

HEC MONTRÉAL
AFFILIÉE À L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Mesure du capital économique d'un portefeuille de crédit

Par
SAMIR BEN TEKAYA

Sciences de la gestion

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maître ès sciences
(M.Sc.)



© Samir Ben Tekaya 2004

M2004
No 108

DÉCLARATION DE L'ÉTUDIANTE, DE L'ÉTUDIANT
ÉTHIQUE EN RECHERCHE AUPRÈS DES ÊTRES HUMAINS

Recherche sans collecte directe d'informations

Cette recherche n'impliquait pas une collecte directe d'informations auprès de personnes (exemples : entrevues, questionnaires, appels téléphoniques, groupes de discussion, tests, observations participantes, communications écrites ou électroniques, etc.).

Cette recherche n'impliquait pas une consultation de documents, de dossiers ou de banques de données existants qui ne font pas partie du domaine public et qui contiennent des informations sur des personnes.

Titre de la
recherche : MESURE DU CAPITAL ÉCONOMIQUE
D'UN PORTEFEUILLE DE CRÉDITS

Nom de l'étudiante,
de l'étudiant : SANIR BEN TEKAYA

Signature : 

Date : 11/ Août / 2004

Table des matières

1	Introduction	1
2	Revue de littérature	5
2.1	Modèles de portefeuilles de crédit	5
2.2	Mesures de risque	10
3	Modèle factoriel de portefeuille de crédit	14
3.1	Modèle et notations	14
3.1.1	Modèle factoriel	14
3.1.2	Fonction de perte	15
3.1.3	Mesures de risque	16
3.2	Expérience de Simulation	18

3.2.1	Simulation brute	18
3.2.2	Échantillonnage stratégique	19
4	Exemple d'un portefeuille de prêts	24
4.1	Données utilisées	24
4.2	Résultats numériques	27
5	Conclusion	32

Table des figures

- 4.1 Écart-type de l'estimé de Monte Carlo en fonction du déplacement pour un niveau de 95%. 29
- 4.2 Écart-type de l'estimé de Monte Carlo en fonction du déplacement pour un niveau de 99%. 29

Liste des tableaux

4.1	LGD par produit.	25
4.2	Exposition et probabilité de défaut par industrie.	26
4.3	Corrélations inter-industries.	26
4.4	Résultats numériques (en 10^6).	28
4.5	Ratio des variances.	30

Dédicaces

À mon père, À ma mère,

Comme preuve de mon affectueuse reconnaissance.

Remerciements

Toute ma gratitude à M. **HATEM BEN AMEUR** et M. **PHILIPPE ZAUGG**, pour m'avoir encadré dans ce mémoire, d'aussi bonne grâce, et s'y être intéressé. Qu'ils trouvent dans ces petits mots l'expression de mes sentiments les plus respectueux, et j'espère avoir été à la hauteur de leur confiance.

Il m'est très agréable aussi d'adresser mes vifs remerciements aux membres de Jury qui ont bien voulu accepter de valoriser ce mémoire. Mes remerciements à ma famille et à tous mes amis qui m'ont encouragé tout au long de ce projet et à mes enseignants, à qui je dois ma formation et ma réussite.

Résumé

Dans ce mémoire, nous proposons une estimation efficace d'indicateurs de risque au niveau d'un portefeuille de crédit. Le portefeuille de crédit considéré est celui des prêts commerciaux appartenant à une banque. Nos estimés sont obtenus par simulation de Monte Carlo améliorée par l'application de l'échantillonnage stratégique. Lors de la modélisation du risque de crédit, la simulation de Monte Carlo est souvent la seule technique utilisée pour estimer les différentes mesures de risque. Cependant, cette mesure présente certaines lacunes lorsqu'il s'agit d'estimer un quantile qui se situe à l'extrémité de l'aile de la distribution de l'output. Une technique plus efficace est proposée, l'échantillonnage stratégique. Cette approche consiste à générer des scénarios qui se situent dans la zone du quantile considéré. Dans ce travail, nous nous basons sur l'approche de l'échantillonnage stratégique développée par Kalkbrener et al. (2003) basée sur un déplacement des facteurs communs vers la zone désirée. Les résultats numériques montrent un gain important au niveau de la précision des estimateurs.

Chapitre 1

Introduction

Dans ce mémoire, nous proposons une estimation efficace d'indicateurs de risque au niveau d'un portefeuille de crédit. Nos estimés sont obtenus par simulation de Monte Carlo améliorée par l'application de l'échantillonnage stratégique.

Le risque de crédit résulte de l'incertitude quant à la possibilité ou la volonté d'un emprunteur de remplir ses obligations vis-à-vis de son créancier. La mesure du risque de crédit a évolué d'une manière significative durant la dernière décennie. Cette évolution est due à bon nombre de facteurs qui ont touché l'économie en général et le secteur financier en particulier.

Afin d'accroître la stabilité du système bancaire et la sécurité des dépôts de la clientèle, les banques sont tenues de couvrir leurs actifs par leurs fonds propres. Des mesures ont été engagées à la fin des années 1980 pour harmoni-

ser la réglementation du crédit au niveau international. Dans ce but, le comité de Bâle, qui réunit les représentants des banques centrales et les autorités de surveillance bancaire des principaux pays industrialisés, a alors approuvé un accord sur les fonds propres (Bâle I en 1988). Depuis cette date, les marchés financiers, les activités bancaires et surtout l'approche par les banques de la gestion du risque ont connu une profonde transformation. Dans la proposition d'avril 2003 relative aux nouvelles prescriptions sur les fonds propres, le comité de Bâle s'est efforcé de tenir compte de cette évolution. Le projet comporte trois piliers et prévoit, en ce qui concerne la couverture par les fonds propres, une orientation tenant d'avantage compte du risque sans modifier pour autant le montant moyen des fonds propres réglementaires du système bancaire. Dans le premier pilier de Bâle II, la définition en vigueur pour les fonds propres et la part minimale de ces derniers restent inchangées. Une nouveauté importante concerne les règles relatives au risque de crédit, qui seront affinées. Les prescriptions sur le risque de marché sont reprises sans modification de la réglementation antérieure. En revanche, l'inclusion du risque opérationnel est une innovation. Les dispositions du deuxième pilier règlent le processus de contrôle et la surveillance de la couverture en capital par les autorités prudentielles nationales. Enfin, le troisième pilier a pour but d'assurer la transparence de l'information en soumettant les banques à une plus grande discipline de marché.

À la suite de Bâle II, la mesure du risque de crédit sera modifiée. Tandis que l'actuel accord ne connaît qu'une pondération du risque pour les Crédits aux entreprises, le projet prévoit, dans le premier pilier, une couverture par les fonds propres en fonction du risque lors de l'octroi de Crédit. Les fonds

propres réglementaires des banques devront toujours représenter 8% des actifs pondérés par le risque, mais désormais la pondération du risque dépendra de la qualité du crédit. Il existe deux possibilités pour le calcul des pondérations du risque. Moyennant l'accord des autorités nationales de surveillance, les banques pourront utiliser une méthode reposant sur leurs notations internes de crédit pour calculer la couverture en fonds propres. Il en résultera une vaste palette de pondérations du risque. Pour les établissements financiers dont les systèmes de notation internes ne satisfont pas encore les exigences de Bâle aux yeux des autorités de surveillance, l'approche standard sera retenue et les pondérations du risque seront fixées par les autorités de surveillance.

La modélisation de portefeuilles de crédit consiste principalement en la quantification du risque du portefeuille qui est généralement exprimé en terme de capital économique. Notons que le capital économique est défini comme étant le capital qu'une banque doit posséder pour faire face au risque économique qu'elle rencontre dans ses activités, en tenant compte du degré de solvabilité désiré. L'approche standard dans la modélisation d'un portefeuille de crédit est de définir le capital économique en terme d'un quantile de la distribution de perte du portefeuille et d'en soustraire la perte espérée du portefeuille. Dans ce mémoire, nous considérons la version simplifiée du capital économique qui n'est autre que la VaR. D'autres méthodes commencent à émerger dans la littérature telles que l'Expected Shortfall (ES) (Kalkbrenner et al. 2003). L'ES est la moyenne des pertes au delà d'un quantile de la distribution de perte au niveau d'un portefeuille de crédit.

L'objectif de ce mémoire est double. D'une part, nous estimons la va-

leur à risque et l'ES par simulation Monte Carlo d'un portefeuille réel de prêts. D'autre part, nous améliorons l'efficacité de la simulation en adoptant l'échantillonnage stratégique tel que préconisé par Kalkbrener et al. (2003). Ce portefeuille est celui d'une banque et est composé de prêts commerciaux.

Ce travail est structuré comme suit. Dans la section 1, nous présentons la littérature portant sur les différentes approches d'estimation du CE d'un portefeuille de crédit ainsi que les différentes mesures de risque. Dans la section 2, nous présentons le modèle factoriel de crédit. La section 3 nous permet de présenter nos résultats numériques. La section 4 sera une conclusion.

Chapitre 2

Revue de littérature

2.1 Modèles de portefeuilles de crédit

Les banques utilisent des modèles de portefeuilles afin de quantifier le risque de crédit auquel elles sont exposées à travers les différents instruments de prêts qu'elles accordent. Ces modèles génèrent la distribution des pertes potentielles dues au risque de crédit. Les distributions de pertes sont utilisées par les banques pour mesurer la profitabilité des transactions dépendamment de leur contribution au risque du portefeuille. Ceci permettra aux banques soit d'éliminer certaines expositions, par exemple par l'intermédiaire de la titrisation, soit de les augmenter. Les distributions de pertes servent aussi à déterminer le capital, avec un certain niveau de confiance, que la banque doit posséder pour se prémunir contre les pertes non anticipées.

Théoriciens et praticiens ont développé différents modèles de gestion de

portefeuilles de crédit. CreditMetrics, publié par JP Morgan, a été le premier modèle de mesure du risque d'un portefeuille de crédit. Cette approche est basée sur l'analyse de la migration entre les cotes de crédit. CreditMetrics modélise la distribution future des valeurs d'un portefeuille de crédit en utilisant des simulations. Ces valeurs dépendent seulement de la migration entre les cotes de crédit, les taux d'intérêts étant supposés suivre un processus déterministe. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'intègre pas le risque de crédit et le risque de marché ensemble, les pertes étant causées par les changements des cotes et non pas par des mouvements de marché.

Une autre approche, Credit Portfolio View, a été introduite par la firme de consultation McKinsey et élaborée en grande partie par Wilson (1997). Cette approche propose une amélioration de celle de CreditMetrics en permettant aux probabilités de défaut de varier en fonction du cycle du crédit. Les probabilités de défaut sont fonction de variables macro-économiques comme le taux de chômage, le niveau des taux d'intérêts, le taux de croissance de l'économie, les dépenses gouvernementales et le taux de change.

Nous citons aussi KMV EDF qui fournit des prévisions des fréquences de défauts attendues pour approximativement 29 000 compagnies dans 40 pays. La méthodologie de KMV diffère de celle de CreditMetrics dans la mesure où elle est basée sur la fréquence de défauts attendue de chaque émetteur d'obligations plutôt que sur la moyenne historique des fréquences de transition produites par les agences de notation pour chaque classe de crédit. Cette approche, comme celle de CreditMetrics, se base sur le modèle d'évaluation d'actifs développé par Merton (1974) qui stipule que la firme fait défaut

quand la valeur de ses actifs est inférieure à la valeur de ses dettes. L'avantage de KMV est qu'elle se base sur le prix des actions d'une compagnie, ce qui représente la meilleure source de données financières. L'inconvénient de cette approche est qu'elle est basée sur des données comptables pour mesurer la valeur des actifs et suppose que les gestionnaires vont garder le niveau de la dette constant pendant l'horizon de temps étudié. En pratique, cette méthode ne fournit qu'une seule composante servant dans la modélisation du risque d'un portefeuille de crédit. D'autres composantes tel que la corrélation entre les défauts, les expositions ainsi que la sévérité en cas de défaut ne sont pas prises en compte.

Une autre approche de portefeuilles de crédit est CreditRisk⁺ développée par Credit Suisse en 1997. Elle est basée sur une approche actuarielle dont les fondements résident dans la littérature liée aux assurances. Notons qu'un modèle actuariel est un modèle où une transaction fait défaut ou non à la fin de la période annuelle contrairement à un modèle mark-to-market. Un modèle mark-to-market évalue la valeur marchande de chaque transaction à la fin de la période annuelle et peut inclure à la fois les événements de défaut et les variations de la qualité de l'emprunteur. Dans CreditRisk⁺, quand les défauts sont indépendants, la distribution de probabilité d'un défaut est approximée par une distribution de Poisson. Ce modèle permet aussi de tenir compte des corrélations en divisant le portefeuille en des groupes homogènes à l'intérieur desquels chaque transaction possède le même risque systématique. L'autre composante de ce modèle est la variable de la sévérité des pertes. L'avantage de cette méthode est qu'elle fournit une solution analytique rapide pour la distribution des pertes et avec le minimum de paramètres. Cependant,

l'exposition au risque de marché n'est pas prise en compte par cette approche. Notons enfin que bien que ces approches diffèrent dans leur conception, les résultats qu'elles génèrent sont pratiquement semblables à condition bien sûr d'harmoniser les différents paramètres servant d'inputs (Koynuoglu et Hickman 1998).

ERisk, une firme de consultation spécialisée dans le calcul des différentes composantes du capital économique, propose une autre approche de modélisation de portefeuilles de crédit. Le modèle de ERisk est de type actuariel. Ce modèle procède par étapes successives depuis les portefeuilles de transactions individuelles de prêt jusqu'à la distribution de perte de crédit pour le portefeuille total de prêts. Ces étapes sont au nombre de sept. La première étape consiste à définir la perte de la transaction individuelle, sa moyenne et sa volatilité. La deuxième étape est d'introduire une structure en portefeuilles individuels regroupant les prêts dans une même industrie dans le but de faciliter la prise en compte des corrélations lors du traitement du portefeuille complet. La troisième étape consiste à calculer la moyenne et la volatilité de la perte de chaque portefeuille individuel, en incluant les effets de corrélations entre prêts à l'intérieur du portefeuille. Ces corrélations dépendent de l'industrie à laquelle appartient le portefeuille. L'étape suivante permet le calcul de la moyenne et la volatilité de la perte pour la totalité des portefeuilles individuels combinés, en incluant les effets de corrélations entre portefeuilles. La cinquième étape consiste à introduire la contribution du risque de spread à la volatilité qui traduit la sensibilité à la maturité des transactions. La sixième étape permet de calculer la moyenne et de la volatilité de la perte de crédit totale servant à caractériser une distribution de pertes. La dernière

étape consiste à déterminer le capital économique en prenant le quantile de cette distribution qui correspond au degré de solvabilité de la banque.

D'autres approches ont été proposées par différents auteurs tel que la forme analytique de la distribution de pertes développée par Lucas et al. (2000) basée sur des résultats asymptotiques de cette distribution et celle de Finger (1999) basée sur des approches conditionnelles. Lucas et al. (2000) développent une expression analytique appelée *Limit Law* qui permet d'approximer analytiquement la distribution des pertes et ce pour au moins les modèles à un facteur, et d'éviter ainsi le recours aux simulations qui sont coûteuses en terme de temps et de précision. Pour les modèles à plusieurs facteurs, l'application de leurs approximation est plus compliquée mais demeure avantageuse par rapport aux simulations brutes. L'étude empirique de Lucas et al. (2000) démontre que leur approximation est efficace pour les portefeuilles homogènes ayant 300 expositions et qu'un minimum de 800 expositions est requis pour les portefeuilles hétérogènes. Ainsi, pour les portefeuilles réels comprenant des milliers de transactions, leur approximation pourrait s'avérer utile sous certaines hypothèses.

Finger (1999) développe des approches conditionnelles afin d'améliorer l'approche par simulation utilisée dans CreditMetrics. Ses approches se basent sur le fait qu'étant donné l'influence des facteurs de marché sur les transactions individuelles d'un portefeuille de crédit, ces transactions sont conditionnellement indépendantes. Ce conditionnement permettrait d'utiliser plusieurs techniques qui ne sont utilisables que sous l'hypothèse d'indépendance. Finger (1999) illustre que la dimension réelle dans CreditMetrics n'est pas

le nombre de transactions, mais plutôt le nombre de facteurs de marché ou systématiques. Ses résultats empiriques montrent que le conditionnement permet le développement de formes analytiques approximant la distribution de pertes pour les modèles à un facteur. Pour les modèles à plusieurs facteurs, le conditionnement demeure efficace mais en le combinant aux simulations, les rendant plus rapides et précises. Ceci est aussi prouvé par Schönbucher (2000) qui a étudié l'effet du conditionnement sur différents types de portefeuilles de crédit, allant du plus simple (portefeuille homogène, approche actuarielle, un facteur) au plus compliqué (portefeuille hétérogène, approche mark-to-market, plusieurs facteurs).

Dans ce présent travail, nous adoptons une approche combinée des principaux modèles du marché, à savoir les modèles de CreditMetrics, PortfolioManager de KMV et CreditRisk⁺ du crédit suisse. Similairement à CreditMetrics et PortfolioManager, nous employons des simulations Monte Carlo pour l'estimation de la distribution de pertes ainsi que du capital économique. Similairement à CreditRisk⁺, les prêts de notre portefeuille de crédit sont groupés selon certaines caractéristiques qui permettent de simplifier la structure et donc les calculs. L'approche de ERisk est utilisée afin de déterminer la structure de corrélation de notre modèle.

2.2 Mesures de risque

Une mesure de risque est un paramètre réel qui permet de quantifier le risque d'exposition. Plusieurs mesures de risque peuvent être utilisées pour

lier le capital économique au risque d'un portefeuille de crédit. Les mesures les plus courantes sont l'écart-type, la valeur à risque et l'Expected Shortfall. L'écart-type est une mesure de la dispersion totale autour de la moyenne. Cette mesure ne représente pas bien l'ailé d'une distribution dont les valeurs ne sont pas distribuées selon une loi normale comme dans le cas des portefeuilles de crédit. Or le but du calcul du capital économique est de tenir compte des pertes extrêmes ce qui induit que l'écart-type ne constitue pas une bonne mesure de risque. La VaR est une mesure qui s'intéresse aux ailes des distributions et qui nous permet de mieux capter les pertes extrêmes dans un portefeuille de crédit. Une VaR à un niveau de confiance donné indique le montant minimum qu'on peut perdre avec une certaine probabilité sur un horizon de temps donné. L'ES est une mesure de la moyenne des pertes au delà d'un certain quantile. Il ressort d'après la présentation des mesures de risque que la VaR et l'ES sont les plus plausibles à utiliser comme mesure du capital économique d'un portefeuille de crédit.

Aztner et al. (1999) ont proposé la notion de cohérence de mesure de risque. Selon ces auteurs, une mesure de risque ρ est cohérente si elle obéit aux quatre propriétés suivantes.

La sous-additivité

Le capital requis pour deux risques combinés ensemble est inférieur ou égal à celui requis pour les deux risques traités séparément.

La monotonie

Si un risque a toujours de plus grosses pertes qu'un autre risque, alors le

capital requis serait toujours plus gros.

L'homogénéité positive

Le capital requis est indépendant de l'unité de mesure du risque

La translation

Il n'existe pas de capital supplémentaire pour un risque additionnel ne présentant aucune incertitude.

La VaR est devenue la mesure de risque couramment utilisée dans le domaine de la gestion des risques financiers. Cependant, cette mesure est en train de susciter la critique de bon nombre de personnes que ce soit à des fins académiques ou pratiques. La VaR est souvent critiquée pour son incapacité à refléter la sévérité des pertes dans les scénarios extrêmes où la perte dépasse la VaR (Aztner et al. 1997, 1999 et Xiao 2002). En d'autres termes, la VaR ne permet pas de mesurer l'épaisseur de l'aile de distribution. L'autre critique adressée à la VaR est qu'elle n'est pas une mesure de risque cohérente (Aztner et al. 1997, 1999, Xiao 2002, Acerbi et Tasche 2001, Frey 2002, Kurth et Tasch 2002, Yashhiro et Toshinao 2001, et Kalkbrener et al. 2003). Cette mesure ne satisfait pas la première condition citée ci haut, à savoir, celle de la subadditivité. Cette condition stipule que le risque devrait baisser en cas de diversification. Or dans le cas de portefeuilles de crédit hétérogènes ou petits, la VaR n'est plus une mesure de risque cohérente.

Pour éviter les problèmes causés par la VaR, une autre mesure de risque a été proposée, il s'agit de l'ES. L'ES considère les pertes au delà de la VaR

et est considérée comme une mesure de risque cohérente (Acerbi et al. 2001, Aztner et al. 1997, 1999 et Acerbi et Tasch 2001).

Chapitre 3

Modèle factoriel de portefeuille de crédit

3.1 Modèle et notations

3.1.1 Modèle factoriel

Nous considérons un portefeuille de I prêts appartenant à J secteurs industriels différents. Chaque secteur j , pour $j = 1, \dots, J$, est représenté par son indice de marché noté Z_j et appelé facteur commun. Nous supposons que chaque facteur commun Z_j suit une loi normale centrée réduite et que $(Z_1, \dots, Z_J) \sim N(0, \Sigma)$ où Σ représente la matrice variance-covariance avec une diagonale de 1. Notons par I_j le nombre de prêts i dans le secteur j tel

que $I = \sum_{j=1}^J I_j$.

Soit X_{ij} la capacité de la firme i appartenant au secteur j à honorer ses engagements. Cette variable peut être définie comme la valeur des actifs de la firme i diminuée de la valeur de ses dettes (Merton 1974). Quoique non observable, cette variable permet de modéliser l'événement de défaut pour une certaine période de temps et de tenir compte des corrélations entre les défauts.

Notre modèle de portefeuille de crédit se présente comme suit :

$$X_{ij} = \theta_{ij}Z_j + \sqrt{1 - \theta_{ij}^2}\epsilon_{ij} \quad , \quad (3.1)$$

où θ_{ij} est un paramètre réel à estimer représentant le poids de l'industrie dans la capacité de la firme à honorer ses engagements et $\epsilon_{ij} \sim N(0, 1)$ est le facteur spécifique au prêt i dans l'industrie j . Notons que les Z_j et les ϵ_{ij} sont indépendants.

Cette modélisation stipule que le portefeuille de prêts est composé de sous-portefeuilles ayant chacun une exposition à un facteur industriel unique. Ainsi, le nombre de facteurs communs J est égal au nombre de sous-portefeuilles composant le portefeuille global.

3.1.2 Fonction de perte

Soit :

- A_{ij} l'exposition en cas de défaut du prêt i dans le secteur j ;

- G_{ij} la perte en cas de défaut du prêt i dans le secteur j ;
- p_{ij} la probabilité que le prêt i dans le secteur j fasse défaut ;
- c_{ij} le seuil de défaut d'un prêt i appartenant à un secteur j défini par

$$c_{ij} = \Phi^{-1}(p_{ij}) ;$$

- D_{ij} est une variable aléatoire binaire égale à 1 s'il y a défaut et 0 sinon,

$$D_{ij} = \mathbb{I}_{(X_{ij} \leq c_{ij})} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{ij} \leq c_{ij} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La perte d'une transaction i dans un secteur j notée L_{ij} ainsi que la perte totale du portefeuille notée L sont déterminées comme suit :

$$L_{ij} = A_{ij} \times G_{ij} \times D_{ij} \text{ et } L = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{I_j} L_{ij} . \quad (3.2)$$

3.1.3 Mesures de risque

Les mesures de risque que nous utilisons dans ce mémoire sont la valeur à risque (VaR) et l'Expected Shortfall (ES). Le degré de solvabilité ou niveau de confiance α est compris entre 0 et 1. Pour le capital économique, il est souvent exprimé par la cotation de la dette externe de la banque. Une meilleure qualité de la dette se traduit par une plus faible probabilité d'insolvabilité. Les agences de notation telle que Moody's évaluent la qualité de la dette à long terme des entreprises et, à partir des données historiques sur les défauts

des obligations corporatives cotées, il est possible d'estimer la probabilité qu'une entreprise d'une cote donnée fasse défaut au cours de l'année.

La valeur à risque $VaR_\alpha(L)$ de L à un niveau de confiance $\alpha \in (0, 1)$ est le quantile d'ordre α de la distribution des pertes. Elle est définie de la manière suivante

$$VaR_\alpha(L) = \inf (x \in R \mid P(L \leq x) \geq \alpha) . \quad (3.3)$$

L'expected shortfall $ES_\alpha(L)$ de L à un niveau de confiance $\alpha \in (0, 1)$ est définie par

$$\begin{aligned} ES_\alpha(L) &= E(L \mid L \geq VaR_\alpha(L)) \\ &= (1 - \alpha)^{-1} E(L \cdot \mathbb{I}_{\{L \geq VaR_\alpha(L)\}}) . \end{aligned}$$

Notons que l'expected shortfall est calculé en négligeant les sensibilités pour discontinuité au quantile. En effet, la formule complète est la suivante :

$$\begin{aligned} ES_\alpha(L) &= (1 - \alpha)^{-1} (E(L \cdot \mathbb{I}_{\{L \geq VaR_\alpha(L)\}}) + VaR_\alpha(L) \cdot (P(L \leq VaR_\alpha(L)) - \alpha)) . \end{aligned}$$

3.2 Expérience de Simulation

3.2.1 Simulation brute

Dans ce présent travail, nous utilisons la simulation Monte Carlo pour obtenir la distribution des pertes du portefeuille ainsi que les estimés de la valeur à risque et l'ES. Il s'agit de générer N scénarios et de déterminer la distribution de pertes. La procédure que nous adoptons comprend les étapes suivantes :

- 1 Poser $n = 1$;
- 2 Générer les facteurs communs Z_j à partir de normales centrées réduites en utilisant la procédure de Cholesky ;
- 3 Générer les facteurs spécifiques ϵ_{ij} indépendants à partir de normales centrées réduites ;
- 4 Générer les variables X_{ij} , $i = 1, \dots, I$ et $j = 1, \dots, J$ en utilisant l'équation (3.1) ;
- 5 Déterminer la perte L^n du portefeuille en utilisant l'équation (3.2), L^n étant la perte totale du portefeuille de crédit correspondant au scénario n ;
- 6 Tant que $n \leq N$ faire $n = n + 1$ et aller à l'étape 2.

La $VaR_\alpha(L)$ telle que définie dans l'équation (3.3) est calculée de la manière suivante. Nous classons les L^n des différents scénarios dans un ordre croissant et nous choisissons la valeur de rang $\alpha \cdot N$ comme étant la $VaR_\alpha(L)$. Le $ES_\alpha(L)$ est calculé comme étant la moyenne des valeurs de L^n qui sont

supérieures à la valeur de rang $\alpha \cdot N$.

La majorité des scénarios générés se situent autour de la moyenne de la distribution de pertes du portefeuille de crédit. Or, les mesures de risque que nous utilisons sont basées sur l'aile de cette distribution de pertes, ce qui résulte que nous aurions besoin de générer un très grand nombre de scénarios pour pouvoir déterminer précisément ces mesures et obtenir des résultats stables. La limite de cette approche est qu'elle s'avère peu propice pour des portefeuilles de grandes tailles qui sont communément considérés dans la pratique. Ceci est confirmé par les résultats numériques exposés dans la prochaine section qui montrent la différence dans les écarts-types des estimés pour différents nombres de scénarios générés.

3.2.2 Échantillonnage stratégique

Pour éviter les inconvénients de la simulation Monte Carlo brute, une technique plus efficace est proposée qui est l'échantillonnage stratégique. Cette approche consiste à générer des scénarios qui se situent dans la zone intéressante, à savoir celle du quantile considéré pour les mesures de risque choisies. La technique de l'échantillonnage stratégique a été surtout utilisée dans l'évaluation du risque de marché. Son application au risque de crédit est très récente.

Glasserman et Li (2003a) appliquent cette technique à un portefeuille virtuel de 1000 obligations ayant 10 facteurs communs. Cette technique se base d'une part sur la modification de la probabilité de défaut afin de générer

les pertes extrêmes plus souvent, et d'autre part sur le déplacement de ou des facteurs communs qui affectent le portefeuille de crédit. Les auteurs nomment cette méthode *Two steps IS method* et montrent que cette technique améliore substantiellement une simulation Monte Carlo brute.

Kalkbrener et al. (2003) appliquent l'échantillonnage stratégique à un portefeuille réel de la Deutsche Bank, composé de 25000 prêts et ayant 96 facteurs communs. L'échantillonnage stratégique se base sur le déplacement des facteurs communs à un niveau qui permet de générer la majorité des scénarios dans la zone désirée. Ce déplacement est obtenu en approximant le portefeuille de crédit réel en un portefeuille de crédit homogène virtuel, le calcul des mesures de risque restant toutefois basé sur le portefeuille réel initial. Notons que cette approche se base seulement sur le déplacement des facteurs communs comparativement à celle de Glasserman et Li (2003b) qui, en plus du déplacement des facteurs communs, considère la modification de la probabilité de défaut.

Dans ce qui suit, nous appliquons l'approche développée par Kalkbrener et al. (2003).

1) Nous approximations le portefeuille bancaire par un portefeuille homogène. Dans un portefeuille homogène, les transactions possèdent la même probabilité de défaut $\tilde{p}$ et la même exposition au défaut $\tilde{A}$. Ces paramètres sont déterminés comme suit :

$$\tilde{A} = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{I_j} A_{ij}}{I} ,$$

$$\tilde{p} = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{I_j} p_{ij} A_{ij}}{\sum_{i=1}^{I_j} A_{ij}} .$$

Le vecteur des poids du portefeuille homogène noté $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_J)$ est en fonction des poids du portefeuille réel $\theta = (\theta_{11}, \dots, \theta_{IJ})$. Ce vecteur est exprimé comme suit :

$$\beta = \frac{\psi}{s} ,$$

où

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_J) = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{I_j} p_{ij} \cdot A_{ij} \cdot (\theta_{i1}, \dots, \theta_{iJ}) .$$

Le facteur de pondération s est choisi tel que

$$\begin{aligned} R^2 &= \sum_{j,k=1}^J \beta_j \cdot \beta_k \cdot Cov(Z_j, Z_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^J \frac{\psi_j}{s} \cdot \frac{\psi_k}{s} \cdot Cov(Z_j, Z_k) \\ &= \frac{1}{s^2} \sum_{j,k=1}^J \psi_j \cdot \psi_k \cdot Cov(Z_j, Z_k) . \end{aligned}$$

On a alors

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j,k=1}^J \psi_j \cdot \psi_k \cdot \text{Cov}(Z_j, Z_k)}{R^2}},$$

où

$$R^2 = \frac{\sum_{m,n}^J \psi_m \psi_n \text{Cov}(Z_m, Z_n) - \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{I_j} (p_{ij} A_{ij})^2 \left(\sum_{i=1}^{I_j} w_{ij} \theta_{ij} \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{I_j} p_{ij} A_{ij} \right)^2 - \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{I_j} (p_{ij} A_{ij})^2},$$

avec w_{ij} : le poids de l'entreprise i dans l'indice composite industriel du secteur j .

2) Nous considérons un modèle à un facteur (Z_1) et nous calculons le minimum μ_1 de la variance de l'estimateur de la mesure de risque ES. Il s'agit du minimum de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(1-\alpha)} \frac{(\tilde{L} \cdot \phi(0, 1))^2}{\phi_1(\mu_1, 1)} dz,$$

où

$$\tilde{L} = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{R^2} z_1}{\sqrt{1 - R^2}} \right),$$

avec

- $\phi(y_1, y_2)$ la densité d'une loi normale de moyenne y_1 et de variance y_2 ;
- $\Phi(\cdot)$ la fonction cumulative d'une loi normale standard.

3) Le minimum calculé à l'étape précédente sert à déterminer les autres déplacements μ_j des facteurs communs à l'aide de l'équation suivante

$$\mu_k = \frac{\mu_1 \cdot \sum_{j=1}^J Cov(Z_j, Z_k) \cdot \beta_j}{\sqrt{R^2}}, \quad \text{pour } k = 2, \dots, J.$$

4) Nous générons les facteurs communs Z_j à partir de normales centrées réduites en utilisant la procédure de Cholesky.

5) Nous calculons $(Z_j - \mu_j)$ pour $j = 1, \dots, J$. Il s'agit de déplacer les facteurs communs en enlevant les déplacements μ_j .

6) Nous générons les facteurs spécifiques ϵ_{ij} à partir de normales centrées réduites.

7) Nous générons les variables X_{ij} , $i = 1, \dots, I$ et $j = 1, \dots, J$ en utilisant l'équation suivante :

$$X_{ij} = \theta_{ij} (Z_j - \mu_j) + \sqrt{1 - \theta_{ij}^2} \epsilon_{ij}.$$

8) Nous déterminons la perte L^n du portefeuille en utilisant l'équation (3.2), L^n étant le perte totale du portefeuille de crédit correspondant au scénario n .

Chapitre 4

Exemple d'un portefeuille de prêts

4.1 Données utilisées

Les données utilisées dans ce travail représentent un sous-portefeuille réaliste d'une banque. Ces données représentent les prêts du secteur commercial de la région Est du Canada. Ces prêts sont au nombre de 2027 représentant une exposition globale d'environ 285M\$. Ces prêts sont composés des produits suivants : acceptations bancaires, lettres de crédit, lettres de garanties, marges agricoles, prêts agricoles, marges commerciales, prêts commerciaux. La perte en cas de défaut (LGD) est variable selon chaque produit composant le portefeuille.

	LGD (%)
Acceptations Bancaires	30
Lettres de crédit	30
Lettres de garanties	6
Marges agricoles	1
Prêts agricoles	1
Marges commerciales	30
Prêts commerciaux	50

TAB. 4.1 – LGD par produit.

Ces prêts sont répartis en trois principaux groupes, chacun dépendant d'une industrie particulière. Nous avons donc trois facteurs systématiques Z_1 , Z_2 et Z_3 représentés respectivement par les industries suivantes : Finances et Assurances (Industrie 1), Manufacture (Industrie 2) et Agriculture (Industrie 3). L'exposition à l'intérieur de chaque groupe est différente d'un prêt à un autre. La probabilité de défaut est identique pour toutes les transactions à l'intérieur d'un même groupe. Les sous-portefeuilles possèdent les caractéristiques qui figurent dans le tableau 4.2.

Les corrélations entre les prêts et les facteurs communs (corrélations intra-industries) sont décrites par θ_j , pour $j = 1, 2, 3$ et les corrélations entre les facteurs (corrélations inter-industries) notées ρ_{jk} sont déterminées selon la méthodologie de ERisk. Les poids des facteurs dans chaque industrie sont calculés à partir de la corrélation observée entre le rendement d'une firme i

	Exposition (\$)	Probabilité de défaut annuelle
Industrie 1	134 480 093	0,013
Industrie 2	21 126 749	0,021
Industrie 3	112 897 974	0,043

TAB. 4.2 – Exposition et probabilité de défaut par industrie.

et le rendement de l'indice composite industriel dans lequel se trouve cette firme. Les corrélations inter-industries sont calculées à partir de la corrélation entre les rendements des indices composites industriels représentant chaque secteur. Les valeurs numériques des corrélations inter-industries telles que calculées par ERisk sont indiquées dans le tableau suivant :

	Z_1	Z_2	Z_3
Z_1	1		
Z_2	0,4097	1	
Z_3	0,5625	0,2201	1

TAB. 4.3 – Corrélations inter-industries.

Les valeurs numériques des poids sont $\theta_1 = 0,62$, $\theta_2 = 0,51$ et $\theta_3 = 0,54$.

4.2 Résultats numériques

L'équation (3.1) se présente comme suit :

$$X_{ij} = \theta_{ij}Z_j + \sqrt{1 - \theta_{ij}^2}\epsilon_{ij} ,$$

où

- θ_{ij} poids de chaque prêt i exposé à l'industrie j pour $j = 1, 2, 3$;
- Le vecteur des facteurs communs $(Z_1, Z_2, Z_3) \sim N(0, \Sigma)$ est déterminé par le biais d'une décomposition de Cholesky, Σ étant la matrice variance-covariance telle que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,4097 & 0,5625 \\ 0,4097 & 1 & 0,2201 \\ 0,5625 & 0,2201 & 1 \end{bmatrix} .$$

On calcule la VaR et l'ES du portefeuille de crédit, et ce, pour les niveaux de confiance de 95% et 99%. L'horizon de temps dans ce cas est de 1 an étant donné qu'il s'agit d'un portefeuille de prêts et qu'il s'agit du contexte d'étude de capital économique. Pour illustrer l'apport de l'échantillonnage stratégique dans l'amélioration de la performance et de la précision numérique, nous avons calculé l'écart-type de l'estimateur Monte Carlo de chacune des mesures de risque considérées.

Pour ce faire, nous avons considéré différents vecteurs de déplacements des facteurs systématiques. Ces vecteurs sont obtenus en multipliant le vecteur de déplacements optimal $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ par différents coefficients f , $f = 0$

étant le cas où il n'y pas d'échantillonnage stratégique et $f = 1$ étant le cas où le vecteur μ est considéré. Les valeurs numériques du vecteur de déplacements sont $\mu_1 = -1,0254$, $\mu_2 = -0,4413$ et $\mu_3 = -0,8992$. Les coefficients que nous avons considérés sont $f = \{0; 0,2; 0,6; 1; 1,2; 1,6; 2\}$. Pour chaque coefficient f et donc un vecteur $f \times \mu$, nous avons simulé 10000 trajectoires et obtenus la VaR et l'ES. Nous avons répété cette opération 20 fois afin d'obtenir une estimation de l'écart-type et de la moyenne de chacune des mesures de risque pour les niveaux de confiance désirés. Les résultats numériques sont somme suit :

f	0	0.2	0.6	1	1.2	1.6	2
$\alpha = 99\%$							
Moyenne ES_α	22,82	23,56	23,38	23,65	23,43	23,87	24,80
Écart-type ES_α	3,48	3,39	1,30	0,86	1,00	1,13	2,63
Moyenne VaR_α	14,63	15,89	15,01	15,26	14,98	15,35	15,96
Écart-type VaR_α	3,15	1,94	0,93	0,74	1,10	1,39	2,42
$\alpha = 95\%$							
Moyenne ES_α	11,45	10,96	11,42	11,06	11,48	10,66	11,23
Écart-type ES_α	1,42	0,84	0,62	0,31	0,74	0,95	0,73
Moyenne VaR_α	5,27	5,01	5,24	5,10	5,16	4,80	4,92
Écart-type VaR_α	0,58	0,55	0,32	0,28	0,46	0,67	0,58

TAB. 4.4 – Résultats numériques (en 10^6).

Pour le niveau de confiance de 99% et 95%, les résultats numériques sont illustrés dans les figures 4.1 et 4.2.

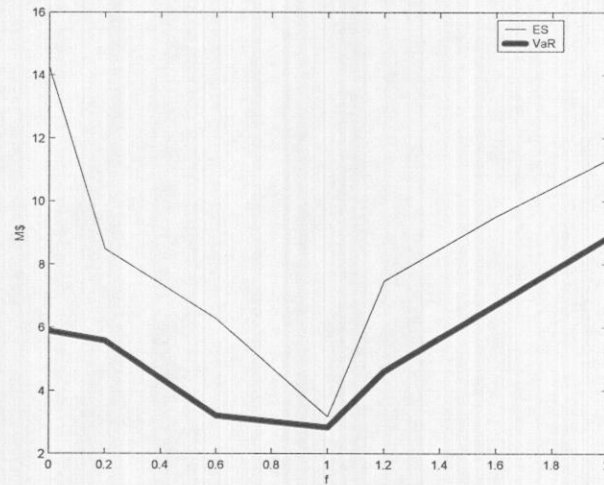


FIG. 4.1 – Écart-type de l'estimé de Monte Carlo en fonction du déplacement pour un niveau de 95%.

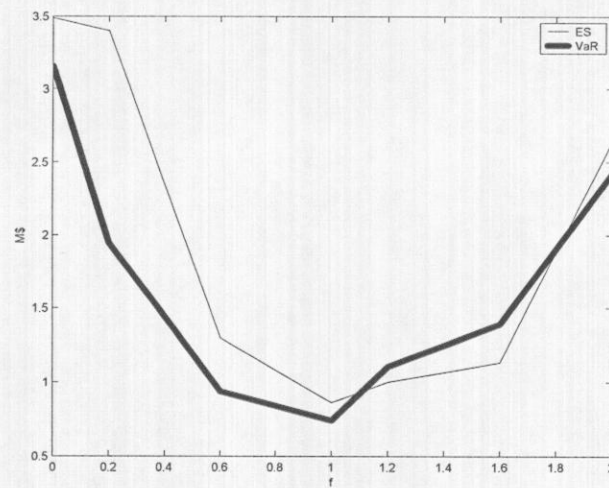


FIG. 4.2 – Écart-type de l'estimé de Monte Carlo en fonction du déplacement pour un niveau de 99%.

Le tableau ci-dessus nous présente la moyenne et l'écart-type des deux mesures de risque considérées pour les niveaux de confiance de 99% et 95%. Par exemple, pour un niveau de confiance 99%, un ES moyen de $2,28 \cdot 10^7$ représente la moyenne des pertes supérieures à ce quantile. On remarque que la moyenne de l'ES est toujours supérieure à celle de la VaR, ce qui confirme que l'ES est une mesure plus conservatrice que la VaR. Les valeurs les plus élevées des écarts-types des deux mesures de risques correspondent au cas où $f = 0$, c'est à dire au cas où la technique de simulation correspond à une Monte Carlo brute. Plus f approche de 1, cas correspondant à l'application optimale de l'échantillonnage stratégique, plus les écarts-type diminuent pour ensuite augmenter pour des valeurs supérieures à 1. Nous voyons bien que l'échantillonnage stratégique améliore d'une façon significative la qualité de l'estimé de la simulation Monte Carlo des deux mesures de risque utilisées. Le ratio des variances entre le point optimal ($f = 1$) et le cas où il n'y pas de déplacement ($f = 0$) est présenté dans le tableau ci-dessous.

	Ratio des variances à 99%	Ratio des variances à 95%
ES	16,33	20,04
VaR	18,11	4,26

TAB. 4.5 – Ratio des variances.

Le ratio des variances est de l'ordre de 16,33 pour l'ES et de 18,11 pour la VaR avec un seuil de 95%. Ce ratio est de l'ordre de 20,04 pour le ES et de 4,26 pour la VaR avec un seuil de 99%.

Intuitivement, le ratio des variances x est interprété de la manière suivante : pour avoir la même précision, il faut générer x fois plus de scénarios lors d'une Monte Carlo brute que lors de l'utilisation de l'échantillonnage stratégique. Dans notre exemple numérique, pour un niveau de confiance de 99%, il faut générer 16,33 fois plus de scénarios bruts, i.e. générer 163300 trajectoires, si nous voulons avoir le même niveau de précision que lors de l'utilisation de l'échantillonnage stratégique.

Remarquons enfin que le ratio des variances pour la VaR est largement différent pour les niveaux de confiance choisis contrairement à l'ES où il est relativement stable.

Chapitre 5

Conclusion

Dans ce travail, nous avons considéré un portefeuille de crédit réel appartenant à une banque composé de différents prêts commerciaux. Nous avons calculé le capital économique correspondant à l'aide de deux mesures de risque qui sont la VaR et l'ES. Nous avons considéré un modèle du type actuariel avec des paramètres déterministes. La distribution des pertes a été déterminée en procédant par simulations Monte Carlo. La technique de l'échantillonnage stratégique a été utilisée afin de réduire la variance des estimés et diminuer le nombre de scénarios requis pour l'obtention de résultats stables.

Les résultats obtenus correspondent à nos attentes dans la mesure où l'application de l'échantillonnage stratégique a produit une grande amélioration de la qualité des estimés vu la réduction considérable dans leurs variances.

La contribution de ce travail de recherche est double : d'une part il nous permet de valider une approche intéressante de modélisation du risque de crédit à un portefeuille de prêts bancaires qui est proposée par Kalkbrener et al. (2003). D'autre part, ce travail nous a permis d'établir une excellente base comparative par rapport aux modèles développés à la banque ainsi que les logiciels utilisés.

Ce travail constitue aussi une très bonne base pour d'autres projets que nous comptons faire au sein de la banque. En effet, nous pourrions explorer la piste de l'allocation de capital qui est une technique de plus en plus considérée et développée dans les banques et qui leur permet une allocation optimale du capital économique calculé pour leurs différentes unités d'affaires. Une autre piste à explorer est l'étude de l'impact de la maturité de chaque prêt sur le capital économique calculé ce qui implique l'introduction des matrices de transition et une fonction de valorisation selon le rating des prêts. Ceci nous permettrait entre autres de tester le facteur d'ajustement de maturité proposé par le nouveau accord de Bâle.

Bibliographie

- [1] Acerbi, C., D. Tasche, 2001, Expected Shortfall : A Natural Coherent Alternative to Value-at-Risk, Cahier de recherche, AbaxBank, Italie.
- [2] Acerbi, C., C. Nordio et C. Sirtori, 2001, Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management, Cahier de recherche, Abaxbank, Italie.
- [3] Aztner, P., F. Delbaen, J-M. Eber et D. Heath, 1999, "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance*, 9 , 203-228.
- [4] Finger, C., 1999, "Conditional Approaches for CreditMetrics Portfolio Distributions," *CreditMetrics Monitor*, 1, 14-33.
- [5] Frey, R., 2002, VaR and Expected Shortfall in Portfolios of Dependent Credit Risks : Conceptual and Practical Insights, Cahier de recherche, University of Zurich.
- [6] Glasserman, P. et L. Ji, 2003a, Importance sampling for a mixed Poisson model of portfolio credit risk, Proceedings of the Winter Simulation Conference, IEEE Press, Piscataway, NJ.
- [7] Glasserman, P. et L. Ji, 2003b, Importance Sampling for Portfolio Credit Risk, Columbia Business School, New York.

- [8] Koyluoglu, H. et P. Hickman, 1998, A Generalized Framework For Credit Risk Portfolio Models, Cahier de recherche, Oliver, Wyman & Company et Credit Suisse Financial Products.
- [9] Kurth, A. et D. Tasche, 2002, Credit Risk Contributions to Value-at-Risk and Expected Shortfall, Cahier de recherche, UBS AG.
- [10] Kalkbrener, M., L. Overbeck et H. Lotter, 2003, Sensible and efficient capital allocation for credit portfolios, Deutsche Bank AG.
- [11] Lucas, A., P. Klaassen, P. Spreij et S. Straetmans, 2000, "An Analytic Approach to Credit Risk of Large Corporate Bond and Loan Portfolios," *Journal of Banking and Finance*, 25, 1635-1664
- [12] Merton, R.C, 1974, "On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates," *Journal of finance*, 29, 449-470.
- [13] Schönbucher, P.J, 2000, Factor Models For Portfolio Credit Risk, Cahier de recherche, Département de Statistiques, Bonn University.
- [14] Wilson, T.C, 1998, "Portfolio Credit Risk," *Economic Policy Review*, 71-82.
- [15] Xiao, J.Y, 2002, "Economic Capital Allocation For Credit Risk," *Risk-Metrics Journal*, 2, 29-47.