

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
AFFILIÉE À L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

L'évaluation d'options *lookback* américaines à prix d'exercice variable à l'aide de la programmation dynamique.

par

Jean-François Giroux

Sciences de la gestion

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences
(M.Sc.)

M2002
NO 155

Novembre 2002
© Jean-François Giroux, 2002

DÉCLARATION DE L'ÉTUDIANT
ÉTHIQUE EN RECHERCHE AUPRÈS DES ÊTRES HUMAINS

Recherche sans collecte directe d'informations

Cette recherche n'impliquait pas une collecte directe d'informations auprès de personnes (exemples : entrevues, questionnaires, appels téléphoniques, groupes de discussion, tests, observations participantes, communications écrites ou électroniques, etc.).

Cette recherche n'impliquait pas une consultation de documents, de dossiers ou de banques de données existants qui ne font pas partie du domaine public et qui contiennent des informations sur des personnes.

Titre de la
recherche :

*Evaluation d'options lookback à prix d'exercice
variable à l'aide de la programmation
dynamique.*

Nom de l'étudiant :

Jean-François Giroux

Signature :

J. Giroux

Date :

29 août 2002.

1. Sommaire

Le présent mémoire traite de la tarification d'options *lookback* de type américain à prix d'exercice variable. Une revue des méthodes proposées depuis le premier texte de Goldman, Sosin et Gatto (1979) ayant donné naissance aux options *lookback*, amène la conclusion qu'il y a encore de la place pour de nouveaux modèles flexibles et efficaces.

Ainsi, on présente un modèle basé sur les hypothèses de base du monde de Black et Scholes. On traite en détail du cas de l'option d'achat tout en donnant des commentaires sur l'adaptation aux options de vente. On propose de résoudre le problème par la programmation dynamique. À partir de là, on solutionne numériquement le problème. On crée une grille pour laquelle on fait l'hypothèse que les dates d'observation des extremums sont les mêmes que les dates d'évaluation de l'option, c'est-à-dire quotidiennement. Cette grille représente une fonction de valeur par rapport au prix du sous-jacent, à l'extremum et au temps. On approxime celle-ci à l'aide d'interpolations qui sont soit linéaires, soit à partir de trois points de la grille, dépendamment de l'endroit où l'on se trouve sur la grille. On approxime ensuite l'intégrale pour l'évaluation de la fonction de valeur. On donne une idée de la façon d'implémenter la méthode informatiquement par la présentation du pseudo-code. La programmation originale est effectuée en langage C++.

En général, notre modèle renvoie des valeurs qui sont près des autres méthodes mais on ne peut pas conclure sur la direction des écarts puisqu'elle n'est pas constante. L'ampleur est toutefois minime à l'exception d'un cas. On analyse également le comportement de la frontière d'exercice dans le cas des options de vente américaines.

2. Remerciements

Je tiens à remercier ma directrice, Mme Michèle Breton pour son aide précieuse et son financement lors de la rédaction de ce mémoire. Je veux aussi souligner l'apport de mes lecteurs, M. Hatem Ben Hameur et M. Pascal François.

Ceci est l'achèvement d'un long parcours dans lequel mes parents m'ont toujours supporté et encouragé. Je ne les remercierai jamais assez de leur appui constant. Merci également à mon frère Sébastien pour m'avoir ouvert le chemin et pour son soutien moral lors de moments plus difficiles.

Finalement, un grand merci à Marc Laberge et Hugo Dufour pour leur aide inestimable pour la programmation en C++.

3. Table des matières

1.	SOMMAIRE	1
2.	REMERCIEMENTS	2
3.	TABLE DES MATIÈRES	3
4.	LISTE DES TABLEAUX ET FIGURES	5
5.	INTRODUCTION	6
6.	REVUE DE LITTÉRATURE	9
6.1	FORMULES ANALYTIQUES, SEMI-ANALYTIQUES ET AUTRES	9
6.1.1	<i>Formules en temps continu</i>	9
6.1.2	<i>Formules en temps discret</i>	15
6.2	MÉTHODES NUMÉRIQUES	19
6.2.1	<i>Méthodes de treillis</i>	19
6.2.2	<i>Simulation de Monte Carlo</i>	23
6.2.3	<i>Méthode des différences finies</i>	25
6.3	CONCLUSION	25
7.	PRÉSENTATION DU MODÈLE	26
7.1	HYPOTHÈSES	26
7.2	MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DE L'ACTIF SOUS-JACENT	27
7.3	FORMULATION PAR PROGRAMMATION DYNAMIQUE	29
7.4	SOLUTION NUMÉRIQUE	30
7.4.1	<i>Partition et choix de la grille</i>	31
7.4.2	<i>Approximation de la fonction valeur par interpolation</i>	32
7.4.3	<i>Approximation de l'intégrale pour l'évaluation de la fonction de valeur</i>	34
7.5	PSEUDO-CODE	35
7.5.1	<i>Code pour une option d'achat lookback américaine</i>	35

7.5.2	<i>Code pour une option de vente lookback américaine</i>	39
8.	ANALYSE DES RÉSULTATS	43
8.1	DISCRÉTISATION DE LA VARIABLE τ	43
8.2	OPTIONS D'ACHAT	45
8.3	OPTIONS DE VENTE	52
8.4	LA FRONTIÈRE D'EXERCICE	54
8.5	GRAPHIQUE DE PAIEMENT	56
9.	CONCLUSION	57
10.	BIBLIOGRAPHIE	58

4. Liste des tableaux et figures

Tableau 1 : Valeur et convergence de l'option en fonction de q . $T = 91$, $\sigma = 10\%$	44
Tableau 2 : Comportement de la convergence (Δ %) par rapport à T lorsque $\sigma = 10\%$	44
Tableau 3 : Comportement de la convergence (Δ %) par rapport à σ lorsque $T = 364$	45
Tableau 4 : Comparaisons avec Barraquand et Pudet pour $\sigma = 10\%$	46
Tableau 5 : Comparaisons avec Barraquand et Pudet pour $\sigma = 20\%$	47
Tableau 6 : Comparaisons avec Barraquand et Pudet pour $\sigma = 40\%$	48
Tableau 7 : Comparaisons avec Levy et Manton.	49
Tableau 8 : Convergence selon les paramètres de Levy et Manton.	50
Tableau 9 : Comparaisons avec Kat.....	51
Tableau 10 : Comparaisons avec Barraquand et Pudet.	52
Figure 1 : Frontière d'exercice à quatre date différentes.....	54
Figure 2 : Plus-value (\$) de l'exercice vs la détention à travers le temps.	55
Figure 3 : Graphique de paiement d'une option de vente à deux dates différentes	56

5. Introduction

L'un des fondements même de la spéculation sur les marchés financiers demeure également depuis toujours son principal défi : acheter lorsque les prix sont bas et vendre lorsqu'ils sont hauts. Développer des techniques pour optimiser le moment des entrées et sorties dans des positions n'est pas chose facile et rares sont ceux qui peuvent en dégager des profits substantiels à long terme. Toutefois, un type d'option permet de faciliter cette stratégie : les options *lookback*.

Les options *lookback* font partie de la famille des options exotiques qui sont dépendantes de la trajectoire empruntée par l'actif sous-jacent. Leur valeur est fonction du maximum ou du minimum atteint par l'actif sous-jacent durant une période prédéterminée (période de mesure) qui peut être ou ne pas être la même que la période de vie de l'option. Étant donné la nature extrême de la fonction de paiement, ces options sont beaucoup plus chères que les options standards, soit environ le double. Elles permettent à l'investisseur d'utiliser ses connaissances quant à la volatilité du sous-jacent et sont particulièrement rentables pour l'acheteur si la volatilité réalisée s'avère plus grande que la volatilité implicite initiale.

Il en existe plusieurs variantes, dépendamment de la fonction de paiement et de l'échantillonnage des extremums. Tout d'abord, pour les options *lookback* à prix d'exercice fixe, le paiement est égal à la différence entre le prix d'exercice déterminé au départ et le prix le plus favorable qui a eu cours jusqu'à ce point (le maximum pour une option d'achat et le minimum pour une option de vente). Ce type d'option permet ainsi à son détenteur d'obtenir le meilleur prix lors de la sortie d'une position. D'un autre côté, pour les options *lookback* à prix d'exercice variable, le prix d'exercice n'est déterminé qu'à la fin de la période de mesure, permettant ainsi de choisir sur la trajectoire empruntée par l'actif sous-jacent, le prix d'exercice le plus favorable au détenteur (le minimum pour une option d'achat et le maximum pour une option de vente). Il est important de noter qu'elles finissent toujours en jeu, donc exercées. Ce type d'option

permet ainsi à son détenteur d'obtenir le meilleur prix lors de l'entrée dans une position.

Par ailleurs, d'autres variantes permettent de définir une gamme très large d'options *lookback*. On peut tout d'abord différencier l'échantillonnage des extremums selon qu'il est continu ou discret. Un échantillonnage discret ne captera pas nécessairement les extremums car la fonction n'est évaluée qu'à intervalles réguliers ; le prix de l'option sera donc moins élevé. De plus, on parle d'option *lookback* partielle (*partial lookback*) (Heynen et Kat, 1994) lorsque la période de mesure ne correspond pas à la durée de vie de l'option. On peut ainsi limiter la période de mesure à une durée plus ou moins courte au début ou vers la fin de la vie de l'option, selon que l'on projette de maximiser son entrée ou sa sortie dans la position. La fonction de paiement peut également être une fonction des extremums ou des amalgames avec d'autres types d'options exotiques. Par exemple, les *lookback* fractionnaires (*percentage* ou *fractional lookback*) altèrent le niveau des extremums par un ratio prédéterminé, les *lookback* sur la moyenne (*average lookback*) (Dewynne et Wilmott, 1995) empruntent la logique des options asiatiques et les options *ladder* combinent les *lookback* avec les options barrières de sorte que la discrétisation se fait en fonction du prix et non du temps. On peut également mentionner les options payant le maximum de plus d'un actif. La règle générale est que plus on altère le caractère extrême de la fonction de paiement, moins l'option est onéreuse.

L'idée d'une telle sorte d'options avait été suggérée par Goldman, Sosin et Gatto en 1979. Ces derniers voyaient trois justifications économiques à la création d'un tel type d'option : celle-ci garantirait un achat au minimum du prix réalisé par l'actif et une vente à son maximum, elle minimiserait le regret et fournirait aux investisseurs de l'information sur l'étendue de prix de l'actif sous-jacent. Elles ont été transigées pour la première fois en 1982 par la Macotta Metals Corporation sur l'or, l'argent et le platine. En plus des commodités, leur utilisation s'est depuis répandue aux autres types d'actifs et des variantes sont utilisées dans certaines émissions de bons de souscriptions. Cependant, un sondage rapide auprès de professionnels du marché, rapporté par Smithson (2000), montre que l'utilisation des options *lookback* n'est pas très répandue : ces dernières ne

seraient utilisées que « rarement » dans les marchés des taux d'intérêt, des changes et des commodités alors qu'elles seraient utilisées « occasionnellement » sur le marché boursier. De plus, les transactions seraient limitées au marché de gré à gré.

Dans ce mémoire, on propose une méthode d'évaluation des options *lookback* américaines à prix d'exercice variable. Le problème est formulé à l'aide de la programmation dynamique. Une revue des différentes méthodes ayant été développées jusqu'à maintenant dans la littérature est présentée dans la Section 5. On peut y retrouver deux principales familles : les formules analytiques et semi-analytiques ainsi que les méthodes numériques. La Section 6 présente le modèle en détail : la modélisation des différentes variables et paramètres puis la méthode proposée pour solutionner le problème. Puis, la Section 7 contient l'analyse des résultats obtenus de l'implémentation du modèle. On présente finalement la conclusion du mémoire dans la Section 8.

6. Revue de littérature

6.1 Formules analytiques, semi-analytiques et autres

Il existe plusieurs variantes aux options *lookback*. Ainsi, il va de soi que la littérature se soit intéressée à trouver des solutions fermées ou semi-fermées pour la valeur des variantes les plus populaires. Plusieurs de ces formules, bien qu'utiles, ne sont que de petites améliorations par rapport à celles de base. On tentera donc de présenter les plus importantes.

6.1.1 Formules en temps continu

Goldman, Sosin et Gatto (1979) sont les premiers à suggérer que la création des options *lookback* puisse répondre à un besoin en pratique : acheter bas et vendre haut. S'appuyant sur les travaux de Black et Scholes (1973), Merton (1973), Cox et Ross (1976) ainsi que de Harrison et Kreps (1978), ils dérivent une formule analytique pour l'évaluation d'options européennes à prix d'exercice variable tout en indiquant comment on peut les couvrir.

En s'appuyant sur les mêmes hypothèses que Black et Scholes (1973), les auteurs démontrent tout d'abord que lorsque le logarithme du rendement de l'actif sous-jacent a un terme de tendance risque-neutre nul, un portefeuille de couverture peut être créé par l'achat d'une option d'achat standard ainsi que d'une option de vente standard, toutes deux avec un prix d'exercice égal au prix initial du sous-jacent et une maturité égale à celle de l'option à couvrir. Cette stratégie porte le nom de *straddle*. Lorsque l'actif sous-jacent atteint un nouvel extremum, le portefeuille initial doit être vendu et remplacé par un nouveau portefeuille (un *straddle* dont le prix d'exercice est égal au nouvel extremum). Les auteurs démontrent que cela constitue une stratégie autofinancée.

Ainsi, contrairement aux options standards dont la valeur est directement affectée par des variations du prix d'exercice, les options *lookback*, lorsqu'elles sont à un nouvel extremum, voient leur valeur inchangée pour une variation infinitésimale du prix d'exercice.

De plus, dans un monde neutre au risque, la valeur des options est égale à la valeur actualisée de l'espérance du paiement à l'échéance. Or, puisque $Prob_Q(m_T \leq S_T \leq M_T) = 1$, ces options seront définitivement exercées. Ainsi, il n'est pas nécessaire de connaître la fonction de densité conjointe de l'extremum et de la valeur terminale d'un processus de Wiener avec tendance. Seule la fonction de densité conditionnelle de l'extremum est requise. Donc, pour évaluer les options *lookback*, il suffit d'évaluer un titre qui paierait le maximum ou le minimum, puis de prendre la différence avec la valeur de l'actif sous-jacent à ce moment. On a donc :

$$P_t = M_t - S_t$$

et

$$C_t = S_t - m_t.$$

En conséquence, de façon générale, les options peuvent être couvertes si l'on prouve que M_t et m_t peuvent l'être également. Ici encore, on n'a qu'un seul ratio de couverture car, lorsqu'on est à un nouvel extremum (par exemple si $S_t = m_t$), l'espérance de m_T ainsi que la valeur de l'option restent inchangées pour une variation marginale de l'extremum. En fait, pour les options d'achat, l'impact des changements marginaux de m_t sur la valeur de l'option peuvent être vus comme étant proportionnels à la probabilité que m_t soit bel et bien le minimum à l'échéance, c'est-à-dire $m_T = m_t$.

Les auteurs dérivent les formules analytiques pour M_t et m_t , mais la littérature subséquente n'a retenu que les formules pour les options qui peuvent en être déduites en quelques étapes. Les voici donc :

$$C_t = S_t N[d_1] - m_t e^{-r(T-t)} N[d_2] + S_t e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \left[\left(\frac{S_t}{m_t} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N \left[-d_1 + \frac{2r}{\sigma} \sqrt{T-t} \right] - e^{r(T-t)} N[-d_1] \right]$$

et

$$P_t = -S_t N[-d_1] + M_t e^{-r(T-t)} N[-d_2] + S_t e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \left[- \left(\frac{S_t}{M_t} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N \left[d_1 + \frac{2r}{\sigma} \sqrt{T-t} \right] + e^{r(T-t)} N[d_1] \right]$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/m_t) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (1)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (2)$$

$N[\bullet]$ est la distribution cumulative normale de moyenne 0 et de variance 1.

On peut voir ces formules comme étant la valeur d'une option standard selon Black et Scholes additionnée d'un autre terme. Si l'on prend le cas de l'option d'achat, en posant $r = \sigma^2/2$, on peut constater (après quelques simplifications) que ce deuxième terme devient la formule de la valeur d'une option de vente standard. Fait important, P_t et C_t de même que M_t et m_t sont régis par la même équation différentielle partielle, et qui plus est, la même que pour les options standards; c'est-à-dire :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0,$$

où V est la valeur de l'instrument financier dérivé à évaluer.

Les auteurs fournissent également des théorèmes quant au comportement des options *lookback*. Tout d'abord, pour $r = \sigma^2/2$ et M normalisé à l'unité, une option de vente *lookback* se comporte, en fonction de S , en premier lieu comme une option de vente

standard en jeu puis comme une option d'achat standard hors-jeu. En fait, en tout temps lorsque $M=S$ ou que $[M-S]$ est suffisamment petit, le détenteur de l'option de vente espère d'abord que l'actif sous-jacent va monter (comme s'il détenait une option d'achat) et établir un nouveau sommet. À partir de ce point, il espère maintenant que l'actif descendra (comme s'il détenait une option de vente standard). Maintenant, concernant le comportement des options d'achat *lookback*, les auteurs soulignent que C_t est croissant en S et en t .

De leur côté, Conze et Viswanathan (1991) présentent des formules analytiques pour l'évaluation de différents types d'options *lookback* européennes, à savoir : les *lookback* à prix d'exercice variable, les *lookback* à prix d'exercice fixe ainsi que les *lookback* fractionnaires¹. Celles-ci sont dérivées à partir des fonctions de densité des variables $X_t = \ln(S_t/S_0)$, $Y_t = \ln(M_t/S_0)$ et $y_t = \ln(m_t/S_0)$. Les formules pour les options *lookback* à prix d'exercice variable sont les mêmes que celles obtenues par Goldman, Sosin et Gatto (1979). On ne présentera ici que les formules pour les options d'achat mais les auteurs fournissent également les formules pour des options de vente. Les options *lookback* à prix d'exercice fixe ont la fonction de paiement suivante :

$$C_T = \max[M_T - K, 0]$$

Leur évaluation se fait en fonction du niveau du maximum par rapport au prix d'exercice. Tout d'abord, lorsque $K < M_0$,

$$C_t = S_t N[d_1] - K e^{-r(T-t)} N[d_2] + S_t e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \left[\left(\frac{S_t}{K_t} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N \left[d_1 - \frac{2r}{\sigma} \sqrt{T-t} \right] + e^{r(T-t)} N[d_1] \right]$$

Et lorsque $K \geq M_0$,

$$C_t = e^{-r(T-t)} (M_t - K) + S_t N[d_1] - M_t e^{-r(T-t)} N[d_2] + S_t e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \left[- \left(\frac{S_t}{K_t} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N \left[d_1 - \frac{2r}{\sigma} \sqrt{T-t} \right] + e^{r(T-t)} N[d_1] \right]$$

¹ Les auteurs utilisent l'appellation *partial lookback*, ce qui les confond avec un autre type.

où d_1 et d_2 sont donnés par (1) et (2). Pour les options *lookback* fractionnaires à prix d'exercice variable, la fonction de paiement est :

$$C_T = \max[S_T - \lambda m_T, 0]$$

où λ est une constante. On aura généralement $\lambda \geq 1$ pour une option d'achat et $0 \leq \lambda \leq 1$ pour une option de vente. Cela a pour but de diminuer le coût de l'option. Évidemment, lorsque $\lambda = 1$, on retrouve la formule standard. On a donc, avec d_1 et d_2 donnés par (1) et (2) :

$$C_t = S_t N\left[d_1 - \frac{\ln(\lambda)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] - \lambda m_t e^{-r(T-t)} N\left[d_2 - \frac{\ln(\lambda)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] \\ + \lambda S_t e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \left[\left(\frac{S_t}{m_t}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N\left[-d_1 - \frac{\ln(\lambda)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{2r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right] - e^{r(T-t)} \lambda^{\frac{2r}{\sigma^2}} N\left[-d_1 - \frac{\ln(\lambda)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] \right]$$

Les auteurs fournissent également des bornes pour la version américaine de ces options à l'aide des enveloppes de Snell. Les options d'achat et de vente américaines sont représentées respectivement par C_t^a et P_t^a . Pour les options *lookback* à prix d'exercice variable, on a :

$$C_0^a = C_0 \\ P_0 \leq P_0^a \leq P_0 e^{rT} + S_0 (e^{rT} - 1)$$

Pour les options *lookback* à prix d'exercice fixe, on a :

$$C_0 \leq C_0^a \leq C_0 e^{rT} \text{ et} \\ P_0 \leq P_0^a \leq P_0 e^{rT}$$

Finalement, pour les options *lookback* fractionnaires, on a :

$$C_0^a = C_0, \\ P_0(\lambda) \leq P_0^a(\lambda) \text{ pour tous les } \lambda \text{ et}$$

$$P_0^a(\lambda) \leq P_0(\lambda e^{rT}) \text{ pour } \lambda e^{rT} \geq 1.$$

Heynen et Kat (1994) présentent une nouvelle variante n'ayant pas encore été abordée dans la littérature jusque là. Ils s'intéressent tout d'abord aux options *lookback* partielles de pourcentage à prix d'exercice variable. L'intuition économique derrière ces options dicte que la période de mesure doit préférablement être au début du contrat, jusqu'à une date t_1 , où $0 \leq t_1 \leq T$. En effet, on veut préférablement que le titre baisse et marque un nouveau minimum au début de la vie de l'option pour ensuite laisser le titre monter et obtenir un plus grand paiement à la fin de la vie de l'option. Afin de dériver la formule analytique pour une option d'achat, trois probabilités ont à être calculées, les trois même que celles de Conze et Viswanathan. Pour une option de vente, il suffit de multiplier tous les termes de la formule pour l'option d'achat ainsi que toutes les limites d'intégrales par -1 et de remplacer le minimum par le maximum. La résultante pour l'option d'achat peut être vue comme la valeur d'une option standard selon Black et Scholes avec un prix d'exercice égal à λm_0 ainsi qu'une suite d'autres termes que Garman (1989) avait appelé « option boni à prix d'exercice partiel et fractionnaire ». Les auteurs expliquent également le comportement de ce type d'option. Fait intéressant, l'impact sur le prix de chaque jour supplémentaire dans la période de mesure diminue dans le temps. Cette relation s'explique par le fait que plus on est près de l'échéance, moins grande est la probabilité que l'actif dépasse substantiellement le prix d'exercice fixé jusque-là pendant la période de mesure.

Un exercice similaire est fait pour les option *lookback* à prix d'exercice fixe. Ici, l'intuition économique dicte que la période de mesure doit être à la fin de la vie de l'option car on veut maximiser la sortie de la position. La période de mesure commence donc à la période t_1 , où $0 \leq t_1 \leq T$. Le développement des formules se fait de façon similaire à celle décrite précédemment.

Toutes les évaluations par formules analytiques ont l'avantage d'être simples et rapides pour l'utilisateur et permettent l'ajout d'autres variables comme un taux de

dividende (voir Garman, 1989). Cependant, elles sont limitées aux options européennes et comportent également une faiblesse marquante : elles supposent une mesure continue des extremums. Cela est impossible en pratique. On verra plutôt les extremums être mesurés de façon journalière, hebdomadaire, mensuelle ou même de façon encore plus espacée. Cela fait en sorte que les prix obtenus par ces formules analytiques sont supérieurs à ceux observés en pratique. La prochaine partie porte sur des améliorations apportées aux formules vues jusqu'ici afin de les adapter à une mesure discrète des extremums.

6.1.2 Formules en temps discret

La première tentative d'ajustement est effectuée par Heynen et Kat (1995). Ils se basent sur le monde de Black et Scholes, incluant l'hypothèse selon laquelle les transactions se font en temps continu. Toutefois, la mesure des extremums, elle, s'effectue de façon discrète à un certain nombre de points, pas nécessairement répartis uniformément dans le temps.

Pour les options à prix d'exercice variable, la période de mesure s'échelonne de l'émission de l'option jusqu'à une date arbitraire t_{k_N} , où $0 < t_{k_N} < T$. Débutant le compte à $t_0=0$, le nombre total de mesures de l'extremum est noté N alors que la $k^{\text{ième}}$ date de mesure est représentée par t_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Dans le cas des options d'achat, le minimum actuel est noté m_0 alors que le minimum mesuré sur les N prochaines dates est noté m_{k_N} . Le prix d'une telle option d'achat peut ainsi être obtenu par :

$$C_0 = e^{-rT} E[\max(S_T - \min(m_0, m_{k_N}), 0)]$$

En appliquant le théorème de Girsanov et après quelques modifications, on se retrouve en présence de trois espérances de variables de la forme S_k/S_{k+1} , S_k/S_T ou S_k/m_0 qui ont en fait des distributions normales multivariées. Puisque ces distributions sont spécifiées par leurs moyennes et leurs matrices de variance-covariance, on peut donc réécrire les trois équations en terme de fonction de densité cumulative normale

multivariée standard. En rassemblant tous les termes, les auteurs obtiennent finalement une formule quasi-analytique pour les options d'achat, c'est-à-dire qu'une méthode numérique doit tout de même être utilisée pour évaluer certains termes. Une formule pour les options de vente peut être obtenue en multipliant la formule de l'option d'achat de même que toutes ses limites d'intégration par -1 et en remplaçant le minimum par le maximum. Ces formules peuvent facilement être adaptées pour une période de mesure débutant à un point quelconque dans le future et se terminant à l'échéance de l'option.

Une méthode similaire est utilisée pour développer une formule quasi-analytique pour les options à prix d'exercice fixe. Dans ce cas, le prix d'une option d'achat peut être obtenue par :

$$C_0 = e^{-rt} E[\max(M_T - K, 0)]$$

où

M_T = la valeur maximale enregistrée à n'importe quelle période de mesure

K = le prix d'exercice.

Cependant, la formule trouvée ne peut s'appliquer aux options à prix d'exercice fixe qui ont été émises à une période passée, donc pour laquelle un maximum existe déjà. La méthode est ainsi répétée pour ce type particulier d'option et une autre formule quasi-analytique est trouvée.

Une fois qu'on a ces formules, il reste à trouver une méthode pour évaluer les probabilités cumulatives normales standards. Les auteurs ont choisi celle proposée par Barrett, Moore et Wilmott (1992). Après avoir implémenté cette méthode, ils vérifient que la mesure discrète des extremums n'affecte pas la couverture des options. Ces dernières demeurent une fonction différentiable continue du temps et du prix de l'actif sous-jacent.

Il est difficile de juger cette méthode car aucun détail n'est donné sur la façon de résoudre les formules à l'aide de la méthode de Barrett, Moore et Wilmott (1992). Toutefois, selon Broadie, Glasserman et Kou (1999), ce type de technique est sans valeur

lorsque le nombre de dates de mesure des extremums est supérieur à cinq puisqu'on se retrouve alors avec une distribution cumulative normale multivariée à autant de dimension.

Ces derniers proposent donc une autre méthode pour faire le lien entre l'échantillonnage continu et discret des extremums. Cela prend la forme d'un ajustement aux formules analytiques présentée précédemment. On ne rapporte ici que les résultats car les auteurs font eux-mêmes référence à d'autres ouvrages pour expliquer leur démarche. Donc, la valeur d'une option d'achat *lookback* à prix d'exercice variable dont la mesure du minimum se fait de façon discrète peut être approximée par :

$$C_0 = - \left[e^{\beta\sigma\sqrt{T-t_0}/N} C \left(m e^{-\beta\sigma\sqrt{T-t_0}/N} \right) + S_t \left(e^{\beta\sigma\sqrt{T-t_0}/N} - 1 \right) \right] + o \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right)$$

où

$$\beta = - \frac{\zeta(1/2)}{\sqrt{2\pi}} \text{ avec } \zeta \text{ la fonction zêta de Riemann}$$

C = Valeur en temps continu de la même option d'achat

N = nombre de périodes de mesure de l'extremum

$o(\bullet)$ = terme d'erreur.

Cet ajustement revient à altérer le présent minimum par un facteur de $e^{\beta\sigma\sqrt{T-t_0}/N}$ puis à gonfler le minimum espéré par le même facteur. Une formule similaire est fournie pour les options de vente. Pour les options d'achat à prix d'exercice fixe, noté K , l'ajustement est le suivant :

$$C_0 = e^{-\beta\sigma\sqrt{T-t_0}/N} C \left(M e^{\beta\sigma\sqrt{T-t_0}/N}, K e^{\beta\sigma\sqrt{T-t_0}/N} \right) + o \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right)$$

La méthode d'ajustement proposée semble simple et, selon les auteurs, donne une bonne approximation de la valeur des options à échantillonnage discret des extremums.

Levy et Manton (1997, 1998) ont également travaillé sur l'approche en temps discret par l'approximation d'une solution analytique. Les auteurs partent de la formule américaine en temps continu de Garman (1989) et la corrigent à l'aide d'une série de Taylor de second degré. On a ainsi :

$$C_h = C_t^\infty + \alpha\sqrt{h} + \beta h$$

où $h = 1/N$, N étant le nombre de périodes d'observation restantes,

C_h est la valeur de l'option à évaluer en fonction de N ,

C_t^∞ est la valeur selon la formule de Garman en temps continu et

α, β sont les paramètres à estimer.

Pour déterminer α et β , on évalue les valeurs d'options discrètes selon $N=1$ et $N=2$, c'est-à-dire C_t^1 et C_t^2 . Avec une seule date de mesure, C_t^1 est simplement la valeur d'une option européenne pour laquelle une solution analytique existe. Une formule est développée pour C_t^2 . On peut ainsi solutionner en respectant les conditions suivantes :

$$\alpha\sqrt{1/2} + \beta 1/2 = C_t^2 - C_t^\infty \text{ et}$$

$$\alpha + \beta = C_t^1 - C_t^\infty.$$

Par la suite on interpole pour trouver d'autres valeurs en fonction de N . Les auteurs affirment que leur technique est plus efficace et plus rapide que celle de Broadie, Glasserman et Kou.

6.2 Méthodes numériques

Les formules qu'on a vues précédemment ne peuvent pas solutionner tous les types de problèmes qui accompagnent le développement d'option adaptées aux besoins spéciaux de certains investisseurs. Les méthodes numériques permettent de solutionner un plus large éventail de variantes des options *lookback*. De plus, le fait qu'elles soient toutes des approximations discrètes leur donne un avantage, celui d'être ainsi plus près de la réalité. On peut répertorier trois grandes familles de méthodes numériques : les méthodes de treillis, la simulation de Monte Carlo ainsi que les méthodes de différences finies. La première est la plus courante dans la littérature, on y accorde donc plus d'importance.

6.2.1 Méthodes de treillis

Le premier à proposer une méthode numérique pour l'évaluation des options *lookback* est Babbs (1992, publié en 2000) avec un arbre binomial basé sur l'hypothèse de Black et Scholes que les actifs suivent un mouvement brownien géométrique. Sa méthode s'applique aux options *lookback* à prix d'exercice variable pour lesquelles la fonction de paiement d'une option d'achat est, rappelons-le, $C_T = \max(S_T - m_T, 0)$. Afin de simplifier le problème, Babbs utilise le prix de l'actif du sous-jacent comme numéraire. La valeur de l'option est donc exprimée en fraction de celui-ci :

$$C_k^* = \frac{C_k}{S_k} = \frac{S_k - m_k}{S_k} = 1 - \exp\left[-\ln\left(\frac{S_k}{m_k}\right)\right].$$

Cela permet de n'utiliser qu'une seule variable tout au long de l'arbre, à savoir : $V_k = \ln(S_k/m_k)$. Puisqu'en temps continu l'actif ne peut descendre sous son minimum, V_k ne sera jamais négatif. De plus, cette variable est toujours multiple de $\ln(u)$ où $u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$, l'arbre se recombine donc. Lorsque $V_k > 0$, la trajectoire de l'actif sous-jacent peut, soit monter vers $S_k u$, soit descendre vers $S_k d$ où $d = 1/u$. La variable prend alors respectivement les valeurs $V_k + \ln(u)$ et $V_k - \ln(u)$. Par contre, lorsque $V_k = 0$, l'actif

sous-jacent est égal au prix minimum. À la prochaine période, si le prix augmente vers $S_k u$, alors V_k monte à $V_k + \ln(u)$. Mais si le prix diminue vers $S_k d$, un nouveau minimum sera réalisé et V_k sera aussi égal à zéro. Cette barrière de réflexion à l'origine est une des particularités intéressantes du modèle de Babbs. On verra donc un nœud de l'arbre de V_k correspondre à plus d'un nœud de l'arbre de S_k .

On calcule ensuite C_T^* pour toutes les valeurs de V_T . Étant donné ces valeurs terminales, on progressera de la fin vers le début dans l'arbre de V_k comme dans un arbre standard à l'exception que la probabilité sans risque d'un mouvement à la hausse est ici

$$q = p \frac{u}{e^{rdt}} = \frac{u - e^{rdt}}{u - d}.$$

Cet ajustement est effectué afin de tenir compte du fait que les prix sont calculés en fraction de l'actif sous-jacent plutôt qu'en dollars. Il ne reste plus qu'à multiplier C_0^* par S_0 et on obtient la valeur de l'option.

Cheuk et Vorst (1997) présentent un arbre binomial à un seul état semblable à celui proposé par Babbs (1992) mais plutôt que de se baser sur le monde de Black et Sholes, ils utilisent une méthode plus simple basée sur les arguments d'arbitrage du modèle de Cox, Ross et Rubinstein (1979). La différence la plus marquante se situe dans le fait que cette fois la valeur zéro est traitée comme une barrière absorbante plutôt que réfléchissante. De plus, l'arbre est construit pour C_k^* plutôt que V_k .

Toutefois, Cheuk et Vorst fournissent également un modèle binomial pour les options lookback à prix d'exercice fixe. À chaque période, la valeur de l'option comprendra deux composantes :

- (1) La valeur intrinsèque assurée jusque-là, basée sur la fonction de paiement à l'échéance, égale à $\max(M_k - K, 0)$ et

- (2) Une nouvelle option d'achat lookback avec un prix d'exercice qui correspond à $K_k^* = \max(M_k, K)$.

Cette fois l'arbre binomial est construit pour la variable $Y_k = \ln(S_k/K_k^*)$. On peut une fois de plus distinguer deux types de nœuds. Lorsque $Y_k < 0$, la trajectoire de l'actif sous-jacent peut soit monter vers $S_k u$, soit descendre vers $S_k d$. La variable prend alors respectivement les valeurs $Y_k + \ln(u)$ et $Y_k - \ln(u)$. Par contre lorsque $Y_k = 0$, l'option n'a aucune valeur intrinsèque, mais si S_k monte, elle gagnera une valeur qui correspond au paiement à l'échéance, c'est-à-dire $S_k u - K_k^*$. Sa valeur actualisée, toujours en fraction de l'actif sous-jacent, est mise de côté au prochain nœud alors qu'on met K_k^* égal à $S_k u$. La valeur de Y_k revient donc à zéro. Finalement, lorsque $Y_k = 0$ et que l'actif sous-jacent descend, Y_k passe à $Y_k - \ln(u)$. Le reste se fait de la même façon que pour la méthode de Babbs, incluant la mesure de probabilité q .

Ces deux méthodes présentent une faiblesse au niveau de la discrétisation des trajectoires puisque seulement les périodes de mesure des extremums sont considérées. C'est pourquoi Cheuk et Vorst proposent une façon simple de pallier ce problème. Il suffit de laisser évoluer l'arbre entre les périodes de mesure; le prix de l'actif sous-jacent pouvant même prendre des valeurs négatives. Cependant, au prochain nœud de mesure, tous les nœuds sous la barre du zéro reviendront à cette dernière.

Proposée entre les deux méthodes précédentes, la méthode de Hull et White (1993) est certes la plus simple, ce qui s'avère sa principale force. Les auteurs partent du modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979) et lui ajoutent une variable d'état supplémentaire : l'extremum actuel. Donc, contrairement aux méthodes précédentes, on a deux variables d'état et on n'a plus besoin de modifier la mesure de probabilité. Ainsi, à chaque nœud on détermine l'extremum puis on calcule la valeur de l'option pour chacune des possibilités d'extremum. Il est important de noter que le nombre d'alternatives pour

l'extremum croit linéairement avec le nombre de périodes n , il ne deviendra donc jamais plus grand que n .

Cette dernière méthode dépasse les précédentes en termes de simplicité et de flexibilité. Elle peut s'adapter à n'importe quel type d'option *lookback* alors que les deux autres méthodes ne peuvent évaluer les options américaines à prix d'exercice fixe ni les options versant des dividendes de façon discrète. Cependant, en termes d'exactitude et d'efficacité, la méthode de Hull et White affiche de mauvais résultats. Cela est en accord avec les résultats de Kat (1995), qui effectue une comparaison des trois méthodes binomiales. Selon lui, pour un nombre donné de périodes, les trois méthodes génèrent les mêmes prix mais celle de Hull et White prend beaucoup plus de temps et de mémoire d'ordinateur, car on doit garder en mémoire tous les extremums à chaque noeud. Kat conclut donc qu'autant que possible, on doit favoriser les méthodes de Babbs et de Cheuk et Vorst par rapport à celle de Hull et White.

Kat compare aussi les méthodes de Babbs et de Cheuk et Vorst avec une simulation de Monte Carlo (voir plus bas). Il bâtit un intervalle de confiance de 95% autour de l'estimé pour servir de référence. Les arbres binomiaux obtiennent des résultats suffisamment près de l'estimé sauf pour les options hors-jeu ainsi que pour les options *lookback* partielles.

Barraquand et Pudet (1996) présentent également un modèle très semblable à celui de Hull et White. Ils proposent en effet un arbre binomial à deux variables d'état sous la logique du modèle de Cox, Ross et Rubinstein. Par contre, les auteurs démontrent que leur modèle converge rapidement vers une solution. En laissant l'intervalle de temps s'approcher de zéro, leur modèle tend en effet vers la solution analytique de Goldman, Sosin et Gatto. Il s'adapte également facilement au cas américain et aux diverses variantes des *lookbacks*.

On peut également souligner la méthode de Broadie, Glasserman et Kou (1999). On a déjà présenté les ajustements aux formules analytiques qu'ils ont proposé afin de

concilier le temps continu avec le temps discret. Ici, ils proposent des arbres trinomiaux qui utilisent aussi des termes de correction qui sont destinés à accélérer la convergence vers le prix exact.

6.2.2 Simulation de Monte Carlo

La première méthode basée sur la simulation de Monte Carlo fut proposée par Kat (1995) afin de pouvoir comparer l'efficacité des arbres binomiaux à une méthode de référence (voir plus haut). Il a ainsi développé une version améliorée de la simulation de Monte Carlo de base. Kat utilise l'approximation discrète d'un mouvement brownien géométrique ainsi qu'un échantillonnage stratégique pour générer 10 000 valeurs terminales pour l'actif sous-jacent. L'ensemble des résultats obtenus est divisé en 150 strates dont le nombre de tirages correspond au nombre théorique d'observations espérées. Chacune des valeurs terminales est liée au prix actuel de l'actif sous-jacent à l'aide d'un pont Brownien conditionné pour atteindre la valeur terminale appropriée. Kat utilise également la méthode des variables antithétiques afin de réduire l'erreur d'estimation.

Cette méthode ne s'éloigne pas beaucoup de la simulation de base. D'autres méthodes plus efficaces ont été développées par la suite. C'est le cas de la méthode de Andersen et Brotherton-Ratcliffe (1996). Ces derniers utilisent la théorie des temps d'arrêt pour déterminer le moment où le prix du sous-jacent atteindra un nouvel extremum dans un contexte d'approximation du temps continu. Les distributions de probabilité du maximum et du minimum sur un intervalle donné sont directement reliés à la distribution de probabilité du moment du premier contact avec l'extremum établi jusque là. Donc pour simuler le prix minimum sur un interval de t_{k-1} à t_k , étant donné S_{k-1} et S_k , on n'a qu'à générer une variable aléatoire X_k tirée d'une loi uniforme $U(0,1)$ et de fixer :

$$m_k = \xi_k^{-1}(X_k)$$

où, pour $H \leq \min(S_{k-1}, S_k)$,

$$\xi_k(H) = \text{Prob}\{\min(S_s : s \in [k-1, k]) < H | S_{k-1}, S_k\}$$

et pour $H \geq \max(S_{k-1}, S_k)$,

$$1 - \xi_k(H) = \text{Prob}\{\max(S_s : s \in [k-1, k]) < H | S_{k-1}, S_k\}.$$

Pour fixer le maximum, on utilise plutôt $M_k = \xi_k^{-1}(1 - X_k)$. La fonction de paiement est ensuite calculée selon

$$\max\{S_k : k = 0, 1, \dots, T\} - S_T.$$

Ainsi, en simulant l'extremum directement, on obtient un estimateur non biaisé de l'option lookback en temps continu et ce, en n'effectuant qu'un seul pas dans la simulation. Cependant cette technique ne peut être utilisée lorsqu'on fait face au temps discret. Les auteurs estiment que la différence entre la valeur d'une option en temps discret et continu diminue approximativement avec $\delta^{1/2}$, où δ est le temps entre les périodes de mesure ou d'observation. L'erreur nette dans le prix calculé est ainsi de l'ordre de $o(\delta^{1/2})$. En notant V_C et V_δ respectivement la valeur d'une option mesurée en temps continu et discret, on a :

$$V_\delta = V_C + \lambda \delta^{1/2} + o(\delta^{1/2})$$

où λ est indépendant de δ .

Une autre approche fut proposée par Babsiri et Noël (1998). L'idée est de simuler les extremum à l'aide de leur propre distribution de probabilité et conditionnellement à la valeur terminale également simulée. L'évaluation d'une option lookback de base ne requiert ainsi que deux tirages par trajectoire et s'avère donc une méthode efficace.

Cependant, cette simulation de Monte Carlo a le désavantage de ne pas pouvoir s'appliquer aux options américaines et les caractéristiques de certains contrats peuvent rendre son exécution lente.

6.2.3 Méthode des différences finies

Bien qu'il n'existe pas d'ouvrage sur une évaluation concrète d'options *lookback* à l'aide de la méthode des différences finies, Wilmott, Dewynne et Howison (1993) donnent quelques indications sur les conditions terminales et quelques bornes. La méthode générale appliquée à l'évaluation de produits dérivés financiers est expliquée dans le même ouvrage ainsi que dans Wilmott (1998).

Wilmott, Dewynne et Howison (1993) proposent une équation différentielle partielle où deux variables ont été ramenée à une seule : $\xi = S/m$. Cela ne s'applique cependant qu'aux classes d'options pour lesquelles la fonction de paiement à l'échéance est du type $m \cdot f(S/m, t)$. On a donc :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + r\xi \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \xi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - rW = 0$$

$$\text{où } W(\xi, t) = C_i / m_i.$$

Wilmott (1998) présente la méthode des différences finies implicite comme étant celle qui convient le mieux aux options comme les *lookback*, sans toutefois pousser plus loin.

6.3 Conclusion

Comme on a pu le constater, il existe une quantité relativement importante de méthodes qui ont été proposées jusqu'à maintenant pour évaluer les options de type *lookback*. Il est cependant difficile de pouvoir juger laquelle d'entre elles est la meilleure. Certaines techniques ne sont efficaces que dans certaines situations alors que d'autres prennent leur force dans leur flexibilité. Toutefois, il demeure qu'il reste encore beaucoup de place pour de la recherche nouvelle sur le sujet, et c'est ce qu'on tentera de faire par la suite.

7. Présentation du modèle

Le droit contingent que l'on tente d'évaluer est défini comme étant une option *lookback* à prix d'exercice variable de type américain. Afin de faciliter la comparaison avec les modèles précédents, on propose ici en détail un modèle pour les options d'achats mais des commentaires sont également fournis pour l'adaptation aux options de vente. On doit donc mesurer le minimum de l'actif sous-jacent à toutes les périodes d'observation dans le cas de l'option d'achat et le maximum pour l'option de vente. Puisque la littérature (Smithson, 2000) soulève que la grande majorité des options *lookback* comportent une mesure discrète du minimum, on propose un modèle qui va dans la même direction. L'évaluation de la valeur de l'option s'effectue également de façon discrète.

7.1 Hypothèses

On fait l'hypothèse que les dates d'évaluation correspondent aux dates d'observation de l'extremum. On suppose que l'actif sous-jacent ne verse aucun dividende et que la volatilité σ , ainsi que le taux d'intérêt sans risque r , sont constants. Il évolue donc dans un monde répondant aux hypothèses de Black et Sholes (1973).

Au moment présent, $t_0=0$, on connaît la valeur du minimum. Dans le cas d'une option à sa date d'émission, ce minimum sera simplement la valeur actuelle de l'actif sous-jacent : $m_0 = S_0$. Si toutefois l'émission de l'option s'est effectuée avant le moment présent, disons à une date $T_0 < t_0$, le minimum sera une valeur inférieure ou égale à la valeur actuelle de l'actif sous-jacent. Or, puisqu'on connaît également cette valeur à t_0 , on garde la même notation. On a donc $m_0 = \min\{S_{T_0}, S_{T_0+1}, \dots, S_{t_0-1}, S_0\}$. De façon générale et jusqu'à l'échéance on a $m_k = \min\{m_0, S_s | s \in \{0, 1, \dots, k\}\}$ pour $k = 1, 2, \dots, N$ où $T = t_{k_N}$ représente l'échéance de l'option.

La tarification d'options américaines peut être exprimée sous forme d'un processus de décision de Markov, c'est-à-dire un problème de programmation dynamique (PD) stochastique. On développe une fonction de valeur qui exprime le prix de l'option comme étant fonction du temps, du prix de l'actif sous-jacent ainsi que du présent minimum. Cette fonction satisfait une récurrence de PD.

On suppose que la période de mesure correspond à la vie complète de l'option à partir du moment présent. Ainsi, $0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ représente une série de périodes d'observation où T représente la date d'échéance du contrat. Si l'option est exercée au temps t_k , le paiement de l'option d'achat est $\max(S_k - m_k, 0)$ et $\max(M_k - S_k, 0)$ pour l'option de vente. Afin de simplifier le problème, on suppose que les dates d'observation sont espacées de façon égale : $t_k - t_{k-1} = h$, pour $k = 1, \dots, N$ et une constante quelconque h . La valeur de h sera typiquement guidée par le contrat que l'on tente d'évaluer, selon que la mesure du minimum se fasse de façon quotidienne, hebdomadaire et ainsi de suite. Ici on a donc $h = 1/365$.

7.2 Modélisation du comportement de l'actif sous-jacent

Fidèlement aux hypothèses de Black et Scholes, le processus $\{S_t : t \in [0, T]\}$ de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique. De plus, il existe une mesure de probabilité neutre au risque Q sous laquelle le prix de l'actif sous-jacent satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

pour $0 \leq t \leq T$, où $S_0 > 0$, r est le taux d'intérêt constant sans risque, σ est le paramètre de volatilité instantanée de l'actif sous-jacent, T est sa date de maturité et finalement $\{W_t : t \in [0, T]\}$ est un mouvement brownien standard. La solution de cette équation différentielle stochastique est donnée par :

$$S_{t_2} = S_{t_1} \exp[\mu(t_2 - t_1) + \sigma(W_{t_2} - W_{t_1})],$$

pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, où $\mu = r - \sigma^2/2$. La variable aléatoire S_{t_2}/S_{t_1} suit une loi lognormale de paramètre $\mu(t_2 - t_1)$ et $\sigma(t_2 - t_1)$ et est indépendante de la tribu $\mathfrak{F}_{t_1} = \sigma\{S_t : t \in [0, t_1]\}$, c'est-à-dire de la trajectoire de S_t jusqu'au temps t_1 . Finalement, suivant la propriété d'absence d'arbitrage du modèle de Black et Scholes, le processus du prix actualisé de l'actif sous-jacent est une Q -martingale :

$$\rho_{t_1} S_{t_1} = E[\rho_{t_2} S_{t_2} | \mathfrak{F}_{t_1}],$$

pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, où $\{\rho_t = e^{-rt} : t \in [0, T]\}$ est le processus du facteur d'actualisation et E est l'espérance sous la mesure de probabilité Q .

7.3 Formulation par programmation dynamique

Pour $k=0, \dots, N$, on dénote par $v_k(s_k, m_k)$ la valeur de l'option à la date d'observation t_k lorsque $S_k = s_k$ et $m_k = \min\{m_0, S_t | t \in \{0, 1, \dots, k\}\}$. On fait l'hypothèse que les décisions d'exercer ou non sont toujours prises de façon optimale, donc dans le but de maximiser la valeur de l'option. Cette dernière est fonction des variables d'état (s_k, m_k) et du temps t_k . Dans un but de simplicité on définit l'espace d'état comme étant $[0, \infty)^2$.

Au temps t_k , si $S_k = s_k$ et le minimum est m_k , la valeur d'exercice de l'option est

$$v_k^e(s_k, m_k) = \max(s_k - m_k, 0),$$

alors que la valeur de détention, c'est-à-dire la valeur de l'option à ce moment si elle n'est pas exercée et que l'on suit ensuite une stratégie d'exercice optimale, est

$$v_k^d(s_k, m_k) = \rho E_{k,s,m}[v_{k+1}(S_{t_{k+1}}, \min(S_{k+1}, m_k))]$$

où $E_{k,s,m}[\bullet]$ représente l'espérance conditionnelle $E_{k,s,m}[\bullet | \mathcal{F}_k, S_k = s_k, m = m_k]$, et $\rho = e^{-rh}$ est le facteur d'actualisation sur la période $[t_k, t_{k+1}]$. L'expression $v_k^d(s_k, m_k)$ est donc la valeur espérée de l'option au temps t_{k+1} , actualisée au temps t_k . La fonction de valeur optimale suit la récurrence suivante :

$$v_k(s_k, m_k) = \begin{cases} v_k^d(s_k, m_k) & \text{si } k = 0 \\ \max\{v_k^e(s_k, m_k), v_k^d(s_k, m_k)\} & \text{si } 0 < k \leq N-1, \\ v_k^e(s_k, m_k) & \text{si } k = N \end{cases}$$

En termes plus simples, la stratégie de conversion optimale est définie comme suit : dans l'état (s_k, m_k) au temps t_k , pour $0 < k < N$, on doit exercer l'option si $v_k^e(s_k, m_k) > v_k^d(s_k, m_k)$ et la conserver autrement. La valeur de l'option *lookback* américaine à l'émission de l'option au temps t_0 , toujours sous la stratégie de conversion optimale, est $v_0(s_0, m_0) = v_0(s_0)$. Bien sûr, à l'échéance au temps t_N , on doit forcément exercer l'option (ou liquider la position). Les fonctions v_k , v_k^d et v_k^e , pour tous les k , sont définies sur tout l'espace d'état $[0, \infty)^2$ à l'aide des équations de récurrence ci-dessus.

La façon logique de solutionner ce type de récurrence est de partir de la fin et d'effectuer des itérations jusqu'au début : à partir de la fonction v_N que l'on connaît ainsi qu'avec les équations présentées ci-haut, on calcul la fonction v_{N-1} , puis à partir de cette dernière on trouve v_{N-2} et ainsi de suite jusqu'à v_0 .

7.4 Solution numérique

La méthode présentée ici s'inspire de celle élaborée par Ben Hameur, Breton et L'Écuyer (2002) dans leur ouvrage sur l'évaluation d'options asiatiques. On propose de résoudre le problème par l'approximation d'une intégrale numérique.

La technique consiste à partitionner le quadrant positif du plan (s, m) par une grille rectangulaire. À chaque date d'observation on effectue une approximation de la fonction de valeur sur chacun des rectangles de la grille. Le choix de la grille pour tenir compte des propriétés des options *lookback* simplifie grandement l'interpolation entre chacun des points de chaque rectangle.

Afin de simplifier la résolution du problème on effectue un changement de variable. On utilise ainsi la variable $\tau^k = \ln\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)$. Cela permet entre autres de calculer

un vecteur de probabilité $(p \times 1)$ plutôt qu'une matrice $(p \times p^*)$. La variable p^* est définie dans la section suivante.

7.4.1 Partition et choix de la grille

La partition utilisée pour l'actif sous-jacent est telle que le nombre de rectangles dans la grille est plus grand dans les régions visitées avec une plus grande probabilité. On a donc défini $a_1 = S_0 \exp(\mu(T-t_0) - 3\sigma\sqrt{T-t_0})$, $a_{p-1} = S_0 \exp(\mu(T-t_0) + 3\sigma\sqrt{T-t_0})$, $a_p = S_0 \exp(\mu(T-t_0) + 4\sigma\sqrt{T-t_0})$ et, pour $2 \leq i \leq p-2$, a_i est le quantile d'ordre $(i-1)/(p-2)$ de la distribution lognormale de paramètres $\mu(T-t_0)$ et $\sigma\sqrt{T-t_0}$. La partition pour le minimum est une copie conforme de celle de l'actif sous-jacent à l'exception du fait qu'elle est tronquée lorsque les valeurs sont supérieures à celle du minimum initial. La première valeur plus grande que le minimum initial est ainsi remplacée par ce dernier et les valeurs suivantes ne sont pas considérées puisqu'elles ne sont jamais utilisées dans la résolution du problème. On se retrouve donc avec une grille asymétrique. L'exercice est semblable pour le maximum à l'exception que la troncature se fait au point où les valeurs sont inférieures au maximum initial.

Ainsi, soit $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{p^*} < a_p < a_{p+1} = \infty$ et $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{p^*}$ où $p^* = \{j | b_{j-1} < m_0 \leq b_j\}$ et $a_i = b_j$ pour $i, j = \{0, 1, \dots, p^*-1\}$ et $b_{p^*} = m_0$. Les points de la grille de base sont donc

$$G = \{(a_i, b_j) : 0 \leq i \leq p \text{ et } 0 \leq j \leq p^*\}$$

Ces points définissent une partition de quadrant positif $[0, \infty[\times [0, \infty[$ en $(p+1)(p^*+1)$ rectangles

$$R_{ij} = \{(s, m) : a_i \leq s \leq a_{i+1} \text{ et } b_j \leq m \leq b_{j+1}\},$$

pour $i = 0, \dots, p$ et $j = 0, \dots, p^*$.

De plus, il est à noter qu'étant donné que sous le présent modèle les dates d'observation du minimum sont les mêmes que les dates d'évaluation de la valeur de l'option, $s_k \leq m_k$ pour tous les k , et ainsi on peut éliminer la partie de la grille pour laquelle $b_j > a_i$. Dans le cas de l'option de vente, c'est plutôt la partie où $b_j < a_i$ que l'on élimine.

Pour ce qui est de la partition de la variable τ , elle est similaire à celle de l'actif sous-jacent sauf qu'on s'intéresse ici à la distribution sous l'incrément de temps h et non sur la vie complète de l'option. Ainsi on crée un vecteur $(1 \times q)$ dans lequel $\tau_1 = \exp(\mu h - 3\sigma\sqrt{h})$ et $\tau_q = \exp(\mu h + 3\sigma\sqrt{h})$ et, pour $2 \leq i \leq q-1$, τ_i est le quantile d'ordre $(i-1)/(q-1)$ de la distribution lognormale de paramètres μh et $\sigma\sqrt{h}$.

La grille demeure la même pour tout les k , ce qui fait que les probabilités et ne sont calculées qu'une seule fois, soit après qu'on ait défini la partition de la grille et de la variable τ .

7.4.2 Approximation de la fonction valeur par interpolation

L'idée est maintenant d'approximer chaque fonction de valeur v_k par une fonction \hat{v}_k de (s_k, m_k) sur chacun des rectangles R_{ij} et continue sur ses frontières. On peut décomposer le problème en deux.

Tout d'abord, lorsque $\tau < \ln\left(\frac{m}{s}\right)$, on a un nouveau minimum. Cette valeur se trouvera sur la diagonale $m_{k+1} = s_{k+1}$ ou, transposé sur la grille, $b_i = a_i$. Or puisqu'on a éliminé la partie de la grille pour laquelle $b_j > a_i$, le point (a_i, b_{j+1}) est indéfini et on se retrouve donc avec trois points pour lesquels on connaît la valeur à t_{k+1} . On propose la fonction suivante afin d'interpoler entre ces trois points :

$$\hat{v}_k(s_k, m_k) = \alpha_{ij}^k + \beta_{ij}^k s_k + \gamma_{ij}^k m_k$$

pour $(s_k, m_k) \in R_{ij}$. Transposé sur la grille cette fonction devient :

$$\begin{aligned} \hat{v}_k(a_i, b_j) &= \alpha_{ij}^k + \beta_{ij}^k a_i + \gamma_{ij}^k b_j \\ &= \alpha_{ij}^k + \beta_{ij}^k a_i + \gamma_{ij}^k a_i \\ &= \alpha_{ij}^k + (\beta_{ij}^k + \gamma_{ij}^k) a_i. \end{aligned}$$

On a trois équations pour trois inconnues, une solution analytique existe donc :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,i}^k &= \frac{a_i v_{k+1}(a_{i+1}, a_{i+1}) - a_{i+1} v_{k+1}(a_i, a_i)}{a_i - a_{i+1}}, \\ \beta_{i,i}^k &= \frac{v_{k+1}(a_{i+1}, a_i) - v_{k+1}(a_{i+1}, a_{i+1})}{a_i - a_{i+1}}, \\ \gamma_{i,i}^k &= \frac{v_{k+1}(a_i, a_i) - v_{k+1}(a_{i+1}, a_i)}{a_i - a_{i+1}}. \end{aligned}$$

Ensuite, lorsque $\tau \geq \ln\left(\frac{m}{s}\right)$, le minimum est inchangé. Or, puisque par définition cette valeur fait partie de la discrétisation de la grille, on est assuré que la valeur de l'option se trouvera sur la frontière d'un rectangle. On peut ainsi ramener la solution à une simple interpolation linéaire entre les deux points connus :

$$\hat{v}_k(s_k, m_k) = \frac{(v_k(a_{i+1}, b_j) - v_k(a_i, b_j))(s_k - a_i)}{(a_{i+1} - a_i)} + v_k(a_i, b_j)$$

pour $(s_k, m_k) \in R_{ij}$.

Étant donné que les interpolations sont linéaires sur chacune des frontières des rectangles, la fonction est continue sur l'ensemble du quadrant positif. Aux frontières de la grille on a simplement à extrapoler de façon linéaire semblable à la dernière formule ci-haut.

Dans le cas de l'option de vente, le problème se décompose également en deux : soit, respectivement, lorsque $\tau \geq \ln(M/S)$ et $\tau < \ln(M/S)$. Étant donné que la diagonale qui marque la frontière de la grille n'est pas la même que dans le cas de l'option d'achat, les fonctions diffèrent légèrement mais la logique demeure la même.

7.4.3 Approximation de l'intégrale pour l'évaluation de la fonction de valeur

À chaque point de la grille et à toutes les dates, on veut comparer la valeur de détention à la valeur d'exercice afin de savoir s'il est optimal d'exercer l'option à ce moment. La valeur d'exercice est définie par la fonction de paiement indiquée précédemment. La valeur de détention $v_k^d(s_k, m_k)$ de l'option, elle, est approximée par :

$$\begin{aligned}\tilde{v}_k^d(s_k, m_k) &= \rho E_{k,s,m}[\hat{v}_{k+1}(s_k \tau^{k+1}, m_k)] \\ &= \rho \sum_{\tau} \hat{v}_{k+1}(s_k \tau^{k+1}, m_k) \cdot p(\tau) \\ &= \rho \sum_{\tau < \ln(m/S)} \hat{v}_{k+1}(s_k \tau^{k+1}, s_k \tau^{k+1}) \cdot p(\tau) + \sum_{\tau \geq \ln(m/S)} \hat{v}_{k+1}(s_k \tau^{k+1}, m_k) \cdot p(\tau).\end{aligned}$$

Transposée sur la grille, la fonction devient :

$$\begin{aligned}\tilde{v}_k^d(a_i^k, b_j^k) &= \rho \sum_{\eta=1}^{\eta^*-1} \left[\alpha_{\xi, \xi}^{k+1} + (\beta_{\xi, \xi}^{k+1} + \gamma_{\xi, \xi}^{k+1}) a_i^k e^{\tau_{\eta}^{k+1}} \right] \cdot p(\tau_{\eta}^k) \\ &+ \sum_{\eta=\eta^*}^q \left[\frac{(\hat{v}_{k+1}(a_{\xi+1}^{k+1}, b_j) - \hat{v}_{k+1}(a_{\xi}^{k+1}, b_j))(a_i^k e^{\tau_{\eta}^{k+1}} - a_{\xi}^k)}{a_{\xi+1}^{k+1} - a_{\xi}^{k+1}} + \hat{v}_{k+1}(a_{\xi}^{k+1}, b_j) \right] \cdot p(\tau_{\eta}^k)\end{aligned}$$

où η^* est la valeur de η telle que τ_{η}^k marque la frontière entre un changement de minimum et un minimum inchangé : $\eta^* = \{\eta \mid \tau_{\eta-1} < \ln(m/S) \leq \tau_{\eta}\}$. De plus, ξ est la valeur

de l'indice telle que $a_i^k e^{\tau_{k+1}^T} \in [a_{\xi}^{k+1}, a_{\xi+1}^{k+1}]$. On peut facilement remarquer la décomposition de la fonction en deux pour simplifier l'implémentation.

Il en résulte la fonction de valeur approximée suivante :

$$\tilde{v}_k(a_i, b_j) = \max(\tilde{v}_k^d(a_i, b_j), \tilde{v}_k^e(a_i, b_j)).$$

On utilise ensuite ces valeurs aux points de la grille pour interpoler et trouver la fonction \hat{v}_k , tel qu'expliqué dans la section précédente. Les étapes d'intégration et d'interpolation sont répétées tour à tour jusqu'à $k=0$, où une approximation de \tilde{v}_0 et de la valeur de l'option v_0 sont finalement obtenues.

La section qui suit explique comment la méthode est exécutée informatiquement. Cette fois, on donne en détails la méthodologie pour l'option d'achat de même que l'option de vente.

7.5 Pseudo-code

Tout le long du pseudo-code qui suit, le prix du sous-jacent ainsi que l'extremum utilisent la notation de la grille, c'est à dire $G = \{(a_i, b_j) : 0 \leq i \leq p \text{ et } 0 \leq j \leq p^*\}$ où a_i représente le prix du sous-jacent et b_j , l'extremum.

7.5.1 Code pour une option d'achat lookback américaine

Étape 1 : Création du vecteur du prix du sous-jacent S :

$$a_1 = S_0 \exp(\mu(T - t_0) - 3\sigma\sqrt{T - t_0}),$$

$$a_{p-1} = S_0 \exp(\mu(T - t_0) + 3\sigma\sqrt{T - t_0}),$$

$$a_p = S_0 \exp(\mu(T - t_0) + 4\sigma\sqrt{T - t_0}).$$

Boucle sur i de 2 à $p-2$:

$$a_i = S_0 \exp \left(\begin{array}{l} \mu(T-t_0) \\ + N \left(\begin{array}{l} \text{Prob}(\mu T - 3\sigma\sqrt{T-t_0}) \\ + (i+1) * \left(\frac{\text{Prob}(\mu T + 3\sigma\sqrt{T-t_0}) - \text{Prob}(\mu T - 3\sigma\sqrt{T-t_0})}{p-1} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \sigma\sqrt{T-t_0}$$

Étape 2 : Création du vecteur du minimum m :

Boucle sur j temps que $a_j < m_0$:

$$b_j = a_j.$$

Garder en mémoire la dernière valeur de j répondant à la condition de la boucle.

$$p^* = j.$$

Boucle sur i de j à p :

$$b_j = m_0.$$

Étape 3 : Création du vecteur de la variable τ :

$$\tau_1 = S_0 \exp(\mu h - 3\sigma\sqrt{h}),$$

$$\tau_q = S_0 \exp(\mu h + 3\sigma\sqrt{h}).$$

Boucle sur i de 2 à $q-1$:

$$\tau_i = \mu h + N \left(\begin{array}{l} \text{Prob}(\mu h - 3\sigma\sqrt{h}) \\ + (i+1) * \left(\frac{\text{Prob}(\mu h + 3\sigma\sqrt{h}) - \text{Prob}(\mu h - 3\sigma\sqrt{h})}{q-1} \right) \end{array} \right) \sigma\sqrt{h}.$$

Étape 4 : Création du vecteur de probabilités associées à τ :

$$\text{Prob}(\tau_0) = N\left(\left(\frac{\tau_0 + \tau_1}{2} - \mu h\right) / \sigma \sqrt{h}\right),$$

$$\text{Prob}(\tau_q) = N\left(\left(\frac{\tau_q + \tau_{q-1}}{2} - \mu h\right) / \sigma \sqrt{h}\right).$$

Boucle sur i de 2 à q :

$$\text{Prob}(\tau_i) = N\left(\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2} - \mu h\right) / \sigma \sqrt{h}\right) - N\left(\left(\frac{\tau_i + \tau_{i-1}}{2} - \mu h\right) / \sigma \sqrt{h}\right).$$

Étape 5 : Routine pour trouver la position d'une valeur dans un vecteur donné en fonction de la variable τ appliqué sur un prix du sous-jacent a quelconque.

Si $ae^\tau > a_p$, alors $position = p$,

Sinon, incrémenter $position$ de 1 temps que $a_{position} < ae^\tau$.

Étape 6 : Calcul de la valeur de l'option à chaque point de la grille à l'échéance (T):

Boucle sur i de 1 à p :

Boucle sur j de 1 à $Min(p^*, i)$:

$$v_T(a_i, b_j) = \max(a_i - b_j, 0).$$

Étape 7 : Calcul de la valeur de détention de l'option à chaque point de la grille pour toutes les dates.

Boucle sur t de $T-1$ à 0.

Boucle sur i de 1 à p :

Boucle sur j de 1 à $Min(p^*, i)$:

Calcul de la frontière pour un nouveau minimum :

$$frontière = Min(\ln(b_j/a_i), \tau_q).$$

Pour tous les points où on a un nouveau minimum :

Boucle sur η temps que $\tau_\eta < \text{frontière}$:

Si $a_i e^{\tau_\eta} < a_0$, alors $a_i e^{\tau_\eta} = a_0$.

Exécuter la routine de l'Étape 5 pour trouver la position de $a_i e^{\tau_\eta}$ dans le vecteur de prix du sous-jacent :

$\xi = \text{position}$.

Calculer la valeur de chacun des trois coefficients d'interpolation :

$$\alpha_{\xi\xi}^k = \frac{a_\xi v_{k+1}(a_{\xi+1}, a_{\xi+1}) - a_{\xi+1} v_{k+1}(a_\xi, a_\xi)}{a_\xi - a_{\xi+1}},$$

$$\beta_{\xi\xi}^k = \frac{v_{k+1}(a_{\xi+1}, a_\xi) - v_{k+1}(a_{\xi+1}, a_{\xi+1})}{a_\xi - a_{\xi+1}},$$

$$\gamma_{\xi\xi}^k = \frac{v_{k+1}(a_\xi, a_\xi) - v_{k+1}(a_{\xi+1}, a_\xi)}{a_\xi - a_{\xi+1}}.$$

Calculer la valeur de l'option approximée par une interpolation :

$$v_k^d(a_\xi, a_\xi) = v_k(a_\xi, a_\xi) + \left[\alpha_{\xi\xi}^k + (\beta_{\xi\xi}^k + \gamma_{\xi\xi}^k) a_i e^{\tau_\eta} \right] \text{Prob}(\tau_\eta^k).$$

Garder en mémoire le premier η qui ne satisfaisait plus la condition de la boucle précédente : $\eta^* = \eta$.

Pour tous les points où le minimum est inchangé:

Boucle sur η temps de η^* à q :

Si $a_i e^{\tau_\eta} < a_0$, alors $a_i e^{\tau_\eta} = a_0$.

Si $\xi = p$ alors $\xi = p-1$.

Calculer la valeur de l'option à ce point par interpolation linéaire :

$$\hat{v}_k^1(a_i, b_j) = \frac{(v_{k+1}(a_{\xi+1}, b_j) - v_{k+1}(a_\xi, b_j))(a_i e^{\tau_\eta^{k+1}} - a_\xi)}{(a_{\xi+1} - a_\xi)} + v_{k+1}(a_\xi, b_j)$$

Calculer la valeur de l'option :

$$v_k^d(a_\xi, b_j) = v_k(a_\xi, b_j) + \hat{v}_k^1(a_\xi, b_j) \text{Prob}(\tau_\eta^{k+1})$$

Lorsqu'on a passé par tout les points de la date suivante on trouve la valeur finale de l'option au point d'origine :

$$v_k(a_i, b_j) = \rho \times \text{Max}(v_k^d(a_i, b_j), \text{Max}(a_i - b_j, 0))$$

Étape 8 : Interpolation au point initial :

Exécuter la routine de l'étape 5 afin de trouver la position des données initiales :

Interpolation sur l'axe du prix du sous-jacent :

$$\hat{v}_0^1(a_\xi, b_j) = \frac{(v_0(a_{\xi+1}, b_{p^*-2}) - v_0(a_\xi, b_{p^*-2}))(S_0 - a_\xi)}{(a_{\xi+1} - a_\xi)} + v_0(a_\xi, b_{p^*-2}),$$

$$\hat{v}_0^2(a_\xi, b_j) = \frac{(v_0(a_{\xi+1}, b_{p^*-1}) - v_0(a_\xi, b_{p^*-1}))(S_0 - a_\xi)}{(a_{\xi+1} - a_\xi)} + v_0(a_\xi, b_{p^*-1}).$$

Interpolation sur l'axe du minimum :

$$v_0(a_i, b_{p^*}) = \frac{(\hat{v}_0^2(a_\xi, b_j) - \hat{v}_0^1(a_\xi, b_j))(m_0 - b_{p^*-2})}{(b_{p^*-1} - b_{p^*-2})} + \hat{v}_0^1(a_\xi, b_j).$$

7.5.2 Code pour une option de vente lookback américaine

Étape 1 : Création du vecteur du prix du sous-jacent S :

Idem.

Étape 2 : Création du vecteur du maximum M :

Boucle sur j temps que $a_j > M_0$ ($j-1$ à chaque passage) :

$$b_j = a_j.$$

Garder en mémoire la dernière valeur de j répondant à la condition de la boucle.

$$p^* = j.$$

Boucle sur j de p^* à 0 ($j-1$ à chaque passage) :

$$b_j = M_0.$$

Étape 3 : Création du vecteur de la variable τ :

Idem.

Étape 4 : Création du vecteur de probabilités associées à τ :

Idem.

Étape 5 : Routine pour trouver la position d'une valeur dans un vecteur donné en fonction de la variable τ appliqué sur un prix du sous-jacent a quelconque.

Idem.

Étape 6 : Calcul de la valeur de l'option à chaque point de la grille à l'échéance (T):

Boucle sur i de 1 à p :

Boucle sur j de $Max(p^*, i)$ à p :

$$v_T(a_i, b_j) = \max(b_j - a_i, 0).$$

Étape 7 : Calcul de la valeur de détention de l'option à chaque point de la grille pour toutes les dates.

Boucle sur t de $T-1$ à 0.

Boucle sur i de 1 à p :

Boucle sur j de $Max(p^*, i)$ à p :

Calcul de la frontière pour un nouveau maximum :

$$\text{frontière} = \text{Max}(\ln(b_j/a_i), \tau_0).$$

Pour tous les points où on a un nouveau maximum :

Boucle sur η temps que $\tau_\eta > \text{frontière}$:

Exécuter la routine de l'Étape 5 pour trouver la position de $a_i e^{\tau_\eta}$ dans le vecteur de prix du sous-jacent :

$$\xi = \text{position}.$$

Calculer la valeur de chacun des trois coefficients d'interpolation :

$$\alpha_{\xi\xi}^k = \frac{a_{\xi+1} v_{k+1}(a_\xi, a_\xi) - a_\xi v_{k+1}(a_{\xi+1}, a_{\xi+1})}{a_{\xi+1} - a_\xi},$$

$$\beta_{\xi\xi}^k = \frac{v_{k+1}(a_{\xi+1}, a_{\xi+1}) - v_{k+1}(a_\xi, a_{\xi+1})}{a_{\xi+1} - a_\xi},$$

$$\gamma_{\xi\xi}^k = \frac{v_{k+1}(a_\xi, a_{\xi+1}) - v_{k+1}(a_\xi, a_\xi)}{a_{\xi+1} - a_\xi}.$$

Calculer la valeur de l'option approximée par une interpolation :

$$v_k^d(a_\xi, a_\xi) = v_k(a_\xi, a_\xi) + \left[\alpha_{\xi\xi}^k + (\beta_{\xi\xi}^k + \gamma_{\xi\xi}^k) a_i e^{\tau_\eta} \right] \text{Pr ob}(\tau_\eta^k).$$

Garder en mémoire le premier η qui ne satisfaisait plus la condition de la boucle précédente : $\eta^* = \eta$.

Pour tous les points où le maximum est inchangé:

Boucle sur η temps de η^* à 0 :

Si $\xi = p$ alors $\xi = p-1$.

Calculer la valeur de l'option à ce point par interpolation linéaire :

$$\hat{v}_k^1(a_\xi, b_j) = \frac{(v_{k+1}(a_{\xi+1}, b_j) - v_{k+1}(a_\xi, b_j))(a_i e^{\tau_\eta^{k+1}} - a_\xi)}{(a_{\xi+1} - a_\xi)} + v_{k+1}(a_\xi, b_j)$$

Calculer la valeur de l'option :

$$v_k^d(a_\xi, b_j) = v_k(a_\xi, b_j) + \hat{v}_k^1(a_\xi, b_j) \text{Prob}(\tau_\eta^{k+1}).$$

Lorsqu'on a passé par tous les points de la date suivante on trouve la valeur finale de l'option au point d'origine :

$$v_k(a_i, b_j) = \rho \times \text{Max}(v_k^d(a_i, b_j), \text{Max}(b_j + a_i, 0))$$

Étape 8 : Interpolation au point initial :

Exécuter la routine de l'étape 5 afin de trouver la position des données initiales :

Interpolation sur l'axe du prix du sous-jacent :

$$\hat{v}_0^1(a_\xi, b_j) = \frac{(v_0(a_{\xi+1}, b_{p^*+2}) - v_0(a_\xi, b_{p^*+2}))(S_0 - a_\xi)}{(a_{\xi+1} - a_\xi)} + v_0(a_\xi, b_{p^*+2}),$$

$$\hat{v}_0^2(a_\xi, b_j) = \frac{(v_0(a_{\xi+1}, b_{p^*+1}) - v_0(a_\xi, b_{p^*+1}))(S_0 - a_\xi)}{(a_{\xi+1} - a_\xi)} + v_0(a_\xi, b_{p^*+1}).$$

Interpolation sur l'axe du maximum :

$$v_0(a_\xi, b_{p^*}) = \frac{(\hat{v}_0^2(a_\xi, b_j) - \hat{v}_0^1(a_\xi, b_j))(M_0 - b_{p^*+2})}{(b_{p^*+1} - b_{p^*+2})} + \hat{v}_0^1(a_\xi, b_j).$$

8. Analyse des résultats

Afin d'évaluer les solutions retournées par le modèle, on les compare avec les résultats obtenus par les auteurs figurant dans la revue de littérature. Toutefois, seulement quelques-uns d'entre eux ont publié des résultats, à savoir : Barraquand et Pudet, Kat, qui comparent les méthodes de Hull et White, Babbs et Cheuk et Vorst, ainsi que Levy et Manton. Ces derniers comparent toutefois leur modèle à ceux de Anderson et Brotherton-Ratcliffe et de Broadie, Glasserman et Kou. L'option évaluée est de type *lookback* à prix d'exercice variable pour laquelle la mesure des extremums est quotidienne. La comparaison sera faite, lorsque possible, à la fois pour les options d'achat et de vente de variante européenne et américaine. Il est important de rappeler que la valeur d'une option d'achat *lookback* américaine est égale à sa contrepartie européenne. On vérifie donc également cette propriété. Dans le cas des options de vente, les valeurs sont différentes, on peut ainsi étudier le comportement de la frontière d'exercice à la fois à-travers le temps ainsi qu'à une date donnée en fonction du prix du sous-jacent et du maximum.

Également, la précision et la convergence du modèle est fonction des paramètres gouvernant le nombre d'itérations à effectuer : p et q . On effectue tout d'abord une analyse pour déterminer quelle valeur attribuer à q . On utilise ensuite cette valeur pour mesurer la convergence en fonction de p .

8.1 Discrétisation de la variable τ

La taille donnée au vecteur q de discrétisation de la variable $\tau_k = \ln(s_k/s_{k-1})$ définit le nombre de points à t_{k+1} que la valeur à t_k peut atteindre. Intuitivement, on voudrait ainsi que q soit grand. On a donc analysé l'incidence de la valeur de q en fonction de l'échéance T et de la volatilité σ sur la solution mais également sur la convergence vers celle-ci. La valeur de p est arbitrairement fixée à 200 et les paramètres

sont tirés de Barraquand et Pudet de sorte que pour tous les tests on a $S_0=100$, $m_0=100$ et $r=10\%$.

Tableau 1 : Valeur et convergence de l'option en fonction de q lorsque $T = 91$ et $\sigma = 10\%$.

q	Valeur	$\Delta \$$	$\Delta \%$
10	4,9222		
20	5,0043	0,0821	1,67%
30	5,0333	0,0290	0,58%
40	5,0470	0,0138	0,27%
50	5,0548	0,0078	0,15%
60	5,0598	0,0049	0,10%
70	5,0631	0,0033	0,07%
80	5,0655	0,0024	0,05%
90	5,0673	0,0018	0,04%
100	5,0686	0,0013	0,03%

Le Tableau 1 montre qu'une augmentation constante de la taille du vecteur q a un impact positif mais décroissant sur la valeur de l'option. Le même comportement se retrouve sous toutes les combinaisons de paramètres analysés. Le choix de la valeur de q pour les tests subséquents est basé sur la première variation absolue inférieure à 0,01\$. Dans l'exemple précédent on a donc $q=50$. Le choix aurait également pu être effectué en fonction de la variation en % mais cela peut résulter en une variation absolue significative lorsque la valeur de l'option est élevée.

Tableau 2 : Comportement de la convergence ($\Delta \%$) par rapport à T lorsque $\sigma = 10\%$.

q	$T=91$	$T=182$	$T=364$
20	1,67%	1,38%	1,09%
30	0,58%	0,49%	0,40%
40	0,27%	0,24%	0,19%
50	0,15%	0,13%	0,11%
60	0,10%	0,08%	0,07%
70	0,07%	0,06%	0,05%
80	0,05%	0,04%	0,03%
90	0,04%	0,03%	0,03%
100	0,03%	0,02%	0,02%

Les Tableaux 2 et 3 font ressortir un fait intéressant. Pour une même valeur de q , la convergence (variation en %) est plus lente à mesure que l'échéance augmente alors que le phénomène est contraire pour la volatilité. C'est cependant cette dernière qui influence le plus la vitesse de convergence. Pour choisir une valeur de q appropriée, on peut en fait laisser tomber l'échéance comme variable de décision car son effet est plus qu'annulé par l'effet de la volatilité. Cela correspond à nos attentes. En effet, la volatilité détermine l'amplitude des variations à chaque date. Dans la construction du vecteur τ , on définit d'abord les points extrêmes. Plus ces points seront distancés, c'est-à-dire plus la volatilité sera grande, plus q doit avoir une valeur élevée pour permettre une discrétisation plus fine.

Tableau 3 : Comportement de la convergence (Δ %) par rapport à σ lorsque $T = 364$.

q	$\sigma=10$	$\sigma=20$	$\sigma=40$
20	1,09%	1,70%	2,35%
30	0,40%	0,61%	0,83%
40	0,19%	0,30%	0,40%
50	0,11%	0,17%	0,23%
60	0,07%	0,11%	0,15%
70	0,05%	0,07%	0,09%
80	0,03%	0,05%	0,07%
90	0,03%	0,04%	0,05%
100	0,02%	0,03%	0,04%

Pour un seuil de convergence de 0,1%, on suggère de façon générale $q=60$ lorsque $\sigma \leq 0,15$, $q=70$ lorsque $0,15 < \sigma \leq 0,50$ et $q=80$ lorsque $\sigma > 0,50$. Il y a évidemment place à interprétation selon les situations spécifiques. Comme on l'a mentionné précédemment, dans les tests qui suivent le seuil de convergence a été à 0,1 en termes absolus. Cela explique les différences observées par rapport aux valeurs suggérées ici.

8.2 Options d'achat

Dans un premier temps, Barraquand et Pudet présentent une quantité intéressante de résultats auxquels on peut se comparer. On peut juger de la performance du modèle en

fonction de maturités et de volatilités différentes. L'analyse est regroupée en fonction de la volatilité.

Tableau 4 : Comparaisons avec Barraquand et Pudet pour $\sigma = 10\%$.

Paramètres				
S_0	100,00		r	10,00%
M_0	100,00		σ	10,00%

Comparaison				
T	Analytique	B&P	Résultat	Différence
91	5,266	5,028	5,0404	0,25%
182	8,253	8,019	8,1210	1,27%
364	13,298	13,075	13,3678	2,24%

Convergence				
T	q	p	Valeur	Variation
91	50	50	5,2090	
		100	5,0947	-2,19%
		150	5,0662	-0,56%
		200	5,0548	-0,23%
		400	5,0432	-0,23%
		600	5,0404	-0,06%
182	60	50	8,7111	
		100	8,3045	-4,67%
		150	8,2110	-1,13%
		200	8,1738	-0,45%
		400	8,1313	-0,52%
		600	8,1210	-0,13%
364	60	50	15,3291	
		100	14,0242	-8,51%
		150	13,6931	-2,36%
		200	13,5584	-0,98%
		400	13,4032	-1,14%
		600	13,3678	-0,26%

Le Tableau 4 montre que pour $T=91$ et $T=182$, les valeurs sont légèrement plus élevées que celles de B&P mais restent en-deçà des valeurs analytiques qui, à cause de la mesure continue du minimum, surestiment le prix de l'option. La convergence est

monotone mais on ne peut se comparer à B&P de ce côté puisqu'ils n'en parlent pas. Toutefois, lorsque $T=364$ le modèle ne converge pas encore vers une valeur inférieure à la valeur analytique avec $p=600$. En général, on peut facilement voir qu'une valeur de p plus grande est requise à mesure que l'échéance de l'option augmente.

Tableau 5 : Comparaisons avec Barraquand et Pudet pour $\sigma = 20\%$.

Paramètres				
S_0	100,00		r	10,00%
M_0	100,00		σ	20,00%

Comparaison				
T	Analytique	B&P	Résultat	Différence
91	8,939	8,482	8,4312	-0,60%
182	13,174	12,733	12,7419	0,06%
364	19,614	19,203	19,3524	0,07%

Convergence				
T	91	p	Valeur	Variation
q	70	50	8,6975	
		100	8,5769	-1,39%
		150	8,4712	-1,23%
		200	8,4546	-0,20%
		400	8,4356	-0,22%
		600	8,4312	-0,05%

T	182	p	Valeur	Variation
q	70	50	13,5724	
		100	12,9874	-4,31%
		150	12,8599	-0,98%
		200	12,8101	-0,39%
		400	12,7546	-0,43%
		600	12,7419	-0,10%

T	364	p	Valeur	Variation
q	80	50	21,6411	
		100	20,0281	-7,45%
		150	19,7125	-1,58%
		200	19,5421	-0,86%
		400	19,3879	-0,79%
		600	19,3524	-0,18%

Maintenant, lorsque $\sigma = 20\%$, le Tableau 5 indique que les résultats sont encore plus près de ceux de B&P et toujours en-dessous de la solution analytique. Cette fois avec $p=600$, on est beaucoup plus près de la valeur de convergence.

Tableau 6 : Comparaisons avec Barraquand et Pudet pour $\sigma = 40\%$.

Paramètres				
S_0	100,00		r	10,00%
M_0	100,00		σ	40,00%
Comparaison				
T	Analytique	B&P	Résultat	Différence
91	16,052	15,209	15,0456	-1,07%
182	22,658	21,872	21,7631	-0,50%
364	31,804	31,106	31,0847	-0,07%
Convergence				
T	91	p	Valeur	Variation
q	80	50	15,5213	
		100	15,1760	-2,22%
		150	15,1156	-0,40%
		200	15,0819	-0,22%
		400	15,0519	-0,20%
		600	15,0456	-0,04%
T	182	p	Valeur	Variation
q	100	50	23,0533	
		100	22,1250	-4,03%
		150	21,9319	-0,87%
		200	21,8592	-0,33%
		400	21,7801	-0,36%
		600	21,7631	-0,08%
T	364	p	Valeur	Variation
q	110	50	32,6789	
		100	31,9589	-2,20%
		150	31,5623	-1,24%
		200	31,3334	-0,73%
		400	31,1261	-0,66%
		600	31,0847	-0,13%

Le Tableau 6 renvoie des résultats comparatifs semblables au précédent. Les valeurs obtenues avec $p=600$ sont très proches des valeurs de B&P et toujours en-dessous

du prix de la formule analytique. La convergence s'effectue encore plus rapidement de sorte que la valeur de p est pour la première fois suffisante pour $T=182$ sous un seuil de 0,1%.

De leur côté, Levy et Mantion permettent plutôt d'analyser les résultats en fonction de différents minima de départ. De plus, ils comparent leurs valeurs avec la méthode de Monte Carlo de Anderson et Brotherton-Ratcliffe ainsi qu'avec la formule de Broadie, Glasserman et Kou. Il s'agit donc de la comparaison la plus fiable de toutes celles présentées ici.

Tableau 7 : Comparaisons avec Levy et Mantion.

Paramètres					
S_0	100,00		r	10,00%	
T	365		σ	30,00%	
Comparaison					
m_0	Monte Carlo	BGK	L&M	Résultat	Différence*
85	28,80	28,38	28,85	29,0778	0,96%
90	26,88	26,56	26,93	27,1527	1,01%
95	25,64	25,44	25,68	25,9125	1,06%
100	25,11	25,07	25,12	25,3971	1,14%

* Écart (%) par rapport à la méthode de Monte Carlo de Anderson et Brotherton-Ratcliffe.

Le Tableau 7 semble montrer que notre méthode tend à surestimer la valeur de l'option car elle se situe au-dessus des valeurs de toutes les autres méthodes. De plus, Levy et Mantion avaient conclu que leur méthode tendait elle-même à surestimer la valeur de l'option. Toutefois, il faut souligner qu'aucun de nos résultats n'avaient complètement terminé de converger avec $p=600$. Ce manque de vitesse de convergence est dû à la longue échéance des options étudiées ici.

Le Tableau 8 indique qu'avec une convergence s'effectuant à la baisse, nos résultats sont sans aucun doute plus près des autres méthodes une fois la convergence atteinte. Il serait toutefois surprenant que nos valeurs passent sous celles des autres. Il semble donc que la surestimation est bel et bien présente.

Tableau 8 : Convergence selon les paramètres de Levy et Mantion.

Convergence				
m_0	85	p	Valeur	Variation
q	100	50	31,4599	
		100	29,7883	-5,31%
		150	29,4122	-1,26%
		200	29,2733	-0,47%
		400	29,1133	-0,55%
		600	29,0778	-0,12%
m_0	90	p	Valeur	Variation
q	100	50	29,7059	
		100	27,9043	-6,06%
		150	27,5035	-1,44%
		200	27,3570	-0,53%
		400	27,1902	-0,61%
		600	27,1527	-0,14%
m_0	95	p	Valeur	Variation
q	100	50	28,6393	
		100	26,6862	-6,82%
		150	26,2792	-1,53%
		200	26,1238	-0,59%
		400	25,9511	-0,66%
		600	25,9125	-0,15%
m_0	100	p	Valeur	Variation
q	100	50	28,1611	
		100	26,1911	-7,00%
		150	25,7703	-1,61%
		200	25,6110	-0,62%
		400	25,4361	-0,68%
		600	25,3971	-0,15%

Enfin, dans son analyse des trois modèles de treillis énumérés précédemment, Kat souligne dès le départ que la méthode de Hull et White a été éloignée pour cause de problèmes de mémoire informatique. L'auteur a retenu le modèle de Babbs pour évaluer la variante à prix d'exercice variable et la compare avec une simulation de Monte Carlo.

Le nombre de simulations est de 10 000 alors que le nombre d'intervalles de temps pour l'arbre binomial est de 5 200.

Tableau 9 : Comparaisons avec Kat

Paramètres			
S_0	100,00	r	5,00%
m_0	100,00	Vol	20,00%
T	130		
Comparaison			
Monte Carlo	Babbs	Résultat	Différence
11,32	11,33	9,4519	-16,57%
Convergence			
p	q	Valeur	Variation
50	70	9,9252	
100	70	9,6458	-2,81%
150	70	9,5172	-1,33%
200	70	9,4895	-0,29%
400	70	9,4591	-0,32%
600	70	9,4519	-0,08%

Cette fois, le Tableau 9 montre un écart important par rapport aux résultats de Kat. Le modèle converge pourtant rapidement de sorte que $p=600$ est suffisant. Puisqu'il s'agit du seul écart d'une telle ampleur on peut faire l'hypothèse que Kat n'est pas près de la valeur réelle de l'option.

De façon générale, pour les options d'achat, il est difficile de conclure à une surestimation des valeurs renvoyées par notre modèle. Dépendamment des auteurs, notre valeur est tantôt en-dessous, tantôt au-dessus. On peut toutefois observer que plus l'échéance de l'option est éloignée, plus la taille de la grille doit être grande avant d'avoir convergence.

De plus, pour tous les tests effectués la valeur de l'option d'achat américaine est toujours égale à sa contrepartie européenne. Cette propriété des options *lookbacks* est donc vérifiées dans nos résultats.

8.3 Options de vente

Dans le cas des options de vente, on sait que la valeur de la variante américaine est supérieure à celle de l'europpéenne. On vérifie donc cette propriété en comparant chaque fois les deux types d'options avec les résultats des différents auteurs. Encore une fois, les résultats utilisés dans les comparaisons sont avec une grille de taille $p=600$.

Les seuls auteurs ayant publié des résultats pour les options de ventes européennes et américaines sont Barraquand et Pudet. Ces derniers ont calculé leurs valeurs en utilisant la même série de paramètres que pour les options d'achat, rendant la comparaison plus riche. Les écarts ne sont toutefois analysés que pour la variante américaine.

Tableau 10 : Comparaisons avec Barraquand et Pudet.

Paramètres						
S_0	100,00	m_0	100,00	r	10,00%	
Comparaison						
T	σ	Européen		Américain		
		B&P	Résultat	B&P	Résultat	Différence
91	10	2,668	2,5510	3,087	2,9763	-3,59%
182	10	3,368	3,2191	4,209	4,0823	-3,01%
364	10	4,012	3,8219	5,630	5,4773	-2,71%
91	20	6,434	6,2484	6,845	6,6615	-2,68%
182	20	8,729	8,4854	9,606	9,3883	-2,27%
364	20	11,448	11,1416	13,307	13,0677	-1,80%
91	40	14,406	14,0520	14,811	14,4195	-2,64%
182	40	20,456	20,0896	21,362	21,0114	-2,87%
364	40	28,583	28,2350	30,661	30,3835	-0,91%

Le Tableau 10 démontre que la valeur de l'option de vente américaine est toujours supérieure à sa contrepartie européenne. Toutefois, on peut remarquer un écart assez marqué de notre valeur par rapport à celle des auteurs. Il est difficile de conclure si notre méthode surestime le prix ou si c'est plutôt celle de Barraquand et Pudet qui le sous-

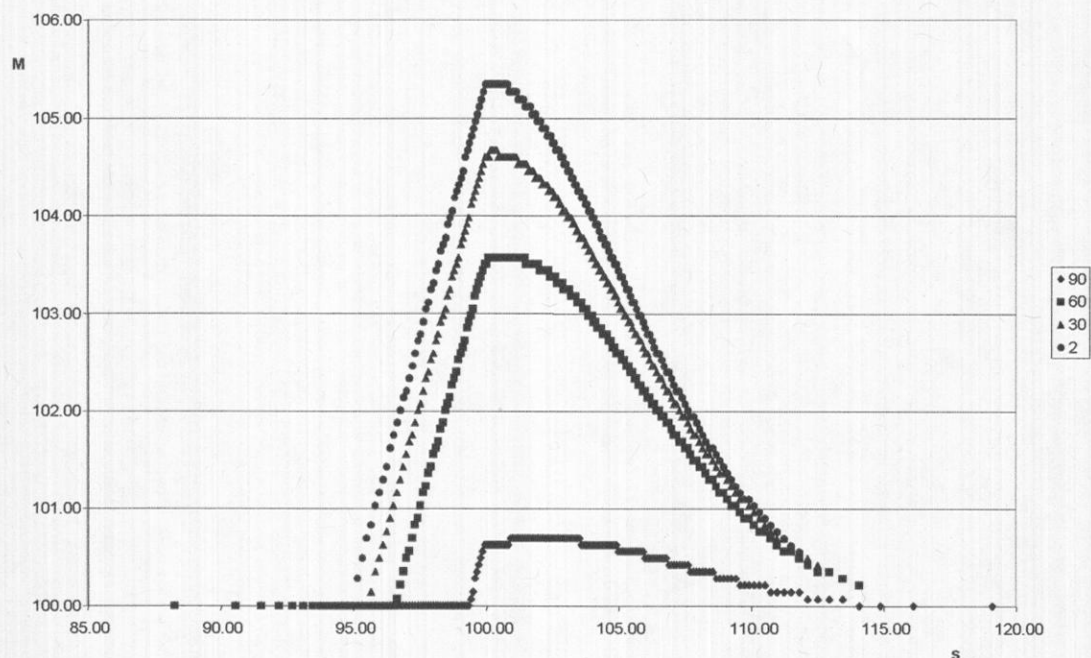
estime. Nos résultats n'avaient, dans la plupart des cas, pas terminé de converger. On peut donc dire que l'écart est en fait plus important que le Tableau 10 ne le rapporte car, comme c'était le cas auparavant, la convergence se fait vers un prix plus bas. L'écart tend à diminuer à mesure que la maturité de l'option est éloignée.

8.4 La frontière d'exercice

Aucun auteur dans la littérature relevée ne s'est attardé à analyser le comportement de certaines caractéristiques pour les options *lookback*. On se propose ici, pour la première fois, d'étudier la frontière d'exercice de l'option de vente américaine. Cette connaissance peut collaborer à développer des modèles plus efficaces.

L'intuition financière voudrait qu'il y aient de plus en plus de possibilités d'exercice à mesure que l'on s'approche de l'échéance. En d'autres termes, avec le temps, il y a un plus large éventail de situation où il est plus rentable d'exercer l'option immédiatement que de la détenir jusqu'à l'échéance.

Figure 1 : Frontière d'exercice à quatre dates différentes.



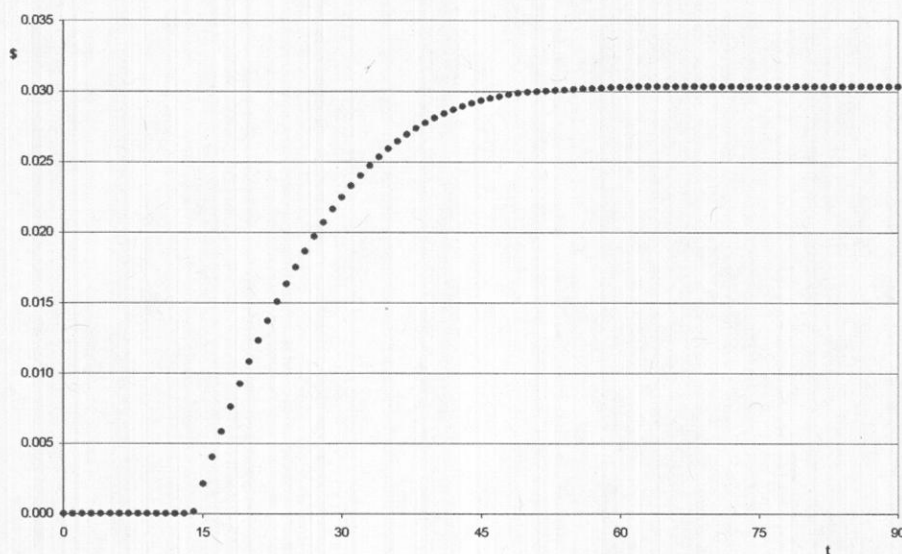
L'analyse, illustrée dans la figure 1, est faite pour une grille de $p=200$ selon la première série de paramètres de Barraquand et Pudet. On a ainsi $S_0=100$, $M_0=100$, $T=91$, $r=10\%$ et $\sigma=10\%$. Les points sur le graphique représentent, pour un prix du sous-jacent s donné, la première valeur du maximum M à partir de laquelle il est optimal d'exercer l'option à cette date. Par exemple, lorsque le prix du sous-jacent est inférieur à 95,00\$, il

est toujours optimal d'exercer l'option puisque les points sont sur la ligne $M=100$, soit la valeur du maximum initial M_0 .

On peut donc constater que la frontière est égale au maximum initial jusqu'à autour de $s=95$ puis augmente linéairement jusqu'à la valeur initiale du sous-jacent $s=100$. Par la suite, les courbes semblent tous tendre vers un même point à des valeurs plus faible du maximum.

L'analyse a été faite à quatre points dans le temps, à savoir à $t_k=90$, $t_k=60$, $t_k=30$ et $t_k=2$. La courbe la plus élevée est celle de $t_k=2$ alors que la plus basse est associée à $t_k=90$. L'intuition est donc vérifiée. On peut le voir plus facilement sur la Figure 2 qui montre l'évolution de la plus-value de l'exercice sur la détention à-travers le temps. Lorsqu'on est tôt dans la vie de l'option, on exercera seulement lorsque la valeur du maximum est élevée par rapport au prix du sous-jacent actuel. Goldman, Sosin et Gatto expliquait que pour une option de vente à ce moment, on espère que le prix du sous-jacent monte pour fixer un nouveau maximum puis qu'il redescende par la suite. Par contre, lorsqu'on est plus près de l'échéance, la probabilité que le maximum actuel soit le maximum final à l'échéance est plus élevée, d'où l'avantage d'exercer à ce stade.

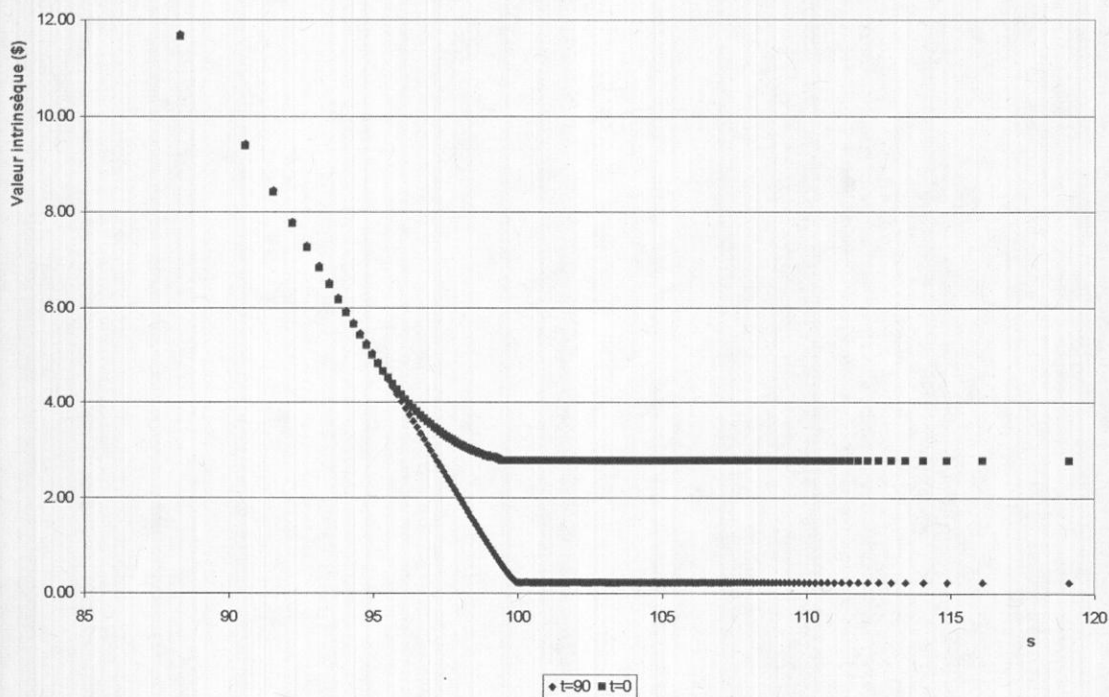
Figure 2 : Plus-value (\$) de l'exercice vs la détention à travers le temps.



8.5 Graphique de paiement

Finalement, afin de valider le modèle une fois de plus, on peut analyser si le graphique de paiement produite par le modèle correspond à ce qu'il doit être. La Figure 3 démontre que c'est bel et bien le cas. L'analyse est poussée plus loin. On compare la courbe de paiement du début de la vie de l'option par rapport à une autre plus près de l'échéance. Fidèlement aux attentes, l'écart par rapport à la valeur intrinsèque de l'option est significativement plus élevé lorsqu'il reste plus de temps à écouler jusqu'à l'échéance.

Figure 3 : Graphique de paiement d'une option de vente à deux dates différentes



9. Conclusion

Dans ce mémoire, on a proposé un modèle utilisant la programmation dynamique pour établir le problème et une grille jumelée à une approximation d'intégrale pour le solutionner. Le modèle s'est avéré capable de s'adapter facilement tant aux options d'achats qu'aux options de vente *lookback* à prix d'exercice variable de type européen et américain. Les résultats sont, en général, près de ceux des autres auteurs et la convergence s'effectue de façon continue.

Pour en arriver à un modèle optimal, des simplifications qui tiennent compte des propriétés particulières des options évaluées ici ont été apportés. On sait toutefois que l'adaptation pour la variante fractionnaire de ces options est très simple puisqu'elle n'affecte que la fonction de paiement. Toutefois, il serait intéressant de voir l'impact sur le modèle d'une adaptation à la variante partielle pour laquelle la période de mesure des extremums ne correspond pas à la vie de l'option. Un changement de l'intervalle de mesure (hebdomadaire, mensuel, etc.) s'avère également un sujet intéressant à étudier. L'imagination sans limite des ingénieurs financiers et les besoins des marchés financiers amènent sans cesse la création d'une quantité impressionnante de variantes aux options *lookback* ainsi que des amalgames avec d'autres types d'options exotiques, la recherche de nouvelles méthodes d'évaluation flexibles et efficaces est ainsi plus que nécessaire.

10. Bibliographie

- Anderson, Leif et Rupert Brotherton-Ratcliffe. *Exact Options*. Risk, Vol. 9, No.10, 1996. 85-89.
- Babbs, S. *Binomial Valuation of Lookback Options*. Midland Global Markets, Working Paper, 1992.
- Babbs, S. *Binomial Valuation of Lookback Options*. Journal of Economic Dynamics and Control, Amsterdam. Octobre 2000.
- Babsiri, Mohamed, et Gerald Noel. *Simulating Path-Dependent Options : A new approach*. The Journal of Derivatives. Winter 1998. 65-83.
- Bakshi, Gurdip; Cao, Charles et Zhiwu Chen. *Empirical performance of alternative option pricing models*. Journal of Finance. Vol. LII, No. 5. Décembre 1997. 2003-2049.
- Barraquand, J. et T. Pudet, *Pricing of American path-dependent contingent claims*, Mathematical Finance, 6 (1996), 17-51.
- Barrett, J., Moore, G. et Wilmott, P. *Inelegant efficiency*. Risk, 5, 82-4. 1992.
- Beaglehole, David R., Dybvig, Philip H. et Guofu Zhou. *Going to extremes : Correcting simulation bias in exotic option valuation*. Financial Analysts Journal. Janvier/Février 1997. 62-68.
- Ben Hameur, H., M. Breton et P. L'Écuyer. *A dynamic programming procedure for pricing American-style Asian options*. Management Science, 48. Linthicum; 625-643. Mai 2002
- Black, F., et M. Scholes. *The pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, 81, Mai-Juin 1973. 637-59.
- Bowie, Jonathan et Peter Carr. *Static Simplicity*. Risk, Vol. 7, No.8, 1994. 45-50.
- Boyle, Phelim P et Yisong Sam Tian. *Pricing Lookback and barrier options under the CEV Process*. Journal of Financial and Quantitative Analysis. Vol. 34, No. 2. Juin 1999. 241-264.
- Boyle, Phelim P. *Options : A Monte Carlo Approach*. Journal of Financial Economics. 4 (1997), 323-338.
- Broadie M, Glasserman P et Gautam J. *Enhanced Monte Carlo estimates for American options prices*. Journal of derivatives. Automne 1997. 25-44.

- Broadie M, Glasserman P. et Kou S.G. *Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options*. Finance and Stochastics. **2**. 1999. 1-28.
- Cheuk, Terry H.F., et Ton C.F. Vorst, *Currency lookback options and observation frequency: A binomial approach*. Journal of International Money and Finance; Kidlington; Avril 1997.
- Conze, A et Viswanathan, 1991. Path-dependent Options – the case of lookback options. Journal of Finance. **46** 1893-1907.
- Cox, J.C. et S.A. Ross. *The valuation of options for alternative stochastic processes*, Journal of Financial Economics, 3, 1976. 145-166.
- Cox, J.C., S.A. Ross et M. Rubinstein. *Option pricing : a simplified approach*. Journal of financial economics, 7 (1979), 229-264.
- Dewynne, Jeff et Paul Wilmott. *Barriers and Beyond : Partial to the Exotic*. Risk. Black-Sholes-Merton Supplement, Septembre 1998, 23-28.
- Dewynne, JN et Wilmott, P, 1995. *A note on American options with varying exercise price*. Journal of the Australian Mathematical Society. **37** 45-57.
- Dewynne, JN et Wilmott, P, 1995. *Untitled*. Working Paper, Oxford University.
- Garman, M. *Recollection in Tranquility*. Risk, Mars 1989. 16-19.
- Goldman, MB, Sosin H, et Gatto, M, 1979. *Path dependent options : buy at the low, sell at the high*. Journal of Finance. **34** 1111-1128.
- Harrison M. et D. Kreps. *Martingales and the pricing of contingent claims*. Memorandum, Stanford University. 1979.
- Heynen, RC & Kat, HM , 1995. *Lookback options with discrete and partial monitoring of the underlying price*. Applied Mathematical Finance. **2** 273-284.
- Heynen, Ronald et Harry Kat. *Selective Memory*. Risk, Vol. 7, No.11, 1994. 73-76.
- Hull, J.C. et A. White. *Efficient Procedures for valuing European and American path-dependent options*. Journal of Derivatives, 1 (1993), 21-31.
- Kat, H.M. *Pricing lookback options using binomial trees : an evaluation*. Journal of Financial Engineering. **4** (1995), 375-397.
- Levy, E. et F. Mantion. *Discrete by nature*. Risk **8**. Janvier 1997. 74-75.
- Levy, E. et F. Mantion. *Approximate Valuation of Discrete Lookback and Barrier Options*. Non Publi . (1998).

- Li, A. *Using stock price as numeraire in option pricing models with nonconstant volatility*. *Advances in futures and options research*, 9 (1997), 37-49.
- Lipton, Alexander. *Similarities via Self-Similarities*. *Risk*, Septembre 1999. 101-105.
- Merton, R. C. *Theory of rational option pricing*. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, Printemps 1973, 141-183.
- Press, William H., et al. *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge. 1993.
- Smithson, Charles. *What's New in the Options Markets?* *Risk*, Mai 2000. 54-55.
- Wilmott, P., J. Dewynne, et J Howison. *Option pricing: mathematical models and computations*, Oxford Financial Press, Oxford, 1993.
- Wilmott, Paul, *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*. West Sussex, John Winley & Sons, 1998.