ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
AFFILIÉES A L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Évaluation d'une obligation convertible, rachetable et remboursable
(Cas du LYON)

Par

Mukamurenzi Jacqueline

Sciences de la gestion

Mémoire présenté en vue de l'obtention
Du grade de maîtrise ès sciences
(M. Sc.)

Décembre 1999

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été riche d'apprentissages. Mes du remerciements venant fond de mon cœur s'adressent à toutes les personnes qui m'ont accompagnée dans la réalisation de ce projet.

Mes premiers remerciements s'adressent à mes directeurs de recherche pour leur appui constructif, rigoureux et enthousiaste. On ne saurait souhaiter de superviseurs plus disponibles et plus compétents. Je tiens à remercier sincèrement Michèle Breton , pour sa compétence, sa grande disponibilité, ses conseils et sa sérennité face aux obstacles que nous avons rencontrés pour mener à bien ce projet. Je tiens également à remercier Pierre Laroche pour sa contribution à la réalisation de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également au Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et Génie du Canada (CRSNG), qui m'a fait bénéficier de subventions fort appréciées. Sans leur aide financière, il m'aurait été difficile voire même impossible d'aller jusqu'au bout de ce cheminement.

Quant à ma famille, je tiens à la remercier pour son soutien constant tout au long de la rédaction de ce document. Toute ma gratitude et mon amour s'adressent à mon cher mari Issa, mon fils Théorème et ma fille Whitney qui m'ont toujours témoigné un amour inconditionnel et qui ont toujours eu les bons mots et gestes pour me réconforter dans mes moments de faiblesse. À mon frère Tumusenge Joseph, j'offre mes remerciements pour son soutien moral et aide appréciée.

Enfin, je veux remercier deux très bon amis, Ahmed Mahemud Hassen et Quoc-Xuan Trinh qui, par leur amitié, leur sourire, leur patience et leur aide appréciée, m'ont aidé à entrevoir la lumière au bout du tunnel.

Sommaire

Plusieurs des instruments de la dette ont une ou plusieurs options implicites; par exemple les obligations peuvent être convertibles, rachetables ou remboursables. Toutes les combinaisons de ces options implicites existent, et ces dernières compliquent l'évaluation des instruments de la dette. En effet, la prédiction de l'exercice de l'option, permettant l'estimation des flux monétaires (*cash flows*) par l'investisseur, est difficile.

Le présent travail s'intéresse à l'évaluation d'un titre financier appelé Liquid Yield Option Note (LYON). Il s'agit d'une obligation à coupon détachés, convertible, rachetable et remboursable. Ce titre a été évalué par McConnell et Schwartz par la méthode des différences finies.

Le but de ce mémoire est de proposer une approche alternative basée sur la programmation dynamique et la théorie des jeux. Sous les mêmes hypothèses que McConnell et Schwartz, nous proposons un algorithme pour l'évaluation du titre. Des résultats numériques et des analyses de sensibilité du résultat aux valeurs des paramètres sont présentés et comparés à ceux obtenus par McConnell et Schwartz.

Table des matières

Liste des Tableaux

1. Introduction

Comme le confirme Fabozzi (1996), au début des années 1990, le marché des obligations corporatives était de 1400 milliards de dollars. Plusieurs de ces instruments de la dette avaient une ou plusieurs options implicites; par exemple les obligations peuvent être convertibles, rachetables ou remboursables. Toutes les combinaisons de ces options implicites existent; ces dernières rendent les instruments de la dette difficile à évaluer. En effet, la prédiction de l'exercice de l'option, permettant l'estimation des flux monétaires (*cash flows*) par l'investisseur, est difficile. La littérature des vingt dernières années est marquée par un grand intérêt de plusieurs auteurs pour l'évaluation de tels titres contenant des options implicites.

Le présent travail est une contribution à cet effort; on s'intéresse à l'évaluation d'un titre financier appelé Liquid Yield Option Note (LYON) qui a été développé par «White Weld Capital Markets Group» en 1985 et qui a été l'une des plus grandes innovations dans le marché des titres convertibles. Il s'agit d'une obligation zéro coupon, convertible, rachetable et remboursable. Ce titre a été évalué par McConnell et Schwartz (1986) en utilisant une méthode de différences finies et en supposant que le taux d'intérêt est constant dans le temps.

L'objectif de ce mémoire est de proposer une autre approche d'évaluation d'un tel titre. La méthode d'évaluation utilisée est basée sur la programmation dynamique et la théorie des jeux. Les stratégies optimales sont obtenues comme un sous-produit de la méthode d'évaluation.

Le mémoire est structuré de la façon suivante : à la section 2, on passe en revue différentes méthodes d'évaluation d'obligations ayant des options implicites mentionnées dans la littérature. À la section 3, on présente le contexte du titre à évaluer. À la section 4, on propose une formulation mathématique du problème et le modèle de base en programmation dynamique. À la section 5, on présente les résultats ainsi qu'une analyse de sensibilité du prix du LYON à la variation de certains de ses paramètres. La section 6 est consacrée à la conclusion.

2. Revue de littérature

2.1 L'évaluation d'obligations ayant des options implicites

Dans la littérature financière, on dénombre plusieurs modèles d'évaluation des options et des Warrants dans le contexte d'équilibre du marché des titres. Les premiers modèles analytiques d'évaluation d'options, lorsque le sous-jacent ne paye pas de dividende, ont été présentés par Black et Scholes (1973) et ensuite par Merton (1974).

Différents auteurs ont tenté d'appliquer les principes d'évaluation d'options aux obligations ayant des options implicites, notamment à des obligations convertibles. Parmi ces auteurs, on peut citer Ingersoll (1977a). Il considère une obligation convertible comme un portefeuille composé d'une obligation standard et d'une option sur obligation. Il calcule la valeur d'une obligation standard en actualisant ses flux monétaires. Pour évaluer l'option implicite, il applique le modèle de Black et Scholes. Ainsi, la valeur de l'obligation convertible (ou de n'importe quelle obligation ayant une option implicite) est la somme des valeurs de ses composantes. Il trouve ainsi des solutions analytiques tout en élaborant des stratégies optimales de résolution d'une obligation convertible et rachetable.

Une obligation convertible est cependant un instrument complexe. En effet, non seulement le sous-jacent paie des coupons périodiques mais aussi (très souvent), elle implique plus d'une option implicite: option de conversion et / ou de rachat et / ou de remboursement. De plus ces options sont très souvent sujettes à des restrictions telles que par exemple, l'obligation ne peut pas être rachetée et ou remboursée avant une certaine date. Brennan et Schwartz (1977) ont proposé des solutions numériques. Leur méthode est fondée sur un raisonnement de minimisation de la valeur de la dette et de maximisation des fonds propres à chaque instant. Puisque les stratégies optimales des différents intervenants sont dépendantes les unes des autres, par exemple, la stratégie optimale de conversion de l'investisseur dépend de la stratégie optimale de rachat de l'émetteur, ils les résolvent simultanément.

Marr et Thompson (1984) ont proposé une méthode basée sur les moindres carrés ordinaires.

McConnell et Schwartz (1986) ont évalué le Liquid Yield Option Note (LYON). Il s'agit d'une obligation zéro coupon, convertible, rachetable et remboursable. Ils ont utilisé la méthode de différences finies et ont supposé que la structure à terme des taux d'intérêt était constante dans le temps.

Dunn et Spatt (1986) ont étendu la méthode de Brennan et Schwartz à l'évaluation d'obligations rachetables en tenant compte des coûts de transaction et de refinancement.

Quant à Manuer (1993), il a dérivé des solutions analytiques pour les options implicites en utilisant un modèle conditionnel sur le mode de refinancement (même approche qu'Ingersoll) dans un environnement de taux d'intérêt flottant et en supposant l'existence de coûts de transaction.

Dans un modèle conditionnel et par la méthode des différences finies, Martzoukos et Barnhill (1998) ont proposé une méthodologie pour évaluer une obligation standard, une obligation remboursable et une obligation ayant à la fois une position longue sur l'option d'achat (*call*) et une position courte sur une option de vente (*put*). Ils utilisent un modèle de structure à terme d'un seul facteur de taux d'intérêt qui suit un processus racine carrée (extension du modèle de Vasicek (1977) et de Cox, Ingersoll et Ross (1985)). À cause de l'interaction complexe entre ces options, ils n'ont étudié que les zones où à la fois les options *put* et *call* peuvent être exercées.

2.2 Les stratégies d'exercice

Les stratégies d'Ingersoll (1977a) peuvent être résumées comme suit : lorsque l'émetteur n'exerce pas son option de rachat, il n'est pas optimal pour l'investisseur d'exercer son option de conversion avant l'échéance, sauf si le ratio de conversion est affecté à la baisse ou si la valeur actualisée des dividendes est plus élevée que celle des coupons. Par contre si l'émetteur annonce son intention de racheter le titre et que la valeur de conversion est plus grande que la valeur de rachat, il est optimal pour l'investisseur d'exercer son option de conversion.

En réunissant ces stratégies optimales d'exercice des droits de conversion et de rachat et sous certaines hypothèses, il a mis en évidence les propriétés suivantes:

1. *Il sera optimal de convertir l'obligation avant l'échéance seulement si l'une des deux conditions suivantes est respectée:*
   - *le ratio de conversion peut être affecté à la baisse*
   - *la valeur actualisée des dividendes est supérieure à celle des coupons.*
2. *Le rachat par l'émetteur est optimal dès que la valeur de conversion est égale ou surpasse la valeur de rachat plus les intérêts courus. Dans ce cas, le gestionnaire force la conversion ou rachète le titre.*
3. *Un rachat devrait être aussi annoncé s'il est possible de se refinancer par emprunt à un taux plus avantageux.*

L'une des questions qui se posent, lorsqu'on a plus qu'une option implicite, est la règle de priorité de ces options

Quant à Brennan et Schwartz (1977), ils suggèrent de racheter l'obligation lorsque la valeur de rachat est plus petite que celle de conversion sinon l'investisseur exerce son option de conversion et bénéficie d'un certain flux monétaire (*payoff*). Cependant des études empiriques d'Ingersoll (1977b) et de Constantinides et Grundy (1987) montrent que l'émetteur dévie considérablement de cette politique de rachat. Ils remarquent qu'en moyenne, l'émetteur attend jusqu'à ce que la valeur de conversion soit plus grande que la valeur de rachat plus une certaine prime d'environ 43,9%. Asquith (1995) affirme que cette prime qui peut paraître élevée est composé de deux éléments:

i) la prime de sécurité demandée et

ii) la protection de rachat c'est à dire une période de non-exercice de cette option accordée à l'investisseur.

Ainsi donc après la période de grâce accordée à l'investisseur de non-exercice de l'option de rachat, cette prime n'est que la prime de sécurité demandée. Puisque l'investisseur sait que dès que la valeur de conversion est supérieure ou égale à la valeur de rachat plus la prime de sécurité, l'émetteur exerce son option de rachat, il exerce son option de conversion dès que la valeur de conversion est plus grande ou égale à la valeur de rachat. Ainsi donc, on peut dire qu'une option de conversion a la priorité sur une option de rachat.

2.3 Les modèles de structure à terme des taux d'intérêt

Vasicek a proposé un modèle où le taux d'intérêt suit un processus de Ornstein Uhlenbeck qui suppose que le taux d'intérêt a tendance à osciller au tour de la moyenne à long terme.

Les modèles de non-arbitrage ajustent le processus de diffusion du taux court terme à la structure selon l'échéance observée des taux d'intérêt. Ensuite, ils cherchent à dériver un processus stochastique des taux d'intérêt qui soit compatible avec cette structure observée.

Ho et Lee (1986) ont été les pionniers des modèles de non-arbitrage. Ils ont adapté le modèle de Merton (1973) en supposant que $\theta(t)$ varie dans le temps tout en forçant le prix théorique à être égal au prix observé.

Malgré les caractéristiques intéressantes de ce modèle (propriété markovienne) et la simplicité de sa mise en application (utilisation d'arbre binomial), le modèle de Ho et Lee a deux inconvénients majeurs : le σ est constant dans le temps, de plus, il ne tient pas compte de la tendance qu'ont les taux d'intérêt à osciller autour de la moyenne à long terme. Il n'évite pas non plus la possibilité de la négativité des taux d'intérêts. Le travail de Ho et Lee a été étendu par Black, Derman et Toy (1990).

Le modèle de Hull et White (1990) est l'extension du modèle de Vasicek. À partir du processus de taux court de Vasicek, les auteurs ont réorganisé la formule et pour contrer le modèle, c'est à dire pour que le prix théorique soit égal au prix observé, et ils ont introduit une variable qui varie dans le temps, dans l'expression de la tendance.

Les modèles tels que ceux de Vasicek et de Black, Derman et Toy sont donc des cas particuliers du modèle de Hull et White. Leur approche consiste à calculer l'arbre trinomial des taux à court terme et à partir de cet arbre, de calculer la valeur d'une obligation correspondante puis d'une option sur cette obligation.

L'approche basée sur la variation de θ, paramètre du taux *spot*, dans le temps, aboutit à un $\theta(t)$ qui est une fonction du taux *forward* ($\theta(t) = f(F(0,t))$). La solution de ces modèles est difficile à trouver. De plus, il est difficile de généraliser l'approche à plusieurs facteurs. Pour résoudre ce problème, Heath, Jarrow et Morton (1987) ont proposé un modèle qui part directement des taux *forward*, ce qui est aussi logique car les prix d'une obligation peuvent être en fonction des taux *forward* ou des taux spot grâce à la relation qui existe entre les deux.

L'approche de Heath, Jarrow, Morton consiste à définir tous les taux forwards et les volatilités associées. Elle est comparable au modèle Black-

Scholes, où la structure à terme au complet et la volatilité décrivent comment la structure à terme évolue dans le temps.

Certains de ces modèles ont des solutions analytiques, d'autres n'en ont pas ou sont difficiles à trouver ce qui fait qu'on a souvent recours à des méthodes numériques. Dans la section suivante, on présente les méthodes numériques les plus utilisées.

2.4 Les méthodes numériques

Au cours des vingt dernières années, plusieurs chercheurs ont considérablement prêté attention à des méthodes numériques efficientes permettant d'évaluer les produits dérivés lorsqu'une solution analytique ne peut pas être disponible. Parmi les méthodes numériques les plus utilisées, on peut retenir la simulation de Monte Carlo, l'arbre multinomial et la méthode de différences finies.

2.4.1 Simulation de Monte Carlo

L'expression simulation de Monte Carlo réfère aux casinos de la ville de Monte Carlo en Monaco. Il s'agit d'une technique utilisant des nombres pseudo-aléatoires pour simuler le comportement de variables aléatoires complexes. Boyle (1977) a été le premier à proposer l'utilisation de la technique de simulation de Monte Carlo pour l'évaluation des produits dérivés. Cette dernière consiste à générer un grand nombre de valeurs finales possibles d'une option dont on actualise ensuite la moyenne au taux sûr dans le but d'estimer son prix.

La simulation de Monte Carlo est un outil inestimable et très polyvalent pour évaluer des espérances mathématiques n'ayant pas d'expression analytique.

Cependant, elle n'est pas un outil idéal pour l'évaluation d'option lorsqu'on n'en connaît pas le moment d'exercice.

2.4.2 Arbres multinomiaux

Les modèles multinomiaux sont utilisés pour évaluer les titres financiers, notamment les titres à revenu fixe tel que les obligations, ainsi que les produits dérivés. Parmi ces modèles, on peut citer l'arbre binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979) et l'arbre trinomial de Boyle (1986). Dans le modèle binomial les branches représentent, pour chaque petit intervalle de temps (dt), deux états de la nature possibles du prix du titre sous-jacent (S).

Black, Derman et Toy ont utilisé un modèle de taux d'intérêt d'arbitrage pour évaluer des titres sensibles au taux d'intérêt. Le taux d'intérêt court, la seule variable de leur modèle, est calculé à chaque nœud de l'arbre. Les données du modèle sont la structure à terme sur le marché au moment du calcul du prix de l'obligation. La structure à terme est formée de taux d'intérêt long terme (les rendements à maturité des bons du trésor zéro coupon) pour toutes les maturités et la volatilité de ces même taux (cette dernière est en fonction du temps). De ce fait, ils évitent l'arbitrage en égalisant le prix observé sur le marché au prix théorique.

2.4.3 Méthode de différences finies

L'idée sous-jacente à la méthode de différences finies proposée par Brennan et Schwartz (1978) consiste à dériver un modèle d'évaluation, sous forme d'équation (ou système d'équation) aux différences, d'un produit dérivé en remplaçant les dérivées partielles intervenant dans une équation aux dérivées partielles décrivant l'évolution de la valeur du titre par des approximations sous formes de différences finies.

Dans le but de décrire comment fonctionne la méthode de différences finies, on suppose un produit dérivé dont le prix est une fonction d'une variable aléatoire suivant un processus stochastique. En appliquant le lemme d'Ito, on aboutit à une équation aux dérivées partielles.

La résolution de cette équation aux dérivées partielles, selon la méthode de différences finies, suppose l'approximation des dérivées partielles de cette équation. Il existe trois grandes méthodes permettant une telle approximation (progressive, régressive et mixte). Ainsi, il existe plusieurs méthodes de différences finies résultant de l'utilisation d'une ou de la combinaison de ces méthodes. Les plus fréquemment utilisées sont la méthode de différences finies explicite basée sur la f*orward différence* et la méthode de différences finies implicite basée sur la *backward différence.*

En remplaçant les dérivées partielles de l'équation différentielle partielle par leurs approximations, on obtient un système d'équations linéaires aux différences finies dont il faut trouver la solution pour obtenir la valeur du produit dérivé. Connaissant le prix de ce dernier à l'échéance, il est facile de trouver la solution de ce système d'équation par récurrence

3. Contexte de l'étude

Liquid Yield Option Note (LYON) est un titre complexe qui fait intervenir certains concepts dont l'explication s'impose dans le cadre de ce travail. Ce chapitre donne un aperçu général de ces concepts, les avantages et désavantages du titre pour l'émetteur et l'investisseur ainsi que certains cas concrets d'émissions du LYON.

3.1 Définition

Le Liquid Yield Option Note (LYON), développé par «White Weld Capital Markets Group», est l'une des plus grandes innovations dans le marché des titres convertibles. Il s'agit d'une obligation zéro coupon sur laquelle on a greffé trois options : options de conversion (ou d'échange), de rachat et de remboursement. Les sous-jacents de ce montage sont donc l'action ordinaire de l'entreprise émettrice, pour laquelle le titre peut être converti, et l'obligation zéro coupon. Puisque ce sont des obligations zéro coupon, elles sont offertes à escompte. La maturité du LYON est habituellement de 15 à 20 ans et sa valeur nominale est de $1000. Avant de continuer, on va donner une explication exhaustive des différentes composantes du LYON.

L'obligation

Une obligation est un titre financier émis par une administration publique ou une entreprise privée pour se financer. L'émetteur du titre s'engage à payer un certain montant ou un certain pourcentage de la valeur nominale du titre émis à l'obligataire de façon périodique (généralement tous les six mois) tout au long de la durée de vie du titre ou en totalité à son échéance (si zéro coupon). Le prix d'une obligation est la valeur actuelle de tous les flux monétaires qu'elle génère (la valeur nominale et les coupons s'il y en a). Le prix d'une obligation zéro coupon est donc la valeur actuelle de sa valeur nominale à l'échéance. Ainsi donc, le prix des obligations varie avec le taux d'intérêt utilisé pour actualiser les flux monétaires.

La conversion

La conversion est une option qui confère au détenteur (acheteur du titre convertible) le droit de convertir sa créance en actions ordinaires de l'entreprise émettrice et signataire de l'option ou en d'autres actions détenues par l'émetteur. Si les actions transigées dans le cadre de l'exercice de l'option sont de nouvelles actions qui viennent s'ajouter aux actions déjà existantes, un effet de dilution peut survenir. L'option de conversion est similaire à un «call» (option d'achat) à l'exception du fait que la période de temps durant laquelle le porteur peut exercer son droit est généralement de long terme et ne peut se dissocier du titre convertible. Il s'agit souvent d'options américaines qu'on peut exercer en tout temps après l'émission. Deux clauses sur cette option sont à spécifier dans le contrat de LYON. Il s'agit du facteur de conversion et des dates de conversion. Le facteur de conversion peut être fixe ou ajustable pour tenir compte des effets découlant d'émission ou de fractionnement d'actions. Le facteur de conversion peut être exprimé en terme de prix, en divisant la valeur nominale du titre convertible par le facteur de conversion. Dans ce cas on parlera de *prix de conversion*. Par exemple, si la valeur nominale est $1000 et si le rapport de conversion est de 10, le prix de conversion est de $100 par titre convertible.

Le remboursement

Lors de l'acquisition du LYON, son détenteur se réserve aussi le droit et non l'obligation de revendre sa créance à l'émetteur à un prix et suivant un échéancier spécifiés dans le contrat. Pour exercer son option, l'investisseur doit accorder une durée de préavis comprise entre 30 et 90 jours.

Le rachat

L'option de rachat du LYON donne à l'émetteur le droit de racheter sa dette par anticipation, pour profiter d'une baisse des taux par exemple. Dans ce cas, le détenteur du LYON devient le signataire de l'option tout en ayant la possibilité d'exercer son option de conversion. Les clauses spécifiques à cette option sont la valeur de rachat et la période à l'intérieur de laquelle le rachat peut s'exercer.

À l'exercice de l'option de remboursement ou de rachat, l'émetteur doit ajouter la valeur des intérêts courus aux prix d'émission de LYON pour déterminer la somme à remettre au porteur du titre. Les intérêts courus sont obtenus en capitalisant le prix d'émission ou en actualisant la valeur nominale du LYON au taux de rendement à maturité.

Pour offrir aux investisseurs plus de protection contre le risque de perte de capital que les obligations convertibles conventionnelles, les options de remboursement permettent aux détenteurs du LYON de vendre le titre à l'émetteur à une ou plusieurs dates prédéterminées. En d'autres mots, les options de remboursement sont des séquences d'options *put* européennes. L'option de conversion permet à l'investisseur de participer à la hausse des cours des actions de l'émetteur. Cependant, l'option de rachat vient limiter ces plus-values en fixant un plafond à cette dernière.

3.2 Avantages et désavantages de LYON

Pour l'investisseur

- LYON permet à l'investisseur de participer à une plus-value résultant de l'appréciation des actions de l'émetteur tout en offrant un rendement à maturité non négligeable lorsque la conversion des actions n'est pas optimale.
- Grâce à l'option de conversion, l'investisseur est protégé contre toute décision favorisant un accroissement des cours des actions au détriment des valeurs marchandes des obligations.
- LYON étant une obligation zéro coupon, le gain en capital qu'il procure à son détenteur est moins imposable que les gains obtenus sous forme de coupon.
- L'achat d'une obligation à coupons détachés élimine le risque de réinvestissement. En effet, l'évaluation d'une obligation est basée sur l'hypothèse de réinvestissement des coupons au taux de rendement à échéance, ce qui n'est pas le cas dans la pratique.
- L'investisseur a le droit d'exercer son option de remboursement. Plutôt que de revendre ou convertir à perte ses titres en bourse, il préférera exercer son option de remboursement et réinvestir dans des titres à meilleur rendement.

Cependant

- La potentialité des plus-values résultant de l'exercice de l'option de conversion est limitée par l'option de rachat détenue par l'émetteur du LYON.

Pour l'émetteur

- LYON étant une obligation zéro coupon, l'émetteur peut déduire de son revenu imposable les intérêts non versés.
- LYON offre à l'émetteur un outil de financement à un coût très faible.

- L'émetteur a la possibilité de profiter de la baisse des taux d'intérêt sur le marché. En effet, l'émetteur a le droit d'exercer son option de rachat et se refinancer à un taux d'intérêt plus intéressant.
- À l'exercice de l'option de conversion, l'émetteur est dispensé d'effectuer un remboursement, ce qui a un effet positif à sa trésorerie.

3.3 Émissions du LYON

De 1985 à 1992, plus de 60 entreprises dont Disney, Eastman Kodak, Motorola, Time Warner et Waste Management ont émis des LYONs ou produits similaires sur le marché domestique américain. Le total de ces émissions a été de $13 milliards, à peu près 28% du total des obligations convertibles offertes durant la même période. LYON constitue donc une part de marché non négligeable. Voici des exemples d'émissions du LYON faites par certaines de ces entreprises.

3.3.1 Émission de Waste Management

De 1985 à 1990, Waste Management Inc (WMX) a procédé à trois émissions de LYONs. En effet, le 22 avril 1985, WMX a été le premier a émettre et vendre des LYONs d'une valeur de $840 millions échéant le 21 janvier 2001 dont chacun est convertible en 4,36 actions ordinaires de WMX. Suite aux conversions faites en 1993 et 1994 respectivement de 6582 et 2822 LYONs, il ne restait, au 31 décembre 1993, qu'une valeur de $18 266 000 de LYONs dans le bilan de l'entreprise, résultant de cette première émission.

En novembre 1988, la compagnie a procédé à une deuxième émission de LYONs valant $1,620 milliards échéant en avril 2012. Cette fois-ci LYON est échangeable et non convertible en 17,218 actions de sa filiale (CWM). Cette façon de convertir le LYON évite l'émission de nouvelles actions, ce qui empêche tout effet de dilution. Le 31 décembre, il ne lui restait que $1 255 395 000 de LYON.

En août 1990, CWM la filiale de WMX a émis des LYONs d'une valeur de $575 millions échéant en août 2010 et convertibles en 11,676 actions de CWM. Les dates, les prix d'émission et les valeurs de remboursement et de rachat, ainsi que les rendements à maturité pour l'émission du 22 avril 1985 sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 3.3.1 Échéancier de rachat et de remboursement du LYON émis le 22 avril 1985 et échéant le 21 janvier 2001

Dates	Prix de remboursement	Prix de rachat	Rendement à maturité
22/04/85		272,50	
30/06/86		297,83	
30/06/87		321,13	
30/06/88	301,87	346,77	6,00
30/06/89	333,51	374,99	7,00
30/06/90	375,58	406,00	8,00
30/06/91	431,08	440,08	9,00
30/06/92	470,75	477,50	9,00
30/06/93	514,07	518,57	9,00
30/06/94	561,38	563,63	9,00
30/06/95	613,04	613,04	9,00
30/06/96	669,45	669,45	9,00
30/06/97	731,06	731,06	9,00
30/06/98	798,34	798,34	9,00
30/06/99	871,80	871,80	9,00
30/06/00	952,03	952,03	9,00
21/1/01		1.000	

En regardant de près ce tableau, on constate que l'investisseur et l'émetteur ne peuvent pas respectivement exercer leur option avant le 30 juin 1988 et le 30 juin 1986. À partir du 30 juin 1995 jusqu'à l'échéance les prix de rachat et de remboursement sont égaux et correspondent à un taux de rendement à maturité initiale de 8,8 %. Le prix de rachat ou de remboursement est obtenu par le prix d'émission majoré des intérêts courus.

3.3.2 Émission de Time Warner

Le 17 décembre 1992, Time Warner a émis $1,651 milliards de LYONs au prix de $292,04 chacun. La maturité est le 17 décembre 2012 et le LYON est échangeable à tout temps en 7,301 actions de Hasbro, inc («Hasbro»). L'investisseur a le droit d'exiger le remboursement prématuré aux dates suivantes : tous les 17 décembre 1997, 2002, 2007 pour un montant de $397,27 ; 540,41 et 735,12 payable au comptant ou en actions. La compagnie a le droit de racheter sa dette en tout temps après 17/12/1997 au prix d'émission majoré des intérêts courus. Le 31/12/1995, Time Warner affichait dans son bilan un montant de $1,070 milliards de LYONS.

En 1990 la compagnie a effectué une autre émission de ce même titre dont la maturité et le rendement à maturité sont respectivement le 22 juin 2013 et 5%. Chaque LYON est convertible en actions ordinaires (qui sont au nombre de 18,7 millions) de la compagnie émettrice au taux de 7,759 actions. La compagnie peut exercer son option de rachat en tout temps à partir du 22 juin 1998. Quant au propriétaire, son option est exerçable le 22 juin 1998, 2003 et 2008. Le montant original non encore amorti était de $1,291 milliards en 1996 et de $1,345 milliards fin 1997.

Dans le cas de cette émission, l'entreprise est avantagée par le fait qu'elle a le droit de payer, en partie ou en totalité, les actions Hasbro lorsque l'investisseur exerce son option de remboursement, ce qui est favorable à sa trésorerie.

3.3.3 Émission de Motorola

Le 7/9/1989 Motorola a émis 1,32 milliards de LYONs échéant le 7/9/2009 pour un montant de $405 millions. Le LYON est convertible en 4,567 actions ordinaires de Motorola et il offre à son détenteur un rendement à maturité de 6%.

Il est à noter qu'en tout temps avant la date permettant à l'investisseur d'exercer son option de remboursement, ce dernier a le droit d'exiger le remboursement au prix d'émission plus intérêts courus lorsqu'il constate tout changement au niveau de contrôle de l'entreprise émettrice du LYON.

4. Évaluation du LYON

Le LYON est composé d'une obligation standard, des options de conversion, de rachat et de remboursement. Ces quatre parties sont en général inter-reliées et ne peuvent jamais être séparées. De plus les options ne peuvent pas s'exercer en même temps. Par exemple, l'exercice d'une option de rachat n'est qu'une option *call* sur une obligation convertible et remboursable et non une option *call* sur une obligation standard. Même si on pouvait calculer les valeurs de ces options séparément, la valeur du titre ne serait pas une simple sommation des valeurs de ses composantes.

L'évaluation du LYON nécessite de tenir compte des caractéristiques du titre et de l'environnement économique dans lequel il est émis. Pour se faire, il est nécessaire d'identifier les stratégies de gestion de ses options. Ces stratégies indiquent les conditions qui doivent être remplie pour qu'il soit optimal de les lever. Certaines de ces stratégies ont été mises en évidence par Ingersoll (1977) et Brennan et Schwartz(1977).

McConnell et Schwartz (1986) ont développé un modèle spécifique pour l'évaluation du LYON, basé sur l'évaluation par différences finies de l'équation différentielle de portefeuille que respecte le titre. Les stratégies de conversion se traduisent par des conditions aux bornes que doit respecter la valeur du LYON. Nous utiliserons les mêmes hypothèses sur le processus de diffusion du sous-jacent; cependant, les stratégies de conversion sont un sous-produit notre algorithme de type programmation dynamique.

4.1 Hypothèses

Ces hypothèses sont semblables à celles de McConnell et Schwartz (1986) à une différence près[1] :

Hypothèse I : *Le marché des titres financiers est parfait.* En effet, les investisseurs et les émetteurs accèdent à toute information gratuitement. Ils ne payent ni coûts de transaction ni taxes.

Hypothèse II : *La structure à terme des taux d'intérêt est constante et non stochastique.* Le taux d'intérêt utilisé dans les calculs est le taux sans risque r qui est supposé connu avec certitude.

Hypothèse III : *La valeur du LYON dépend de la valeur des actions ordinaires de toute l'entreprise émettrice.* Et la volatilité de ces actions est supposée constante.

Hypothèse IV : *L'entreprise émettrice distribue les dividendes à un taux constant.* On suppose que durant toute la vie du LYON, les détenteurs des actions de l'émetteur reçoivent le dividende.

Hypothèse V : *le taux de conversion du LYON contre les actions de l'émetteur est constant dans le temps.* Il s'agit d'un élément spécifié dans le contrat.

Hypothèse VI : *Aucun délai n'est accordé aux acteurs pour réagir.* Lorsqu'un des acteurs joue l'autre doit immédiatement répliquer. Par exemple si l'émetteur annonce le rachat, l'investisseur doit immédiatement soit choisir l'acquisition des actions de l'émetteur en exerçant son option de conversion soit accepter la valeur de rachat.

Hypothèse VII : Le prix des *actions ordinaires (S) de l'émetteur est un processus de diffusion à variance constante* (σ_S) :

$$dS_t = [S_t(\mu - \partial)]dt + S_t \sigma_s dB(t)$$

où

- S_t est le prix des actions de l'émetteur au temps t ;
- μ est le rendement total espéré instantané réalisé sur les actions de l'émetteur ;
- σ_S est la volatilité de taux de rendement sur les actions ordinaires de l'émetteur;
- ∂ est le taux de dividende payé aux détenteurs des actions ordinaires
- $B(t)$ est un processus de Wiener standardisé.

4.2 Stratégies optimales de gestion

4.2.1 Stratégie optimale de conversion

Les stratégies optimales de rachat et celle de remboursement sont les mêmes que celles proposés par McConnel et Schwartz. Cependant, il convient de souligner que la stratégie de conversion comporte un élément spécifique à l'obligation rachetable. En effet, les auteurs affirment que l'investisseur ne convertira jamais, si la valeur du marché du LYON est plus grande que celle de conversion. Mais en plus, l'émetteur compare la valeur de rachat à la valeur de détention du LYON sur le marché; si cette dernière est supérieure à la valeur de rachat, il exerce son option de rachat. En exerçant son option de rachat, l'investisseur réplique et exerce son option de conversion si la valeur de rachat est inférieur à la valeur de conversion. Par conséquent, l'investisseur exercera son option de conversion si :

- la valeur de conversion est plus grande que la valeur de remboursement et la valeur de détention, ou si
- la valeur de rachat est inférieure à la valeur de détention tout en étant inférieure à la valeur de conversion.

[1] Les auteurs ne se sont pas prononcés sur l'hypothèse VI.

4.2.2 Stratégie optimale de remboursement

À chaque date de demande de remboursement, l'investisseur doit choisir entre garder le LYON pendant une période de plus ou exercer son option de remboursement. Cependant, puisqu'il doit maximiser la valeur de son titre, il n'exercera pas son option si la valeur de détention du titre est plus grande que la valeur de remboursement. Par contre puisqu'il aura immédiatement le gain en exerçant son option de remboursement, il le fera aussi longtemps que la valeur de détention du LYON est inférieure à la valeur de demande de remboursement. De façon optimale, l'investisseur demandera le remboursement lorsque la valeur de détention du LYON est supérieure ou égale à sa valeur de remboursement.

4.2.3 Stratégie optimale de rachat

L'émetteur minimise la valeur du LYON. Ainsi, il ne laissera jamais la valeur du titre sur le marché dépasser sa valeur de rachat. De plus, il ne rachètera pas le titre si sa valeur de maintien est plus petite que la valeur de rachat. Ainsi donc, il exercera son option si la valeur de rachat est inférieure à la valeur de maintien.

4.3 Bornes et notation

Les bornes encadrant la valeur du LYON découlent des stratégies suivies par l'investisseur et l'émetteur qui ont été présenté ci-dessus. Notons $L_t(S)$ la valeur du LYON à la date t si la valeur du titre sous-jacent est S. Les bornes sont :

1. À l'échéance, l'investisseur aura au maximum la valeur nominale tel que spécifiée dans le contrat ou la valeur de conversion :

   $L_T(S) = Max(CS;VN)$

   où C est le coefficient de conversion;

   VN est la valeur nominale du LYON,

T est la maturité du LYON.

2. À tout instant, la valeur marchande du LYON ne peut pas être inférieure à sa valeur de conversion, sinon l'investisseur exercera son option de conversion et réalisera un profit instantané en échangeant ses LYONs contre les actions ordinaires de l'émetteur.

   $$L_t(S) \geq CS$$

3. Aux dates prévues de rachat, la valeur marchande du LYON est plafonnée par la valeur de conversion ou la valeur de rachat. En effet, lorsque la valeur de conversion du titre devient supérieure ou égale de la valeur de rachat, l'émetteur exercera sans tarder son option de rachat.

   $$L_t(S) = Max[R_t; CS]$$

   où R_t est la valeur de rachat à la date t.

4. À chaque date de demande de remboursement, la valeur du LYON doit être plus grande ou égale au prix de remboursement

   $$L_t(S) \geq P_t$$

   où P_t est la valeur de remboursement à la date t.

5. La valeur du titre ne peut pas être négative.

   $$L_t(S) \geq 0 .$$

6. La valeur du LYON ne peut pas dépasser la valeur des actions de l'entreprise émettrice puisque la responsabilité des actionnaires se limite à leur mise.

   $$L_t(S) \leq S$$

Parmi ces hypothèses, on en trouve deux contraignantes (hypothèses II et III). L'hypothèse III, selon laquelle la valeur du LYON dépend de la valeur des actions ordinaires de l'émetteur et non de la valeur marchande totale de l'entreprise ne capte pas nécessairement le risque de défaut du LYON. Sous cette hypothèse qui exclut la possibilité de faillite, on suppose qu'à l'échéance l'investisseur reçoit le maximum entre la valeur nominale du LYON ou la valeur de conversion. L'autre hypothèse forte est la structure à terme du taux d'intérêt neutre au risque, constante et connue avec certitude (hypothèse II).

L'hypothèse III surévalue la valeur du LYON. Pour capter le risque de défaut, McConnell et Schwartz ont utilisé, plutôt qu'un taux d'intérêt sans risque, un taux d'intérêt à terme intermédiaire majoré, ce qui permet de réduire la valeur du LYON. Cependant, lorsqu'on inventorie les grandes entreprises émettrices du LYON, on constate qu'elles sont en très bonne santé financière ce qui rend l'hypothèse III moins contraignante.

4.4 Le modèle de base

En se basant sur ces hypothèses, les stratégies utilisées par l'émetteur et l'investisseur sont obtenues récursivement, à chaque date d'évaluation. À chacune de ces dates, les acteurs choisissent l'action optimale, en supposant qu'ils connaissent la valeur de détention du LYON, parmi celles qui leur sont accessibles. Ainsi, l'émetteur, à une date t prévue, peut soit attendre soit exercer son option de rachat. Par ailleurs, aux mêmes dates, l'investisseur peut soit exercer son option de conversion, de remboursement ou attendre et détenir le LYON pour au moins une autre période. Soit :

CS_t : la valeur de conversion à la date t,

P_t : la valeur de remboursement à la date t,

R_t : la valeur de rachat à la date t,

L_t^h : la valeur de détention à la date t.

Le tableau 4.1 présente les diverses actions disponibles à la date t ainsi que leurs conséquences pour l'investisseur (la conséquence pour l'émetteur étant l'inverse).

Tableau 4.1 : Les différentes actions de l'investisseur et de l'émetteur à la date t et leurs conséquences .

Investisseur / Émetteur	Conversion	Remboursement	Attente
Rachat	CS_t	R_t	R_t
Attente	CS_t	P_t	L_t^h

En considérant le tableau précédent, qui définit un jeu à somme nulle entre les deux joueurs à la date t, il est facile d'obtenir les stratégies d'équilibre. Les valeurs de remboursement et de rachat étant des paramètres, ainsi que le coefficient de conversion, et la valeur de détention étant supposée connue, la seule variable décrivant l'état à la date t est le prix du sous-jacent. On obtient ainsi la formulation récursive du prix du LYON en fonction du prix du sous-jacent à la date t, pour $T \geq t \geq g$ (où g est la période de grâce d'exercice de l'option de remboursement), t étant l'une des dates d'exercice prévues dans le contrat.

$$L_t(S) = \begin{cases} CS & \text{si } CS = M \\ P_t & \text{si } P_t = M \\ Max(CS; R_t) & \text{si } L_t^h = M \text{ et si } R_t < L_t^h \\ L_t^h & \text{si } L_t^h = M \text{ et si } R_t \geq L_t^h \end{cases} \tag{1}$$

où $M \quad = Max\left(CS; P_t; L_t^h\right)$;

$$L_t^h \quad = \rho E_S^Q\left[L_{t+1}(\bullet)\right] \tag{2}$$

où $\rho = e^{-r(t)d}$;

r est le taux d'intérêt sans risque,

d est la durée séparant deux dates d'exercice,

$E_S^Q[\bullet]$ est l'espérance mathématique sous la mesure Q (neutre au risque) conditionnelle à S.

À l'échéance, l'investisseur reçoit le maximum entre la valeur nominale (VN) et la valeur de conversion (CS) :

$$L_T(S) = Max(VN; CS) \tag{3}$$

Dans le contrat de LYON que l'on veut évaluer (et que l'on retrouve presque toujours dans de tels contrats), l'investisseur et l'émetteur ne peuvent pas exercer leurs options, respectivement, de remboursement et de rachat avant une certaine date bien précise (sauf sous certaines conditions)[2]. Ainsi, dans le contrat émis par Waste Management, l'option de rachat peut être exercée à partir du 30 juin 1987 (sauf si le prix de l'action dépasse 86,01$) et celle de remboursement peut l'être à partir du 30 juin 1988 alors que le contrat a été signé le 12/04/1985. La récursion est facilement ajustée en conséquence :

$$L_t(S) = Max(CS; L_t^h, R_t) \tag{4}$$

si seule l'option de rachat peut être exercée et

$$L_t(S) = Max(CS; L_t^h) \tag{5}$$

si seule l'option de conversion peut être exercée.

Par contre l'option de conversion peut être exercée en tout temps. Dans le modèle présenté ici, le temps est discrétisé selon les dates d'exercice des options de rachat et de remboursement, ce qui équivaut à supposer que l'option de conversion ne peut que s'exercer à ces dates précises et qui sous-évalue légèrement le LYON. Cependant, l'utilisation d'un modèle comportant un plus grand nombre d'étapes ne

[2] Ces conditions peuvent être par exemple, la faillite ou une hausse anormale de valeur des actions ordinaires de l'entreprise émettrice

pose aucun problème théorique, il suffit de vérifier à chacune de ces dates si la valeur de détention est supérieure ou non à la valeur de conversion.

Le modèle (1)-(5) a été appliqué sur les données de l'émission du LYON effectuée par Waste Management en 1985 et la résolution a été effectuée de façon numérique. La section suivante présente les détails de l'implantation, les résultats et l'analyse de sensibilité de ces résultats aux valeurs des paramètres.

5. Résultats

Afin d'évaluer les performances du modèle, l'algorithme a été programmé en langage C et testé sur l'ordinateur SUN ULTRA 4 (300MHZ). Dans cette section, on présente, premièrement, les données utilisées et le calcul de certains composantes du modèle. Deuxièmement, on effectue l'analyse des résultats et de sensibilité de la valeur du LYON suite à une variation de chacun de ses paramètres.

5.1 Les données

Dans le souci de comparer les résultats obtenus avec ceux de McConnel et Schwartz, on a utilisé les données portant sur l'émission du LYON effectuée par Waste Management en 1985 sous les mêmes hypothèses que ces auteurs. Les paramètres utilisés sont résumés dans le tableau 4.2. Pour plus d'informations concernant ces données, le lecteur est conseillé de lire l'article de McConnell et Schwartz (1986).

Tableaux 4.2 : Paramètres et leurs valeurs utilisés dans l'évaluation du LYON

Paramètres	Valeurs
Taux d'intérêt	11,21%
Volatilité des actions	30%
Taux de rendement des dividendes	1,6%
Prix des actions lors de l'émission	52 $
Durée de vie (échéance)	16 ans

5.2 Calcul de l'espérance conditionnelle

Pour évaluer la valeur de détention, à chaque date d'exercice, il faut calculer une espérance mathématique $\rho E_S^Q\left[L_{t+1}(\bullet)\right]$ sous la mesure de probabilité neutre au risque, conditionnellement à l'information disponible à la date d'évaluation t qui est la valeur des actions ordinaires de l'émetteur (notée S). Comme on ne dispose pas d'une expression analytique pour la valeur du LYON, l'espérance mathématique de cette valeur à la prochaine date d'exercice ne peut être calculée que numériquement.

Pour calculer cette espérance conditionnelle, plutôt que de définir une grille sur l'espace d'états, on a choisi de définir une grille G sur les taux d'augmentation en une période des prix du sous-jacent comme suit :

$$G = \{G_i \text{ pour } i = 0,1,....,p\}$$

et on fait l'approximation de l'espérance de la façon suivante :

$$E_S^Q[L_{t+1}(\bullet)] = \sum_{i=1}^{p} prob(G_{i-1} < \tau < G_i) \times L_{t+1}(\tau S)$$

Connaissant les valeurs de $L_{t+1}(S)$ en tous points d'une grille, on peut calculer la valeur de $L_{t+1}(S)$ en tout point, soit par interpolation, soit par une fonction constante par morceaux, ou par une autre fonction s'ajustant bien aux points connus.

Pour le calcul des probabilités conditionnelles, on a choisi d'utiliser le taux d'augmentation, dont la distribution est indépendante de la valeur de la variable d'état. Ceci permet, entre autres avantages, d'évaluer le LYON sur une grille déterminant des classes équiprobables pour le prix du sous-jacent, un choix guidé par le fait que le LYON est un titre de longue échéance (entre 15 et 20 ans), et que par conséquent le prix des actions peut changer énormément sur cet intervalle de temps. Ainsi donc, l'évaluation de la valeur de détention se fait ainsi :

$$L_t^h(S) = \frac{\rho}{N} \sum_{i=1}^{N} L_{t+1}(S\tau_i)$$

où les τ_i sont des centiles d'une lognormale de distribution de paramètres appropriés et N est le nombre de classes équiprobables.

Ayant tous les ingrédients nécessaires dans le calcul de la valeur du LYON au temps t on applique le modèle de base de façon récursive, en actualisant selon la longueur de la période entre deux dates d'exercice. jusqu'à la date d'émission

5.3 Analyse des résultats et de sensibilité

Les prix théoriques obtenus se rapprochent, mais sont moins élevés que le prix observé sur le marché à l'émission ainsi que le prix obtenu par la méthode des différences finis (voir tableau 4.3). Il convient de rappeler que le modèle utilisé sous-évalue la valeur du LYON puisqu'il suppose que l'option de conversion ne peut être exercée qu'aux dates d'exercice des autres options. On constate que les valeurs calculées par le modèle sont moins élevées que celles obtenues par la méthode des différence finies avec les mêmes hypothèses.

Tableau 4.3: Comparaison du prix théorique au prix sur le marché

Prix théorique	242,76	247,90	250,4	253,24	253,98
Prix théorique obtenu par la méthode des différences finies	258,4	262,7	263,3	267,2	267,9
Valeur sur le marché[3]	250	258,75	257,5	265	265
Prix des actions	50,25	52,25	52,50	54	54,25

Évidemment, un biais peut aussi avoir été introduit par la sélection des paramètres. L'impact de la variation de taux d'intérêt sur la valeur du LYON est illustré dans le tableau 4.4. On constate que les valeurs du LYON diminuent avec l'augmentation des taux d'intérêt : par exemple pour une action de 52$, lorsque le taux d'intérêt passe de 7,21% à 11,21% la valeur du LYON passe de 256,49$ à 247,67$. Cet effet est le même que celui observé avec la méthode des différences finies. LYON étant une obligation, il est normal que sa valeur varie dans le sens opposé que celui de la variation de taux d'intérêt.

[3] Ce sont les valeurs du LYON sur le marché prises à des différentes dates (entre 12 avril et 10 mai 1985).

Tableau 4.4: Impact de la variation des taux d'intérêt et du cours des actions sur la valeur du LYON

Taux d'intérêt / Cours des actions	7,21%	9,21%	11,21%	13,21%	15,21%
50,00	251,41	243,20	242,39	227,77	223,24
51,00	253,90	245,99	245,01	231,10	227,36
52,00	256,49	246,90	247,67	234,55	231,72
53,00	259,15	251,87	250,42	238,06	236,08
54,00	261,87	254,89	253,24	241,61	240,44
55,00	264,64	255,96	254,11	245,20	244,80
56,00	267,47	261,09	259,06	247,16	245,16
57,00	270,36	264,27	262,07	253,52	250,52
58,00	273,31	267,50	265,11	257,88	252,88
59,00	276,31	270,72	268,23	262,24	259,24
60,00	277,50	274,11	271,40	266,60	261,60

Le tableau 4.5 indique que lorsque la volatilité des actions augmente, la valeur du LYON augmente aussi (tel que prévu).

Tableau 4.5: Impact de la variation de la volatilité et de la valeur des actions Sur les valeurs du LYON

Volatilité des actions / Cours des actions	sigma = 0,10	sigma = 0,20	sigma = 0,30	sigma = 0,40	sigma = 0, 50
50 $	237,986	241,42	242,39	258,727	270,496
51,00 $	237,986	242,11	245,01	260,986	273,234
52,00 $	237,986	243,91	247,67	263,329	275,826
53,00 $	248,080	249,83	250,42	265,727	278,699
54,00 $	248,214	250,88	253,24	268,190	281,601
55,00 $	248,410	253,06	254,11	280,710	284,560
56,00 $	248,688	257,39	259,06	283,266	287,356
57,00 $	249,075	260,87	262,07	285,895	289,406
58,00 $	249,598	263,51	265,11	288,570	291,130
59,00 $	250,288	265,30	268,23	291,288	291,130
60,00 $	261,600	268,24	271,40	294,053	291,130

Le tableau 4.6 illustre la sensibilité des valeurs du LYON au changement du taux de dividende. On remarque que la valeur du LYON diminue suite à l'augmentation du taux de dividende : pour une action de 50$, lorsque les dividendes passent de 0 % à 3 %, la valeur du LYON passe de 267,53$ à 230,03$. Lorsqu'une entreprise augmente son taux de dividende, non seulement les investisseurs du LYON ne reçoivent pas de dividende aussi longtemps qu'ils ne procèdent pas à la conversion, mais aussi, les bénéfices retenus pour des fins d'investissement diminuent, ce qui implique une diminution du taux espéré d'appréciation des dividendes; donc une diminution de l'appréciation future des actions ordinaires.

Tableau 4.6: La sensibilité de la valeur du LYON aux taux de dividende et au cours des actions

Taux de dividende	0%	1,6%	3%	5%
Cours des actions				
50,00 $	267,53	242,39	230,03	220,13
51,00 $	268,37	245,01	231,83	220,92
52,00 $	270,04	247,67	233,87	224,07
53,00 $	271,53	250,42	236,22	230,42
54,00 $	273,42	253,24	238,48	236,15
55,00 $	275,22	254,11	240,64	238,33
56,00 $	277,14	259,06	243,27	240,17
57,00 $	279,16	262,07	245,57	242,10
58,00 $	281,30	265,11	248,34	243,98
59,00 $	283,56	268,23	250,78	249,12
60,00 $	285,92	271,40	253,80	251,23

On a aussi vérifié la convergence du modèle en augmentant la finesse de la discrétisation sur l'espace d'états. Ainsi, on a utilisé une grille sur le prix des actions allant de 1 cent à 2$. On a constaté que le modèle converge et que la valeur du LYON à l'émission, sous les hypothèses mentionnées plus haut quant à la valeur des paramètres, converge à une valeur proche de 247,67$ (tableau 4.7). Une autre façon d'augmenter la précision serait d'augmenter le nombre de classes équiprobables considérées dans le calcul de l'espérance conditionnelle, ici fixé à 100.

Tableau 4.7: Analyse de la convergence

Pas	1 cent	10 cents	25 cents	1$	2$
$L_0(52)$	247,67	250,107	251,042	256,703	264,786

6. Conclusion

Dans ce mémoire, on a proposé une méthode d'évaluation d'une obligation convertible, rachetable et remboursable (LYON) en utilisant une méthode basée sur la programmation dynamique et la théorie des jeux. Ce même titre a été évalué par McConnell et Schwartz (1986), par la méthode de différences finies. Dans les deux cas, le taux d'intérêt a été supposé constant.

Il semble que le marché ait sous-évalué le LYON lors de l'émission, si les hypothèses qui ont été utilisées pour les paramètres sont justes. Cependant, il est important de noter que le fait de supposer une structure plate pour le taux d'intérêt ne capture pas très bien la valeur des options de rachat et de remboursement, qui seront exercées pour contrer des variations dans les taux d'intérêt.

Pour de meilleurs résultats, il serait intéressant de faire l'extension de la méthode d'évaluation par programmation dynamique en supposant que le taux d'intérêt est une variable aléatoire. Deux avenues se présentent, soit supposer que le taux d'intérêt suit un processus discret du type Black Derman et Toy (1990), ce qui donnerait lieu à une méthode numérique appliquée à un arbre de taux, soit utiliser un modèle continu, ce qui nécessiterait des développements théoriques pour le calcul de l'espérance conditionnelle. Dans les deux cas, une méthode de programmation dynamique serait appropriée.

En guise de conclusion, même si il y a possibilité d'améliorer le modèle, ce travail a permis de mettre en évidence une autre méthode d'évaluation du LYON. Cette même méthode peut être utilisée pour évaluer touts autres titres comportant des options imbriquées. L'algorithme est une application très naturelle des règles de décisions des acteurs, il est facile à concevoir, et donne une idée claire sur la valeur du LYON et surtout sur l'impact de la variation des différents paramètres sur la valeur du LYON.

8. BIBLIOGRAPHIE

Asquith, P. (1995), " Convertible bonds are not called late ". *The Journal of Finance;* New York, Septembre.

Black, F., et M. Scholes (1973), "The pricing of options and corporate liabilities." *Journal of Political Economy*, 81, Mai, pp. 637-659.

Black, F., Derman et W. Toy (1990), "A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options". *Financial Analysts Journal*, Janvier - Février, pp. 33-39.

Boyle, P.P. (1986), "Option valuation using a tree-jump process". *International Options Journal*, 3, pp. 7-12.

Boyle, P. P. (1977), "Options: a Monte Carlo approach". *Journal of Financial Economics*, 4, pp. 323-338.

Brennan, M. J., et Schwartz, E. S. (1982), "An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, Septembre, pp. 301-330.

Brennan, M. J., et Schwartz, E. S. (1978), "Finite difference method and jump processes arising in the pricing of contingent claims ". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, Septembre, pp. 461-474.

Brennan, M. J., et Schwartz, E. S. (1977), "Convertible bonds: Valuation and optimal strategies for call and conversion". *Journal of Financial*, 32, 5, Décembre, pp. 1699-1715.

Constantinides, G. M. et Grundy, B. D. (1987), " Call and conversion of convertible corporatebonds : Theory and evidence" (graduate Scool of Business, University of Chicago, Chicago, Illinois).

Courtadon, G. (1982), "The pricing of options on default-free bonds". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, pp. 75-100.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. et Ross, S. A. (1985), "A theory of the term structure of interest rates ". *Econometrics*, 53, pp. 385-408.

Cox, J. C., Ross, S. et Rubinstein, M. (1979), "Option pricing: a simplified approach". *Journal of Financial Economics*, 7, Octobre, pp. 229-264.

Dun, K. B. et Spatt, C. S. (1986), " The effectif of refinancing costs and market imperfections on the optimal call strategy and the pricing of debt contracts". Working paper, Carnegie-Mellon University.

Fabozzi, F. J. (1996),"Bond markets, analysis and strategies". Printice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Ho, T. S. Y., et Lee, S.-B. (1986), "Term structure movements and the pricing interest rate contingent claims". *Journal of Finance*, 41, Décembre, pp. 1011-1029.

Hull, J., et White, A. (1990) "Pricing interest rate derivative securities". *Review of Financial Studies*, 4, pp. 573-592.

Heath, D., Jarrow, R. et Morton, A. (1987), "Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims evaluation". Working paper, Cornell University, Ithaca, New York.

Ingersoll, J. E. (1977a), "An examination of corporate call policy on convertible securities", *Journal of Finance*, 32, Décembre, pp. 463-478.

Ingersoll, J. E. (1977b), "A Contingent-Claims aluation of Convertible Securities", *Journal of Financial Economics* 4, pp. 289-382.

Manuer, D. C. (1993), "Optimal bond call policies under transactions costs". Journal of Financial Reseach 16, pp. 22-37.

Marr, M. W., et Thompson, G. R. (1984), "The pricing of new convertible bond issues". Financial Management 13, pp. 31-38.

Martzoukos, S. H. et Barnhill, T. M. Jr. (1998), " The survival zone for a bond with both call and put options embedded". *The Journal of Financial Research*, Vol. XXI, No. 4, pp. 419-430.

McConnell, J. J., Schwartz, E. S. M. S. P. (1986), "LYON Taming", *The Journal of Finance*, Cambridge; Juin, Vol. 41, pp 561-578

Merton, R. C. (1974), "Theory of rational option pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp. 141-183.

Vasicek, O. A. (1977) "An equilibrium characterization of the term structure". *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.

Annexe: programme

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <iostream.h>

#define  LONGUEUR 20                    /* Longueur max d'une chaine */

typedef char CHAINE[LONGUEUR];

const float coeff_conver = 4.36;
const int PAS = 1, val_nom = 100000;
const int NBRE_S = 25000;
const int NBRE_TAU = 100;

float Somme;

/* Cette fonction permet de lire un fichier et de créer un tableau */

void Lire_Creer(float Tableau[], int NBRE, CHAINE Nom_fichier)
 { int N;
  FILE * A_Lire = fopen(Nom_fichier, "r");

  if(!A_Lire)
    printf("Problème d'ouverture de fichier");

  N = 0 ;

  while (!feof(A_Lire))
   { fscanf(A_Lire,"%f", &Tableau[N]);
     N++;
   }
 }

/* Cette fonction retourne la valeur la plus grande entre les deux valeurs donnees */

float Max( float a, float b)
 { if ( a < b )
    return b;
   else
    return a;
 }
```

```
/* Cette fonction retourne la valeur interpolée de LYON pour un x = tau*S[i]*/

float Lyon_interp( float Lyon[], int NBRE_S, float x)
 { int n, i, j;
  float Lyon_int;

  n = int(x/PAS);
   if ( n == 0 )
     Lyon_int =  (Lyon[1]-Lyon[0])*(x-PAS*n) /PAS  + Lyon[0];

   if ( n >= NBRE_S )
     Lyon_int =  ((Lyon[NBRE_S+1]- Lyon[NBRE_S])*(x-2500)/PAS)+
Lyon[NBRE_S];

   if ( (n < NBRE_S) && (n > 0) )
      Lyon_int = ( (Lyon[n]-Lyon[n-1])*(x-(PAS*n)) /PAS)  + Lyon[n-1];

return Lyon_int;
 }


int main(void)
 {
 #define T 16
 #define r 0.1121
 #define sigma 0.30
  #define d15 0.53
  #define d1 0.1
 int i, t, k, rapport, Incrementation;
 int  VN;
 float S[NBRE_S], Lyon[NBRE_S],Lyon_act_tempo,SC[NBRE_S],
Lyon_act[NBRE_S],
      Valeur_maintien[NBRE_S], remb[T], rachat[T], Lyon_0, Tau[NBRE_TAU];
 float VN_Sur_Coeff, x, rho,rho_15, rho_1, Lyon_act_tempo1;

 Lire_Creer(remb, T, "Remboursement_100.data");
 Lire_Creer(rachat, T, "Rachat_100.data");
 Lire_Creer(Tau, NBRE_TAU, "taux")  ;

 VN_Sur_Coeff = val_nom/(PAS*coeff_conver);
 rapport = int( VN_Sur_Coeff);
 rho_15 = exp(-r*d15);
 rho=rho_15;
 rho_1  = exp(-r*d1);
 Incrementation = 0;
```

```
for (k=0; k < NBRE_S; k++)
 {
  Incrementation = Incrementation + PAS;
  S[k] = Incrementation;
  SC[k] = Incrementation*coeff_conver;

 }

for (i=0; i < rapport; i++)
   Lyon[i] = val_nom;
for (i=rapport; i < NBRE_S; i++)
   Lyon[i] = SC[i];

for (t=T-1; t >= 0; t--)
 {
  for (k=0; k < NBRE_S ; k++)
   {
     Lyon_act_tempo = 0;
     for (i = 0; i < NBRE_TAU; i++)
      {
        x = Tau[i]* S[k];
        Lyon_act_tempo1= Lyon_interp( Lyon, NBRE_S, x);
        Lyon_act_tempo = Lyon_act_tempo+ Lyon_act_tempo1;
      }

     Valeur_maintien[k] = (Lyon_act_tempo*rho)/NBRE_TAU;
     rho=exp(-r);

  if ( t >= 3)
   {
     if ( (SC[k] >= remb[t]) && (SC[k] >= Valeur_maintien[k]) )
      Lyon_act[k] = SC[k];
     if ( (remb[t] >= SC[k]) && (remb[t] >= Valeur_maintien[k]) )
       Lyon_act[k] = remb[t];
     if ( (Valeur_maintien[k] >= SC[k]) && (Valeur_maintien[k] >= remb[t]) && (
rachat[t] > Valeur_maintien[k]) )
       Lyon_act[k] = Valeur_maintien[k];
     if ( (Valeur_maintien[k] >= SC[k]) && (Valeur_maintien[k] >= remb[t]) &&
(rachat[t]< Valeur_maintien[k]) )
       Lyon_act[k] = Max( SC[k],rachat[t] );
   }
```

```
       if (( t>=1)&& (t<=2)  )
       {

        if ( rachat[t] >= Max( SC[k], Valeur_maintien[k] ) )
          Lyon_act[k] = Max( SC[k], Valeur_maintien[k] );
        else
          Lyon_act[k] = Max( SC[k], rachat[t] );

     }

    if ( t == 0 )

       {
         Valeur_maintien[k] = (Lyon_act[k]*rho_1);
         Lyon_0 = Max( SC[k], Valeur_maintien[k] );
        if (Lyon_act[k] < 27250)
               Lyon_act[k]=Lyon_0;
         else
              Lyon_act[k]=27250;

       }
     Lyon[k] = Lyon_act[k];

      if (((k>1) && (k<25000)) && (t==0) )
          printf (" Lyon[%d] = %f\n",k,Lyon[k] );

  }
   }

return 0;

}
```