots, X_{N\Delta_t}; \mu^*, \kappa, \sigma, \delta) \\ &= \prod_{i=2}^N f_{X_{i\Delta_t} | X_{(i-1)\Delta_t}}(X_{i\Delta_t} | X_{(i-1)\Delta_t}) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{N-1} \left( \frac{\sqrt{2\kappa}}{\sigma\sqrt{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}} \right)^{N-1} \\ & \quad \times \prod_{i=2}^N \exp \left[ - \frac{\kappa(X_{i\Delta_t} - X_{(i-1)\Delta_t})e^{-\kappa\Delta_t} - \left( \mu^* - \frac{\delta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \right) (1 - e^{-\kappa\Delta_t})^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa\Delta_t})} \right]. \end{aligned}$$

## G. La fonction de vraisemblance du modèle 2

Pour le modèle 2, l'absence des observations sur le marché du rendement de détention rend difficile l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour pallier à cette difficulté, nous allons exploiter la fonction (15) qui exprime le prix du contrat à terme  $F(S_t, t\Delta_t, T_t\Delta_t)$  en fonction de  $\delta_{t\Delta_t}$  :

$$F(S_t, t\Delta_t, T_t\Delta_t) = \psi(\delta_{t\Delta_t}, S_{t\Delta_t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*).$$

Afin d'alléger la notation, nous allons poser  $F_{t\Delta_t} = F(S_t, t\Delta_t, T_t\Delta_t)$ . Calculons la dérivée première de la fonction  $\psi$  par rapport à  $\delta_{t\Delta_t}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\delta_{t\Delta_t}, S_{t\Delta_t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*)}{\partial \delta_{t\Delta_t}} &= - \left( \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \psi(\delta_{t\Delta_t}, S_{t\Delta_t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Donc  $\psi$  est une fonction décroissante du taux de rendement de détention, ce qui implique que la fonction inverse  $\psi^{-1}(\bullet, S_{t\Delta_t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*)$  existe. Elle est donnée par l'équation suivante

$$\begin{aligned} \delta_{t\Delta_t} &= \psi^{-1}(F_{t\Delta_t}, S_{t\Delta_t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*) \\ &= \frac{\kappa}{1 - e^{-\kappa(T-t)\Delta_t}} \left[ \ln \left( \frac{S_{t\Delta_t}}{F_{t\Delta_t}} \right) + \left( r - \alpha + \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} \right) (T_t - t)\Delta_t \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^2} \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)\Delta_t}}{\kappa} \right) \right] + \alpha - \frac{\sigma_2 \lambda^*}{\kappa} + \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2}. \end{aligned}$$

Tout d'abord, déterminons la densité conjointe  $f_{\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t} | \ln(S_{(t-1)\Delta_t}), \delta_{(t-1)\Delta_t}}(\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t})$ . Nous



savons que pour tout  $t \in \{1, 2, \dots, N\}$  :

$$\begin{aligned}\ln(S_{t\Delta_t}) &\approx \ln(S_{(t-1)\Delta_t}) + \left(\mu - \delta_{t\Delta_t} - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \Delta_t + \sigma_1(W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S), \\ \delta_{t\Delta_t} &= \delta_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) + \sigma_2 e^{-\kappa t\Delta_t} \int_{(t-1)\Delta_t}^{t\Delta_t} e^{\kappa u} dW_u^\delta.\end{aligned}$$

Soit  $\mathbf{U}_{t\Delta_t} \equiv \begin{pmatrix} \ln(S_{t\Delta_t}) \\ \delta_{t\Delta_t} \end{pmatrix}$ . Comme les deux composantes de ce vecteur sont de loi normale, alors sa distribution conditionnelle sachant l'information à l'instant  $(t-1)\Delta_t$  est de loi normale

$$(\mathbf{U}_{t\Delta_t} | \mathbf{U}_{(t-1)\Delta_t}, \mathbf{U}_{(t-2)\Delta_t}, \dots, \mathbf{U}_{\Delta_t}) \sim N(\boldsymbol{\mu}_P, \boldsymbol{\Sigma}_P),$$

où

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_P &= \begin{pmatrix} E_P[\ln(S_{t\Delta_t}) | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] \\ E_P[\delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_P &= \begin{pmatrix} \text{Var}_P[\ln(S_{t\Delta_t}) | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] & \text{Cov}_P[\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] \\ \text{Cov}_P[\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] & \text{Var}_P[\delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Calculons les composantes de  $\boldsymbol{\mu}_P$  et  $\boldsymbol{\Sigma}_P$ .

$$\begin{aligned}E_P[\ln(S_{t\Delta_t}) | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] &= E_P\left[\ln(S_{(t-1)\Delta_t}) + \left(\mu - \delta_{t\Delta_t} - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \Delta_t + \sigma_1(W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S) \middle| \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}\right] \\ &= \ln(S_{(t-1)\Delta_t}) + \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2} - E_P[\delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}]\right) \Delta_t,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_P[\delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] &= E_P \left[ \delta_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) + \sigma_2 e^{-\kappa t\Delta_t} \int_{(t-1)\Delta_t}^{t\Delta_t} e^{\kappa u} dW_u^\delta \middle| \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t} \right] \\ &= \delta_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var_P[\delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] &= Var_P \left[ \delta_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) + \sigma_2 e^{-\kappa t\Delta_t} \int_{(t-1)\Delta_t}^{t\Delta_t} e^{\kappa u} dW_u^\delta \middle| \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t} \right] \\ &= \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov_P[\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] &= Cov_P[\sigma_1(W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S) - \delta_{t\Delta_t}\Delta_t, \delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] \\ &= \sigma_1 Cov_P[W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S, \delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] \\ &\quad - \Delta_t \underbrace{Cov_P[\delta_{t\Delta_t}, \delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}]}_{Var_P[\delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}]}. \end{aligned}$$

Calculons la valeur du terme  $Cov_P[W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S, \delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}]$  :

$$\begin{aligned} Cov_P[W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S, \delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] &= Cov_P \left[ W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S, \sigma_2 e^{-\kappa t\Delta_t} \int_{(t-1)\Delta_t}^{t\Delta_t} e^{\kappa u} dW_u^\delta \middle| \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t} \right] \\ &= E_P \left[ \int_{(t-1)\Delta_t}^{t\Delta_t} dW_u^S \times \sigma_2 e^{-\kappa t\Delta_t} \int_{(t-1)\Delta_t}^{t\Delta_t} e^{\kappa u} dW_u^\delta \middle| \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t} \right] \\ &= E_P \left[ \sigma_2 e^{-\kappa t\Delta_t} \int_{(t-1)\Delta_t}^{t\Delta_t} e^{\kappa u} d\langle W^S, W^\delta \rangle_u \middle| \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t} \right] \\ &= E_P \left[ \sigma_2 e^{-\kappa t\Delta_t} \int_{(t-1)\Delta_t}^{t\Delta_t} \rho e^{\kappa u} du \middle| \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t} \right] \\ &= \rho\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right). \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$Cov_P [\ln (S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] = \rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) - \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t.$$

Il nous reste qu'à évaluer  $Var_P [\ln (S_{t\Delta_t}) | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}]$ .

$$\begin{aligned} Var_P [\ln (S_{t\Delta_t}) | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] &= Var_P [\sigma_1(W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S) - \delta_{t\Delta_t}\Delta_t | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] \\ &= \sigma_1^2 Var_P [W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] + \Delta_t^2 Var_P [\delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] \\ &\quad - 2\sigma_1\Delta_t Cov_P [W_{t\Delta_t}^S - W_{(t-1)\Delta_t}^S, \delta_{t\Delta_t} | \mathcal{F}_{(t-1)\Delta_t}] \\ &= \sigma_1^2\Delta_t + \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) \Delta_t. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\mu_P = \begin{pmatrix} \ln (S_{(t-1)\Delta_t}) + \left( \mu - \frac{\sigma_1^2}{2} - \delta_{(t-1)\Delta_t}e^{-\kappa\Delta_t} - \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) \right) \Delta_t \\ \delta_{(t-1)\Delta_t}e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) \end{pmatrix},$$

et la matrice de variance-covariance  $\Sigma_P$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2\Delta_t + \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) \Delta_t & \rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) - \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t \\ \rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) - \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t & \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t \end{pmatrix}.$$

De plus puisque le processus bivarié constitué du rendement du titre risqué et du taux du rendement de détention est markovien, nous avons

$$f_{\mathbf{U}_{t\Delta_t} | \mathbf{U}_{(t-1)\Delta_t}, \dots, \mathbf{U}_{\Delta_t}}(\mathbf{U}_{t\Delta_t}) = f_{\mathbf{U}_{t\Delta_t} | \mathbf{U}_{(t-1)\Delta_t}}(\mathbf{U}_{t\Delta_t}).$$

Par conséquent, la fonction de densité conditionnelle devient

$$f_{\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t} | \ln(S_{(t-1)\Delta_t}), \delta_{(t-1)\Delta_t}}(\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\|\Sigma_P\|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{U}_{t\Delta_t} - \boldsymbol{\mu}_P)' \Sigma_P^{-1} (\mathbf{U}_{t\Delta_t} - \boldsymbol{\mu}_P)\right].$$

## G.1 La transformation de données par une bijection

Nous définissons la transformation bijective  $\phi$  :

$$(\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t}) \xrightarrow{\phi} (S_{t\Delta_t}, F_{t\Delta_t}),$$

tel que

$$\phi(\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t}) = (S_{t\Delta_t}, \psi(\delta_{t\Delta_t}, S_{t\Delta_t}, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*)).$$

Alors

$$f_{S_{t\Delta_t}, F_{t\Delta_t} | S_{(t-1)\Delta_t}, F_{(t-1)\Delta_t}}(S_{t\Delta_t}, F_{t\Delta_t}) = f_{\ln(S_{t\Delta_t}), \delta_{t\Delta_t} | \ln(S_{(t-1)\Delta_t}), \delta_{(t-1)\Delta_t}} \circ \phi^{-1}(S_{t\Delta_t}, F_{t\Delta_t}) \times |J_{\phi^{-1}}|,$$

où  $J_{\phi^{-1}}$  est le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation bijective  $\phi$  :

$$\begin{aligned} J_{\phi^{-1}} &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{S_{t\Delta_t} \kappa} & 0 \\ \frac{-\kappa}{(1 - e^{-\kappa(T_t-t)\Delta_t}) S_{t\Delta_t}} & \frac{-\kappa}{(1 - e^{-\kappa(T_t-t)\Delta_t}) F_{t\Delta_t}} \end{array} \right\| \\ &= \frac{-\kappa}{(1 - e^{-\kappa(T_t-t)\Delta_t}) S_{t\Delta_t} F_{t\Delta_t}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f_{S_{t\Delta_t}, F_{t\Delta_t} | S_{(t-1)\Delta_t}, F_{(t-1)\Delta_t}}(S_{t\Delta_t}, F_{t\Delta_t}) = \frac{\kappa}{2\pi(1 - e^{-\kappa(T_t-t)\Delta_t})S_{t\Delta_t}F_{t\Delta_t}\sqrt{\|\Sigma_P\|}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{U}_{t\Delta_t} - \boldsymbol{\mu}_P)' \Sigma_P^{-1}(\mathbf{U}_{t\Delta_t} - \boldsymbol{\mu}_P)\right].$$

## G.2 La fonction de vraisemblance multivariée

Nous considérons l'ensemble d'observations  $V = \left\{ \mathbf{V}_{t\Delta_t} = \begin{pmatrix} S_{t\Delta_t} \\ F_{t\Delta_t} \end{pmatrix} : t \in \{1, 2, \dots, N\} \right\}$ . La fonction de vraisemblance de cet échantillon est donnée par :

$$L(\mathbf{V}_{\Delta_t}, \dots, \mathbf{V}_{N\Delta_t}; \mu, \sigma_1, \kappa, \alpha, \sigma_2, \rho, \lambda^*) = f_{S_{\Delta_t}, F_{\Delta_t}}(S_{\Delta_t}, F_{\Delta_t}) \prod_{i=2}^N f_{S_{i\Delta_t}, F_{i\Delta_t} | S_{(i-1)\Delta_t}, F_{(i-1)\Delta_t}}(S_{i\Delta_t}, F_{i\Delta_t}),$$

si nous posons

$$f_{S_{\Delta_t}, F_{\Delta_t}}(X_1, X_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } (X_1, X_2) = (S_{\Delta_t}, F_{\Delta_t}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} & L(\mathbf{V}_{\Delta_t}, \dots, \mathbf{V}_{N\Delta_t}; \mu, \sigma_1, \kappa, \alpha, \sigma_2, \rho, \lambda^*) \\ &= \prod_{i=2}^N \frac{\kappa}{(1 - e^{-\kappa(T_t-i)\Delta_t})S_{i\Delta_t}F_{i\Delta_t}} \prod_{i=2}^N \frac{1}{2\pi\sqrt{\|\Sigma_P\|}} \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\phi^{-1}(\mathbf{V}_{i\Delta_t}) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_P(\mathbf{V}_{(i-1)\Delta_t}))' \Sigma_P^{-1}(\phi^{-1}(\mathbf{V}_{i\Delta_t}) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_P(\mathbf{V}_{(i-1)\Delta_t}))\right], \end{aligned}$$

où

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_P(\mathbf{V}_{(i-1)\Delta_t}) = \begin{pmatrix} \ln(S_{(t-1)\Delta_t}) + \left( \mu - \frac{\sigma_1^2}{2} - \delta_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} - \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) \right) \Delta_t \\ \delta_{(t-1)\Delta_t} e^{-\kappa\Delta_t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) \end{pmatrix},$$

et

$$\|\Sigma_P\| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \left[ \Delta_t \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) - \rho^2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right)^2 \right].$$

et l'inverse de la matrice de variance-covariance  $\Sigma_P$  est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right)}{\|\Sigma_P\|} & \frac{\sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t - \rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right)}{\|\Sigma_P\|} \\ \frac{\sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t - \rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right)}{\|\Sigma_P\|} & \frac{\sigma_1^2 \Delta_t + \sigma_2^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa} \right) \Delta_t^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1 - e^{-\kappa\Delta_t}}{\kappa} \right) \Delta_t}{\|\Sigma_P\|} \end{pmatrix}.$$

## H. L'étude de la convexité de la fonction de vraisemblance

Dans ce qui suit, nous allons étudier numériquement la convexité des fonctions de vraisemblance  $L_1$  et  $L_2$  représentées respectivement par les équations (18) et (21). Notre idée consiste à vérifier que si on part de n'importe quelle valeur initiale, l'algorithme d'optimisation donnera le même optimum. Pour ce faire, nous construisons pour chaque modèle une grille de points d'amorçage pour l'algorithme «d'ascension rapide» en discrétisant l'intervalle de valeur de chaque paramètre à estimer. En suite, nous simulons une fois le modèle 1 (respectivement le modèle 2) et à partir de chaque point de la grille nous appliquons l'algorithme pour obtenir le vecteur des paramètres  $\theta$  qui maximise la fonction de vraisemblance  $L_1$  (respectivement  $L_2$ ).

### 5.3 Modèle 1

Pour simuler un échantillon du modèle 1 nous avons utilisé les valeurs suivantes : le vecteur des paramètres  $\theta = (\alpha = 0.22, \kappa = 2.5, \sigma = 0.05)$  avec  $\mu^* = 0.3$  et  $\delta = 0.2$ ; la valeur initiale  $X_{\Delta_t} = 1.6$  et la longueur du pas du temps  $\Delta_t = 1/365$ . Afin d'avoir des estimés de grande précision, nous avons choisis le nombre d'observations  $N = 10000$ . Par ailleurs, nous avons construit une grille de 28080 points d'amorçage à l'aide des intervalles et des pas de discrétisation suivants :

Table 17: Intervalles et pas de discrétisation utilisés pour construire la grille des points d'amorçages de l'algorithme d'optimisation pour le modèle1.

Paramètre	Intervalle	Pas de discrétisation
$\alpha$	[0.10, 2]	0.05
$\kappa$	[0.50, 6]	0.50
$\sigma$	[0.01, 3]	0.05

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Table 18: Résumé des optimums obtenus pour le modèle 1.

Optimum obtenu			Maximum de vraisemblance	Nombre d'occurrence
$\alpha_i$	$\kappa_i$	$\sigma_i$	$L_1(\alpha, \kappa, \sigma)$	
0.2258	2.4776	0.0495	3.9799E+03	26880

Sur les 28080 points d'amorçages considérés, il y a eu 1200 cas où l'algorithme d'optimisation n'a pas pu convergé vers une solution optimum. Pour le reste des points, nous remarquons que l'algorithme d'optimisation donne les mêmes valeurs pour le maximum de vraisemblance  $L_1(\alpha, \kappa, \sigma)$ , la moyenne  $\alpha_i$ , la vitesse  $\kappa_i$  et la volatilité  $\sigma_i$ . Par conséquent, nous pouvons conclure que la fonction de vraisemblance  $L_1$  est convexe au moins dans le cas des paramètres choisis.

## 5.4 Modèle 2

Pour le modèle 2, nous avons construit un échantillon à l'aide du vecteur paramètre  $\theta = (\mu = 0.04, \sigma_1 = 0.02, \alpha = 0.08, \kappa = 1.5, \sigma_2 = 0.025, \rho = 0.5, \lambda^* = 5)$  ; des valeurs initiales ( $S_{\Delta_t} = 45, \delta_{\Delta_t} = 0.09$ ) ; du taux d'intérêt  $r = 0.05$  ; du pas du temps  $\Delta_t = 1/365$  et du nombre d'observation  $N$  que nous avons fixé à 10000. Nous avons construit une grille de 120960 points d'amorçage à l'aide des paramètres suivants :

Le tableau ci-dessous contient un extrait de quelques résultats obtenus :



Table 19: Intervalles et pas de discrétisation utilisés pour construire la grille des points d'amorçages de l'algorithme d'optimisation pour le modèle 2.

Paramètre	Intervalle	Pas de discrétisation
$\mu$	[0.01, 0.21]	0.04
$\sigma_1$	[0.01, 0.16]	0.05
$\alpha$	[0.02, 0.22]	0.05
$\kappa$	[0.10, 2.60]	0.50
$\sigma_2$	[0.01, 0.26]	0.05
$\rho$	[-1.0, 1.0]	0.30
$\lambda$	[1.0, 10.0]	3.00

Table 20: Extrait des optimums obtenus pour le modèle 2.

Optimum obtenu							Max. de vraisemblance.
$\mu_i$	$\sigma_{1i}$	$\alpha_i$	$\kappa_i$	$\sigma_{2i}$	$\rho$	$\lambda$	$L_2$
0.0100	0.0059	0.0200	0.1002	0.0094	1.0000	10.0000	2.9114E+17
0.0443	0.0196	0.0817	1.6765	0.0267	0.4695	5.8321	4.3897E+03
0.1299	0.003	0.0200	0.1002	0.1602	1.0000	4.0000	2.0259E+17
0.1637	0.0613	0.2179	0.6489	0.1563	1.0000	1.0008	7.5944E+14
0.2101	0.0029	0.0700	0.1002	0.1100	1.0000	1.0000	1.7476E+17
...	...	...	...	...	...	...	...

En somme, pour les 120960 points d'amorçage considérés, il y a eu 26 cas où l'algorithme d'optimisation n'a pas pu convergé vers une solution optimum. Pour le reste des points, nous n'avons pas eu les mêmes optimums et la même valeur du maximum de vraisemblance  $L_2(\mu, \sigma_1, \alpha, \kappa, \sigma_2, \rho, \lambda^*)$ . En conséquences, nous pouvons conclure que la fonction de vraisemblance  $L_2$  n'est pas convexe.

## I. Estimation de la probabilité de ne pas avoir atteint l'optimum global.

Tout d'abord nous allons définir des intervalles admissibles pour les paramètres à estimer. En suite, nous allons utiliser la loi uniforme en vue de construire une grille de points d'amorçage pour l'algorithme d'optimisation que nous allons lancer  $n$  fois. Soient  $\theta_1, \theta_2, \dots$  tous les optimums possibles de la fonction d'estimation. Pour chaque  $\theta_i$ , notons  $x_i$  son nombre d'occurrence et  $p_i$  sa probabilité inconnue. Nous avons :

$$\sum_{i=1}^n x_i = n, \text{ avec } 0 \leq x_i \leq n,$$
$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \text{ avec } 0 \leq p_i \leq 1.$$

Pour chaque  $1 \leq i \leq n$ , posons

$$\begin{cases} \varphi_i = 1 \text{ si } x_i = 0, \\ \varphi_i = 0 \text{ si } x_i \neq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \psi_i = 1 \text{ si } x_i = 1, \\ \psi_i = 0 \text{ si } x_i \neq 1. \end{cases}$$

Herbert E. Robbins [1968] a défini la somme des probabilités des optimums inaperçus par la variable aléatoire

$$v = \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i,$$

et son estimé par

$$P.R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_i,$$

## J. La fonction de vraisemblance du filtre de Kalman

Dans ce qui suit, nous allons présenter les étapes successives qui permettent le calcul de la fonction de vraisemblance du filtre de Kalman. Soit le système linéaire gaussien suivant (Harvey [1990] et Verdun [2006]) :

$$\begin{cases} \delta_{t+1} = W_t \delta_t + w_t + \eta_{t+1}, \\ Z_t = H_t \delta_t + h_t + \varepsilon_t, \end{cases}$$

où, pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,  $\delta_t, w_t, \eta_t \in \mathbb{R}^p$ ,  $Z_t, h_t, \varepsilon_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $W_t \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $H_t \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , et

1. Le bruit  $\{\eta_t\}$  est un bruit gaussien de matrice de covariance  $Q_t^\eta$  ;
2. La condition initiale  $\delta_0$  est gaussienne, de moyenne  $\bar{\delta}_0$ , de matrice de covariance  $Q_0^\delta$  ;
3. Le bruit  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance  $Q_t^\varepsilon$  ;
4. Les bruits  $\{\eta_t\}$ ,  $\{\varepsilon_t\}$  et la condition initiale  $\delta_0$  sont mutuellement indépendants.

Nous allons noter l'espérance et la matrice de covariance conditionnelles comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_t &= E[\delta_t | Z_{0:t}], \\ P_t &= E \left[ (\delta_t - \hat{\delta}_t) (\delta_t - \hat{\delta}_t)^T | Z_{0:t} \right]. \end{aligned}$$

De même pour l'espérance et la matrice de covariance conditionnelles antérieures :

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_t^- &= E[\delta_t | Z_{0:t-1}], \\ P_t^- &= E \left[ (\delta_t - \hat{\delta}_t^-) (\delta_t - \hat{\delta}_t^-)^T | Z_{0:t-1} \right], \end{aligned}$$

avec les initialisations suivantes :

$$\hat{\delta}_0^- = \bar{\delta}_0 = E[\delta_0],$$

$$P_0^- = Q_0^s.$$

**Étape de prédiction :**

$$\hat{\delta}_t^- = W_{t-1}\hat{\delta}_{t-1} + w_{t-1},$$

$$P_t^- = W_{t-1}P_{t-1}W_{t-1}^T + Q_t^T.$$

**Étape de correction :**

$$\hat{\delta}_t = \hat{\delta}_t^- + K_t \left[ Z_t - (H_t \hat{\delta}_t^- + h_t) \right],$$

$$P_t = [I - K_t H_t] P_t^-,$$

où la matrice  $K_t$  est le gain de Kalman défini par :

$$K_t = P_t^- H_t^T [H_t P_t^- H_t^T + Q_t^e]^{-1}.$$

Si nous posons :

$$F_t = [H_t P_t^- H_t^T - Q_t^e],$$

$$\nu_t = Z_t - (H_t \hat{\delta}_t^- + h_t),$$

pour  $N$  observations, le logarithme de la fonction de vraisemblance de Kalman à maximiser sera :

$$\ln L = -\frac{nN}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \ln \|F_t\| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \nu_t' F_t^{-1} \nu_t.$$

## Bibliographie

- K. Aming, V. Ng, et G. Pirrong [1995]. "Valuing Energy Derivatives. in Robert James ed." : *Managing Energy Price Risk* (Risk Publications, London).
- H. Bessmehinder, J. F. Coughenour, S. Paul J, et M. M. Smoller [1995]. "Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices: Evidence From the Futures Term Structure". *Journal of Finance*, VOL. L NO.1 (March): 361-375.
- Black F. [1976]. "The Pricing of Commodity Contracts". *Journal of Financial Economics*. 3, 167-179.
- M. J. Brennan [1958]. "The Supply of Storage". *American Economic Review*, 48:50-72.
- M. J. Brennan et E. S. Schwartz [1985]. "Evaluation Natural Resource Investments". *Journal of Business*, v58:135-157.
- A. Deaton et G. Laroque [1992]. "Competitive Storage and Commodity Price Dynamics". *Journal of Political Economy*, 104:896-923
- E. F. Fama et K. R. French [1987]. "Commodity futures prices : Some Evidence on Forcast Power, Premiums and the Theory of Storage". *Journal of Business*, VOL. 60 No. 1:55-73.
- R. Gibson et E. S. Schwartz [1990]. "Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims". *Journal of Finance*, v45n3 (July): 959-76.
- Hilliard J.E., Reis J. [1998]. "Valuation of Commodity Futures and Options under Stochastic Convenience Yield, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 33, No. 1 (March): 61-68.
- Poterba, J, et L. Summers [1988]. "Mean Reversion in Stock Prices: Evidence and Implications". *Journal of Financial Economics*, 22, 27-59.
- E. S. Schwartz [1997]. "The Stochastic Behavior of Commodity Prices : Implications for Valuation

- and Hedging". *Journal of Finance*, v52n3 (July): 923-73.
- H. Working [1949]. "The Theory of Price of Storage". *American Economic Review*, 39:1254-62.
- Duan, J.-C [1994]. "Maximum Likelihood Estimation Using Price Data of the Derivative Contrat". *Mathematical Finance*, 3, pp. 155-167.
- É. Blouin [2001]. "Tarification d'options panier". *HEC Montréal*.
- S.Zaanoun [2000]. "Les paramètres du modèle de risque de crédit de Merton". *HEC Montréal*.
- Herbert E. Robbins [1968]. "Estimation the Total Probability of the Unobserved Outcomes of an Experiment". *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 39, No. 1, pp. 256-257.
- A.C. Harvey [1990]. "Forecasting, structural time series models, and the Kalman filter". *Cambridge University Press*.
- J. A. Nelder and R. Mead [1965]. "A Simplex Method for Function Minimization". *Computer Journal*, 7:308-313.
- J. Verdun [2006]. "Introduction au Filtre de Kalman", *Ecole National des Sciences Géographiques GRGS*, Forcalquier 4-8 septembre 2006.