

2m11.3144.1

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
AFFILIÉE À L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Modèle quantitatif et intégré
de gestion de portefeuille
international

par

Yves Martin



Sciences de la gestion

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maître ès science
(M.Sc.)

Décembre 2003

© Yves Martin, 2003

m2003
No 147

DÉCLARATION DE L'ÉTUDIANTE, DE L'ÉTUDIANT
ÉTHIQUE EN RECHERCHE AUPRÈS DES ÊTRES HUMAINS

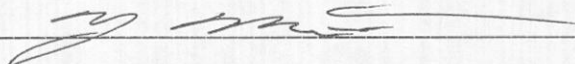
Recherche sans collecte directe d'informations

Cette recherche n'impliquait pas une collecte directe d'informations auprès de personnes (exemples : entrevues, questionnaires, appels téléphoniques, groupes de discussion, tests, observations participantes, communications écrites ou électroniques, etc.).

Cette recherche n'impliquait pas une consultation de documents, de dossiers ou de banques de données existants qui ne font pas partie du domaine public et qui contiennent des informations sur des personnes.

Titre de la
recherche : MODÈLE QUANTITATIF ET
INTÉGRÉ DE GESTION DE
PORTFEUILLE - INTERNATIONAL.

Nom de l'étudiante,
de l'étudiant : YVES MARTIN

Signature : 

Date : 16 février 2004.

Modèle quantitatif et intégré de gestion de portefeuille international

Table des matières

	Remerciements	i
	Sommaire	ii
	Conventions typographiques	iii
1.	Introduction	1
2.	Revue de la littérature	6
2.1	Choix du modèle de prévision des rendements espérés et élaboration de la matrice variances-covariances	6
2.2	Prévisions des rendements espérés et choix des variables explicatives	8
2.3	Méthodes de stabilisation des poids des actifs dans les portefeuilles générés par le processus d'optimisation	13
3.	Problématique de recherche	15
4.	Méthodologie	17
4.1	Échantillon et utilisation des données	17
4.2	Élaboration de la matrice variances-covariances entre les rendements des indices selon le modèle <i>RiskMetricsTM</i>	20
4.2.1	Constitution de la matrice variance-covariance	21
4.2.2	Prévision de la volatilité future selon <i>RiskMetricsTM</i>	23
4.3	Choix des variables explicatives et calcul des prévisions de rendements espérés	27
4.3.1	Calcul des prévisions de rendements espérés	29
4.4	L'optimisation du portefeuille	36
5.	Analyse des résultats	38
5.1	Description statistique des données	38
5.2	Résultats empiriques	40
5.2.1	Résultats des régressions, prévisions des rendements et coefficients d'information	40
5.2.2	Analyse de la performance de la stratégie quantitative	43
6.	Conclusion	50
7.	Bibliographie	54

8. Tableaux

Tableau 1 –	Liste des neuf indices utilisés et pays d'origine	17
Tableau 2 –	Coefficients de corrélation entre les prévisions de rendements et les rendements réalisés	30
Tableau 3 –	Poids des pays composant le portefeuille de référence	34
Tableau 4 –	Description statistique des rendements réels mensuels de chacun des indices boursiers	38
Tableau 5 –	Matrice de corrélation des rendements réels mensuels des neuf marchés boursiers	39
Tableau 6 –	Résultats des régressions pour les neuf marchés boursiers	40
Tableau 7 –	Résultats des régressions pour les neuf marchés boursiers (signes des coefficients)	41
Tableau 8 –	Exemple de rendements d'équilibre et de rendements espérés	43
Tableau 9 –	Composition du portefeuille d'équilibre et des portefeuilles optimaux	44
Tableau 10 –	Comparaison des rendements pour la période de test	46

9. Table

Table 1.1 –	Application de la formule récursive de la moyenne mobile exponentielle dans le calcul de la prévision de la volatilité	25
Table 1.2 –	Application de la formule récursive de la moyenne mobile exponentielle dans le calcul de la prévision de la covariance entre les rendements des actifs A et B	26
Table 1.3 –	Table des diverses heures de collecte des données pour les neuf indices boursiers utilisés dans ce travail	58

11. Graphiques

Graphique 1 –	Graphique de comparaison des rendements de deux stratégies d'investissement (%)	47
Graphique 2 –	Graphique de comparaison des rendements de deux stratégies d'investissement (1000 \$)	48
Graphique 3 –	Graphique des rendements actifs cumulatifs	49

10. Annexes

Annexe 1 –	Formule d'ajustement des rendements pour tenir compte du décalage horaire	57
Annexe 2 –	Détermination du facteur de déclin selon <i>RiskMetrics</i> TM	60
Annexe 3 –	Dérivée de la formule de la moyenne mobile exponentielle (MME) utilisée dans le calcul de la matrice variances-covariances <i>RiskMetrics</i> TM	62

Programmes et fonctions Matlab

Annexe 4 –	Programme principal	65
Annexe 5 –	Transformation de la banque de données	66
Annexe 6 –	Matrice variances-covariances	67
Annexe 7 –	Rendements espérés raffinés	68
Annexe 8 –	Régression linéaire	72
Annexe 9 –	Portefeuille de référence	73
Annexe 10 –	Optimisation	74

REMERCIEMENTS

Écrire un mémoire est une tâche de longue haleine qui ne saurait être possible sans les appuis et encouragements constants des gens qui nous entourent. Je remercie tout particulièrement Jean-Guy Simonato et Geneviève Gauthier, mes directeurs de recherche. On ne saurait souhaiter des superviseurs plus compétents et compréhensifs. Une pensée à feu mes parents Jean et Béatrice, pour les valeurs qu'ils m'ont léguées en héritage. Je dédie enfin ce mémoire aux trois femmes de ma vie, Chantale, Catherine et Élizabeth. Leur amour m'a poussé à compléter ce travail.

SOMMAIRE

L'utilisation de modèles quantitatifs de répartition d'actifs sur le plan international est encore aujourd'hui peu répandue. Certains gestionnaires se servent de tels modèles comme outil d'aide à la décision, mais seulement quelques rares exceptions appliquent de façon systématique les recommandations d'achats et de ventes qui résultent d'un tel procédé. La raison vient de la difficulté rencontrée par les modèles quantitatifs de générer des portefeuilles optimaux jugés raisonnables. Une méthode basée sur un modèle qui éliminerait ou du moins amenuiserait ces déviations extrêmes, aurait en ce sens de meilleures chances de rencontrer les attentes des gestionnaires de portefeuilles. L'objet de ce mémoire est donc de répliquer le processus développé par Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) pour le calcul des prévisions de rendements espérés et la construction de portefeuilles efficients, et d'y greffer certains éléments de la méthode *RiskMetricsTM* qui permettent une plus grande stabilité de la matrice variances-covariances, le tout, de manière à produire des résultats jugés réalistes. Les résultats démontrent que la combinaison de certaines techniques et méthodes couramment utilisées par les praticiens de la gestion de portefeuilles peuvent générer des résultats intéressants; suffisamment du moins pour susciter le désir de poursuivre l'élaboration de modèles quantitatifs.

CONVENTIONS TYPOGRAPHIQUES

On donne ici la liste des symboles utilisés le plus fréquemment dans ce travail et leurs définitions.

- Séries temporelles

r_t	le rendement d'un actif au temps t ; l'ensemble des points r_t représentent le vecteur $\vec{r}$,
$E(r_t)$	la valeur espérée (prédite) du rendement r au temps t ,
$\sigma_t^2 = E(r_t^2) - [E(r_t)]^2$	la variance d'une série de rendements r au temps t ,
σ_t	la volatilité d'une série de rendements au temps t ,
$\hat{r}$	le rendement moyen d'un actif pour une période donnée $= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$,
T	le nombre d'observations utilisé dans le calcul de la moyenne mobile,
λ	le facteur de déclin, où $0 < \lambda \leq 1$; <i>RiskMetrics</i> TM utilise $\lambda = 0,97$.

- Régressions multiples

$x_{i,j}(t)$	la $j^{\text{ième}}$ variable explicative pour le $i^{\text{ième}}$ indice au temps t ,
b_{ij}	le coefficient beta reliant la variable explicative j aux rendements excédentaires, l'estimation de b_{ij} dépend des données des 60 derniers mois,
$\varepsilon_i(t)$	le terme d'erreur,
R^2	le pourcentage de la variance de Y expliqué par la variance de X ,
ρ_{it}	le coefficient de corrélation entre les prévisions de rendements r_{it}^{prev} et les rendements réalisés r_{it} du $i^{\text{ième}}$ indice au temps t ,
$\sigma_{r_{it}, r_{it}^{prev}}$	la covariance entre les prévisions de rendements et les rendements réalisés du $i^{\text{ième}}$ indice au temps t , soit $\frac{1}{N-1} \sum_{s=t-N+1}^t r_{is}^{prev} r_{is}$,

$\sigma_{r_{it}^{prev}}^2$ la variance de la prévision de rendements du $i^{\text{ième}}$ indice au temps t ,
soit $\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (r_{it}^{prev})^2$,

$\sigma_{r_{it}}^2$ la variance du rendement réalisé du $i^{\text{ième}}$ indice au temps t , soit
 $\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (r_{it})^2$,

- Modèle Black-Litterman

$E(r)$ le vecteur des rendements espérés d'équilibre,

$E[r | r_{prev}]$ les rendements espérés conditionnels à la réalisation de la prévision
 r_{prev} ,

δ la constante de proportionnalité δ de la formule de Black (1989),

A la matrice variances-covariances selon le modèle *RiskMetrics*TM,

w le vecteur poids des divers pays en fonction du PIB de chacun.
 $\sum w_i = 1$,

$E(r) = \beta \cdot \mu_p$ le vecteur de rendements espérés d'équilibre du portefeuille de référence,

β le vecteur des betas (selon la définition du CAPM) des indices de chacun des pays en fonction du portefeuille de référence,

μ_p le rendement espéré excédentaire du portefeuille de référence, établi par Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996), de façon arbitraire, à un niveau jugé raisonnable de 6 %.

- Fonction d'utilité

$U = w'E[r | r_{prev}] - aw'A w$, la fonction d'utilité d'un investisseur, servant dans la fonction d'optimisation des portefeuilles,

a une mesure de l'aversion au risque de l'investisseur,

1. INTRODUCTION

Le développement de modèles quantitatifs de répartition d'actifs au plan international répond à un besoin des gestionnaires de portefeuilles. Ces derniers, soucieux de surpasser un portefeuille de référence, sont toujours à la recherche de nouveaux moyens d'accroître le rendement de leur portefeuille ainsi que d'en diversifier le risque. En comparaison au marché local canadien, les dimensions beaucoup plus grandes du marché des capitaux mondial multiplient les opportunités d'investissement et augmentent les probabilités de trouver des actifs sous-évalués et par conséquent d'obtenir des rendements excédentaires. Par exemple, une étude de Emmanuelli et Pearson (1994) révèle que de 1973 à 1988, le Standard & Poor 500 a généré un rendement annuel moyen de 12,2 %. Par opposition, l'indice EAFE de Morgan Stanley Capital International (MSCI), un indice pondéré en fonction de la capitalisation boursière de chaque marché (Market-Capitalization-Weighted Index), construit à partir d'indices boursiers européens, d'Asie du Sud-Est et de l'Australie, a généré un rendement annuel moyen de 18,2 % durant le même intervalle de quinze ans. Paradoxalement, la mesure de volatilité qu'est l'écart type sur le rendement indiquait un niveau identique pour les deux indices soit 16,9 %. Comme le niveau de corrélation entre les deux indices n'était que de 0,5, il était possible pour un gestionnaire, en investissant dans les deux indices, de diversifier de façon significative le niveau de risque de marché de son portefeuille.

Dans le même sens, Jorion (1989) et Eun et Resnik (1992) ont étudié le degré de stabilité de la matrice de corrélations des rendements des indices boursiers composant l'indice EAFE de Morgan Stanley et ont trouvé que les niveaux de corrélation demeurent relativement stables dans le temps et permettent ainsi de déterminer sur la frontière efficiente un portefeuille international au risque minimal. (Elton et Gruber (1995)).

La diversification d'un portefeuille d'actifs financiers sur le plan international offre des occasions fort intéressantes. Une question demeure cependant. Étant donné le phénomène de mondialisation des économies, les marchés financiers

font-ils l'objet d'une intégration croissante, amenuisant par le fait même les occasions de rendements supérieurs ou de diversification du risque qu'offre un univers beaucoup plus vaste? Les avantages de la diversification internationale surpassent-ils toujours les coûts qu'engendrent de telles opérations ?

Odier et Solnik (1993a) démontrent que malgré l'intégration croissante des marchés financiers en termes d'intégration physique des systèmes d'information, ainsi que d'harmonisation croissante des mécanismes d'échange et de procédés de transactions, le potentiel de diversification offert par l'investissement international demeure incontestable, et ce pour tous les pays développés. L'intégration physique des marchés financiers ne s'est donc pas traduite par un niveau de corrélation plus élevé, lequel est resté constant au cours des décennies 1970 et 1980. En fait, les coefficients de corrélation demeurent bas vu l'indépendance relative des économies nationales, la réglementation, la fiscalité, la politique monétaire et une multitude de facteurs. Des conclusions corroborées par Jorion (1989) qui calcule un coefficient de corrélation moyen de 0,43 entre les indices de marchés américains et étrangers. Un niveau très faible lorsqu'on le compare aux niveaux de corrélation entre les diverses classes d'actifs aux États-Unis.

Selon Sharpe (1997), 90 % de la variation de rendement mensuelle d'un large éventail de fonds mutuels internationaux basés aux États-Unis proviendrait de la décision de répartition d'actifs alors que seulement 10 % serait expliqué par la sélection de titres. La décision de surpondérer certains pays, par l'utilisation de contrats à terme sur l'indice boursier du pays en question, par rapport aux autres pays composant l'indice de référence peut ainsi représenter un élément majeur de valeur ajoutée pour un portefeuille d'actifs internationaux.

La répartition d'actifs d'un portefeuille se compose de deux volets : la répartition stratégique de l'actif et la répartition tactique de l'actif. Le plan stratégique de répartition d'actifs représente le portefeuille de référence à long terme, et par conséquent le niveau d'aversion au risque de l'investisseur. Si le plan stratégique favorise un niveau de risque moindre, la répartition à long terme sera concentrée dans des classes d'actifs représentant traditionnellement un niveau de volatilité

moindre. Par exemple, un tel portefeuille serait composé pour une bonne part d'obligations et de titres de pays dits développés. Bien que les rendements et niveaux de volatilité passés ne soient pas garants des rendements et niveaux de volatilité futurs, on peut remarquer qu'historiquement les investissements dans les produits financiers des marchés développés s'avéraient beaucoup moins risqués.

De son côté, la répartition d'actifs dite tactique représente une déviation temporaire vis-à-vis du portefeuille cible à long terme basée sur des préférences de l'investisseur ou sur des « recommandations » d'un modèle particulier. C'est une approche active de rebalancements périodiques des différents poids à l'intérieur d'un portefeuille composé d'un nombre déterminé d'actifs. La décision de répartition d'actifs tactique est par définition à court terme et se veut un moyen de capitaliser sur des informations ponctuelles.

Pour être en mesure de capitaliser sur des changements dans l'environnement économique, on doit pouvoir prévoir, dans la mesure du possible, les rendements futurs de certains actifs financiers à partir de ces changements. Une première approche, largement utilisée par les adeptes de l'analyse technique, consiste à modéliser les rendements futurs en fonction des rendements passés. Une deuxième approche, qui sera privilégiée dans cette étude, consiste à utiliser des variables économiques et financières pour prédire les variations de rendements futurs.

Selon Bekaert et Hodrick (1992), il ne fait aucun doute que les rendements excédentaires de certaines classes d'actifs peuvent être prédits en fonction de certains facteurs. Toutefois, cela ne remet pas nécessairement en question l'efficience des marchés. Cet élément de prévision pourrait s'avérer l'évidence de l'inefficience des marchés ou pourrait être causé, dans un marché efficient, par des primes de risque variant dans le temps (non stationnaires).

Malgré l'apport intéressant que peut représenter un système quantitatif et complètement intégré de répartition d'actifs, un tel système fonctionne telle une boîte noire générant des prévisions de rendements espérés excédentaires, une matrice de variances-covariances des rendements et, à la suite d'un processus

d'optimisation, des portefeuilles optimaux. Il est intéressant de noter qu'en pratique, de tels systèmes sont encore bien peu répandus. En fait, certains gestionnaires utilisent une partie du processus pour éventuellement inclure ces résultats dans d'autres calculs, alors que d'autres gestionnaires « font rouler » des modèles plus intégrés, mais utilisent les résultats ou recommandations à titre indicatif seulement. Ces derniers se servent de tels systèmes comme d'une source additionnelle d'information plutôt que comme un système complet à partir desquels sortiraient de façon automatique et systématique des ordres d'achats et de ventes.

En fait, bien peu de gestionnaires allouent une place importante aux modèles quantitatifs dans leurs décisions de répartition d'actifs. La raison de cette résistance vient des problèmes d'application traditionnelle démontrés par de tels modèles. La littérature financière regorge d'études et de tests qui confirment la nature insensée des résultats obtenus. Certaines études faisant état de ces résultats sont citées dans la section problématique de recherche.

L'objet de ce mémoire est de développer un processus intégré de gestion de portefeuille au niveau international qui soit applicable en pratique. Il est proposé un système d'allocation globale tactique (SAGT) qui soit à la fois complètement quantitatif et autonome. À cette fin, le SAGT développé par Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) sert de base au modèle développé dans cette étude, auquel sont apporté des modifications au niveau de la période testée, des variables macro-économiques et financières utilisées ainsi que de la méthodologie développée (utilisation du modèle d'évaluation du risque *RiskMetrics*TM (J.P. Morgan)). Un test est ensuite effectué afin de vérifier si le modèle élaboré par Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) peut être répliqué de façon concluante avec des variables différentes et sur une période plus récente.

Un tel système d'allocation globale tactique intègre toutes les étapes de gestion de portefeuille au niveau international, dans le cadre d'une gestion quantitative, soit : les prévisions de rendements espérés excédentaires, la constitution de la matrice variances-covariances des rendements, la construction de portefeuilles optimaux et

le réajustement automatique de façon périodique de la pondération des titres inclus dans le portefeuille optimal en fonction des nouvelles prévisions de rendements excédentaires fournies par le modèle.

L'approche générale du mémoire est la suivante. La première étape consiste à construire une matrice de variances-covariances qui soit la plus représentative des corrélations existantes entre les divers éléments d'actifs. Deuxièmement, il s'agit d'établir des prévisions des rendements espérés pour les marchés boursiers de neuf pays. Pour ce faire, un modèle de régressions linéaires multiples utilisant quatre variables explicatives est utilisé. Les rendements espérés obtenus sont par la suite « raffinés » à l'aide d'un processus bayésien et utilisés pour construire un portefeuille optimal qui est, en quelque sorte, une déviation du portefeuille de référence. La performance du portefeuille est basée sur le rendement dégagé par rapport au portefeuille de référence pour un niveau de risque équivalent.

La structure du mémoire est la suivante. La première partie passe en revue la littérature scientifique traitant des diverses étapes de construction et d'optimisation de portefeuille. La seconde partie est consacrée à la méthodologie qui est employée dans ce travail. La dernière partie présente les résultats obtenus et les diverses avenues qu'il serait possible d'emprunter pour étendre davantage la portée du modèle.

2. REVUE DE LA LITTÉRATURE

Cette section a pour objectif de revoir les développements récents dans la littérature financière pour les trois étapes de construction du modèle quantitatif développé par Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996); soit le choix du modèle de prévision des rendements espérés et l'élaboration de la matrice variances-covariances pour chacun des actifs utilisés, le choix des variables explicatives utilisées et l'étape d'optimisation de portefeuille.

2.1 Choix du modèle de prévision des rendements espérés et élaboration de la matrice variances-covariances

La raison principale évoquée pour expliquer pourquoi peu de gestionnaires utilisent un modèle quantitatif de répartition d'actifs provient des grandes variations dans les poids des actifs composant les portefeuilles générés par le processus d'optimisation moyenne-variance de tels modèles. Black et Litterman (1991) reconnaissent les difficultés d'application de la matrice variances-covariances dans la construction d'un portefeuille international optimal. Le poids des actifs entrant dans la composition du portefeuille optimal est extrêmement sensible à des variations infimes de rendements excédentaires espérés. Dans le cas où il n'existe aucune contrainte liée à la vente à découvert, les études précédentes¹ ont presque toujours démontré de larges positions à découvert dans plusieurs actifs. Sous contraintes interdisant la vente à découvert, les divers modèles développés indiquent des « solutions de coins » avec un poids zéro pour plusieurs actifs et très souvent, un poids démesuré pour des actifs provenant de marchés faiblement capitalisés.

Best et Grauer (1991), de leur côté, arrivent aux mêmes conclusions que Black et Litterman (1991) sans toutefois proposer de solution (la solution proposée par Black et Litterman est exposée plus loin). Best et Grauer (1991) s'adonnent à une exploration théorique sur la sensibilité du poids des actifs entrant dans la

¹ Voir Green et Hollifield (1990) et Best et Grauer (1991).

composition d'un portefeuille. Les auteurs calculent l'élasticité du rendement du portefeuille, de sa volatilité et du poids des actifs en fonction du changement de rendement espéré d'un actif donné. Ils introduisent également un paramètre de tolérance face au risque qui aide à expliquer, de façon uniquement théorique, le comportement d'un portefeuille moyenne-variance efficient sans pour autant apporter un élément de solution.

Comme beaucoup d'autres auteurs, Best et Grauer (1991) ne proposent d'autres choix que l'imposition de contraintes pour éviter d'obtenir des solutions de coins. Cette solution a le désavantage soit de ne pas refléter les préférences de l'investisseur, soit de ne pas suivre les recommandations fournies par un système autonome de répartition d'actifs.

Résoudre certains problèmes liés à l'élaboration de la matrice variances-covariances est un pré-requis pour construire un modèle de répartition d'actifs international qui soit applicable en pratique. L'utilisation de la matrice variances-covariances telle que définie traditionnellement dans la littérature scientifique pose certains problèmes de qualité de l'information. Selon Black et Litterman (1991), la matrice variances-covariances doit tenir compte du décalage existant entre les rendements observés sur les différents marchés étant donné la présence des principaux centres financiers dans différents fuseaux horaires. Il devient ainsi impératif d'harmoniser les divers rendements obtenus par une méthode réaliste qui répondrait également au problème lié à la non-concordance des jours fériés dans les pays hôtes d'importants centres financiers. Des données non synchronisées peuvent entraîner une sous-évaluation des covariances.

Le modèle d'évaluation du risque *RiskMetrics*TM développé par l'équipe de J.P. Morgan utilise les rendements historiques pour émettre des prévisions sur les variations futures du marché. Bien que la théorie de l'efficience des marchés écarte toute possibilité d'autocorrélation intertemporelle entre les rendements ou dans la volatilité d'un actif, Campbell et Dufour (1991) ont démontré que l'hypothèse selon laquelle une série de changements intertemporels dans les logarithmes des rendements d'indices boursiers étaient indépendants et

identiquement distribués (IID) ne tenait pas. La méthode *RiskMetrics*TM de prévision de la volatilité future sera exposée plus loin et sera utilisée dans ce travail.

Il existe plusieurs approches alternatives pour prévoir la volatilité future. L'une d'entre elles se base sur les prévisions d'experts. Cette méthode est rejetée puisqu'elle s'avère subjective et très difficile à appliquer pour une large base de données. Une deuxième approche utilise les niveaux de volatilité et de corrélations dérivés des prix d'options (Implied Volatilities). L'inconvénient de cette approche est qu'il existe des données de qualité disponibles dans seulement un nombre restreint de marchés. De plus, cette méthode est difficile à interpréter. Les prévisions de volatilité dérivées des prix d'options sont synonymes d'horizons de prévisions fixes. Par exemple, des prévisions de volatilité dérivées d'une option à trois mois sur un contrat à terme de devises sont adéquates exclusivement sur un horizon de trois mois. Idéalement, un système efficace de répartition tactique des actifs, dont il est question dans cette étude, devrait permettre à un gestionnaire de portefeuille de réagir promptement à tous changements subits. Les prévisions de volatilité devraient donc être évaluées sur une base quotidienne ou mensuelle.

2.2 Prévisions des rendements espérés et choix des variables explicatives

Plusieurs théories ou approches ont été développées pour modéliser les prévisions de rendements espérés utilisées dans des modèles de répartition d'actifs. Ces approches peuvent se classer en deux grandes catégories : les modèles statistiques traditionnels et les modèles non traditionnels.

Les modèles statistiques traditionnels regroupent les modèles d'analyse technique, dont le modèle ARIMA sera décrit brièvement, les modèles de prévision de rendements basés sur des variables d'information économique ou financière, et les modèles à variance conditionnelle dont font partie les modèles de la famille des ARCH et des GARCH.

Un modèle économétrique très utilisé et à la base de plusieurs systèmes en analyse technique a été développé par Box et Jenkins (1976). Il s'agit du modèle ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average). Selon ce modèle, les rendements futurs sont fonction des rendements passés. L'idée générale est que le rendement au temps $t + 1$ sera affecté par les rendements passés de façon très spécifique et prévisible. Un processus ARIMA inclut deux séries de coefficients et une constante. La première série de coefficients inclut les termes de la moyenne mobile alors que la deuxième série est composée des termes autorégressifs ou de retour à la moyenne. Le nombre de termes dans chacune des séries dépend du nombre de retards auxquels on accorde un pouvoir de prévision.

Le processus ARIMA représente l'une des approches utilisées en analyse technique. Une variété de méthodes utilisant des moyennes mobiles, des filtres ou des graphiques sont employées tous les jours par des analystes financiers à travers le monde.

Le deuxième type de modèle traditionnel est le modèle de prévision basé sur des variables d'information ou de type APT (Asset Pricing Theory). Ces modèles dits multifactoriels utilisent des variables économiques et financières possédant un impact certain sur la situation économique d'un pays et modélisent à l'aide d'un modèle linéaire les rendements excédentaires espérés.

Plusieurs études ont tenté de déterminer quelles sont les variables d'information facilement observables au temps t et qui aideraient à prédire les rendements au temps $t + 1$. Les variables explicatives les plus souvent citées dans la littérature financière pour prédire les rendements des indices boursiers d'un pays sont :

1. le rendement mensuel du taux de dividende moyen pour chacun des marchés boursiers;
2. l'écart entre le taux d'intérêt à court terme local et le taux d'intérêt à court terme américain;
3. l'écart dans la structure à terme, soit entre le taux des obligations à long terme et le taux sans risque;

4. l'écart de défaut, soit le rendement d'une obligation risquée moins le rendement sur une obligation de qualité (Aaa ou AAA);
5. la variation du taux d'intérêt à court terme;
6. le taux de change par rapport au dollar U.S.;
7. l'effet de janvier (anomalie de marché);
8. le rendement de marché observé à la période précédente.
(Un phénomène de retour à la moyenne ou de momentum).

Solnik (1993a) utilise les deux premières variables en plus du taux d'intérêt à long terme pour expliquer les rendements espérés sur neuf marchés boursiers et obligataires. Solnik (1993b) ajoute l'écart entre taux d'intérêt à court terme américain et local de façon à mesurer l'impact des diverses politiques monétaires sur les rendements des indices boursiers des pays en question. Solnik (1993b) ajoute également comme variable explicative le rendement de marché observé à la période précédente (effet de retard). Solnik (1993b) observe un niveau d'autocorrélation des rendements sur une période d'un mois qui est statistiquement significatif. Il observe également un phénomène de retour à la moyenne évident après deux ans.

Solnik (1993a,b) utilise certaines des variables explicatives qui traditionnellement ont eu un pouvoir prédictif appréciable. Le rendement de dividendes, l'écart dans la structure à terme (taux long terme moins taux court terme), la prime de défaut, les variations du niveau des taux d'intérêt court terme et un terme saisonnier (janvier) sont selon Fama et French (1989) des variables indiscutablement liées aux cycles d'affaires et aux changements du niveau de risque sur les marchés mondiaux.

Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) incluent la variable de taux de change dans leur modèle, mais laissent tomber la variable d'autocorrélation. La variable de taux de change s'avère significative pour six des neuf marchés boursiers.

Bekaert et Holdrick, dans leur étude de 1992, démontrent qu'une augmentation de 1 % du rendement du dividende moyen implique une augmentation de l'ordre de 2 à 4 % par année du rendement espéré, et ce sur une période de quarante-huit mois.

Ross, Roll et Chen, dans une importante étude réalisée en 1986 à l'Université de Chicago, concluent que seules certaines variables économiques peuvent de façon significative avoir un impact sur le rendement des indices boursiers américains. Le PIB industriel, les changements dans la prime de risque et les changements dans la structure à terme des obligations gouvernementales sont estimés avoir un effet significatif sur les prix des titres boursiers. L'inflation anticipée et non anticipée ainsi que le prix du pétrole auraient un pouvoir explicatif minime voire nul.

Ferson & Harvey (1992) effectuent le même type d'étude, mais en utilisant cette fois un modèle CAPM multivarié. Ils déterminent ainsi un facteur beta pour chacun des 18 pays étudiés et réalisent des régressions mobiles sur 60 mois afin de tenir compte des variations mensuelles et donc du caractère conditionnel de l'information. Ils arrivent à la conclusion qu'une partie de l'évolution des rendements peut être capturée par les variables économiques globales utilisées.

Selon Hawkins, Chamberlin et Daniel (1984), des révisions majeures dans les anticipations de bénéfices de compagnies (Earnings Expectations) fourniraient des rendements largement supérieurs vis-à-vis du rendement du marché pour les investisseurs qui incluent ces titres dans leur portefeuille. Ils croient que les anticipations de bénéfices, en ce qui concerne les titres boursiers, demeurent l'élément principal sur lequel les investisseurs se basent pour leurs décisions d'investissement et non sur le rendement et la variance du rendement. Ils ne s'avancent toutefois pas avec autant de certitude concernant les décisions des investisseurs à propos des choix de portefeuilles.

Emmanuelli et Pearson (1994) confirment certains des résultats obtenus par Hawkins, Chamberlin et Daniel (1984), à savoir que les révisions de bénéfices anticipés engendrent des opportunités de rendements supérieurs pour les

investisseurs qui utilisent cette information pour rebalancer leur portefeuille. Ces révisions des analystes concernant les entreprises dans divers pays peuvent être utilisées pour sélectionner des pays qui fournissent des rendements supérieurs à la moyenne. Parmi un échantillon de 24 pays, Emmanuelli et Pearson ont constaté que le groupe des 5 pays possédant le ratio de révisions des bénéfices le plus élevé offre en moyenne des rendements supérieurs à la moyenne des pays. Malheureusement, ces résultats ne sont pas statistiquement significatifs. Le ratio de révisions des bénéfices des 5 pays les plus bas est toutefois significatif à 99 %.

Arnott & Henriksson (1989) ont observé un pouvoir explicatif évident de la tendance des taux d'intérêt réels. Ces derniers étant définis comme les taux des Bons du Trésor américains moins le taux d'inflation de l'indice des prix à la consommation (IPC) retardés sur 12 mois. Les auteurs rejettent cependant toute utilité de cette variable dans un contexte de répartition d'actifs. Les résultats obtenus s'avèrent significatifs pour seulement trois pays, soit les États-Unis, l'Allemagne et les Pays-Bas.

Le troisième type de modèle traditionnel permet de modéliser les rendements excédentaires espérés futurs lorsqu'en présence d'hétéroscédasticité. Cette catégorie regroupe les divers modèles à variance conditionnelle que sont les modèles ARCH, GARCH, ainsi que les nombreux dérivés qui en découlent. Ces modèles permettent à la volatilité des rendements de varier dans le temps et, une fois introduits à l'intérieur d'un modèle de prévisions des rendements espérés, permettent parfois de modéliser de façon plus précise le comportement d'un actif financier dans le temps. Par exemple, le processus GARCH-M inclut la variance conditionnelle comme variable explicative dans un modèle de rendements espérés conditionnels.

Solnik (1993a) a incorporé un processus GARCH-M dans son modèle multifactoriel et trouve un effet GARCH significatif dans la variance conditionnelle, et ce pour chacun des pays. Cependant, Solnik conclut également que l'influence de la variance conditionnelle sur le rendement espéré conditionnel n'est pas significative.

Les modèles de prévision de rendements non traditionnels regroupent tous les autres modèles de prévision qui ne sont pas issus de la théorie financière traditionnelle. Cette catégorie de modèles ne sera pas discutée dans ce travail mais un bref résumé peut être trouvé dans Solnik (1993). À titre indicatif, cette catégorie de modèles provient principalement de l'application au domaine financier de modèles développés en physique et en intelligence artificielle. Les modèles les plus connus sont la théorie du chaos, les systèmes experts et les réseaux de neurones.

2.3 Méthodes de stabilisation du poids des actifs dans les portefeuilles générés par le processus d'optimisation

Dans leur article intitulé « *Global Portfolio Optimization* », Black et Litterman (1991) développent un modèle afin de concilier les points de vue des investisseurs et le poids retrouvé dans le portefeuille optimal. Black et Litterman (1991) décrivent une approche bayésienne qui combine la théorie d'optimisation de portefeuille moyenne-variance de Markowitz (1952) et la version globale du CAPM en équilibre de Black (1989).

Les auteurs débutent par l'introduction d'un portefeuille d'équilibre. Le poids entrant dans la composition de ce portefeuille n'est en fait que la capitalisation boursière de chaque marché couvert à 80 % pour le risque de change. Ce portefeuille d'équilibre représente en réalité un cadre neutre ou portefeuille de référence à partir duquel un investisseur peut dévier en fonction de ses anticipations du marché et de ses objectifs et contraintes d'optimisation.

Black et Litterman (1991) introduisent ensuite les anticipations ou opinions de l'investisseur. Dans un cadre d'optimisation de portefeuille international selon le modèle moyenne-variance, lorsque il y a déviation du portefeuille à variance minimale global, le poids des actifs du portefeuille optimal deviennent très sensibles à un changement mineur des rendements espérés excédentaires. Black et Litterman (1991) remplacent la série complète de rendements espérés

excédentaires que doit normalement fournir un investisseur, par un vecteur de rendements d'équilibre générés par le portefeuille d'équilibre. Ces rendements subissent ensuite de légères déviations en fonction des opinions relatives de l'investisseur. Ce procédé a l'avantage d'être à la fois plus simple et de produire des portefeuilles plus stables.

Dans leur modèle, les auteurs tiennent compte du niveau de corrélation existant entre les rendements des divers actifs (Facteur commun). Cela a pour effet de réajuster le rendement espéré de tous les actifs touchés par un choc et non seulement le rendement d'un actif en particulier dans un pays donné. En conséquence, les variations dans le poids des actifs du portefeuille sont réduites (tout comme les frais de transaction) et le modèle n'offre aucune solution de « coin ».

Tandis que Black et Litterman (1991) ajoutent un élément dans le processus d'optimisation, soit la matrice de corrélation de manière à minimiser les variations dans le poids des actifs et ainsi obtenir un portefeuille plus stable, Grinold et Kahn (1995), eux, se sont plutôt intéressés à la stabilité des rendements espérés excédentaires.

En effet, Grinold et Kahn (1995) proposent une méthode de raffinement des rendements espérés. L'idée est de débiter avec des rendements espérés inconditionnels ou consensuels $E(r)$, lesquels proviennent du portefeuille d'équilibre, et d'estimer un rendement espéré raffiné conditionnel à une information g . L'information g n'est pas en soi une prévision menant à un rendement exceptionnel. C'est le raffinement de cette prévision à travers la formule de prévision de base (Basic Forecasting Formula) qui détermine la valeur de la prévision ou de l'information. Cette méthode est utilisée dans l'élaboration de ce travail, l'information g prenant la forme ici d'une prévision de rendement r_{prev} générée par un modèle multifactoriel de type APT.

3. PROBLÉMATIQUE DE RECHERCHE

La section précédente fait ressortir l'intérêt que peut représenter le développement de modèles de répartition d'actifs tactiques qui soient à la fois quantitatifs et intégrés. En fait, des modèles qui répondent aux besoins des gestionnaires de portefeuilles. Une plus grande intégration signifie un modèle qui englobe toutes les étapes du processus de gestion de portefeuille et qui est autonome voire indépendant de toute information subjective extérieure. Ceci est souhaitable lorsque le processus d'investissement manque de rigueur ou est sujet aux préférences sans justification fondamentale des preneurs de décisions. Ceci tient compte également de la limite des gestionnaires dans leur capacité à traiter de l'information.

Le modèle de Black-Litterman (1991) ne répond pas à cette description puisqu'il n'est pas tout à fait intégré. L'investisseur doit formuler des préférences vis-à-vis des diverses classes d'actifs.

Le modèle de Grinold et Kahn (1995), de son côté, introduit le concept des rendements espérés raffinés, c'est-à-dire de prendre les prévisions de rendements brutes et de les ajuster en introduisant de la nouvelle information. Ces rendements remplacent les anticipations que les investisseurs doivent fournir dans le modèle de Black et Litterman (1991). Le modèle de Grinold et Khan est favorisé dans le cadre de ce mémoire puisqu'il ne demande pas l'insertion d'information subjective quant aux prévisions de rendements des classes d'actifs.

La qualité des résultats représente également un défi. En ce sens, Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) notent qu'un coefficient de R^2 , qui est une mesure du pouvoir explicatif du modèle, de l'ordre de 7 % ou 8 % entre les prévisions de rendements espérés générées par le modèle de prévision et les rendements observés est jugé excellent pour un modèle de prévision. Solnik (1993a,b) obtient des valeurs moyennes de R^2 de 5 % et 5,5 % pour ses première et deuxième études respectivement. De leur côté, Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) obtiennent un R^2

moyen de l'ordre de 6 %. Ces résultats, bien qu'ils semblent bas, sont très bons pour ce genre de modèles de prévision de rendements.

Dans les deux cas, la valeur R^2 varie considérablement d'un pays à l'autre. Un fait intéressant à noter, les études de Solnik (1993a,b) démontrent un R^2 nul pour l'Allemagne et très significatif pour la Suisse, tandis que Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) obtiennent des résultats totalement inverses. La valeur R^2 est de 24 % pour l'Allemagne, ce qui est impressionnant, et de seulement 5 % pour la Suisse.

Le modèle développé dans cette étude n'est appliqué qu'aux marchés boursiers. Une approche différente pourrait appliquer ce modèle ou un modèle similaire au marché des obligations (Black et Litterman (1990)) ou à une combinaison des marchés boursiers et obligataires (Solnik (1993a)).

4. MÉTHODOLOGIE

4.1 Échantillon et utilisation des données

Trois bases de données ont été utilisées pour l'élaboration du modèle. La première base de données est composée des niveaux quotidiens (31 décembre 1988 au 31 décembre 1998) des indices boursiers de neuf pays exprimés en devises locales (Tableau 1).

Tableau 1

Liste des neuf indices utilisés et de leur pays d'origine

Australie	<i>Australia All Ordinary</i>
Canada	<i>TSE 35</i>
France	<i>CAC 40</i>
Allemagne	<i>DAX 30</i>
Japon	<i>Nikkei 225</i>
Pays-Bas	<i>Amsterdam EOE</i>
Suisse	<i>Swiss Market</i>
Angleterre	<i>FTSE 100</i>
Etats-Unis	<i>S&P Composite</i>

(Source des bases de données : Datastream, fournies par monsieur Jacques Lussier de l'Assurance-Vie Desjardins Laurentienne)

Les indices représentent les prix quotidiens ainsi que les dividendes versés, et sont pondérés en fonction de la valeur marchande des titres qui les composent.

Tous ces pays sont des pays dits industrialisés. La raison en est une de disponibilité et de qualité de l'information en ce qui a trait aux données relatives aux variables explicatives et à la liquidité des contrats à terme sur indices boursiers pour ces pays, essentielle dans un modèle tactique.

Le choix des pays s'est fait dans une optique de diversification internationale. C'est ainsi que deux pays ont été sélectionnés dans la zone pacifique, deux en Amérique du Nord et sept en Europe occidentale.

Le portefeuille de référence est composé des indices des neuf pays mentionnés précédemment (Tableau 1). Le poids de chaque indice dans le portefeuille de référence peut s'établir de plusieurs façons. L'une d'entre elles consiste à donner un poids à chaque indice en fonction de la capitalisation boursière de chacun des pays par rapport à la capitalisation des marchés de l'ensemble des pays du portefeuille de référence.

Une deuxième approche, privilégiée dans cette étude, consiste à donner un poids à chaque indice en fonction du produit intérieur brut (PIB) de son économie nationale par rapport au PIB de l'ensemble des économies des pays faisant partie du portefeuille de référence.

Bien que rarement considérée dans les études empiriques réalisées jusqu'à maintenant, la pondération en fonction du PIB est un choix tout aussi valable que la pondération en fonction de la capitalisation boursière. Une pondération en fonction du niveau du PIB représente de façon beaucoup plus précise la distribution internationale de la capacité de production économique mondiale. Ce processus réduit l'importance de la capitalisation boursière japonaise, laquelle est artificiellement gonflée par des ratios de cours-bénéfices très élevés et la propriété d'intérêts croisés entre compagnies. Les difficultés rencontrées dans l'évaluation de la capitalisation boursière sont rarement mentionnées. En fait, il est difficile d'évaluer la capitalisation boursière d'un pays en entier. Il ne suffit qu'à penser aux États-Unis où il existe au minimum une demi-douzaine de marchés boursiers sans compter le « parquet » en croissance du Nasdaq. En fait, ces marchés subissent des fluctuations beaucoup plus grandes que les niveaux des PIB nationaux. De plus, certains pays, telle que la France, ont une capitalisation boursière faible par rapport à l'importance de son économie et des opportunités présentes sur son marché.

Dans le cadre du présent travail, le niveau de PIB utilisé pour chacun des pays est celui en date du début de la base de données soit 1988. Cela suppose que les niveaux de PIB sont stables les uns par rapport aux autres pour toute la période

utilisée pour tester le modèle soit de 1988 à 1998 et que les poids des indices boursiers de chacun des pays composant le portefeuille de référence demeurent les mêmes durant toute la période utilisée. Ainsi, les portefeuilles sont rebalancés en fonction des nouvelles prévisions de rendements espérés et non en fonction de changement dans le niveau du PIB des pays composant le portefeuille de référence. L'introduction de la variation des niveaux de PIB au fil des ans ainsi que les révisions fréquentes dont font l'objet ces mêmes niveaux de PIB représenteraient des développements naturels lors d'étapes subséquentes de développement du modèle proposé dans ce travail. Cependant, cette information n'était pas disponible au moment de tester le modèle et n'a donc pu être incluse dans le modèle.

La deuxième base de données inclut, et ce pour chaque pays, le taux de dividendes moyens pour le marché boursier, le taux d'intérêt à court terme, le taux de change (monnaie locale vs dollar US) et le taux d'intérêt à long terme. Toutes les données sont quotidiennes du 30 décembre 1988 au 31 décembre 1998.

Une troisième base de données fournit le niveau mensuel (du 31 décembre 1985 au 31 décembre 1998) de l'indice EAFE (Europe, Asie et Extrême-Orient) de MSCI. (Source des bases de données : Datastream, fournies par monsieur Jacques Lussier de l'Assurance-Vie Desjardins Laurentienne)

L'utilisation du marché des actions seulement est faite de façon délibérée, l'accent étant plutôt mis sur le développement du modèle plutôt que sur la rentabilité d'un portefeuille en particulier. Une fois le processus en place, il pourrait être intéressant d'ajouter les obligations aux actifs déjà en place.

Le logiciel de programmation *Matlab*TM a été utilisé dans le traitement des données et pour chacune des étapes de construction du modèle quantitatif décrites dans la méthodologie. Les programmes utilisés sont inclus en annexe.

4.2 Élaboration de la matrice variances-covariances entre les rendements des indices selon le modèle *RiskMetrics*TM

Dans un premier temps, certains ajustements doivent être faits à la base de données quotidiennes. Les places boursières des neuf pays utilisées dans l'étude ayant des heures d'ouverture et de fermeture différentes, on observe un décalage temporel entre les séries de rendements de chaque pays. En ajustant les données quotidiennes, au moment de la fermeture des places boursières, pour tenir compte de ce décalage, on évite l'introduction d'un biais à la baisse des niveaux de covariances entre les séries de rendements. (Black et Litterman (1990)) (voir Annexe 1).

L'hypothèse d'autocorrélation des rendements quotidiens et des variances est fondamentale à la base du modèle multivarié développé par le groupe de recherche de J.P. Morgan pour leur programme *RiskMetrics*TM. Selon cette hypothèse, les variances et coefficients de corrélation futurs peuvent être prédits grâce à une corrélation existante entre les rendements passés et futurs. Les spécialistes de ce groupe de recherche sont arrivés aux conclusions suivantes : premièrement, les valeurs des variances des rendements pour chacun des indices boursiers changent dans le temps. On observe donc un phénomène d'hétéroscédasticité dans les études décrites dans le document technique de J.P. Morgan. Deuxièmement, il existe un niveau de corrélation entre les diverses séries de données. Black et Litterman (1991) observent ce phénomène entre les obligations françaises et allemandes dans leur étude sur l'établissement d'un portefeuille optimal. Troisièmement, il n'existe aucune évidence statistiquement significative d'autocorrélation dans les changements quotidiens du logarithme du prix des actifs financiers. Cependant, bien que les variations du logarithme des prix soient non corrélées, elles ne sont pas nécessairement indépendantes. Les rendements ne sont pas autocorrélés, mais les carrés des rendements sont significativement autocorrélés.

4.2.1 Constitution de la matrice variances-covariances

La matrice variances-covariances est construite de manière à diminuer les possibilités de résultats de « coin » lors de la constitution de portefeuilles optimaux tout en reflétant d'une manière des plus précises les conditions réelles de marchés.

En ce sens, l'approche de la moyenne mobile pondérée exponentielle (MMPE) est préférée à une moyenne mobile simple dans le calcul de la variance de chaque série de rendements. La MMPE permet d'observer une réponse plus rapide aux chocs dans le marché, car les données les plus récentes reçoivent un poids plus important que les données plus éloignées dans le temps. De plus, à la suite d'un choc, la volatilité décline aussi rapidement qu'elle a augmenté, soit de façon exponentielle puisque le poids des données relatives au choc perd rapidement de l'importance. Lorsque comparée aux changements quotidiens dans les prix observés sur le marché, la moyenne mobile pondérée exponentielle montre une mesure plus réaliste de la volatilité récente.

Pour un ensemble de T rendements, les formules des moyennes mobiles simple et exponentielle, telles que démontrées dans le document technique de *RiskmetricsTM* (seule la moyenne mobile exponentielle sera utilisée dans le calcul de la matrice variances-covariances) sont les suivantes :

Moyenne mobile simple

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_{t-i} - \hat{r})^2} \quad (1)$$

Moyenne mobile exponentielle

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} (r_{t-i} - \hat{r})^2} \quad (2)$$

où

σ_t = la volatilité d'une série de rendements au temps t ,

r_t = le rendement d'un actif au temps t ,

$\hat{r}$ = le rendement moyen de l'actif $= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_{t-i}$,

T = le nombre d'observations utilisé dans le calcul de la moyenne mobile,

λ = le facteur de déclin, où $0 < \lambda \leq 1$.

À noter que ces processus sont connus avec certitude une période à l'avance. Il s'agit donc de faire une prévision au temps $t + 1$ à partir d'information qui est connue au temps t .

Afin d'appuyer les équations (1) et (2) selon lesquelles le $\hat{r}$ ne varie pas dans le temps, nous posons l'hypothèse que l'espérance de rendement quotidien est zéro, soit $\hat{r} = 0$. La justification de cette hypothèse est exposée à la section 4.2.2.

La moyenne mobile exponentielle introduit un nouveau paramètre, λ , soit le facteur de déclin. Ce paramètre détermine le poids relatif attribué à chaque observation (rendement) et le nombre d'observations historiques requises pour le calcul des prévisions de volatilité. Utiliser un facteur de déclin de 1 revient à donner un poids égal à chaque observation et est l'équivalent d'utiliser une moyenne mobile simple. Ainsi, plus le facteur de déclin est bas, plus les observations récentes ont un poids important dans le calcul de la variance et du coefficient de corrélation. Un facteur de déclin très bas implique également un poids décroissant pour chaque observation dans le calcul de la variance et du coefficient de corrélation. Dans le cadre de ce travail, les 200 dernières observations quotidiennes sont utilisées afin de calculer une prévision de la matrice variances-covariances à un mois.

Le facteur de déclin utilisé dans ce travail est 0,97. Ce niveau est jugé optimal par l'équipe de J.P. Morgan lorsque des rendements quotidiens sont utilisés dans le calcul de la matrice variances-covariances. (Voir Annexe 2)

4.2.2 Prédiction de la volatilité future selon le modèle *RiskMetrics*TM

Une caractéristique intéressante de la MMPE c'est qu'elle peut s'écrire sous forme récursive, permettant ainsi de faire des prévisions sur la volatilité future. À cet effet, les auteurs de *RiskMetrics*TM posent d'abord l'hypothèse d'une moyenne de rendements quotidiens de zéro, $\hat{r} = 0$ dans la formule de calcul de la variance et dans la formule de calcul des covariances à la suite des conclusions d'une étude écrite par trois des membres de l'équipe de *RiskMetrics*TM, soit Kim, Malz et Mina (1999). Dans leur étude de 1999, ces derniers montrent que « les prévisions de moyennes, $\hat{r}$, pour des horizons de moins de trois mois, ont une faible probabilité de produire des prévisions précises pour les rendements futurs. En fait, la plupart des prévisions ne sont pas en mesure de prédire ne serait-ce que le signe des rendements pour un horizon de moins de trois mois. De plus, puisque la volatilité est beaucoup plus grande que les rendements espérés pour des horizons rapprochés, les prévisions de la distribution future des rendements sont dominées par l'estimation de la volatilité σ plutôt que par l'estimation de la moyenne des rendements $\hat{r}$. En d'autres mots, lorsque nous travaillons avec des horizons à court terme, utiliser une hypothèse de rendement espéré de zéro est tout aussi valable que tout autre estimation, sauf que nous n'avons pas à nous préoccuper de produire une valeur pour $\hat{r}$. »

Dans ce sens, les auteurs de l'étude Kim, Malz et Mina (1999) citent Jorion (1995), « Le terme $E(r_t^2)$, dans l'expression $\sigma^2 = E(r_t^2) - [E(r_t)]^2$, domine le terme $[E(r_t)]^2$ par un facteur de 700 à 1. Ainsi, ignorer le terme de rendement espéré n'est pas susceptible de causer un biais matériel dans l'évaluation de la volatilité. »

Posant l'hypothèse d'une moyenne de rendements de zéro $\hat{r} = 0$, nous dérivons l'équation (2) :

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} (r_{t-i} - \hat{r})^2} \quad (2)$$

Afin d'obtenir sa forme récursive² (Voir annexe 3)

$$\sigma_{j,t}^2 \cong \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1}^2 + \lambda \sigma_{j,t-1}^2 \quad \text{lorsque } T \text{ est grand} \quad (3)$$

où

$r_{j,t}$ = le rendement de l'actif j au temps t ,

$\sigma_{j,t}^2$ = la prévision au temps t de la variance de l'actif j conditionnelle à la variance de l'actif j à la période précédente et de l'introduction d'information nouvelle,

λ = le facteur de déclin, $0 < \lambda \leq 1$.

La relation (3) est une équation récursive qui affirme que la volatilité qu'on prédit aujourd'hui pour une période ultérieure, dans ce cas-ci un mois, est déterminée par la volatilité prédite à la période antérieure, il y a un mois, pour aujourd'hui plus la correction par le marché (le rendement) au cours du mois qui vient de s'écouler.

$$\text{C'est-à-dire : } \sigma_{j,t|t-1}^2 \cong \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1}^2 + \lambda \sigma_{j,t-1|t-2}^2 \quad (4)$$

Ces deux facteurs ont des pondérations λ et $(1-\lambda)$. Le modèle de *RiskMetrics*TM utilise $\lambda = 0,97$, donc la volatilité dans un mois sera 97 % la volatilité d'aujourd'hui et environ 3 % la contribution du changement dans le marché au cours du dernier mois. Ce fait est en accord avec le phénomène d'autocorrélation des rendements au carré mentionné précédemment.

² L'expression $\sigma_{j,t|t-1}^2$ est une bonne approximation de $\sigma_{j,t}^2$ dérivée à l'annexe 3 et exprimée sous la forme conditionnelle. La forme actuelle a été préférée dans le texte afin de faciliter la compréhension. De la même manière, l'expression $\sigma_{j,t-1}^2$ remplace $\sigma_{j,t-1|t-2}^2$ dans le texte.

Table 1.1

Application de la formule récursive de la moyenne mobile exponentielle dans le calcul de la prévision de la volatilité

Rendements mensuels de l'actif A

Date	Rendement	Variance récursive	Exemple de calculs
janv-00	0,633	0,401	$(0,633)^2$
févr-00	0,115	0,389	$(0,401*0,97)+(0,115^2*0,03)$
mars-00	-0,459	0,384	$(0,389*0,97)+(-0,459^2*0,03)$
avr-00	0,093	0,372	$(0,384*0,97)+(0,093^2*0,03)$

Pour simplifier l'exemple de calcul ci-dessus, nous posons que $\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \approx 1-\lambda$ lorsque T est grand. Dans l'exemple de la table 1.1, $\frac{(1-0,97)}{1-0,97^{200}} \approx 1-0,97$, $0,030068 \approx 0,03$.

Suivant la même notation, nous dérivons la formule de covariance découlant de l'équation (2) :

$$\sigma_{jk,t} = \sqrt{\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} (r_{j,t-i} - \hat{r}_j)(r_{k,t-i} - \hat{r}_k)} \quad (5)$$

Afin d'obtenir sa forme récursive³ (Voir annexe 3)

$$\sigma_{jk,t}^2 \cong \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1} r_{k,t-1} + \lambda \sigma_{jk,t-1}^2 \quad \text{lorsque } T \text{ est grand} \quad (6)$$

où

$r_{j,t}$ = le rendement de l'actif j au temps t ,

$r_{k,t}$ = le rendement de l'actif k au temps t ,

$\sigma_{jk,t}^2$ = la prévision au temps t de la covariance entre les rendements de l'actif j et les rendements de l'actif k conditionnelle à la covariance entre ces deux mêmes actifs à la période précédente et de l'introduction d'information nouvelle,

λ = le facteur de déclin, $0 < \lambda \leq 1$.

³ L'expression $\sigma_{jk,t|t-1}^2$ est une bonne approximation de $\sigma_{jk,t}^2$ dérivée à l'annexe 3 et exprimée sous la forme conditionnelle. La forme actuelle a été préférée dans le texte afin de faciliter la compréhension. De la même manière, l'expression $\sigma_{jk,t-1}^2$ remplace $\sigma_{jk,t-1|t-2}^2$ dans le texte.

La relation (6) est une équation réursive qui affirme que la covariance entre deux actifs qu'on prédit aujourd'hui pour une période ultérieure, dans ce cas-ci un mois, est déterminée par la covariance prédite à la période antérieure, il y a un mois, pour aujourd'hui plus la correction par le marché (le rendement des deux actifs) au cours du mois qui vient de s'écouler.

$$\text{C'est-à-dire : } \sigma_{jk,t|t-1}^2 = \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1} r_{k,t-1} + \lambda \sigma_{jk,t-1|t-2}^2 \quad (7)$$

Table 1.2

Application de la formule réursive de la moyenne mobile exponentielle dans le calcul de la prévision de la covariance entre les rendements des actifs A et B.

Rendements mensuels des actifs A et B

Date	Rendement A	Rendement B	Covariance réursive	Exemple de calculs
janv-00	0,633	0,450	0,285	0,633*0,450
févr-00	0,115	0,338	0,277	(0,285*0,97)+(0,115*0,338*0,03)
mars-00	-0,459	0,102	0,268	(0,277*0,97)+(-0,459*0,102*0,03)
avr-00	0,853	-1,238	0,228	(0,268*0,97)+(0,853*-1,238*0,03)

Comme dans l'exemple de la table 1.1, $\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \approx 1 - \lambda$ lorsque T est grand.

D'autres méthodes pour estimer les écarts types et les corrélations ont été développées ces dernières années. Ces méthodes, communément appelées modèles de volatilité, vont des techniques de valeurs extrêmes (Parkinson 1980) et l'analyse de régression en deux étapes (Two Step Regression Analysis, Davidian et Carroll, 1987) aux modèles non-linéaires tels que GARCH (Engle, Bollerslev, 1986) et de volatilité stochastique (Harvey et. Al, 1994). Parmi ces méthodes, les modèles de type GARCH ont fait l'objet d'analyses plus fréquentes.

Solnik (1993a) a utilisé le modèle GARCH pour analyser les variations de variance conditionnelle pour un portefeuille composé d'indices boursiers de huit pays industrialisés. L'étude de Solnik démontre que l'effet GARCH est significatif pour tous les pays : les variances au temps $t + 1$ augmentent sensiblement en présence d'un choc au temps t . L'étude démontre cependant que l'influence de la

variance conditionnelle sur le rendement espéré conditionnel n'est pas significative.

4.3 Choix des variables explicatives et calcul des prévisions de rendements espérés

Pour qu'un système d'allocation global tactique (SAGT) produise des résultats dépassant celui d'un portefeuille de référence, un modèle de prévision de rendements espérés efficace devient indispensable.

Les prévisions de rendements excédentaires espérés mensuels pour chacun des neuf indices boursiers sont calculées à partir d'un modèle de régression linéaire multifactoriel. Contrairement à la matrice variances-covariances qui est élaborée à partir de données quotidiennes pour être ensuite utilisée pour formuler une prévision sur un mois, le modèle (8) est estimé à l'aide de données mensuelles à partir desquelles sont formulées des prévisions mensuelles. Ce modèle de régression linéaire a la forme suivante :

$$r_{i,t} = \sum_j x_{ij,t} b_{ij} + \varepsilon_{i,t} \quad (8)$$

où

- $r_{i,t}$ = le rendement en excès du rendement sans risque du $i^{\text{ème}}$ indice au temps t ,
- $x_{ij,t}$ = la $j^{\text{ème}}$ variable explicative pour le $i^{\text{ème}}$ indice au temps t ,
- b_{ij} = le coefficient reliant la variable explicative j aux rendements excédentaires, l'estimation de b_{ij} dépend des données des 60 derniers mois,
- $\varepsilon_{i,t}$ = le terme d'erreur.

L'objectif de cette section est de déterminer quelles sont les variables macro-économiques et financières ayant un impact sur l'évolution du rendement boursier des divers indices boursiers.

Les variables explicatives utilisées pour prédire les rendements espérés sont :

1. le rendement mensuel du taux de dividende moyen pour chacun des marchés boursiers;
2. la variation du taux d'intérêt à court terme de chacun des pays;
3. la variation du taux de change local versus le dollar américain;
4. la variation du taux d'intérêt à long terme de chacun des pays;

1. Le rendement mensuel du taux de dividende moyen pour chacun des marchés boursiers.

À la lumière des différentes études mentionnées plus haut (Solnik 1993a, 1993b), le niveau de rendement des dividendes est l'une des variables explicatives possédant un pouvoir prédictif très significatif. Fama et French (1988) montrent que 25 % à 40 % des rendements des actions américaines sur de longues périodes peuvent être expliqués par le taux de dividende anticipé.

2. La variation du taux d'intérêt à court terme de chacun des pays.

La variation du taux d'intérêt à court terme a été choisie de manière à déterminer l'impact de la politique monétaire de chacun des pays sur l'évolution à court terme de l'indice boursier principal de chacun de ces pays.

3. La variation du taux de change local versus le dollar américain.

Dans un contexte de construction d'un portefeuille d'actifs internationaux et de mondialisation des économies, il peut être intéressant de constater l'impact qu'a une variation marquée d'une devise vis-à-vis du dollar américain, la première puissance économique mondiale.

4. La variation du taux d'intérêt à long terme de chacun des pays.

Cette variable sert à déterminer s'il existe une relation significative entre le marché obligataire à long terme et le niveau de rendement des indices boursiers pour chacun des pays.

4.3.1 Calcul des prévisions de rendements espérés

La première étape du calcul des prévisions de rendements espérés consiste à estimer les coefficients du modèle (voir l'équation (8)) sur une partie des données disponibles lesquelles représentent cent-vingt mois de données mensuelles. Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) utilisent ainsi les quarante-deux premiers mois de données pour déterminer les coefficients du modèle. Ces quarante-deux premiers mois de données servent ensuite à estimer les rendements espérés du quarante-troisième mois. Les quarante-trois mois de données sont par la suite utilisés pour estimer les rendements espérés du quarante-quatrième mois et ainsi de suite jusqu'à ce que les données servant à estimer les rendements espérés à la période suivante comprennent soixante mois de données mensuelles. Les rendements suivants sont ensuite évalués en utilisant les données des soixante derniers mois.

L'estimateur des Moindres Carrés Généralisés (MCG), utilisé afin de déterminer les coefficients b de l'équation (8), permet de tenir compte de l'autocorrélation des résidus que l'on retrouve généralement sur des données chronologiques telles qu'utilisées dans cette étude (pour une démonstration de l'estimateur des MCG, voir Greene, l'analyse économétrique, Prentice-Hall Canada).

La capacité de prédiction du modèle est ensuite évaluée en déterminant, pour chacun des indices boursiers, le coefficient de corrélation ρ entre les prévisions de rendements $r_{it}^{prev} = \sum_j x_{ij,t} b_{ij}$ générées par le modèle (voir Équation (8)) et les rendements réalisés r (voir Tableau 2).

Tableau 2

Coefficients de corrélation entre les prévisions de rendements et les rendements réalisés. (Date: 31-12-1996, début de la période de test)

Australie	0,4599
Canada	0,4167
France	0,5042
Allemagne	0,4610
Japon	0,4177
Pays-Bas	0,4740
Suisse	0,4454
Angleterre	0,4210
Etats-Unis	0,2831

Les coefficients de corrélation sont estimés à partir du quarante-deuxième mois, et ce jusqu'à la fin de la période de l'échantillon. Les coefficients de corrélation sont ensuite calculés à partir d'une fenêtre mobile des soixante derniers mois. La formule de calcul des coefficients de corrélation entre les prévisions de rendements générées par le modèle et les rendements réalisés, et ce pour chacun des i indices boursiers à la période t est la suivante :

$$\rho_{it} = \frac{\sigma_{r_{it}, r_{it}^{prev}}}{\sqrt{\sigma_{r_{it}^{prev}}^2 \sigma_{r_{it}}^2}} \quad (9)$$

soit

$$\rho_{it} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{s=t-N+1}^t r_{is}^{prev} r_{is}}{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{s=t-N+1}^t (r_{is}^{prev})^2} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{s=t-N+1}^t (r_{is})^2}} \quad t > N \quad (10)$$

et afin d'illustrer l'application de la formule dans le contexte actuel, voici la formule appliquée à la date de début de la période de test.

$$\rho_{i42} = \frac{\frac{1}{41} \sum_{s=1}^{42} r_{is}^{prev} r_{is}}{\sqrt{\frac{1}{41} \sum_{s=1}^{42} (r_{is}^{prev})^2} \sqrt{\frac{1}{41} \sum_{s=1}^{42} (r_{is})^2}} \quad (11)$$

où

$$\begin{aligned} \rho_{it} &= \text{le coefficient de corrélation entre les prévisions de rendements } r_{it}^{prev} \text{ et les rendements réalisés } r_{it} \text{ du } i^{\text{ième}} \text{ indice au temps } t, \\ \sigma_{r_{it}, r_{it}^{prev}} &= \text{la covariance entre les prévisions de rendements et les rendements réalisés du } i^{\text{ième}} \text{ indice au temps } t, \text{ soit } \frac{1}{N-1} \sum_{s=t-N+1}^t r_{is}^{prev} r_{is}, \\ \sigma_{r_{it}^{prev}}^2 &= \text{la variance de la prévision de rendements du } i^{\text{ième}} \text{ indice au temps } t, \text{ soit } \frac{1}{N-1} \sum_{s=t-N+1}^t (r_{is}^{prev})^2, \\ \sigma_{r_{it}}^2 &= \text{la variance du rendement réalisé du } i^{\text{ième}} \text{ indice au temps } t, \text{ soit } \frac{1}{N-1} \sum_{s=t-N+1}^t (r_{is})^2, \end{aligned}$$

Les prévisions de rendements $r_{it}^{prev} = \sum_j x_{ij,t} b_{ij}$ générées par le modèle (8) sont par la suite incorporées à l'intérieur de la formule de prévision de base développée par Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) de manière à obtenir des prévisions de rendements espérés $E[r_{it} | r_{it}^{prev}]$ qui soient plus stables (Voir équation 12). Les prévisions $E[r_{it} | r_{it}^{prev}]$ sont ensuite utilisées afin de construire les portefeuilles optimaux.

La formule de prévision de base telle que développée par Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) est :

$$E[r_{it} | r_{it}^{prev}] = E(r_{it}) + \frac{\sigma_{r_{it}, r_{it}^{prev}}}{\sigma_{r_{it}^{prev}}^2} [r_{it}^{prev} - E(r_{it}^{prev})] \quad (12)$$

Lorsque les indices sont oubliés afin d'alléger la notation, on obtient :

$$E[r | r_{prev}] = E(r) + \frac{\sigma_{r, r_{prev}}}{\sigma_{r_{prev}}^2} [r_{prev} - E(r_{prev})] \quad (12)$$

où

- r = le vecteur de rendements excédentaires d'équilibre,
- r_{prev} = le vecteur de prévisions de rendements non raffinées,
- $E(r)$ = le vecteur des rendements espérés d'équilibre,
- $E(r_{prev})$ = l'espérance mathématique de la prévision r ,
- $E[r | r_{prev}]$ = les rendements espérés conditionnels à la réalisation de la prévision r ,
- $\sigma_{r, r_{prev}}$ = la covariance entre r et de r_{prev} ,
- $\sigma_{r_{prev}}^2$ = la variance de la prévision de rendements.

L'équation (12) produit une prévision de rendement espéré conditionnel à une prévision de rendement générée par le modèle multifactoriel (équation (8)) sujette à un processus de lissage en fonction de la capacité de prévision du modèle. Ainsi, seules les prévisions dont la valeur est significativement différente de la moyenne des prévisions ($r_{prev} - E(r_{prev}) \neq 0$) et dont la covariance avec les rendements réalisés est non nulle permettent d'obtenir une prévision de rendement différente au rendement espéré d'équilibre $E(r)$ et ont ainsi un impact sur la composition du portefeuille optimal. En d'autres mots, Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) posent l'hypothèse qu'il vaut mieux considérer les écarts entre les nouvelles anticipations et leurs réalisations que les anticipations elles-mêmes.

La formule de prévision de base peut être réécrite de manière à faciliter son application pratique.

Premièrement, il s'agit d'établir la covariance de r avec r_{prev} comme étant :

$$\sigma_{r,r_{prev}} = \rho_{r,r_{prev}} \sigma_r \sigma_{r_{prev}} \quad (13)$$

où

σ_r = l'écart type du rendement réalisé r .

$\sigma_{r_{prev}}$ = l'écart type de la prévision de rendements r_{prev} .

$\rho_{r,r_{prev}}$ = le coefficient de corrélation entre la prévision générée et le rendement observé.

et en définissant :

$$score = \frac{[r_{prev} - E(r_{prev})]}{\sigma_{r_{prev}}} \quad (14)$$

Le score d'une prévision représente l'amplitude de la déviation d'une prévision, pour un actif donné, par rapport à la moyenne des prévisions de ce même actif en fonction de la volatilité des prévisions de l'actif en question. En fait, il s'agit d'obtenir une version standardisée de la prévision de rendement en soustrayant le rendement prévu et en divisant par l'écart-type des prévisions de rendement.

On peut alors réécrire l'équation (12) sous la forme suivante :

$$E[r | r_{prev}] = E(r) + \rho_{r,r_{prev}} \sigma_r score \quad (15)$$

La formule de prévision est ainsi applicable à chaque marché pris séparément et peut être utilisée sous la forme récursive. C'est-à-dire, appliquée à chaque pas de temps consécutifs. Pour les marchés ayant un coefficient de corrélation $\rho_{r,r_{prev}}$ significativement différent de zéro, les prévisions de rendements diffèrent des rendements d'équilibre.

La formule de raffinement agit donc comme un filtre. Les rendements espérés calculés pour chacune des périodes de test à l'intérieur de la base de données ne

sont en réalité que des déviations des rendements d'équilibre. Ces déviations sont incluses dans le vecteur de rendements d'équilibre en proportion du niveau de corrélation entre les prévisions et les réalisations $\rho_{r,r_{prev}}$, soit en fonction du pouvoir de prédiction du modèle.

Tableau 3

**Poids des pays composant le portefeuille de référence
(Poids en fonction du produit intérieur brut (PIB))**

Australie	0,019
Canada	0,040
France	0,083
Allemagne	0,107
Japon	0,223
Pays-Bas	0,020
Suisse	0,016
Angleterre	0,068
Etats-Unis	0,424
Total	1,000

Les rendements d'équilibre sont établis à partir du portefeuille de référence. Ce portefeuille de référence est composé d'actifs ayant un poids w (voir Tableau 3) qui est fonction du PIB des pays composant le portefeuille de référence au début de la période.

Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) recommande l'utilisation de la formule employée par Black et Litterman (1990) pour calculer le vecteur des primes de risque d'équilibre, soit le rendement espéré pour un indice de marché au-dessus du taux sans risque, lequel, par simplification, est nommé vecteur de rendements espérés d'équilibre dans ce travail. La formule de Black-Litterman (1990) est la suivante :

$$E(r) = \delta A w \quad (16)$$

où

$E(r)$ = le vecteur des rendements espérés d'équilibre,

- δ = la constante de proportionnalité δ de la formule de couverture de change de Black (1989),
 A = la matrice variances-covariances tel que générée par le modèle *RiskMetrics*TM,
 w = le vecteur poids des divers pays en fonction du PIB de chacun.

Soit la multiplication de la matrice variances-covariances (A) obtenue précédemment par le vecteur poids (w). Ces rendements d'équilibre sont générés au début de chacune des périodes de test t à l'intérieur de la base de données avec le même vecteur poids et la matrice variances-covariances du mois prévue pour le mois t .

Le portefeuille de référence est construit de façon à éliminer complètement le risque de change. Ainsi, nous posons l'hypothèse que la constante de proportionnalité δ de la formule de Black (1989) est égale à 1. Cette dernière sert à déterminer un niveau de couverture optimal dans l'optique où il y a une gestion active du risque de change. L'emphasis dans ce travail étant mise sur le rendement local de chacun des marchés boursiers, l'impact de la constante de proportionnalité de Black est éliminé de façon délibérée.

Bien que Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) recommandent l'utilisation de la formule de Black et Litterman (1990) pour calculer le vecteur de rendements espérés d'équilibre, ils présentent la même formule, mais avec une notation différente cependant. L'équation utilisée dans leur article de 1996 est la suivante :

$$E(r) = \beta \cdot \mu_p \quad (17)$$

Où

- β = le vecteur des betas (selon la définition du CAPM) des indices de chacun des pays en fonction du portefeuille de référence,
 μ_p = le rendement espéré excédentaire du portefeuille de référence, établi par Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996), de façon arbitraire, à un niveau jugé raisonnable de 6 %.

Le rendement espéré d'équilibre pour chacun des indices boursiers est simplement proportionnel à son beta vis-à-vis du portefeuille de référence.

Ainsi, selon Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996), l'équation $E(r) = Aw$ est équivalente à l'équation $E(r) = \beta \cdot \mu_p$ et donc que $Aw = \beta \cdot \mu_p$. Le vecteur des rendements espérés d'équilibre peut ainsi être obtenu de deux manières. L'une d'elle étant par la multiplication de la matrice variance-covariance des rendements par le vecteur poids de chacun des indices. L'autre étant par la multiplication du vecteur des facteurs betas par le rendement du portefeuille de référence. La première méthode a été retenue dans ce travail.

4.4 L'optimisation du portefeuille

Au début de chaque mois t , de janvier 1997 à décembre 1998 (échantillon de 24 mois), nous générons un portefeuille optimal basé sur notre modèle. Nous analysons ensuite la stabilité, la «raisonnabilité» (solutions de coin) et la performance de ces portefeuilles.

Nous commençons par évaluer le niveau de risque du portefeuille de référence en utilisant la formule :

$$\sigma_{p,t} = \sqrt{w'Aw} \quad (18)$$

où

$\sigma_{p,t}$ = l'écart type des rendements du portefeuille de référence au temps t ,

w = le vecteur poids des divers pays en fonction du PIB de chacun,

A = la matrice variances-covariances des rendements quotidiens telles que générées par le modèle *Riskmetrics*TM.

Nous trouvons l'allocation optimale des indices en maximisant le rendement espéré du portefeuille tout en préservant le niveau de risque du portefeuille de référence. En insérant dans un programme quadratique moyenne-variance la

matrice variances-covariances et les rendements espérés raffinés générés pour chaque mois, nous devrions, en principe, obtenir des portefeuilles optimaux qui, pour un niveau de risque équivalent, produisent des rendements supérieurs au portefeuille de référence.

La formule d'optimisation du portefeuille telle qu'utilisée par Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) maximise la fonction d'utilité d'un investisseur x tel que :

$$U_{Max} = w'E[r|r_{prev}] - aw'A w \quad (19)$$

où

- w = le vecteur des poids des actifs des portefeuilles optimaux,
- $E[r|r_{prev}]$ = le vecteur de rendement espéré raffiné,
- a = la mesure de l'aversion au risque de l'investisseur x ,
- A = la matrice variances-covariances telle que calculée dans la première section de ce travail.

Sujet à :

$$1 = \sum_{i=1}^T w \quad (20)$$

Nous utilisons ici le niveau d'aversion au risque consensuel défini comme étant :

$$a = \frac{\mu_p}{2\sigma_p^2} \quad (21)$$

où

- a = la mesure de l'aversion au risque de l'investisseur x ,
- μ_p = le rendement du portefeuille de référence,
- σ_p^2 = la variance des rendements du portefeuille de référence,

Soit le niveau d'aversion au risque comme fonction du rendement d'équilibre du portefeuille de référence et du risque du portefeuille de référence. Choisir entre le portefeuille de référence et l'argent comptant, le niveau d'aversion au risque consensuel mène à un investissement total dans le portefeuille de référence.

5. ANALYSE DES RÉSULTATS

5.1 Description statistique des données

Un premier coup d'œil statistique sur les données utilisées dans l'étude nous permet de comprendre le potentiel de diversification qu'offre l'investissement au niveau international. Les tableaux (4) et (5) démontrent très clairement les disparités existantes dans le comportement des divers indices pour la période utilisée. Les rendements mensuels excédentaires moyens des indices varient de - 0,63 % pour le Japon à + 1,09 % pour la Suisse. Les variations de rendements mensuels sont également très prononcées avec un maximum de 19,37 % pour le Japon et un minimum de - 21,62 % pour le Canada. De plus, le niveau de volatilité des rendements mensuels japonais est presque le double de celui des États-Unis.

Tableau 4

Description statistique des rendements réels mensuels de chacun des indices boursiers (dollars US) janvier 1989 - novembre 1998 (119 observations)

	Moyenne	Médiane	Maximum	Minimum	Écart-type	Skewness
Australie	-0,0011	0,0024	0,0777	-0,1132	0,0407	-0,2246
Canada	0,0002	0,0011	0,1067	-0,2162	0,0422	-0,9955
France	0,0031	0,0088	0,1297	-0,1483	0,0569	-0,2891
Allemagne	0,0078	0,0105	0,1701	-0,1878	0,0576	-0,7349
Japon	-0,0063	-0,0111	0,1937	-0,1991	0,0698	0,0066
Pays-Bas	0,0084	0,0123	0,1388	-0,1432	0,0508	-0,4109
Suisse	0,0109	0,0162	0,1359	-0,1909	0,0554	-0,6656
Angleterre	0,0034	0,0018	0,1333	-0,1071	0,0438	-0,0152
États-Unis	0,0081	0,0094	0,1075	-0,1504	0,0385	-0,6222

Comme on peut l'observer dans le tableau (5), les différents indices boursiers ont des comportements très « autonomes ». Les niveaux de corrélation sont en général bas ce qui confirme le haut potentiel de diversification existant. On retrouve les niveaux de corrélation les plus élevés entre la France et les Pays-Bas et le Canada

et les États-Unis. Une situation tout à fait normale puisque ces pays font partie d'un même ensemble économique. Le Japon, de son côté, affiche un faible niveau de corrélation avec tous les indices boursiers allant de 0,2216 avec l'Angleterre à 0,2843 avec l'Allemagne.

Tableau 5

Matrice de corrélation des rendements réels mensuels des neuf marchés boursiers au 31 décembre 1996 (Date de début de la période de test)
Échantillon: 200 observations (200 jours)

	Aust.	Canada	France	Allem.	Japon	P-B	Suisse	R-U	E-U
Australie	1								
Canada	0,5606	1							
France	0,3175	0,4240	1						
Allemagne	0,3013	0,4306	0,5226	1					
Japon	0,2796	0,2241	0,2611	0,2843	1				
Pays-Bas	0,4155	0,4501	0,6887	0,6041	0,2497	1			
Suisse	0,3518	0,3651	0,5882	0,5566	0,2455	0,6328	1		
Angleterre	0,3233	0,3952	0,6441	0,5242	0,2216	0,6323	0,5688	1	
Etats-Unis	0,5308	0,6201	0,4001	0,3169	0,2548	0,3694	0,3291	0,3926	1

5.2 Résultats empiriques

5.2.1 Résultats des régressions, prévisions des rendements et coefficients d'information

Le tableau (6) affiche les résultats statistiques pour les neuf pays en date du 31 décembre 1996, soit le début de la période de test à l'intérieur de la base de données. Les coefficients betas figurent sur la première ligne tandis que les statistiques t sont représentées sur la deuxième ligne. Les coefficients significatifs à 90 % sont illustrés en gras. Pour chacun des marchés, le R^2 ajusté est également fourni.

Tableau 6

Résultats des régressions pour les neuf marchés boursiers (selon le modèle de l'équation (8) à la page 27) (Date = 31 décembre 1996)

	Constante	Taux de dividende	Δ taux court terme	Taux change	Δ taux long terme	R^2 ajusté
Australie $t=$	-0,4683 (-3,0788)	0,0491 (2,3123)	0,0068 (0,9389)	0,2468 (2,8871)	-0,0103 (-1,8288)	0,23
Canada $t=$	-0,1692 (-0,8411)	0,0197 (0,6622)	-0,0004 (-0,0694)	0,1413 (1,2601)	-0,0079 (-0,9686)	0,05
France $t=$	-0,2279 (-0,8009)	0,0728 (1,9502)	0,0112 (0,2899)	0,0214 (0,6191)	-0,0186 (-1,7941)	0,11
Allemagne $t=$	-0,2214 (-0,9091)	0,1167 (2,4127)	-0,0092 (-1,3887)	0,1079 (1,1198)	-0,0169 (-1,2927)	0,16
Japon $t=$	-0,0158 (-0,1103)	0,2487 (2,4984)	0,0048 (0,2683)	-0,0004 (-0,4661)	-0,0378 (-1,4465)	0,19
Pays-Bas $t=$	-0,2175 (-0,8782)	0,0767 (2,2207)	-0,0154 (-1,6115)	0,0711 (0,8461)	-0,0105 (-0,9272)	0,16
Suisse $t=$	-0,0057 (-0,0403)	0,1698 (4,3772)	0 (0,0014)	-0,0408 (-0,5761)	-0,0516 (2,8793)	0,29
Angleterre $t=$	-0,0974 (-0,9001)	0,0794 (2,6302)	-0,0129 (-1,5763)	-0,0325 (-0,3805)	-0,0098 (-0,9189)	0,12
Etats-Unis $t=$	-0,0284 (-0,6366)	0,0139 (0,7374)	0,0091 (1,8965)		-0,0067 (-0,9107)	0,08

(Gras = Coefficients significatifs à 90 %)

En général, le pouvoir explicatif du modèle semble élevé. Les coefficients R^2 ajustés varient de 5 % pour le Canada à 29 % pour la Suisse. Pour un modèle de rendements, ces résultats sont bons. (Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996) considèrent des coefficients R^2 entre 6 % et 7 % comme étant significatifs pour ce type de modèle.

En ce qui concerne les coefficients betas, on observe que les coefficients pour les taux de dividendes sont tous positifs, et ce pour les 54 périodes de régressions (voir Tableau 7). De plus, 7 coefficients sont significatifs à 90 % et 6 à 95 %. Au Royaume-Uni, par exemple, une augmentation de 1 % du niveau de rendements des dividendes payés par les compagnies faisant partie de l'indice FTSE 100, représente une augmentation de 7,94 points de pourcentage du rendement excédentaire espéré sur le marché boursier local.

Tableau 7

Résultats des régressions pour les neuf marchés boursiers
(Signes des coefficients pour chacune des 54 périodes)

	Signes	Constante	Taux de dividende	Δ taux court terme	Taux change	Δ taux long terme
Australie	+	2	54	45	54	3
	-	52	0	9	0	51
Canada	+	0	54	23	53	12
	-	54	0	31	1	42
France	+	0	54	52	54	12
	-	54	0	2	0	42
Allemagne	+	0	54	15	54	6
	-	54	0	39	0	48
Japon	+	28	54	54	36	0
	-	26	0	0	18	54
Pays-Bas	+	10	54	27	46	0
	-	44	0	27	8	54
Suisse	+	15	54	9	38	8
	-	39	0	45	16	46
Angleterre	+	34	54	26	0	0
	-	20	0	28	54	54
États-Unis	+	1	54	19		8
	-	53	0	35		46

Une variation du taux d'intérêt à court terme semble avoir un impact significatif seulement sur le marché américain. De plus, les signes des coefficients varient beaucoup, et ce pour la majorité des indices.

Les coefficients pour les taux de change étrangers (unité de devise locale par dollar américain) sont presque tous positifs (le coefficient du Royaume-Uni étant négatif puisque le taux de change est exprimé en livre Sterling par dollar U.S.). Cela signifie qu'une appréciation de la devise locale relativement au dollar américain engendre une baisse du rendement espéré excédentaire de l'indice national. Par exemple, une appréciation du dollar australien (l'Australie est le seul pays possédant un coefficient significatif à 95 %) de 1 %, de 1,05 dollar australien par dollar américain à 1,0395, impliquerait une baisse du rendement espéré de 0,2468 $((1/1,05) - (1/1,0395)) = -0,0024$, ou -0,24 %.

Les coefficients de variation du taux d'intérêt à long terme sont tous négatifs (voir Tableau 6), et ce pour la majorité des périodes (voir Tableau 7). La Suisse a le coefficient le plus significatif. Une augmentation de 1 % du taux d'intérêt à long terme suisse impliquerait une réduction de 5,16 % du rendement espéré excédentaire mensuel suisse.

Bien que certaines variables affichent des niveaux de signification plutôt bas, il est important de noter que les signes des coefficients sont en général de même nature (soit positifs ou négatifs). Cette caractéristique fait ressortir un certain pouvoir de prédiction qui n'est pas négligeable (voir Tableau 7).

Un élément important de la formule de « raffinement » des rendements espérés est le vecteur de coefficients de corrélation entre les prévisions de rendements et les rendements réalisés. Les coefficients de corrélation permettent de mesurer l'habileté de notre modèle à prédire la direction des rendements futurs. Seuls les marchés possédant un coefficient de corrélation significativement différent de zéro produisent des prévisions qui diffèrent des rendements d'équilibre (voir Tableau 8).

*Tableau 8**Exemple de rendements d'équilibre et de rendements espérés**Rendements mensuels**(Date: 31-12-1996, début de la période de test)*

Pays	Rendements d'équilibre	Rendements espérés
Australie	0,0144	0,0017
Canada	0,0302	0,0474
France	0,0189	0,0283
Allemagne	0,0186	0,0356
Japon	0,0150	0,0451
Pays-Bas	0,0182	0,0213
Suisse	0,0118	0,0162
Angleterre	0,0134	0,0127
Etats-Unis	0,0241	0,0310

Le tableau (2), que l'on retrouve à la page 30, montre les coefficients de corrélation obtenus en date du 31 décembre 1996, soit le début de la période d'optimisation. Les coefficients vont de 28 % pour les États-Unis à 50 % pour la France. Ce qui voudrait dire que le modèle capte jusqu'à 50 % de la tendance de variation des rendements pour l'indice français. Ces coefficients sont élevés pour un modèle de prévision et selon Grinold et Khan (1995) des coefficients supérieurs à 20 % peuvent représenter un biais dans le modèle.

5.2.2 Analyse de la performance de la stratégie quantitative

Le modèle de répartition d'actifs a ensuite été testé sur une période de 24 mois, allant du 31 décembre 1996 au 30 novembre 1998. Chaque mois, de nouvelles prévisions de rendements espérés étaient générées et une allocation optimale était effectuée en fonction du niveau de risque établi par le portefeuille d'équilibre. Le tableau (9) montre la composition du portefeuille d'équilibre ainsi que celles des 24 portefeuilles optimaux construits.

Tableau 9

Composition du portefeuille d'équilibre et des portefeuilles optimaux
Décembre 1996 - Novembre 1998 (24 mois)

Pays	Poids d'équilibre	Poids optimaux (Dates)					
		31-12-96	31-01-97	28-02-97	31-03-97	30-04-97	30-05-97
Australie	0,019	0	0	0	0	0	0
Canada	0,040	0,007	0,185	0,305	0,031	0	0
France	0,083	0,165	0,177	0	0,070	0,235	0,166
Allemagne	0,107	0,152	0,133	0,165	0,342	0,135	0,163
Japon	0,223	0,425	0,241	0,247	0,260	0,243	0,307
Pays-Bas	0,020	0	0	0	0	0	0
Suisse	0,016	0	0	0	0	0	0
Angleterre	0,068	0	0	0	0	0	0
États-Unis	0,424	0,252	0,264	0,284	0,297	0,387	0,364

1.000

Tableau 9 (suite 1)

Pays	Poids d'équilibre	Poids optimaux (Dates)					
		30-06-97	31-07-97	29-08-97	30-09-97	31-10-97	28-11-97
Australie	0,019	0	0,111	0,002	0	0	0,072
Canada	0,040	0	0,093	0	0,273	0,119	0
France	0,083	0	0	0,042	0	0,189	0,209
Allemagne	0,107	0,374	0,117	0,196	0,042	0,039	0,068
Japon	0,223	0,161	0,148	0,151	0,002	0,157	0,190
Pays-Bas	0,020	0,103	0,271	0	0,120	0	0
Suisse	0,016	0	0	0	0	0	0
Angleterre	0,068	0	0	0,237	0,386	0,095	0
États-Unis	0,424	0,342	0,260	0,373	0,174	0,401	0,461

1.000

Tableau 9 (suite 2)

Pays	Poids d'équilibre	Poids optimaux (Dates)					
		31-12-97	30-01-98	27-02-98	31-03-98	30-04-98	29-05-98
Australie	0,019	0,157	0,105	0,109	0,149	0	0,056
Canada	0,040	0	0	0	0	0,067	0,065
France	0,083	0,208	0,095	0	0,295	0,045	0,242
Allemagne	0,107	0	0,119	0,151	0	0,069	0,040
Japon	0,223	0,261	0,257	0,242	0,149	0,229	0,248
Pays-Bas	0,020	0	0	0	0	0,017	0
Suisse	0,016	0	0	0	0	0,171	0
Angleterre	0,068	0	0	0	0	0	0
États-Unis	0,424	0,373	0,425	0,498	0,407	0,402	0,349

1.000

Tableau 9 (suite 3)

Pays	Poids d'équilibre	Poids optimaux (Dates)					
		30-06-98	31-07-98	31-08-98	30-09-98	30-10-98	30-11-98
Australie	0,019	0,003	0,039	0	0,095	0,070	0,034
Canada	0,040	0,032	0,006	0	0	0	0
France	0,083	0	0	0,023	0,003	0	0
Allemagne	0,107	0,068	0	0,044	0,163	0,131	0,072
Japon	0,223	0,216	0,176	0,243	0,190	0,201	0,202
Pays-Bas	0,020	0,049	0,043	0	0,001	0	0
Suisse	0,016	0,236	0,378	0,217	0,093	0,129	0,189
Angleterre	0,068	0	0	0	0	0	0,038
États-Unis	0,424	0,396	0,358	0,473	0,455	0,469	0,465

1.000

Première constatation, malgré l'élimination de certains indices dans la composition des portefeuilles optimaux, par exemple, quatre pays ne sont pas représentés lors de la première allocation, on peut remarquer une certaine stabilité dans la formation des portefeuilles optimaux. Les portefeuilles obtenus ne

présentent pas de « Solutions de coin » aussi marquées que celles retrouvées dans la littérature financière (Black et Litterman (1990), Best et Grauer (1991)). Les indices les plus souvent éliminés sont, en général, des indices représentant un faible pourcentage du portefeuille de référence.

Tableau 10

Comparaison des rendements des portefeuilles optimaux et d'équilibre, pour un niveau de risque équivalent, pour la période de test

Période du 31-12-96 au 30-11-98 (24 mois)

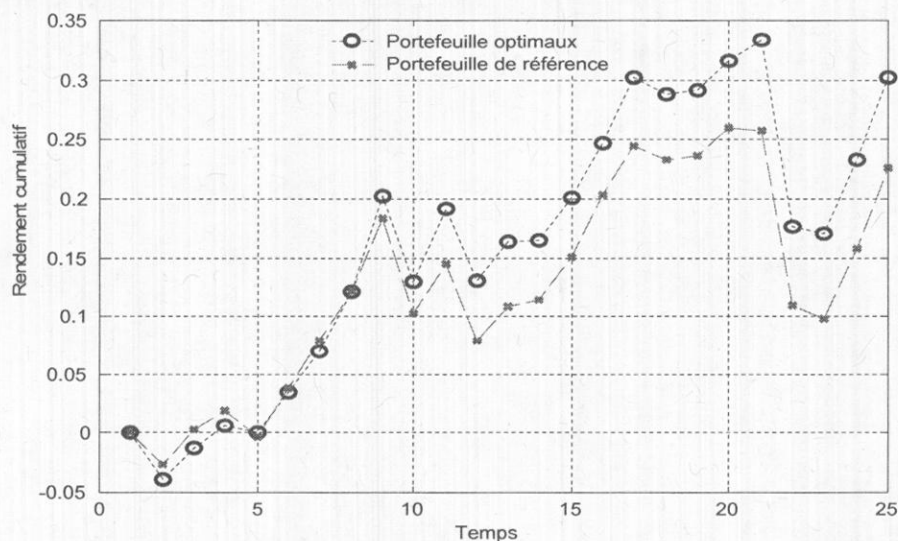
Date	Rendement Portefeuille d'équilibre	Rendement Portefeuilles Optimaux	Risque (Écart-type)
31-12-96	-0,0270	-0,0390	0,4909
31-01-97	0,0292	0,0268	0,5647
28-02-97	0,0170	0,0185	0,5579
31-03-97	-0,0222	-0,0055	0,5596
30-04-97	0,0408	0,0340	0,7014
30-05-97	0,0414	0,0350	0,6480
30-06-97	0,0415	0,0518	0,6191
31-07-97	0,0625	0,0803	0,6587
29-08-97	-0,0803	-0,0729	0,7836
30-09-97	0,0413	0,0630	0,7766
31-10-97	-0,0647	-0,0611	1,2040
28-11-97	0,0283	0,0324	1,2062
31-12-97	0,0060	0,0009	1,1049
30-01-98	0,0371	0,0366	0,9916
27-02-98	0,0526	0,0456	0,8250
31-03-98	0,0409	0,0560	0,6872
30-04-98	-0,0112	-0,0149	0,6794
29-05-98	0,0031	0,0036	0,6436
30-06-98	0,0238	0,0251	0,7289
31-07-98	-0,0024	0,0175	0,6835
31-08-98	-0,1478	-0,1573	1,1202
30-09-98	-0,0116	-0,0057	1,3815
30-10-98	0,0600	0,0623	1,3940
30-11-98	0,0680	0,0688	1,1621

Gras : Rendement du portefeuille optimal surpasse le rendement du portefeuille de référence

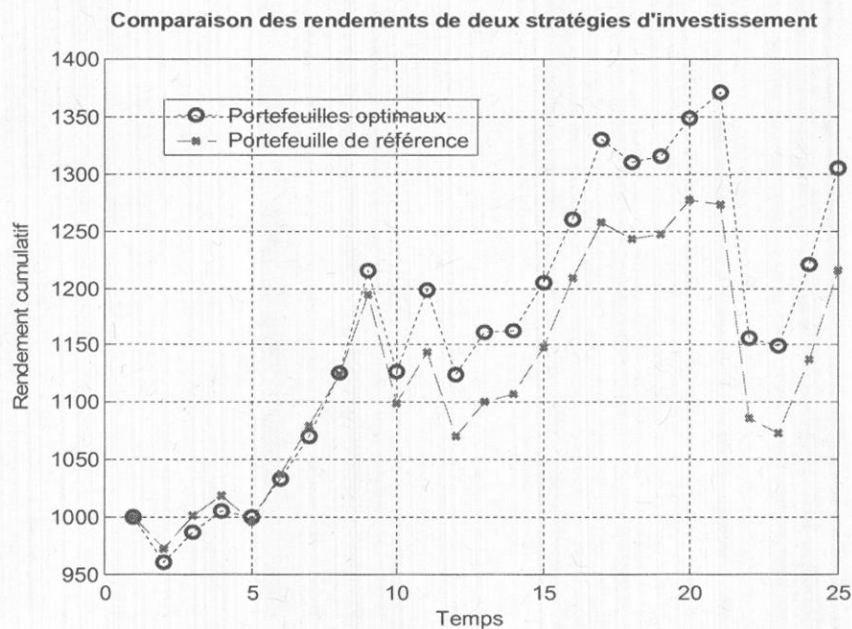
Le tableau (10) montre les rendements générés par le portefeuille de référence et par les portefeuilles optimaux pour les 24 dernières périodes de la base de données, soit la période de test. Les résultats de ce tableau ainsi que les graphiques 1, 2 et 3 nous permettent de constater le potentiel que représente ce type de modèle et la possibilité d'obtenir des résultats satisfaisants à l'aide d'une stratégie strictement quantitative. De fait, on peut observer, sur le tableau (10), que les rendements mensuels obtenus par les portefeuilles optimaux surpassent les rendements du portefeuille d'équilibre 15 fois sur 24.

Graphique 1

Graphique de Comparaison des rendements de deux stratégies d'investissement (%)

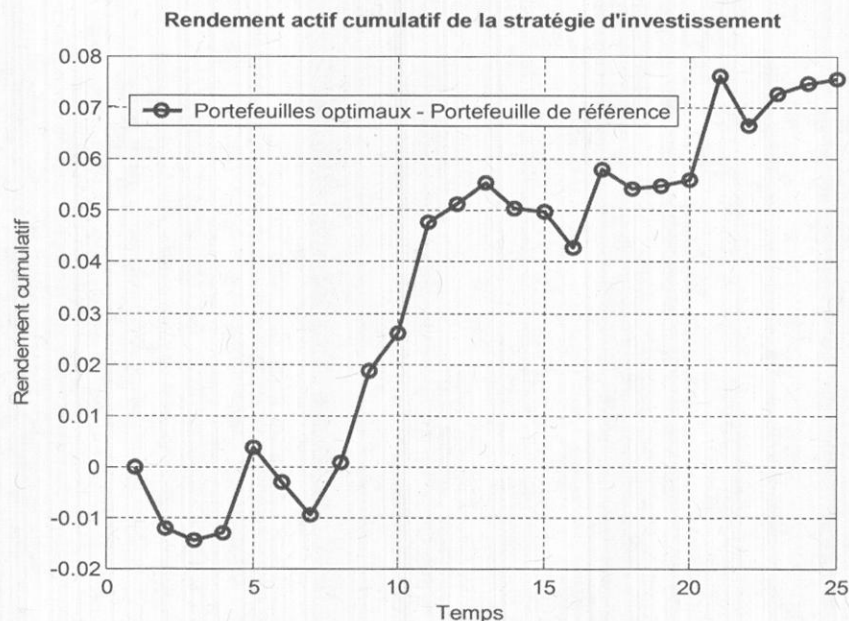


Bien que la magnitude des écarts de rendements change pour chacune des périodes, le graphique (1) montre que les rendements cumulatifs générés par les portefeuilles optimaux excèdent les rendements cumulatifs du portefeuille de référence. Ceci ne tient pas compte des frais de rebalancement. Cet élément, bien qu'incontournable, sort du cadre de cette étude. Le fait que les rendements mensuels obtenus surpassent les rendements du portefeuille d'équilibre 15 fois sur 24 n'est pas significatif en soi. Cependant, ces résultats positifs incitent à pousser le développement du modèle encore plus loin.

Graphique 2

Le graphique (2) présente les rendements des deux stratégies dans un contexte où 1000 \$ aurait été investi dans chacune des deux stratégies. On peut voir que la stratégie active se serait avérée plus rentable sur une période de 24 mois. Ainsi, 1000 \$ investi dans la stratégie active vaudrait légèrement plus de 1300 \$ 24 mois plus tard, tandis que 1000 \$ investi passivement dans le portefeuille de référence aurait une valeur de 1220 \$ à la fin de la même période d'investissement.

Graphique 3



L'un des instruments de mesure de performance privilégié par certains auteurs (Kahn, Roulet et Tajbakhsh (1996)) est le rendement actif du portefeuille optimal, soit le rendement des portefeuilles optimaux par rapport au portefeuille de référence pour un même niveau de risque. En consultant le graphique (3), on peut remarquer que la stratégie active ne se démarque nettement qu'à partir du neuvième mois de la période de test. Cela a été rendu possible parce que le rendement des portefeuilles optimaux a supplanté le rendement du portefeuille de référence six mois en ligne (voir Tableau 10).

6. CONCLUSIONS

L'objectif de ce mémoire était de créer un modèle de répartition d'actifs qui offre des éléments de solution au problème des « solutions de coin » tout en présentant des résultats satisfaisants. Ce problème a pendant longtemps détourné l'attention des praticiens des modèles de répartition d'actifs quantitatifs. Par l'introduction d'une formule de raffinement des rendements espérés, les portefeuilles générés par le modèle sont plus stables que les portefeuilles généralement obtenus lors d'une optimisation moyenne-variance traditionnelle. Les portefeuilles optimaux ne présentent pas de solutions de coin extrêmes et réussissent à surpasser une stratégie passive indicielle.

Les rendements générés par les portefeuilles optimaux sont supérieurs au rendement du portefeuille de référence à 15 occasions sur 24. Bien que ce résultat ne soit pas significatif en lui-même, il incite à poursuivre le développement de tel modèle surtout dans l'optique où les portefeuilles générés sont stables et ne présentent pas de solution de coin, répondant ainsi à un des principaux objectifs de ce travail.

Certains modèles quantitatifs représentent un défi de compréhension pour beaucoup de gestionnaires. Le côté hermétique et complexe a fait fuir plusieurs praticiens pendant longtemps. En comparaison, le modèle proposé dans cette étude est relativement simple et surtout intuitif. Il est simple de concevoir pour quiconque qu'une relation puisse exister entre des variables économiques et financières et les variations des indices boursiers. Tout comme les coefficients de corrélation ne sont en réalité que des niveaux de confiance face aux prévisions générées par le modèle économétrique. Dans cette optique de rendre plus accessibles et familiers les modèles quantitatifs, la méthodologie et le processus de construction des portefeuilles optimaux ont primés sur la recherche absolue de rendement.

Les limites de l'étude se retrouvent principalement à trois niveaux. Premièrement, le modèle de prévisions affiche un niveau assez bas de performance. Peu de coefficients présentent un pouvoir significatif à 90 %. Seul l'Australie avec trois variables sur quatre montre des résultats concluants. Une alternative serait d'avoir des variables différentes pour chacun des pays en fonction des niveaux de signification propre à chacun des marchés.

Deuxièmement, il pourrait être intéressant d'introduire les coûts de transactions associés à cette stratégie active de rebalancement de manière à confirmer la rentabilité réelle de la stratégie. Les frais ne concerneraient pas l'acquisition des contrats à terme proprement dit, puisqu'il n'y a pas de prime à payer sur de tels produits, mais plutôt les pertes encourues sur les écarts bid-ask, l'impact des écarts de taux d'intérêt et les coûts reliés à l'évaluation de la performance du modèle.

Troisièmement, une façon de valider le modèle présenté serait de tester la performance sur plusieurs périodes distinctes présentant des caractéristiques de marché différentes, c'est-à-dire des niveaux de volatilités différents par exemple ou en situation de marchés haussiers prolongés par opposition à des marchés baissiers.

La flexibilité du modèle permet également certaines modifications aux paramètres utilisés dans l'étude. Il serait possible, par exemple, que les portefeuilles optimaux présentent un poids négatif pour certains actifs. Dans le cadre de cette étude, les positions à découvert ont été laissées de côté volontairement considérant que plusieurs caisses de retraite ont des contraintes de non-négativité des positions à respecter. Cependant, il pourrait être intéressant de considérer les positions à découvert dans l'optique où le modèle serait utilisé par des gestionnaires de fonds spéculatifs (Hedge Funds).

Il serait aussi possible d'étendre le modèle de manière à inclure les obligations, les devises et les fonds de marchés monétaires. L'investissement pourrait inclure une plus vaste gamme de pays ou pourrait être décomposé à l'intérieur de chacun des pays par secteurs ou par titres.

Des contraintes de rebalancement ou de minimum de positions pourraient être introduites de manière à éviter de transiger pour des sommes négligeables, par exemple, 0,05 % de la valeur totale du portefeuille.

Les implications stratégiques liées à l'inclusion de modèles quantitatifs de répartition d'actifs dans le processus de prise de décision sont importantes pour la recherche en finance, mais également pour le marché des praticiens. En développant des modèles qui se comportent raisonnablement, en termes de solutions de coin, et qui seraient en mesure de procurer des résultats supérieurs à ce que l'on retrouve en ce moment sur le marché, il se créerait un climat favorable au développement et à l'utilisation de modèles quantitatifs.

Pour les gestionnaires de fonds spéculatifs, de tels modèles représentent un instrument de plus à leur disposition pour atteindre leur objectif d'accroître la rentabilité du capital à investir. Comme mentionné plus haut, les gestionnaires de ces fonds peuvent se servir de ces modèles quantitatifs pour effectuer de l'arbitrage en vendant à découvert le portefeuille de référence et en achetant le portefeuille suggéré par le modèle. Le portefeuille de référence pourrait intéresser les caisses de retraite désireuses de répliquer le rendement d'un portefeuille de marché mondial basé sur les économies des pays industrialisés en fonction du PIB de chacun.

Le modèle quantitatif proposé dans cette étude pourrait également s'avérer utile aux gestionnaires de caisses de retraite qui ont pour mandat de répliquer un portefeuille de marché mondial et d'ajouter de la valeur en effectuant des déviations dans sa composition de façon à obtenir un rendement supérieur pour un même niveau de risque.

Les possibilités de généralisation du modèle d'allocation d'actifs quantitatifs proposé ici dans d'autres domaines de la gestion de portefeuille et d'autres domaines de la gestion en général sont nombreuses. Partout où des rendements ou résultats peuvent être associés à des variables explicatives, la formule de

rendements raffinés peut servir de filtre. Le coefficient de corrélation représente alors un niveau de confiance dans les prévisions générées par un modèle économétrique. On peut penser que certains domaines de la gestion tel que le marketing, la gestion des opérations et de la production et autres pourraient utiliser de tels modèles.

BIBLIOGRAPHIE

ARNOTT, R. et R. HENRIKSSON, 1989 « A Disciplined Approach to Global Asset Allocation. » *Financial Analyst Journal*, 17-28.

BEKAERT, G. et R. HODRICK, 1992 « Characterizing Predictable Components in Excess Returns on Equity and Foreign Exchange Markets. » *Journal of Finance* 47, 62-64.

BEST, M. et R. GRAUER, 1991 « On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. » *The Review of Financial Studies* 4, 28-30.

BLACK, F., 1989 « Universal Hedging: How to Optimize Currency Risk and Reward in International Equity Portfolio. » *Financial Analyst Journal* July/August 1989.

BLACK, F. et R. LITTERMAN, 1990 « Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium. » *Goldman Sachs Fixed Income Research Publication*, September.

BLACK, F. et R. LITTERMAN, 1991 « Global Portfolio Optimization. » *Goldman Sachs Fixed Income Research Publication*, Octobre.

CAMPBELL, J. et I. DUFOUR. « A Variance Decomposition for Stock Return. » *Economic Journal* 101, 157-179.

CHEN, N-F, R. ROLL et S. ROSS, 1986 « Economic Forces and the Stock Market. » *Journal of Business* 59.

ELTON, E. J. et M. J. GRUBER. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, Wiley, 5th Edition, 1995.

EMANUELLI, J. et R. PEARSON, 1994 « Using Earnings Estimates for Global Asset Allocation. » *Financial Analyst Journal* 50, 60-72.

EUN, C.S et B.G. RESNICK, 1992 « Forecasting the Correlation Structure of Share Price: A Test of New Models » *Journal of Banking and Finance* 16, 642-656.

FAMA, E.F. et K. R. FRENCH, 1988 « Dividend Yields and Expected Stock Returns. » *Journal of Financial Economics* 22, 3-25.

FERSON, W. et C. HARVEY, 1992 « The Risk and Predictability of International Equity Returns. » *Review of Financial Studies* 6, 527-566.

GREEN, R. C. et B. HOLLIFIELD, 1990 « When Will Mean-Variance Efficient Portfolios Be Well Diversified ? » Working Paper, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University.

GREENE, W. H., 2000, *Econometric Analysis*. 4^e édition. Prentice-Hall Canada.

GRINOLD, R. et R. KAHN, 1995 *Active Portfolio Management*. Chicago: Probus Publishing.

JORION P., 1989 « Asset Allocation With Hedged and Unhedged Foreign Stocks and Bonds. » *Journal of portfolio management*, 49-54.

JORION P., 1995 « Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market, » *Journal of Finance* 2, 507-528.

KAHN, R. 1990 « What Practitioners Need to Know About Backtesting. » *Financial Analyst Journal* 46, 17-20.

KAHN, R., J. ROULET et S. TAJBAKHSI, 1996 « Three Steps to Global Asset Allocation. » *Journal of portfolio management*, 23-31.

KIM, J., A. M. MALZ et J. MINA, 1999, LongRun Technical Document, RiskMetrics Group.

ODIER, P. et B. SOLNIK, 1993 « Lessons for International Asset Allocation » *Financial Analyst Journal*, 63-77.

SHARPE, W. F. 1997 « Investments » Scarborough, Ont.: Prentice-Hall Canada.

SOLNIK, B., 1993a « The Performance of International Asset Allocation Strategies Using Conditioning Information. » *Journal of Empirical Finance* 1, 33-55.

SOLNIK, B., 1993b « Predictable Time-Varying Components of International Asset Returns. » Charlottesville, VA: Research Foundation of the Institute of Chartered Financial Analysts.

J.P.MORGAN, RiskMetricsTM, Technical Document, Fourth Edition, New York 1996.

THE MATHWORKS, INC., MATLABTM, Logiciel version 5.3

ANNEXE 1

Formule d'ajustement des rendements pour tenir compte du décalage horaire
(*RiskMetrics*TM)

Les places boursières des neuf pays utilisés dans l'étude ayant des heures d'ouverture et de fermeture différentes, certaines places boursières n'étant jamais ouvertes simultanément, on observe un décalage temporel entre les séries de rendement de chaque pays. En ajustant les données quotidiennes pour tenir compte de ce décalage, on évite l'introduction d'un biais à la baisse des niveaux de covariances entre les séries de rendements (Black et Litterman (1990)). Des niveaux biaisés à la baisse des covariances entre les rendements quotidiens des divers indices boursiers auraient un impact significatif sur le processus d'optimisation puisque ce dernier est de type moyenne-variance et à cet effet utilise la matrice variances-covariances pour déterminer le rapport rendement-risque des portefeuilles potentiels.

Selon l'équipe de *RiskMetrics*TM, des séries de rendements quotidiens non-synchronisées ajustées à l'aide d'un algorithme pour l'ensemble de la base de données qui tiendrait compte des corrélations entre les divers indices boursiers ont démontré dans certaines occasions des niveaux de volatilité plus élevés que lorsque ces même séries de rendements n'avaient pas été ajustées ou par rapport à des séries de données synchronisées.

Une méthode simple, suggérée par monsieur Jacques Lussier, de l'Assurance-Vie Desjardins-Laurentienne, et qui est brièvement expliquée dans le document technique de *RiskMetrics*TM consiste à pondérer le rendement des indices boursiers en fonction du nombre d'heures où ces derniers s'entrecoupent.

Table 1.3

Table des diverses heures de collecte des données pour les neufs indices boursiers utilisés dans ce travail.

Heure de collecte des données

<u>Pays</u>	<u>Heure de Londres</u>	<u>Différence vs Etats-Unis</u>
<u>Amérique du Nord</u>		
Canada	21h00	-
Etats-Unis	21h00	-
<u>Europe</u>		
Allemagne	16h00	5 heures
France	16h00	5 heures
Grande-Bretagne	16h00	5 heures
Pays-Bas	16h00	5 heures
Suisse	16h00	5 heures
<u>Asie</u>		
Australie	5h00	16 heures
Japon	5h00	16 heures

Nous devons donc considérer l'heure exacte à laquelle les rendements ont été enregistrés et voir quelle portion du rendement du jour t du pays j entrecoupe le rendement du jour t du pays k . Il suffit ensuite de pondérer le rendement des deux actifs en fonction de l'importance du recoupement.

Par exemple, s'il y a 15 heures de décalage entre Tokyo (T) et New York (NY) et la Bourse de New York ferme une heure plus tard que celle de Tokyo, ce qui signifie qu'il y a 16 heures de décalage entre les 2 heures de fermeture, les poids attribués entre $NY_t - T_t$ et $NY_t - T_{t+1}$ seront : $w_1 = 1/3$ et $w_2 = 1 - w_1 = 2/3$. En d'autres mots, la portion du rendement à la Bourse de New York, disons un 16 mai, qui entrecoupera le rendement de la Bourse de Tokyo pour la même date soit le 16 mai est un tiers. Un tiers entrecoupera le rendement de la Bourse de Tokyo le 16 mai et deux tiers entrecoupera le rendement de la Bourse de Tokyo le 17 mai. (Si le 17 mai est un jour ouvrable)

L'équation se lit comme suit :

$$w_1 = \{24 - [(\text{heure de fermeture bourse } j - \text{heure de fermeture bourse } k) + (\text{décalage horaire entre } j \text{ et } k)]\} / 24 \quad (1.1)$$

$$w_2 = 1 - w_1 \quad (1.2)$$

Dans cet exemple, la bourse j est la Bourse de New York et la bourse k est la Bourse de Tokyo.

Soit, $w_1 = \{24 - [(16\text{h}00 - 15\text{h}00) + 15]\} / 24$

$$w_1 = [24 - 16] / 24 = 1/3$$

$$w_2 = 1 - w_1$$

$$w_2 = 1 - 1/3 = 2/3$$

ANNEXE 2

Détermination du facteur de déclin selon le document technique de *RiskMetrics*TM

La méthodologie utilisée pour déterminer le facteur de déclin optimal dans la prévision de la volatilité mensuelle est la suivante. Premièrement, le facteur de déclin optimal pour une série chronologique donnée est déterminé en utilisant la méthode de la Racine carrée de la moyenne des erreurs au carré. (Root mean square error (RMSE) criterion)

Deuxièmement, l'équipe de *RiskMetrics*TM a calculé un facteur de déclin optimal pour 480 séries chronologiques provenant de 23 pays différents et sur cinq facteurs de risque différents. Ainsi, le facteur de déclin optimal utilisé par *RiskMetrics*TM est simplement la moyenne pondérée de l'ensemble des facteurs de déclin optimaux.

Racine carrée de la moyenne des erreurs au carré

La définition de la prévision au temps $t + 1$ de la variance du rendement, r_{t+1} , faite à la période précédente est $E_t[r_{t+1}^2] = \sigma_{t+1|t}^2$, c'est-à-dire, la valeur espérée du rendement au carré à la période précédente. De la même façon, la définition de la prévision au temps $t + 1$ de la covariance entre deux séries de rendements, $r_{1,t+1}$ et $r_{2,t+1}$, faite à la période précédente est $E_t[r_{1,t+1}r_{2,t+1}] = \sigma_{12,t+1|t}^2$. En général, ces définitions tiennent pour toute prévision faite au temps $t + j, j \geq 1$.

Si le résidu de la prévision de la variance est $\varepsilon_{t+1|t} = r_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2$, il s'en suit que la valeur espérée du résidu de la prévision est zéro, c'est-à-dire, $E_t[\varepsilon_{t+1|t}] = E_t[r_{t+1}^2] - \sigma_{t+1|t}^2 = 0$. À partir de cette relation, une condition naturelle pour choisir λ est de minimiser la moyenne des erreurs au carré. Lorsque appliqué à des prévisions quotidiennes de la variance, ceci mène à la racine carrée de la moyenne des erreurs au carré telle que :

$$RMSE_v = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(r_{t+1}^2 - \hat{\sigma}_{t+1|t}^2(\lambda) \right)^2} \quad (\text{variance}) \quad (2.1)$$

où la prévision de la variance est écrite spécifiquement comme étant fonction de λ .

En pratique, le facteur de déclin optimal λ^* est trouvé en testant différentes valeurs de λ de manière à trouver le RMSE minimum.

L'équipe de *RiskMetrics*TM calcule ensuite le facteur de déclin optimal basé sur la moyenne pondérée des facteurs de déclin des 480 séries chronologiques pour lesquelles *RiskMetrics*TM a les données quotidiennes.

D'autres méthodes de calcul du facteur de déclin optimal sont exposées à l'annexe C du document technique de *RiskMetrics*TM (page 243-245). Ces méthodes sont la fonction de vraisemblance normale, la moyenne des erreurs absolues de la variance (mean absolute error measure for the variance), la statistique Q telle que décrite par Crnkovic et Drachman (RISK, Septembre 1996).

ANNEXE 3

Dérivée de la formule de la moyenne mobile exponentielle (MME) utilisée dans le calcul de la variance des séries de rendements et de la covariance entre les séries de rendements telle qu'utilisée dans le document technique de RiskMetricsTM

Posant l'hypothèse d'une moyenne de rendements de zéro, nous dérivons l'équation (2) que l'on retrouve à la page 23 afin d'obtenir sa forme récursive.

Reprenons l'équation (2):

$$\sigma_{j,t} = \sqrt{\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} (r_{j,t-i} - \hat{r}_j)^2} . \quad (3.1)$$

Puisque $\hat{r} \cong 0$,

$$\sigma_{j,t} \cong \sqrt{\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} r_{j,t-i}^2} .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sigma_{j,t}^2 &\cong \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} r_{j,t-i}^2 \\ &= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} [r_{j,t-1}^2 + \lambda r_{j,t-2}^2 + \lambda^2 r_{j,t-3}^2 + \lambda^3 r_{j,t-4}^2 + \dots + \lambda^{T-1} r_{j,t-T}^2] \\ &= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1}^2 + \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} [r_{j,t-2}^2 + \lambda r_{j,t-3}^2 + \lambda^2 r_{j,t-4}^2 + \dots + \lambda^{T-2} r_{j,t-T}^2] \\ &= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1}^2 + \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} [r_{j,t-2}^2 + \lambda r_{j,t-3}^2 + \lambda^2 r_{j,t-4}^2 + \dots + \lambda^{T-2} r_{j,t-T}^2 + \lambda^{T-1} r_{j,t-T-1}^2] \\ &\quad - \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \lambda^{T-1} r_{j,t-T-1}^2 \\ &= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1}^2 + \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \underbrace{[r_{j,t-1-1}^2 + \lambda r_{j,t-1-2}^2 + \lambda^2 r_{j,t-1-3}^2 + \dots + \lambda^{T-2} r_{j,t-1-(T-1)}^2 + \lambda^{T-1} r_{j,t-1-T}^2]}_{\sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} r_{j,t-1-i}^2} \\ &\quad - \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \lambda^{T-1} r_{j,t-T-1}^2 \\ &= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1}^2 + \lambda \underbrace{\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \sum_{i=2}^T \lambda^{i-2} r_{j,t-i}^2}_{\sigma_{j,t-1}^2} - \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \lambda^{T-1} r_{j,t-T-1}^2 . \end{aligned}$$

Puisque le terme $\lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \lambda^{T-1} r_{j,t-T-1}^2 \approx 0$, lorsque T est grand, ($si |\lambda| < 1$)

nous obtenons $\sigma_{j,t}^2 \cong \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1}^2 + \lambda \sigma_{j,t-1}^2$, soit l'équation (3) à la page 24. (3.2)

Afin de montrer le caractère conditionnel de la volatilité dans l'expression (3.2)

nous écrivons l'équation (3.2) comme suit : $\sigma_{j,t|t-1}^2 \cong \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1}^2 + \lambda \sigma_{j,t-1|t-2}^2$ qui

est une bonne approximation de $\sigma_{j,t}^2$.

De la même façon, posant l'hypothèse des moyennes de rendements de zéro

$\hat{r}_j \cong 0$, $\hat{r}_k \cong 0$, nous dérivons l'équation (5) que l'on retrouve à la page 25 afin

d'obtenir sa forme récursive.

Reprenons l'équation (5) :

$$\sigma_{jk,t}^2 = \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} (r_{j,t-i} - \hat{r}_j)(r_{k,t-i} - \hat{r}_k). \quad (3.3)$$

Puisque $\hat{r}_j \cong 0$ et $\hat{r}_k \cong 0$, il vient

$$\begin{aligned} &\cong \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} r_{j,t-i} \cdot r_{k,t-i} \\ &= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} [r_{j,t-1} \cdot r_{k,t-1} + \lambda r_{j,t-2} \cdot r_{k,t-2} + \lambda^2 r_{j,t-3} \cdot r_{k,t-3} + \dots + \lambda^{T-1} r_{j,t-T} \cdot r_{k,t-T}] \\ &= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1} \cdot r_{k,t-1} \\ &\quad + \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} [r_{j,t-2} \cdot r_{k,t-2} + \lambda r_{j,t-3} \cdot r_{k,t-3} + \lambda^2 r_{j,t-4} \cdot r_{k,t-4} + \dots + \lambda^{T-2} r_{j,t-T} \cdot r_{k,t-T}] \\ &= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1} \cdot r_{k,t-1} \\ &\quad + \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} [r_{j,t-2} \cdot r_{k,t-2} + \lambda r_{j,t-3} \cdot r_{k,t-3} + \lambda^2 r_{j,t-4} \cdot r_{k,t-4} + \dots + \lambda^{T-2} r_{j,t-T} \cdot r_{k,t-T} + \lambda^{T-1} r_{j,t-T-1} \cdot r_{k,t-T-1}] \\ &\quad - \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \lambda^{T-1} r_{j,t-T-1} \cdot r_{k,t-T-1} \\ &= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1} \cdot r_{k,t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \underbrace{\left[r_{j,t-1-1} \cdot r_{k,t-1-1} + \lambda r_{j,t-1-2} \cdot r_{k,t-1-2} + \lambda^2 r_{j,t-1-3} \cdot r_{k,t-1-3} + \dots + \lambda^{T-1} r_{j,t-1-T} \cdot r_{k,t-1-T} \right]}_{\sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} r_{j,t-1-i} \cdot r_{k,t-1-i}} \\
& - \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \lambda^{T-1} r_{j,t-T-1} \cdot r_{k,t-T-1} \cdot \\
\sigma_{jk,t}^2 &= \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1} \cdot r_{k,t-1} + \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \underbrace{\sum_{i=2}^T \lambda^{i-2} r_{j,t-i} \cdot r_{k,t-i}}_{\sigma_{jk,t-1}^2} - \lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \lambda^{T-1} r_{j,t-T-1} \cdot r_{k,t-T-1}.
\end{aligned}$$

Puisque le terme $\lambda \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} \lambda^{T-1} r_{j,t-T-1} \cdot r_{k,t-T-1} \approx 0$, lorsque T est grand et $|\lambda| < 1$,

nous obtenons

$$\sigma_{jk,t}^2 \cong \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1} r_{k,t-1} + \lambda \sigma_{jk,t-1}^2, \text{ soit l'équation (6) à la page 25.} \quad (3.4)$$

Afin de montrer le caractère conditionnelle de la volatilité dans l'expression (3.4)

nous écrivons l'équation (3.4) comme suit : $\sigma_{jk,t|t-1}^2 \cong \frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^T} r_{j,t-1} r_{k,t-1} + \lambda \sigma_{jk,t-1|t-2}^2$

qui est une bonne approximation de $\sigma_{jk,t}^2$.

ANNEXE 4

Programme principal

```

%Programme de construction de portefeuilles internationaux
%à partir d'une stratégie bayésienne de raffinement

%Effacer les mémoires
clear all;

%Paramètres de la fonction
idate=[961231; 970131; 970228; 970331; 970430; 970530; %Dates mensuelles
       970630; 970731; 970829; 970930; 971031; 971128; %utilisées
       971231; 980130; 980227; 980331; 980430; 980529; %pour le backtesting
       980630; 980731; 980831; 980930; 981030; 981130];

poids=[.019;.04;.083;.107; %Poids en fonction du PIB 1990
       .223;.02;.016;.068;.424]; %Pays = 1)Australie 2)Canada 3)France
                                     %4)Allemagne 5)Japon 6)Pays-Bas
                                     %7)Suisse 8)Grande-Bretagne 9)États-Unis

index=1; %1)MSCI EAFE 2)MSCI World Index

%Matrices vides pour emmagasiner les résultats
rend_pf=zeros(size(idate,1),1); %Entreposage des rendements du portefeuille optimal
risk_pf=rend_pf; %Entreposage de l'écart type, portefeuille optimal
ratio_s=rend_pf; %Entreposage du ratio de Sharpe, portefeuille optimal
rend_pf_equil2=rend_pf; %Entreposage des rendements, portefeuille d'équilibre
ecartype_pf_equil2=rend_pf; %Entreposage de l'écart type, portefeuille d'équilibre
ratio_pf_equil=rend_pf; %Entreposage ratio de Sharpe, portefeuille d'équilibre
maxpoids2=zeros(size(poids,1),1); %Entreposage des poids des portefeuilles optimaux

%Backtesting sur les dates mentionnées ci-haut
for t=1:size(idate,1)

    %Calcul de la matrice variance-covariance
    fin=idate(t); %date de début du backtesting
    lags=200; %nombre de jours utilisés dans la composition de la matrice
    nom='data.xls'; %nom de la base de données
    [matrice]=mvcov(fin, lags, nom);

    %Calcul des rendements espérés raffinés
    longueur=95; %nombre de mois utilisés pour calculer (b) Coef.d'information
    [rend_esp, rend_pf_equil, rend_obtenus]=rend(fin, longueur, poids, matrice);

    ecartype_pf_equil=sqrt(poids'*matrice*poids);
    rend_pf_equil2(t)=rend_pf_equil;
    ecartype_pf_equil2(t)=ecartype_pf_equil;
    ratio_pf_equil(t)=rend_pf_equil2(t)/ecartype_pf_equil2(t);

    %Calcul du Benchmark
    [rend_bench, risk_bench]=benchmark(fin, longueur, index);

    rend_bench2(t)=rend_bench;
    risk_bench2(t)=risk_bench;
    ratio_bench(t)=rend_bench2(t)/risk_bench2(t);

    %Optimisation
    [riskpf_optimal, maxpoids]=optimis(matrice, rend_esp, ecartype_pf_equil,
    rend_bench, risk_bench);

    rend_pf(t)=maxpoids'*rend_obtenus;
    risk_pf(t)=riskpf_optimal;
    ratio_s(t)=rend_pf(t)/risk_pf(t);
    maxpoids2=[maxpoids2 maxpoids];

end

```

ANNEXE 5

Transformation de la banque de données mensuelles

```

%Création de la banque de données mensuelles

%Effacer les mémoires
clear all;

%Lecture de la base de données
load donnes.xls
[m n]=size(donnes);

%Base de données, prix du premier jour du mois =1
%Fréquence quotidienne, jour de la semaine seul.
%Début=02-01-89, fin=10-12-98

%Déterminer les vecteurs de rendements mensuels
[i j]=find(donnes==1);
col1=1:n-1;
col2=2:n-1;
prix=donnes(i,col1);
pmb=prix(2:end,col2);
pmt=prix(1:end-1,col2);
rend_mens=((pmb-pmt)./pmt);
rend_mens=[prix(2:end,1) rend_mens];

%Col inclut la colonne de dates
%Col2 n'inclut pas la colonne de dates
%Prix des indices pour chaque début de mois
%Prix à t+1
%Prix à t
%Rendements mensuels pour chaque indice
%Rajout de la colonne de date

%Lecture de la base de données (Variables explicatives)
load dividendy.xls
load tauxct.xls
load tx_change.xls
load taux_10ans.xls

%Données sur les rendements des dividendes
%Données des taux à CT
%Données sur les taux de change
%Données sur les taux 10 ans

%Déterminer les vecteurs de rendements de dividendes mensuels
[i j]=find(dividendy==1000);
div_1=dividendy(i,col1);
div_fut=div_1(2:end,col2);
div_pre=div_1(1:end-1,col2);
div_yield=((div_fut-div_pre)./div_pre);
div_yield=[div_1(2:end,1) div_yield];

%Niveaux dividendes pour chaque début de mois
%Dividendes à t+1
%Dividendes à t
%Rendements mensuels des dividendes
%pour chaque indice
%Rajout de la colonne de date

%Déterminer les vecteurs de rendements ou variations mensuelles des taux 3 mois
[i j]=find(tauxct==1000);
rf=tauxct(i,col1);
rf_fut=rf(2:end,col2);
rf_pre=rf(1:end-1,col2);
taux_ct=((rf_fut-rf_pre)./rf_pre);
taux_ct=[rf(2:end,1) taux_ct];

%Niveaux des taux 3 mois pour chaque début de mois
%Niveaux à t+1
%Niveaux à t
%Variations mensuelles des taux 3 mois
%Rajout de la colonne de date

%Déterminer les vecteurs de variations mensuelles de taux de change
[i j]=find(tx_change==1);
txch_1=tx_change(i,1:n-2);
txch_fut=txch_1(2:end,2:n-2);
txch_pre=txch_1(1:end-1,2:n-2);
change=((txch_fut-txch_pre)./txch_pre);
change=[txch_1(2:end,1) change];

%Niveaux des taux de change pour chaque
%début de mois, 1 colonne de moins, US VS US
%Taux à t+1, 1 colonne de moins
%Taux à t, 1 colonne de moins
%Variations mensuelles des taux de change
%pour chaque indice
%Rajout de la colonne de date

%Déterminer les vecteurs de variations mensuelles des taux 10 ans
[i j]=find(taux_10ans==1);
txlt_1=taux_10ans(i,col1);
txlt_fut=txlt_1(2:end,col2);
txlt_pre=txlt_1(1:end-1,col2);
tx_longterme=((txlt_fut-txlt_pre)./txlt_pre);
tx_longterme=[txlt_1(2:end,1) tx_longterme];

%Niveaux des taux 10 ans, début de mois
%Taux à t+1
%Taux à t
%Variations mensuelles des taux
%pour chaque indice
%Rajout de la colonne de date

%Calcul des rendements excédentaires
rend_exced=rend_mens(:,col2)-rf_pre/1200;
rend_exced=[rend_mens(:,1) rend_exced];

%Rendements excédentaires = rendements
%en excès du taux sans risque (3 mois)

format short

save banque_mens rend_mens prix div_1 rf txch_1 txlt_1 rend_exced;

```

ANNEXE 6

Fonction – Matrice variances-covariances

```

function [matrice]=mvcov(fin,lags,nom);

%Calcul de la matrice variances-covariances

%inputs :
%
% fin : date
% lags : nombre de périodes utilisées pour calculer la matrice
% nom : nom de la banque de données
%
%outputs :
%
% matrice : matrice de variance-covariance calculée selon le modèle Risk-Metrics

%Lecture de la base de données
load(nom); %Base de données
[m n]=size(data); %Fréquence quotidienne, jour de la semaine seul.
date=find(data==fin); %Début=02-01-89, fin=31-12-98
col=2:n; %Trouve la date indiquée dans la base de données
%toutes les colonnes sauf la colonne de date

%Constitution des vecteurs de rendements
p=data(date-lags+1:date,col); %Vecteurs de prix
p2=data(date-lags:date-1,col); %Vecteurs de prix-1
vrend=((p-p2)./p2); %Vecteurs de rendements
lrend=(log(1+vrend)); %Le log des rendements

%Modifications pour tenir compte du décalage horaire
%Ajustement des rendements des pays Européens en fonction des rendements américains
a=[3 4 6 7 8]; %Pays: 3=France 4=Allemagne 6=Pays-Bas 7=Suisse 8=Grande-Bretagne
b=19/24; %Proportion des rendements européens au temps t
%qui entrecoupent les rendements américains au temps t
w=lrend(1:end-1,a)*b +lrend(2:end,a)*(1-b); %La partie restante du rendement
%provient du rendement à t+1

%Ajustement des rendements des pays Asiatiques en fonction des rendements américains
c=[1 5]; %Pays: 1=Australie 5=Japon
d=1/3;
w1=lrend(1:end-1,c)*d +lrend(2:end,c)*(1-d);

%Vecteurs des rendements pour les États-Unis et le Canada
e=lrend(1:end-1,2);
f=lrend(1:end-1,9);

%Matrice des rendements tenant compte du décalage horaire
g=[w1(:,1) e w(:,1) w(:,2) w1(:,2) w(:,3) w(:,4) w(:,5) f];

%Lambda
la=0.97; %Lambda est le facteur de déclin
ind=(0:lags-2); %Nombre de lags ou poids
lat1=la.^ind;
lat2=sqrt(lat1(end:-1:1)); %Racines carrées des poids expo et inversées
lat3=lat2.*(ones(1,9)); %Matrice 200 par 9 des poids

%Constitution de la matrice
matrice_rend=lat3.*(g.*100); %Rendements * Lambda = matrice de rendements
matrice=(matrice_rend)'*(matrice_rend)/(sum(lat1)); %Matrice selon Riskmetrics

%Matrice de corrélation
coco=corrcoef(g);

format short

```


ANNEXE 7

Fonction – Rendements espérés raffinés

```

function [rend_esp,rend_pf_equil,rend_obtenus]=rend(fin,longueur,poids,matrice);
%Calcul des rendements espérés raffinés en excès du taux sans risque
%
%inputs :
%
% fin                :Dates utilisées pour le backtesting
% longueur           :Nombre de périodes utilisées pour calculer la matrice, ici 95
% poids              :Poids des pays en fonction du PIB
% Matrice             :Matrice variances-covariances
%
%outputs :
%
% rend_esp           :Rendements espérés calculés selon le modèle de Khan,Roulet et Tajbakhsh
% rend_pf_d'equil    :Rendements du portefeuille de référence
% rend_obtenus       :Rendements réalisés par les indices

load banque_mens      %rend_mens(rendements mensuels de 9 indices)prix(niveaux des 9 indices)
                     %div_1(niveaux de dividendes) rf(taux sans risque 3 mois)
                     %txch_1(taux de change vs dollar us) txlt_1(taux d'intérêt 10 ans)
                     %rend_exced(rendements excédentaires au taux sans risque);
                     %Début 89-01-01, fin 96-12-01 = 96 mois

%initialiser les paramètres
debut=find(div_1==fin);
depart=find(rend_exced==fin);
nobsmin=42; nobsmax=60;                                %Nombre de mois minimum et maximum utilisés pour
                                                         %pour calculer les coefficients (Betas)

%Matrices vides pour emmagasiner les (Betas)
vb2=[]; vb3=[]; vb4=[];
vb5=[]; vb6=[]; vb7=[];
vb8=[]; vb9=[]; vb10=[];

%Régressions multiples entre les rendements excédentaires de 9 indices boursiers
%et 4 variables macro-économiques et financières

%première étape : la régression s'effectue sur un nombre croissant d'observations
for j=2:10                                                %Pour chacun des pays j=2 à 10, 1ere colonne = date
    y=rend_exced(debut-longueur:end,j);
    if j~=10
        x=[ones(size(div_1(debut-longueur:end,j),1),1)div_1(debut-longueur:end,j)
            rf(debut-longueur:end,j)txch_1(debut-longueur:end,j)
            txlt_1(debut-longueur:end,j)];
    else
        x=[ones(size(div_1(debut-longueur:end,j),1),1)div_1(debut-longueur:end,j)
            rf(debut-longueur:end,j)txlt_1(debut-longueur:end,j)];
    end
end

for i=1:(nobsmax-nobsmin+1);%De 1 à 19, le nombre d'observations
    xi=x(1:nobsmin+i-1,:);%utilisées augmentent de 1
    yi=y(1:nobsmin+i-1,:);
    [b,seb,sse,r2,r2bar,u,tsta]=linreg(xi,yi,i);

    if j==2
        vb2=[vb2; b'];
    elseif j==3
        vb3=[vb3; b'];
    elseif j==4
        vb4=[vb4; b'];
    elseif j==5
        vb5=[vb5; b'];
    elseif j==6
        vb6=[vb6; b'];

```

ANNEXE 7

Fonction – Rendements espérés raffinés (suite 1)

```

elseif j==7
    vb7=[vb7; b'];
elseif j==8
    vb8=[vb8; b'];
elseif j==9
    vb9=[vb9; b'];
elseif j==10
    vb10=[vb10; b'];
end
end
end

%deuxième étape : la régression s'effectue sur un nombre d'observations constant
for j=2:10 %Pour chacun des pays j=2 à 10, 1ere colonne = date
    y=rend_exced(debut-longueur:end,j);
    if j~=10
        x=[ones(size(div_1(debut-longueur:end,j),1),1)div_1(debut-longueur:end,j)
            rf(debut-longueur:end,j)txch_1(debut-longueur:end,j)
            txlt_1(debut-longueur:end,j)];
    else
        x=[ones(size(div_1(debut-longueur:end,j),1),1)div_1(debut-longueur:end,j)
            rf(debut-longueur:end,j)txlt_1(debut-longueur:end,j)];
    end

    for i=2:(longueur-nobsmax+1)
        xi=x(i:i-1+nobsmax,:); %De i=2 à 39, le nombre d'observations
        yi=y(i:i-1+nobsmax,:); %demeure le même
        [b,seb,sse,r2,r2bar,u,tsta]=linreg(xi,yi,i);

        if j==2
            vb2=[vb2; b'];
        elseif j==3
            vb3=[vb3; b'];
        elseif j==4
            vb4=[vb4; b'];
        elseif j==5
            vb5=[vb5; b'];
        elseif j==6
            vb6=[vb6; b'];
        elseif j==7
            vb7=[vb7; b'];
        elseif j==8
            vb8=[vb8; b'];
        elseif j==9
            vb9=[vb9; b'];
        elseif j==10
            vb10=[vb10; b'];
        end
    end
end

%Détermination des vecteurs de prévisions et des paramètres utilisés
%pour calculer les rendements raffinés
for j=2:10
    if j~=10
        x=[ones(size(div_1(nobsmin+1:(nobsmin+1+size(vb2,1)-1),1),1),1)
            div_1(nobsmin+1:(nobsmin+1+size(vb2,1)-1),j)
            rf(nobsmin+1:(nobsmin+1+size(vb2,1)-1),j)
            txch_1(nobsmin+1:(nobsmin+1+size(vb2,1)-1),j)
            txlt_1(nobsmin+1:(nobsmin+1+size(vb2,1)-1),j)];
    else
        x=[ones(size(div_1(nobsmin+1:(nobsmin+1+size(vb2,1)-1),1),1),1)
            div_1(nobsmin+1:(nobsmin+1+size(vb2,1)-1),j)
            rf(nobsmin+1:(nobsmin+1+size(vb2,1)-1),j)
            txlt_1(nobsmin+1:(nobsmin+1+size(vb2,1)-1),j)];
    end
end

```

ANNEXE 7

Fonction – Rendements espérés raffinés (suite 2)

```

if j==2 %Matrice de Betas * matrice de var. indépendantes
p2=x.*vb2;%Betas au temps t (ex: 42) multipliés par les variables
elseif j==3 %indépendantes au temps t (ex:42,au début de la période)
p3=x.*vb3;%pour obtenir des prévisions au temps t+1 (ex 43,fin de mois)
elseif j==4
p4=x.*vb4;
elseif j==5
p5=x.*vb5;
elseif j==6
p6=x.*vb6;
elseif j==7
p7=x.*vb7;
elseif j==8
p8=x.*vb8;
elseif j==9
p9=x.*vb9;
elseif j==10
p10=x.*vb10;
end
end

%Vecteurs de prévisions
rend_prev2=sum(p2'); %Somme de chaque ligne pour obtenir les rendements prévus.
rend_prev3=sum(p3'); %Utilisés pour calculer les coefficients d'information
rend_prev4=sum(p4'); % (corrélations)
rend_prev5=sum(p5');
rend_prev6=sum(p6');
rend_prev7=sum(p7');
rend_prev8=sum(p8');
rend_prev9=sum(p9');
rend_prev10=sum(p10');

rend_prevision=[rend_prev2(end,1);rend_prev3(end,1);rend_prev4(end,1);rend_prev5(end,1);
rend_prev6(end,1);rend_prev7(end,1);rend_prev8(end,1);rend_prev9(end,1);
rend_prev10(end,1)];

%Vecteurs de réalisations (rendements réalisés)
realisations2=rend_exced((depart-size(vb2,1)+1:depart),2);
realisations3=rend_exced((depart-size(vb2,1)+1:depart),3);
realisations4=rend_exced((depart-size(vb2,1)+1:depart),4);
realisations5=rend_exced((depart-size(vb2,1)+1:depart),5);
realisations6=rend_exced((depart-size(vb2,1)+1:depart),6);
realisations7=rend_exced((depart-size(vb2,1)+1:depart),7);
realisations8=rend_exced((depart-size(vb2,1)+1:depart),8);
realisations9=rend_exced((depart-size(vb2,1)+1:depart),9);
realisations10=rend_exced((depart-size(vb2,1)+1:depart),10);

%Calcul du coefficient d'information
%(Coefficient de corrélation entre les rendements réalisés et prévus)
coef_info2=corrcoef(rend_prev2,realisations2);
coef_info3=corrcoef(rend_prev3,realisations3);
coef_info4=corrcoef(rend_prev4,realisations4);
coef_info5=corrcoef(rend_prev5,realisations5);
coef_info6=corrcoef(rend_prev6,realisations6);
coef_info7=corrcoef(rend_prev7,realisations7);
coef_info8=corrcoef(rend_prev8,realisations8);
coef_info9=corrcoef(rend_prev9,realisations9);
coef_info10=corrcoef(rend_prev10,realisations10);

```


ANNEXE 7

Fonction – Rendements espérés raffinés (suite 3)

```

%Vecteur des coefficients d'information
vecteur_ci=[coef_info2(1,2);coef_info3(1,2);coef_info4(1,2);coef_info5(1,2);
            coef_info6(1,2);coef_info7(1,2);coef_info8(1,2);coef_info9(1,2);
            coef_info10(1,2)];

%Moyenne des prévisions (poids égal pour chacune des observations)
expreturn2=ewstats(rend_prev2,1);           %Moyenne des rendements prévus
expreturn3=ewstats(rend_prev3,1);
expreturn4=ewstats(rend_prev4,1);
expreturn5=ewstats(rend_prev5,1);
expreturn6=ewstats(rend_prev6,1);
expreturn7=ewstats(rend_prev7,1);
expreturn8=ewstats(rend_prev8,1);
expreturn9=ewstats(rend_prev9,1);
expreturn10=ewstats(rend_prev10,1);

%Vecteur de la moyenne des prévisions
moyenne_prev=[expreturn2;expreturn3;expreturn4;expreturn5;expreturn6;
              expreturn7;expreturn8;expreturn9;expreturn10];

%Écart-types des prévisions
ecartype_prev2=std(rend_prev2);
ecartype_prev3=std(rend_prev3);
ecartype_prev4=std(rend_prev4);
ecartype_prev5=std(rend_prev5);
ecartype_prev6=std(rend_prev6);
ecartype_prev7=std(rend_prev7);
ecartype_prev8=std(rend_prev8);
ecartype_prev9=std(rend_prev9);
ecartype_prev10=std(rend_prev10);

%Vecteur des écart-types des prévisions
vecteur_ecartypep=[ecartype_prev2;ecartype_prev3;ecartype_prev4;ecartype_prev5;
                  ecartype_prev6;ecartype_prev7;ecartype_prev8;ecartype_prev9;
                  ecartype_prev10];

%Écart-type des réalisations
ecartype_real2=std(realisations2);
ecartype_real3=std(realisations3);
ecartype_real4=std(realisations4);
ecartype_real5=std(realisations5);
ecartype_real6=std(realisations6);
ecartype_real7=std(realisations7);
ecartype_real8=std(realisations8);
ecartype_real9=std(realisations9);
ecartype_real10=std(realisations10);

%Vecteur des écart-types des réalisations
vecteur_ecartyper=[ecartype_real2;ecartype_real3;ecartype_real4;ecartype_real5;
                  ecartype_real6;ecartype_real7;ecartype_real8;ecartype_real9;
                  ecartype_real10];

%Construction du portefeuille d'équilibre et des rendements d'équilibre
rend_equilibre=matrice*poids;
rend_obtenus=rend_exced(depart,2:10)'; %Rendements mensuels pour les dates du backtesting

%Rendements du portefeuille d'équilibre
rend_pf_equil=poids'*rend_obtenus;

%Formule de rendements raffinés
rend_esp=rend_equilibre+ (vecteur_ci.*vecteur_ecartyper.*
                        ((rend_prevision-moyenne_prev)./vecteur_ecartypep));
format short

```

ANNEXE 8

Fonction – Régression linéaire

```

function [b,seb,sse,r2,r2bar,u,tsta]=linreg(x,y,i);

%
%Régression linéaire
%

%tester pour le nombre d'observations
[t,k]=size(x);
if t<=k
    error('Number of observations smaller than number of variables');
end

%calculer les quantités requises pour calculs
xxinv=inv(x'*x);
xpy=x'*y;
YPY=y'*y;
tybar=t*(mean(y)^2);

%calculer les estimés des parametres
b=xxinv*xpy;

%calculer les résidus
u=y-x*b;
ssr=(u'*u);
sse=ssr/(t-k);
seb=sqrt(diag(sse.*xxinv));

%calculer les r carrés
r2=(xpy'*xxinv*xpy)/ypy;
r2bar=((xpy'*xxinv*xpy)-tybar)/(ypy-tybar);

%calculer les p values
tsta=b./seb;
pv=1-tcdf(tsta,t-k);

%affichage des résultats
fprintf('\n');
fprintf(' NB OF OBS      %10.5f      DEGREES OF FREEDOM %10.5f \n',t,t-k);
fprintf(' R**2            %10.5f      RBAR**2           %10.5f \n',r2,r2bar);
fprintf(' SSR              %10.5f      SEE                %10.5f \n',ssr,sse);
fprintf('\n');
fprintf(' COEF. NO. COEFFICIENT   STAND. ERROR   T-STATISTIC   P-VALUE \n');
fprintf(' ***** *****      *****      *****      ***** \n');
for i=1:k fprintf(' %2i %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f \n',i,b(i),seb(i),tsta(i),pv(i));
end
fprintf('\n');
end

```

ANNEXE 9

Fonction – Portefeuille de référence

```

function [rend_bench,risk_bench]=benchmark(fin,longueur,index)

%
%Calcul du rendement et du niveau de risque du benchmark
%

load windex.xls;
start=find(windex==fin);

%Niveaux dividendes pour chaque début de mois
index_fut=windex(start-longueur:start,index+1); %Dividendes à t+1
index_pre=windex(start-longueur-1:start-1,index+1); %Dividendes à t
index_rend=((index_fut-index_pre)./index_pre); %Rendements mensuels des dividendes

%Moyenne de rendement du benchmark
rend_bench=index_rend(end,1);

%Écart-type du benchmark
risk_bench=std(index_rend);

```


ANNEXE 10

Fonction – Optimisation

```

function [riskpf_optimal,maxpoids]=optimis(matrice,rend_esp,
ecartype_pf_equil,rend_bench,risk_bench);

%
%Calcul de la frontière efficiente
%
%inputs :
%
% matrice           : Matrice de variance-covariance calculée selon le modèle Risk-Metrics
% rend_esp          : Rendements espérés raffinés
% ecartype_pf_equil : Écart-type du portefeuille d'équilibre
% rend_bench        : Rendement du benchmark
% risk_bench        : Risque du benchmark
%
%outputs :
%
% riskpf_optimal    : Risque du portefeuille optimal
% maxpoids          : Poids du portefeuille optimal
%

%Nombre de portefeuille sur la frontière
numports=100;
rend_esp=rend_esp*12

%Composition de la frontière efficiente
[portrisk, portreturn, portwts]=portopt(rend_esp,matrice,numports);

%Tableau des rendements et du niveau de risque pour chaque combinaison de portefeuilles
front_eff=[portrisk portreturn portwts];

%Calcul de l'écart-type du portefeuille d'équilibre
minrisk=min(portrisk);
minrend=portreturn(find(portrisk==minrisk));
minpoids=portwts(find(portrisk==minrisk),:);
riskpf_optimal=min(portrisk(find((portrisk>=ecartype_pf_equil)&
(portrisk<=ecartype_pf_equil+0.05))));
maxpoids=portwts(find(portrisk==riskpf_optimal),:);

%Graphique de la frontière efficiente et du portefeuille de variance minimale
plot(portrisk,portreturn)
hold on;
plot(riskpf_optimal, rendpf_optimal, 'bo', 'linewidth',2, 'erasemode','normal')
hold on;
plot(risk_bench,rend_bench,'bx','linewidth',2,'erasemode','normal')
hold on;
plot(minrisk,minrend,'ro','linewidth',2,'erasemode','normal')
hold on;
plot(ecartype_pf_equil,rend_pf_equil,'rx', 'linewidth',2,'erasemode','normal')
title('Frontière efficiente','color','k');
xlabel('Risque (écart-type)');
ylabel('Rendement espéré');
grid on;

```