

2m 11.2523.3

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES  
AFFILIÉE À L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE ANALYTIQUE ET D'UNE  
PROCÉDURE NUMÉRIQUE D'ÉVALUATION DES SWAPS  
DIFFÉRENTIELS

par

Sana Labidi

Département de la Finance  
Sciences de la gestion

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences  
(M.Sc.)

Août 1996

© Sana Labidi, 1996



m 1996  
No 23

*"Ce que les autres font,  
nous avons toujours l'impression  
que nous pourrions le faire mieux.  
Nous n'avons malheureusement pas  
le même sentiment à l'égard de  
ce que nous faisons nous mêmes."*

*Cioran*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon directeur de recherche, M. Samir Mannai, pour la confiance qu'il m'a témoignée ainsi que pour l'aide, les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués tout le long de ce travail.

Je remercie Messieurs Jean François L'Her et Mawuko Nyuadzi, pour leurs précieux commentaires. Je leur suis reconnaissante.

Je remercie M. Mourad Mazigh pour m'avoir aidé à la mise en place du programme informatique réalisé dans le cadre de ce mémoire.

Mes remerciements les plus affectueux vont à mes parents à qui je dédie ce mémoire, ainsi qu'à mon frère, ma soeur et tous mes amis pour le soutien moral qu'ils ont su m'apporter.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>iv</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	<b>x</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
A. Définition des swaps différentiels . . . . .	3
B. Intérêt économique et utilisateurs du diff swap . . . . .	5
1. Intérêts pour les investisseurs institutionnels . . . . .	5
2. Intérêts pour les compagnies . . . . .	5
C. Le diff swap et le paramètre corrélation . . . . .	7

<b>II REVUE DE LA LITTÉRATURE</b>	<b>9</b>
A. Modèle d'évaluation des diff swaps: Modèle de Wei (1994) . . . . .	9
B. Les modèles de la structure à terme des taux d'intérêt . . . . .	16
1. Modèles de première génération . . . . .	17
a) Modèle de Vasicek (1977) . . . . .	18
b) Modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985) . . . . .	21
2. Modèles de deuxième génération . . . . .	23
a) Modèle de Ho et Lee (1986) . . . . .	24
b) Modèle de Heath, Jarrow et Morton (1992) . . . . .	26
c) Modèles de Black, Derman et Toy (1990) et de Black et Karasinski (1991) . . . . .	29
d) Modèles de Hull et White (1990, 1993, 1994) . . . . .	32
C. Procédures numériques chez Hull et White . . . . .	36
1. Hull et White 1990 . . . . .	36
2. Hull et White 1993 . . . . .	37
3. Hull et White 1994 et 1996 . . . . .	38
4. Application de Hull et White (1994) au modèle de Black et Karasinski . . . . .	42
 <b>PROBLÉMATIQUE</b>	 <b>45</b>
 <b>III. LE MODÈLE ANALYTIQUE D'ÉVALUATION DES DIFF SWAPS</b>	 <b>48</b>

A. Hypothèses sur les processus des variables d'état . . . . .	50
B. Dérivation du modèle . . . . .	54
1. Détermination de $V^d$ (la valeur des paiements domestiques) . . . . .	55
2. Détermination de $V^f$ (la valeur des paiements étrangers) . . . . .	59
C. Récapitulation . . . . .	70
<b>IV LA DESCRIPTION DES MODÈLES</b> . . . . .	<b>72</b>
A. Le modèle analytique . . . . .	73
1. L'évaluation de $V^d$ . . . . .	73
a) Méthode analytique de détermination des volatilités . . . . .	75
b) Méthode de grille . . . . .	76
2. L'évaluation de $V^f$ . . . . .	77
a) Détermination des termes de volatilité du processus de taux d'intérêt . . . . .	78
b) Détermination de la volatilité du processus de taux de change . . . . .	78
c) Le problème des corrélations . . . . .	79
B. Le modèle numérique . . . . .	80
1. Construction de l'arbre de base . . . . .	81
a) Construction d'un arbre préliminaire . . . . .	81
b) Introduction de $\theta(t)$ . . . . .	84

2. Construction simultanée des deux arbres de base et leur combinaison . . . . .	87
a) Construction de l'arbre tridimensionnel en supposant une corrélation nulle . . . . .	89
b) Introduction de la corrélation . . . . .	90
3. Détermination de la valeur d'un diff swap . . . . .	91

## **V. INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS** **93**

A. Description des données . . . . .	94
1. Structure par échéance des taux zéro coupons . . . . .	94
2. Les paramètres de corrélation . . . . .	95
3. Les paramètres de volatilité $a$ et $\sigma$ . . . . .	96
B. Fiabilité des résultats et analyse comparative . . . . .	97
1. Fiabilité des résultats . . . . .	97
2. Analyse comparative . . . . .	101
a). Le modèle de Wei contre notre modèle analytique . . .	101
b) La procédure numérique contre le modèle analytique .	103
C. Analyse de sensibilité . . . . .	105
1. Analyse de sensibilité sur les paramètres de corrélation . . . . .	105
a) Modèle analytique . . . . .	106
b) Procédure numérique . . . . .	109
2. Sensibilité du modèle à des variations de $a$ et $\sigma$ . . . . .	111

a) Modèle analytique .....	111
b) Procédure numérique .....	113
3. Impact du différentiel de taux d'intérêt observé sur la marge associée aux diff swaps .....	115
D. Sommaire des résultats .....	118
<b>CONCLUSION</b>	<b>120</b>
<b>ANNEXE A</b>	<b>123</b>
<b>ANNEXE B</b>	<b>128</b>
<b>ANNEXE C</b>	<b>136</b>
<b>ANNEXE D</b>	<b>142</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>148</b>



## TABLEAUX

5.1 Structure à terme des taux zéro coupons . . . . .	95
5.2 Les paramètres de corrélation . . . . .	96
5.3 Les paramètres de volatilité des taux Libors . . . . .	96
5.4 Les paramètres de volatilité des taux de change . . . . .	97
5.5 Valeurs marchandes de quelques diff swaps . . . . .	98
5.6 Valeurs générées par nos deux modèles . . . . .	99
5.7 Méthodes de cotation utilisées par les banques . . . . .	100
5.8 Valeurs générées par les trois modèles . . . . .	100
5.9 Analyse de sensibilité sur la corrélation entre le taux d'intérêt domestique et le taux d'intérêt étranger (Modèle analytique) . . . . .	107
5.10 Analyse de sensibilité sur la corrélation entre le taux de change et le taux d'intérêt étranger (Modèle analytique) . . . . .	107
5.11 Analyse de sensibilité sur la corrélation entre le taux d'intérêt domestique et le taux d'intérêt étranger (Modèle numérique) . . . . .	109

5.12 Analyse de sensibilité sur la corrélation entre le taux de change et le taux d'intérêt étranger (Modèle numérique) . . . . .	110
5.13 Analyse de sensibilité sur le paramètre $a$ (Modèle analytique) . . . . .	112
5.14 Analyse de sensibilité sur le paramètre $\sigma$ (Modèle analytique) . . . . .	112
5.15 Analyse de sensibilité sur le paramètre $a_d$ (Modèle numérique) . . . . .	113
5.16 Analyse de sensibilité sur le paramètre $\sigma_d$ (Modèle numérique) . . . . .	114
5.17 Analyse de sensibilité sur le paramètre $a_f$ (Modèle numérique) . . . . .	114
5.18 Analyse de sensibilité sur le paramètre $\sigma_f$ (Modèle numérique) . . . . .	114
5.19 Analyse de sensibilité sur le différentiel de taux d'intérêt observé pour T-t=3 ans . . . . .	116
5.20 Analyse de sensibilité sur le différentiel de taux d'intérêt observé pour T-t=5 . . . . .	116
Résultats du YEN: Modèle analytique . . . . .	136
C.1.1 Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation $\rho_{df}$ . . . . .	136
C.1.2 Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation $\rho_{fx}$ . . . . .	137
C.1.3 Analyse de sensibilité sur le paramètre $a$ . . . . .	137
C.1.4 Analyse de sensibilité sur le paramètre $\sigma$ . . . . .	138
C.1.5 Analyse de sensibilité sur le différentiel de taux d'intérêt observé . . . . .	138
Résultats du YEN: Modèle numérique . . . . .	139
C.2.1 Analyse de sensibilité sur le paramètre $a_d$ . . . . .	139
C.2.2 Analyse de sensibilité sur le paramètre $\sigma_d$ . . . . .	139
C.2.3 Analyse de sensibilité sur le paramètre $a_f$ . . . . .	140

C.2.4 Analyse de sensibilité sur le paramètre $\sigma_f$ . . . . .	140
C.2.5 Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation $\rho_{df}$ . . . . .	141
C.2.6 Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation $\rho_{fx}$ . . . . .	141
Résultats de la GBP: Modèle analytique . . . . .	142
D.1.1 Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation $\rho_{df}$ . . . . .	142
D.1.2 Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation $\rho_{fx}$ . . . . .	143
D.1.3 Analyse de sensibilité sur le paramètre $a$ . . . . .	143
D.1.4 Analyse de sensibilité sur le paramètre $\sigma$ . . . . .	144
D.1.5 Analyse de sensibilité sur le différentiel de taux d'intérêt observé . . . . .	144
Résultats de la GBP: Modèle numérique . . . . .	145
D.2.1 Analyse de sensibilité sur le paramètre $a_d$ . . . . .	145
D.2.2 Analyse de sensibilité sur le paramètre $\sigma_d$ . . . . .	145
D.2.3 Analyse de sensibilité sur le paramètre $a_f$ . . . . .	146
D.2.4 Analyse de sensibilité sur le paramètre $\sigma_f$ . . . . .	146
D.2.5 Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation $\rho_{df}$ . . . . .	147
D.2.6 Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation $\rho_{fx}$ . . . . .	147

## INTRODUCTION:

Les produits dérivés tels que les options, les contrats à terme et plus particulièrement, les swaps, dont une grande variété a vu le jour, se sont imposés sur les marchés financiers comme les produits les plus utilisés dans la gestion des risques de taux de change et de taux d'intérêt. L'essor remarquable connu par ces produits est essentiellement attribué à la vague d'internationalisation des marchés de capitaux que connaît cette décennie, à l'intérêt nouveau de la part des investisseurs pour les marchés de capitaux des pays en émergence et à la variabilité des taux de change et des taux d'intérêt.

Le diff swap qui a fait l'objet d'une transaction pour la première fois en 1991, est l'un des produits les plus populaires sur les marchés des swaps. Il s'agit d'un swap "exotique" qui permet de profiter des différences entre les structures des taux d'intérêt sur différents marchés sans encourir de risque de change. C'est à Boston que la première transaction sur diff swap a été effectuée au profit d'un émetteur américain: *The Student Loan Marketing Association (Sallie MAE)*. Durant cette période, le dollar connaissait une forte hausse et les taux d'intérêt américains à court terme étaient en baisse. Les investisseurs éprouvaient des difficultés avec leurs avoirs en produits dérivés sur devises mais ne pouvaient placer en \$US, les taux étant peu attirants. A l'étranger, les taux étaient élevés et les diff

swaps devaient leur permettre d'en profiter tout en se faisant payer en \$US. Pour la MAE, il s'agissait de recevoir le Libor<sup>1</sup> sur DM calculé sur la base de 105 millions de \$US, et de payer le Libor sur \$US. Le choix du DM était clair dans ces circonstances puisqu'à cause de l'inflation élevée associée à la réunification, les anticipations de taux allemands étaient plutôt à la hausse. Une vingtaine d'investisseurs participèrent à cette première transaction, parmi eux, des *corporate pension accounts*, des gestionnaires de portefeuilles, des gestionnaires d'actifs, des compagnies d'assurance, etc...

Les termes du swap étaient les suivants:

- Maturité: 3 ans.
- Payer le taux Libor sur \$US + 128 pb.
- Recevoir le taux Libor sur DM - 160 pb.
- Tous les paiements étaient effectués en \$ US.

Depuis cette première transaction, plusieurs contrats semblables ont été signés un peu partout dans le monde et le diff swap n'a cessé de susciter un intérêt grandissant. Toutefois, sur le plan de l'évaluation de ce produit, la littérature financière ne comprend qu'un seul modèle: celui de Wei (1994). Une étude approfondie de ce modèle nous permet d'entrevoir certaines limites dont essentiellement, l'absence de l'intégration de la structure à terme des taux d'intérêt observée. De ce fait, la construction d'un modèle d'évaluation des diff swaps qui en tient compte nous paraît plus réaliste, puisque les utilisateurs des diff swaps spéculent sur l'évolution du différentiel des taux d'intérêt de deux pays donnés. Dans cette tentative d'évaluation, qui constitue l'objectif premier de notre travail, nous exploitons les derniers développements dans la modélisation de la structure à terme des taux d'intérêt. Nous exposons ces modèles dans notre revue de littérature. A côté des modèles analytiques décrivant la structure à terme des taux d'intérêt, les procédures numériques sont largement utilisées lorsqu'il s'agit d'évaluer

---

<sup>1</sup> Libor: London Interbank Offered Rate.

des actifs complexes ou de réaliser un calibrage avec des données de marché. Nous nous proposons de procéder à l'évaluation des diff swaps en utilisant ces deux méthodes afin de dégager les avantages et les inconvénients de chacune d'elles.

Dans ce qui suit, nous commençons par définir le diff swap et présenter ses principales caractéristiques afin de mieux comprendre ses mécanismes.

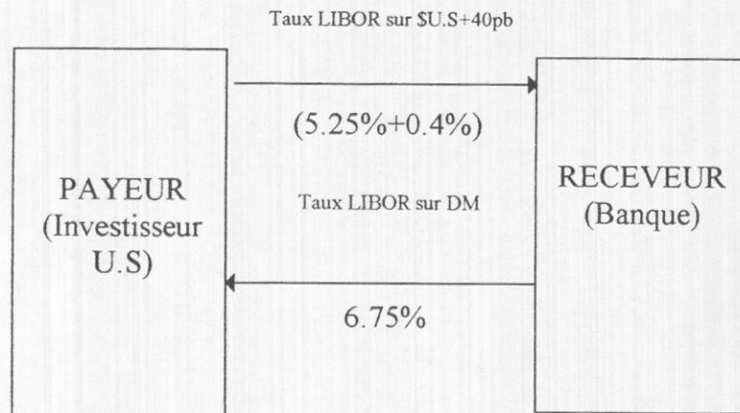
#### **A. DÉFINITION DES SWAPS DIFFÉRENTIELS:**

Un swap différentiel (**diff swap**) est un instrument hybride, faisant partie de deux grandes familles de produits dérivés: les swaps de taux d'intérêt et les quantos (actifs à quantités ajustables), qui procurent à l'acheteur une exposition à un indice ou actif étranger sans l'exposition au risque de change.

Le diff swap est un accord entre deux contreparties pour s'échanger des paiements à des dates futures sur la différence entre deux taux d'intérêt sur des instruments libellés en deux monnaies différentes: *c'est un swap de taux*. La spécificité des diff swaps réside toutefois dans le fait que les cash flows sont déterminés en appliquant le différentiel de taux à un montant principal nominal libellé en monnaie nationale: *c'est un quanto*. Ce montant reste notionnel et ne sert qu'à déterminer les paiements d'intérêt puisqu'il n'est pas réellement échangé. Ce sont les différences dans les formes des courbes des structures à terme des taux d'intérêt qui sont à l'origine de l'essor de plus en plus important de ce genre d'instruments. En effet, ces swaps permettent aux investisseurs de réaliser un gain sur la structure actuelle des taux d'intérêt en prenant une position cohérente avec leurs anticipations quant à l'évolution relative de deux taux d'intérêt à court ou moyen terme dans deux pays différents.

### 1. Exemple:

Supposons qu'un investisseur américain signe avec une banque locale un diff-swap de maturité 5 ans. Le swap est basé sur le Libor 6 mois sur \$US (5.25%) et le Libor 6 mois sur DM (6.75%). L'accord du swap suppose que l'investisseur américain versera semestriellement à la banque le taux Libor sur \$ US plus une marge constante de 40 points de base appliqués à un principal notionnel de 10 millions de dollars, et recevra de la banque le Libor sur DM appliqué au même principal. La nouveauté est que les deux paiements sont libellés en dollars US. À titre d'exemple, à la première date de paiement, l'investisseur doit payer à la banque : \$282.500, soit:  $(1/2) * (5.25\% + 0.4\%) * (\$10m)$  et la banque doit payer à l'investisseur : \$337.500 soit:  $(1/2) * (6.75\%) * (\$10m)$ . Ainsi la banque doit à notre investisseur \$55.000.



Une forme plus générale de diff-swaps est celle qui implique deux taux d'intérêt de deux différentes devises qui déterminent les paiements périodiques (par exemple: le taux Libor 6 mois sur Yen Japonais et le taux Libor 6 mois sur DM) et une troisième devise, généralement le \$US, qui sera celle du principal sur la base duquel s'effectuera l'échange. Le swap peut être fixe-flottant, fixe-fixe ou encore

flottant-flottant. Un spread sera ajouté ou déduit de la devise selon qu'elle se vende respectivement à escompte ou à prime.

## **B. INTÉRÊT ÉCONOMIQUE ET UTILISATEURS DU DIFF SWAP:**

### **1. Intérêts pour les investisseurs institutionnels:**

Les différences, par moments frappantes, dans la forme des différentes courbes de taux d'intérêt affichées un peu partout dans le monde, font du diff-swap un produit très attirant pour certains investisseurs. En fait, des transactions sur diff swap n'existent que dans la mesure où les investisseurs ont des anticipations différentes de celles implicites aux courbes des taux à terme quant à l'évolution future des taux d'intérêt. Ainsi cet instrument permet aux investisseurs institutionnels de profiter de différentiels de taux futurs entre deux pays qui, selon leurs anticipations, leur seraient plus profitables.

L'intérêt porté à cet instrument ne cesse d'augmenter. Les *dealers* offrent des options et des caps sur le diff swap. Les investisseurs qui anticipent que les taux européens vont continuer à augmenter demandent à recevoir le Libor sur ECU mais en \$US. Le problème de taux de change est résolu: Un pari sur l'évolution du DM peut être fait sans encourir de risque. Le risque de taux de change est naturellement transféré aux *dealers*: un obstacle surmontable grâce à leur capacité à gérer les risques des swaps et des produits dérivés.

### **2. Intérêts pour les compagnies:**

L'intérêt économique des diff-swaps est beaucoup moins évident pour les entreprises qu'il ne l'est pour les investisseurs institutionnels. Une enquête menée par Euromoney auprès de chefs d'entreprises et de banquiers prouve que les avis



sont partagés de ce point de vue. La question posée était: « Pour quelles raisons, autres que les raisons spéculatives, un cadre d'une compagnie devrait-il choisir d'utiliser un diff swap ? ». Les banques ont donné différentes réponses qui n'expliquent pas toujours pourquoi un diff swap est meilleur que d'autres outils beaucoup moins complexes. En voici quelques unes:

- Crédit Lyonnais: « Soit la compagnie américaine A qui produit et commercialise ses biens uniquement aux USA. L'industrie de A possède plusieurs barrières à l'entrée (capital élevé, coûts de recherche et développement élevés...) et une production difficile à déplacer. Le principal concurrent de A est la compagnie B et est installée en Allemagne. Chacune des deux firmes se finance au taux Libor sur la devise domestique. Ainsi le spread entre le Libor sur \$US et le Libor sur DM peut engendrer à chacune d'elles des pertes ou des gains de leurs avantages comparatifs (niveau des coûts de production...) et de leurs parts de marchés respectives. Le responsable de la compagnie, voudrait se couvrir contre ce risque. Il signe alors un diff swap afin de recevoir des dollars sur le Libor sur \$US et en payer sur le Libor sur DM. Si le Libor sur \$US augmente et que le Libor sur DM chute, le coût de financement de A diminue en même temps que celui de son concurrent allemand. Dans la situation inverse, les coûts de financement des deux concurrents augmentent en même temps. ». Cette explication semble logique, seulement, un emprunt en DM pour la compagnie A n'aurait il pas répliqué une partie de son risque de taux de change et de taux d'intérêt ?

- La réponse de Unibank justifie l'utilisation de diff swaps différemment. Selon eux, Le diff swap est l'étape qui suit logiquement le swap de taux de change puisqu'il permet d'obtenir l'équivalent d'un taux d'intérêt international sans encourir de risque de change.

• Selon la banque Indosuez, pour une firme qui emprunte sur le marché domestique (\$US) et achète des devises (FF) à terme, un diff swap doit lui permettre de se couvrir contre le risque de taux d'intérêt et de taux de change en même temps. Si le Libor augmente, la perte sur les paiements en FF du Libor sur \$US serait compensée par un plus faible coût sur l'achat des FF à terme et vice versa. Cependant, dans ce cas, un contrat à terme sur devises associé à un contrat à terme sur le taux Libor ne seraient-ils pas moins chers et plus faciles à inverser si nécessaire ?

Il apparaît qu'il est plus facile de justifier l'utilisation des diff swaps par un investisseur institutionnel que par une firme. Ceci est certainement dû au fait que la famille des produits à quantités ajustables (Quantity adjusting ou encore quantos) dont le diff swap fait partie, a été créée à l'origine pour satisfaire un besoin des premiers et non des derniers. En effet, en 1986, lorsque Lee Thomas de Goldman Sachs a introduit le concept d'options et de contrats à terme à quantités ajustables, il avait pour but de voler à l'aide des investisseurs, non à celle des firmes.

### **C. LE DIFF SWAP ET LE PARAMÈTRE CORRÉLATION:**

Ce fut le succès connu par les diff swaps qui encouragea la recherche sur le risque de corrélation entre les taux d'intérêt et entre taux d'intérêt et taux de change. Tenir compte de ce risque est en effet très important dans l'évaluation de cet actif. Le signataire de ce type de swap qui paie le Libor sur DM en \$US et reçoit le Libor sur \$US, finance ses positions en DM sur le marché des swaps allemands. Il couvre donc le Libor sur DM libellé en \$US par des instruments libellés en DM: c'est ici qu'apparaît le rôle joué par le taux de change. Ainsi, même lorsque les taux d'intérêt demeurent constants, il est exposé au risque que le \$US se renforce le laissant à court de DM pour payer ses engagements en dollars. Les variations du taux de change vont entraîner des modifications de la couverture

requis, même si le montant initial de la couverture est déterminé par le taux de change à l'instant 0. Se couvrir contre ce risque veut dire s'intéresser à la corrélation entre le taux d'intérêt (Libor sur DM) et le taux de change DM/\$US, ou encore, voir dans quelle mesure une augmentation des taux allemands, et par conséquent du montant que le signataire du swap doit payer à l'acheteur, sera neutralisée par un renforcement du DM vis à vis du Dollar. Cet aspect du risque n'est pas nouveau. L'intérêt grandissant qu'on lui porte montre toutefois que les gens comprennent mieux qu'il y a cinq ans, les produits dérivés tels les swaps et les options. L'étude et la compréhension de ce phénomène qu'est la corrélation a fait l'objet d'une analyse de sensibilité effectuée par Wei dont on exposera les résultats dans ce qui suit.

## II. REVUE DE LA LITTÉRATURE:

Le diff swap est essentiellement un produit financier sur taux d'intérêt. Son évaluation nécessite la modélisation des structures à terme des taux d'intérêt des deux pays et du processus du taux de change. C'est la raison pour laquelle, après avoir présenté le principal modèle traitant de l'évaluation de diff swaps, nous effectuerons un tour d'horizon des principales théories de modélisation des taux d'intérêt. Ceci nous permettra d'en déduire les modèles qui nous apparaîtront les plus appropriés: Soit le développement de deux approches, une analytique et l'autre numérique. A l'aide d'une étude comparative, nous allons pouvoir nous prononcer sur leurs apports respectifs.

### **A. MODÈLE D'ÉVALUATION DES DIFF SWAPS: MODÈLE DE WEI (1994):**

Wei (1994) a utilisé une démarche classique qui consiste à considérer les paiements des taux d'intérêt comme de simples cash flows et à les actualiser afin de déterminer la valeur du swap à l'instant zéro. Sa démarche peut facilement intégrer des modèles de la structure à terme des taux d'intérêt tels que ceux de Hull et White (1990) ou de Black, Derman, et Toy (1991). Elle consiste en bref, à considérer les paiements de taux d'intérêt comme deux séries de cash flows: Les cash *inflows*,

fonctions du taux d'intérêt étranger et les cash *outflows*, fonctions du taux d'intérêt domestique. La valeur du swap du point de vue de l'investisseur est alors la différence entre les deux valeurs actuelles nettes de ces deux séries de cash flows. En ce qui concerne les paiements sur le taux d'intérêt domestique, leur valeur actuelle nette est fonction des prix des obligations domestiques et est indépendante du taux d'intérêt étranger et du taux de change. En contrepartie, les cashs flows futurs étrangers sont déterminés sur la base du taux d'intérêt étranger, mais actualisés au taux domestique, ce qui complique les choses. De plus, afin de déterminer le montant des paiements relatifs au taux d'intérêt étranger, et vu la spécificité du diff-swap, il faut transformer le processus du taux d'intérêt étranger pour le rendre cohérent avec le point de vue d'un investisseur de l'économie domestique, et cette transformation fait nécessairement appel au taux de change. Ainsi, la valeur actuelle des cashs flows dérivés des paiements en taux d'intérêt étranger dépend de l'interaction entre les deux taux d'intérêt comme de celle entre le taux d'intérêt étranger et le taux de change. Afin de modéliser ce type d'interactions, on utilise des processus stochastiques spécifiques pour les taux d'intérêt et pour le taux de change.

Ainsi, en utilisant la notation suivante:

$r_d$  = Le taux d'intérêt domestique sans risque.

$r_f$  = Le taux d'intérêt étranger sans risque.

$t$  = La date d'évaluation du swap

$T$  = La date de maturité du swap.

$P$  = Le principal notionnel mesuré en monnaie domestique.

$n$  = Le nombre de versements de taux d'intérêt qui demeurent à effectuer avant l'expiration du swap.

$X$  = Le taux de change exprimé en valeur de la monnaie domestique/unité de monnaie étrangère.

Supposons que  $r_d$  et  $r_f$  suivent un processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'écrivant ainsi:

$$dr_d = k_d(\mu_d - r_d)dt + \sigma_d dw_d(t) \quad (2.1)$$

$$dr_f = k_f(\mu_f - r_f)dt + \sigma_f dw_f(t) \quad (2.2)$$

Avec  $k_d$  et  $k_f$  les deux forces d'attraction du processus,  $\mu_d$  et  $\mu_f$  les deux niveaux cibles vers lesquels tendent les deux taux d'intérêt dans le temps,  $\sigma_d$  et  $\sigma_f$  les écarts types et  $w_d(t)$  ainsi que  $w_f(t)$  deux processus standards de Wiener avec une corrélation de  $\rho_{df}$ .

On considère, d'autre part que le taux de change  $X$  suit le mouvement brownien géométrique suivant:

$$dX/X = \mu_x dt + \sigma_x dw_x(t) \quad (2.3)$$

Où,  $\mu_x$  et  $\sigma_x$  sont respectivement la tendance et l'écart type du taux de change et  $w_x(t)$  un processus de Wiener standard ayant une corrélation avec  $w_d(t)$  et  $w_f(t)$  respectivement de  $\rho_{dx}$  et  $\rho_{fx}$ .

Le processus du taux de change peut aussi s'écrire:

$$dX/X = (r_d(t) - r'_f(t))dt + \sigma_x dw_x(t) \quad (2.4)$$

Avec  $r'_f$  le taux d'intérêt étranger dans une économie domestique sans risque.

Le diff-swap se compose de deux jambes distinctes: la jambe domestique et la jambe étrangère ayant pour valeurs respectives:  $V_d$  et  $V_f$ .  $V_d$  est la valeur actualisée de l'ensemble des paiements futurs relatifs au taux domestique qui auront lieu durant ce qui subsiste dans la vie du swap. C'est donc la somme des  $V_i^d$  actualisés, où encore les paiements futurs relatifs au taux domestique qui auront lieu aux dates  $t_i$ ,  $i=1 \dots n$ , avec:

$$V_i^d = PB_d(t, t_i) - PB_d(t, t_{i+1}) \quad (2.5)$$

t: la date d'évaluation du swap

$t_i$ : la date du paiement de l'intérêt domestique.

Ces paiements apparaissent donc comme la différence entre les prix de deux obligations à coupons détachés domestiques, venant à échéance successivement en  $t_i$  et  $t_{i+1}$ , multipliée par le principal.  $V_d$  n'étant rien d'autre que la valeur actualisée de la somme de ces paiements, une simplification nous permet de l'écrire ainsi:

$$V_d = \sum_i V_i^d = P[(1+r_d^0)B(t, t_1) - B_d(t, T)] \quad (2.6)$$

$V_d$  est donc la différence entre les prix de deux obligations domestiques à coupons détachés, tout comme pour un swap de taux d'intérêt classique.

D'autre part, on procède à l'évaluation des paiements futurs en taux d'intérêt étranger. Sur cette partie du swap, il faut cependant tenir compte du fait que ces paiements sont déterminés selon le taux étranger, mais libellés en monnaie domestique. Par conséquent, le comportement futur du taux de change va jouer un rôle important dans leur évaluation. Wei, commence dans cette partie, par déterminer l'effet du taux de change et dérive ensuite la valeur recherchée. Il base son raisonnement sur une proposition qu'il démontre dans son article. Cette proposition veut que l'économie domestique et l'économie étrangère soient reliées par le taux de change et qu'une anticipation étrangère des paiements des taux d'intérêt peut être transformée en une anticipation domestique (et vice versa) en ajustant juste pour le taux de change.

Il obtient alors  $V_i^f$ , la valeur actuelle du paiement étranger déterminé en  $t_i$  et effectué en  $t_{i+1}$ :

$$V_i^f = PE^d \left[ \frac{\exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \right\}}{E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right) \right\}} \right] - PB_d(t, t_{i+1}) \quad (2.7)$$

Par la suite, il détermine la valeur actualisée des paiements futurs rattachés au taux d'intérêt étranger, soit

$$V_f = Pr_f^0 B_d(t, t_1) + \sum_i V_i^f \quad (2.8)$$

Enfin  $V$ , la valeur d'un diff swap pour un investisseur domestique qui paie le taux domestique et reçoit le taux étranger est:

$$V = V_f - V_d - c(t_{i+1} - t_i) / 360 * P \sum_{i=1}^n B_d(t, t_i) \quad (2.9)$$

Avec:

P: le principal exprimé en monnaie locale.

C: Le spread annualisé qui est ajouté au taux d'intérêt étranger afin de compenser pour le différentiel de taux actuel. Ce spread est déterminé lors de la signature du swap de façon à ce que la valeur de ce dernier soit nulle.

La valeur du diff swap semble alors être indépendante du comportement du taux de change, mais elle reste reliée à la volatilité du taux de change ainsi qu'à la corrélation entre le taux de change et le taux d'intérêt étranger. D'autre part la



corrélation entre les taux d'intérêt domestiques semble jouer un rôle dans cette évaluation. Wei explique l'importance de la corrélation entre les taux d'intérêt ainsi:

- Si cette corrélation est positive, alors si les paiements rattachés au taux d'intérêt étranger sont élevés, ils seront actualisés à des taux élevés et vice versa. Ceci aura pour effet de réduire la valeur actuelle des cash flows rattachés au taux étranger par rapport à la situation où la corrélation est nulle.

- Si cette corrélation est négative, c'est l'effet inverse qui est obtenu augmentant ainsi la valeur actuelle des paiements rattachés au taux étranger par rapport à la situation où la corrélation est nulle.

Pour expliquer l'importance de la corrélation entre le taux d'intérêt étranger et le taux de change, Wei considère le point de vue d'un investisseur étranger qui observe son taux d'intérêt.

- Cas où la corrélation entre le taux de change et le taux étranger est positive: Lorsque les paiements basés sur le taux étranger sont élevés, la monnaie locale dans laquelle les paiements sont libellés s'est vraisemblablement appréciée et vice versa. Ceci aura pour effet général d'augmenter la valeur des cashs flows par rapport à la situation où la corrélation est nulle.

- Cas où la corrélation entre le taux de change et le taux étranger est négative: C'est l'inverse qui se produit, ce qui aura pour effet général de réduire la valeur des cashs flows, toujours par rapport au cas où la corrélation est nulle.

Il peut sembler à première vue que le diff swap n'aura aucune valeur si la structure à terme des taux d'intérêt domestiques et celles des taux étrangers sont

exactement les mêmes<sup>2</sup>(Si l'on compare  $V_i^d$  et  $V_i^f$ , on peut voir que cela ne sera le cas que si le taux d'intérêt étranger est non stochastique). Cependant, ce type de raisonnement néglige les effets des corrélations expliqués ci-dessus. En effet, même si les deux structures à terme des taux d'intérêt sont parfaitement identiques et qu'elles se comportent exactement de la même façon dans le temps (parfaitement corrélées), le diff swap vaudra quand même quelque chose à cause des pertes/gains potentiels dus au fait d'avoir fixé le taux de change.

Comme nous l'avons déjà souligné dans cette section, le modèle de Wei est un modèle "ouvert" dans ce sens qu'il s'agit d'une méthode de travail qui peut s'adapter à tout modèle de la structure à terme des taux d'intérêt. Il ne contraint pas à l'application du modèle de Vasicek (1977) qui ne tient pas compte de la structure à terme observée. Afin de démontrer les défauts d'un tel processus et de pouvoir fixer notre choix sur un modèle plus approprié, nous commençons par les passer en revue. Nous voulons cependant noter que, le problème de l'évaluation des diff swaps pourrait être traité selon la méthodologie de Amin et Jarrow. Dans leur article de (1991), ils proposent un modèle d'évaluation d'options sur devises qui tient compte de la marche stochastique des taux d'intérêts. Leur approche se base sur le modèle de Heath et al (1987) de la structure à terme des taux d'intérêt. Ainsi, ils caractérisent la structure à terme des taux domestique et étranger par la spécification de l'évolution des taux d'intérêt à terme. Afin d'évaluer l'option selon une perspective domestique, ils libellent tous les actifs en termes de cette monnaie de telle sorte que dans leur économie, les avoirs de l'investisseur domestique en monnaie étrangère se présentent uniquement sous forme d'obligations étrangères. Dans ce sens, la démarche de Wei se rapproche de la leur, sauf que cette dernière se base sur la spécification du taux à terme et non du taux d'intérêt courant. C'est pour cette raison que dans notre revue de la littérature nous nous intéressons particulièrement aux modèles qui décrivent la structure à terme selon le taux

---

<sup>2</sup> Si les obligations à coupons détachés ont le même prix dans les deux pays et ce pour toutes les maturités.

courant, écartant ainsi le modèle de Heath, Jarrow et Morton (1992), l'un des plus en vogue actuellement, et dont on présentera les grandes lignes.

Toute la conception de notre mémoire pourrait être considérée sous un autre angle, celui de la modélisation selon le taux à terme. Si nous avons choisi l'approche taux courant c'est à en raison de la souplesse et de l'attrait pratique de ces modèles. En effet, plusieurs procédures numériques ont suivi l'évolution de ces modèles permettant ainsi l'évaluation de produits dérivés complexes tels les diff swaps. Une volonté de joindre le théorique au pratique tel qu'on l'a déjà souligné dans notre problématique, nous a poussé à choisir un modèle qu'on pourrait implanter analytiquement ainsi que numériquement afin de pouvoir comparer leurs difficultés respectives. Le modèle de Hull et White (1990) présente cet avantage, c'est ce que nous nous proposons de montrer à travers une revue des principaux modèles de la structure à terme des taux d'intérêt.

## ***B. LES MODÈLES DE LA STRUCTURE À TERME DES TAUX D'INTÉRÊT:***

La croissance exceptionnelle observée durant les 20 dernières années sur le marché des actifs sensibles aux taux d'intérêt a engendré un développement des plus remarquables des modèles qui simulent les mouvements stochastiques de la courbe des taux. Ce développement a, à son tour, contribué à l'évolution des marchés financiers, ces modèles étant utilisés dans le cadre de la gestion de portefeuille, du «trading», du contrôle du risque, de la mesure de performance, etc...Le premier modèle proposé pour l'évaluation d'un actif sensible au taux d'intérêt, plus précisément: les options sur obligations, est celui de Merton (1974). Ce dernier s'est inspiré du modèle de Black et Scholes (1973) initialement mis en place pour l'évaluation des options sur actions. Merton considère que le prix des obligations à long terme suit un processus stochastique tout comme celui d'une action. Or, s'il est vrai que comme pour une action, la série des prix d'une

obligation possiblement atteints augmente au début avec le temps, le prix de l'obligation, contrairement à celui d'une action, doit converger vers le notional à la fin. Obligations et actions ne peuvent pas être considérées de la même manière. Un autre modèle qui s'est inspiré de la méthodologie de Black et Scholes est celui de Heath, Jarrow et Morton (1992).

Une deuxième approche pour évaluer une option sur obligation ou tout actif sensible à la marche des taux d'intérêt consiste à développer un modèle qui décrit le processus du taux d'intérêt et ensuite, considérer le prix de l'obligation comme une fonction de ce processus. Ces modèles se divisent en deux grandes familles qui se sont succédés dans le temps: Les modèles de première génération et ceux de deuxième génération.

Dans le choix du modèle de taux d'intérêt approprié pour l'évaluation des diff swaps, nous avons été confrontés à différentes questions telles que: Quel est le modèle qui répond le mieux à nos besoins? Quelles sont les limites du modèle de Vasicek...? Dans ce qui suit, nous passerons en revue les principaux modèles et évoquerons les raisons de nos choix.

### **1. MODÈLES DE PREMIÈRE GÉNÉRATION:**

Les modèles de première génération qui ont traité de la structure à terme des taux d'intérêt constituent une approche plus sophistiquée que celle utilisée par le passé pour évaluer les options sensibles au taux d'intérêt. D'une manière générale, ces modèles supposent que le taux d'intérêt à court terme suit un processus de retour à la moyenne et que les produits sur taux d'intérêt sont évalués uniquement selon ce taux. Ils traitent la structure à terme observée comme une

donnée endogène et en utilisant un argument d'absence d'opportunités d'arbitrage<sup>3</sup>, évaluent les options sensibles au taux d'intérêt.

*a) Modèle de VASICEK (1977):*

Dans son modèle, comme dans la plupart de ceux de la première génération, Vasicek (1977) décrit la structure à terme par une seule variable, à savoir le taux courant<sup>4</sup>. Ce taux suit un processus de diffusion<sup>5</sup> s'écrivant ainsi:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \quad (2.10)$$

où:

- $r$  est le taux à court terme.
- $m(r)$  est la tendance du processus.
- $s(r)$  est l'écart type de  $r$ .
- $dz$  est un processus de Wiener<sup>6</sup>.

A partir de ce processus, Vasicek dérive une structure à terme implicite. Il commence par décrire le processus suivi par le prix d'une obligation à coupons détachés. Il introduit ensuite l'argument d'absence d'opportunités d'arbitrage: Il forme un portefeuille sans risque dont le rendement devra être égal au taux sans risque, ce qui l'amène à la dérivation de l'équation de la structure par termes des prix des obligations à coupons détachés. Il procède enfin à la détermination d'une solution analytique de l'équation différentielle partielle de la structure par termes des prix des obligations et par déduction, dérive la structure des taux d'intérêt.

<sup>3</sup>On ne peut constituer un portefeuille de coût nul et rapportant de manière certaine un gain strictement positif.

<sup>4</sup> Le taux d'intérêt d'une obligation qui arrive à maturité dans une période.

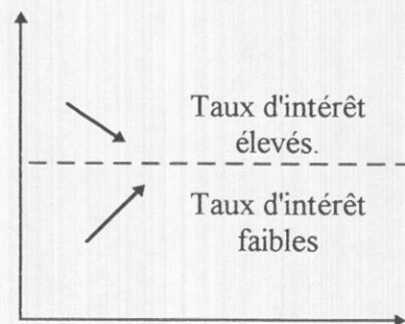
<sup>5</sup> Un phénomène aléatoire engendré par un processus qui se développe dans le temps ou l'espace conformément à des lois de probabilité.

<sup>6</sup> Il s'agit d'un processus stochastique stationnaire qui représente la variation dans le temps d'un cheminement aléatoire simple et symétrique.

Le modèle de Vasicek s'écrit ainsi :

$$dr = k[\theta - r(t)]dt + \sigma(r)dz \quad (2.11)$$

C'est par ce modèle que Vasicek a introduit l'idée de « mean reversion » ou retour à la moyenne caractérisant l'évolution des taux d'intérêt. En effet il a été observé qu'à long terme, les taux d'intérêt avaient tendance à converger vers un niveau moyen appelé « reversion level » ou niveau cible. L'équation (2.11) du modèle de Vasicek signifie que le taux à court terme  $r$  est attiré à long terme vers un niveau désigné par  $\theta$ , et cela par une force d'attraction  $k$  qui le ramène vers la moyenne à long terme à chaque fois qu'il en dévie. Plus  $k$  est élevé et plus rapidement se fera l'ajustement au niveau cible. La tendance instantanée de ce processus est appelée « mean reversion » ou retour à la moyenne et le processus total du taux à court terme dans ce cas est un processus de Orstein-Uhlenbeck<sup>7</sup>. L'écart type,  $\sigma(r)$  est une constante. Il y a plusieurs arguments économiques qui défendent l'intégration de l'aspect retour à la moyenne dans un modèle décrivant la marche des taux d'intérêt. Lorsque les taux d'intérêt sont élevés, la croissance économique tend à ralentir et il y a moins de demande de fonds de la part des emprunteurs: les taux déclinent. Lorsque les taux sont faibles, le phénomène inverse se produit.



#### RETOUR A LA MOYENNE

<sup>7</sup> Ce processus s'écrit ainsi:  $dX(t) = a(b-X(t))dt + \sigma dZ(t)$

La description de la SSE<sup>8</sup> par un processus selon le modèle de Vasicek, suppose que les prix de toutes les obligations dépendent du mouvement du taux  $r$  et qu'ils dépendent d'un facteur unique. A première vue, ceci semble contre-intuitif. La SSE observée semble avoir trop de degrés de liberté pour pouvoir être expliquée par un seul facteur. Cependant dans une découverte assez surprenante, Litterman et Scheinkman (1991) montrent qu'historiquement, la SSE tend à évoluer à la hausse comme à la baisse en tandem. Ce mouvement parallèle expliquerait selon eux plus de 80% des mouvements historiques de la SSE. Ainsi le modèle de Vasicek semble se défendre sur une base empirique. Seulement, théoriquement il présente des lacunes assez compromettantes. En effet, outre le fait qu'il permette la réalisation de taux d'intérêt négatifs, il ne permet aucun lien avec la SSE observée, ce qui pourrait ne pas influencer l'évaluation correcte d'une obligation, mais fausser celle d'un produit dérivé sensible au taux d'intérêt. Le modèle de Vasicek est en fait incapable de servir de base à l'évaluation d'un produit dérivé tel qu'une option sur obligation sans se soucier de savoir si l'obligation est correctement évaluée ou pas. Dans ce cas, notre objectif serait de prendre la SSE observée telle qu'elle est et de bâtir un modèle décrivant l'évolution des taux d'intérêt à partir de celle-ci. Ces modèles sont les modèles de non arbitrage où encore modèles de deuxième génération et qui seront traités dans la deuxième partie de cette revue.

Un des modèles piliers de la famille « première génération » est celui de Cox, Ingersoll et Ross (1985). Présenter un tel modèle est indispensable dans le cadre d'une revue de littérature qui se veut exhaustive.

---

<sup>8</sup> SSE: Structure des taux d'intérêt Selon l'Échéance

*b) Modèle de COX, INGERSOLL et ROSS (1985):*

Il s'agit d'un modèle d'équilibre général dans ce sens qu'il endogénéise la structure à terme initiale des taux d'intérêt ainsi que le processus générant des variations dans celle-ci. Il correspond à des fondements théoriques plus profonds et des objectifs plus ambitieux. La version la plus simple de CIR (1985)<sup>9</sup> peut s'écrire ainsi:

$$dr = k(\theta - r(t))dt + \sigma(r) \sqrt{r} dz \quad (2.12)$$

Dans ce modèle, ils expriment la structure à terme comme une fonction d'une seule variable: le taux instantané ou taux spot. Dit autrement, tous les chocs subits par la structure à terme sont considérés comme émanant des taux spots: ces variables résument l'information sur l'incertitude dans l'économie.

Explicitons un peu plus ces idées: Les individus dans l'économie hypothétique de CIR sont identiques et rationnels, dans le sens qu'ils connaissent les structures de l'économie, et possèdent toute l'information nécessaire pour les décisions qu'ils prennent. Ils cherchent toujours à avoir le maximum possible de satisfaction. Pour cela, ils partent avec un montant initial de richesse qu'ils utilisent pour investir dans le processus de production de l'économie, acheter des actifs financiers et consommer. Le problème de chaque individu est donc de chercher le montant optimal devant être alloué à chacune de ces activités. Leurs décisions dépendront en partie de leurs attitudes vis-à-vis du risque. Le risque provient dans cette économie hypothétique, de chocs dans la production qui influencent la richesse et la consommation dans le temps. De la même manière, la production est incertaine à cause de chocs dans la technologie, modélisés comme une évolution aléatoire d'un ensemble de variables d'état qui n'ont d'autre principale

---

<sup>9</sup> Les modèles les plus complexes pourraient inclure d'autres variables d'état, chacune expliquant une partie de l'information sur les chocs de la structure.



interprétation que d'être les sources d'incertitude. Les décisions d'optimisation des investisseurs décrites ci-dessus résultent alors en un équilibre économique qui incorpore un équilibre des prix des actifs et des taux d'intérêt.

Dans leur modèle, une seule variable d'état qui n'est pas observable, résume l'incertitude dans l'économie. Cependant le taux spot dépend de cette variable qui en détermine tous les mouvements: c'est la variation des opportunités d'investissement physique qui engendre toutes les variations de richesse et le risque dépend de la manière dont les prix des obligations déterminés par le taux spot varient avec les variations de richesse. Les obligations à long terme qui sont de meilleures couvertures contre les variations des opportunités d'investissement ont une prime de risque moins élevée. Ainsi, selon le modèle de CIR, si la richesse tend à décliner lorsque le taux spot est à la hausse, les obligations à court terme auront des primes de risque plus faibles que celles à long terme, car elles sont sujettes à des pertes en capital plus faibles. En effet, le prix des obligations à long terme décline alors plus que celui des obligations à court terme en réponse à une augmentation du taux spot. Elles sont donc plus risquées si on veut les inclure dans le portefeuille de richesse et impliquent une plus forte prime de risque.

Par ailleurs, le modèle de CIR restreint le comportement du taux spot en supposant, que bien qu'aléatoire dans ses mouvements d'une période à l'autre, il possède la caractéristique de retour à la moyenne et ne peut être négatif. Cependant, d'un point de vue modélisation, l'approche d'équilibre général possède l'inconvénient majeur d'être complexe et peut être impossible à utiliser car ses paramètres essentiels ne sont pas estimables. D'autre part, en termes d'évaluation d'obligations et de produits dérivés sur obligations, la différence entre les modèles d'équilibre partiel et ceux d'équilibre général ne semble pas être très critique et on ne voit pas la nécessité de recourir à ce genre de modèles.

Les modèles de première génération sont restés de faible portée pratique. En effet de par leur construction même, ils présentent deux inconvénients majeurs: 1/ leur utilisation nécessite l'estimation préalable des paramètres du processus joint suivi par les variables d'état et 2/ il apparaît impossible d'obtenir une correspondance stricte entre la structure des taux théorique et la structure des taux observée. Afin de pallier à ces inconvénients, une deuxième approche (d'où l'appellation deuxième génération de modèles) qui, non seulement ne dénature pas la structure existante, mais aussi utilise pleinement l'information qu'elle recèle, a pu voir le jour. Dans la prochaine section, nous essayons de décrire la procédure générale de cette nouvelle génération et d'en présenter les principaux modèles.

## **2. MODÈLES DE DEUXIÈME GÉNÉRATION:**

A la différence des modèles de première génération, les modèles de deuxième génération ou modèles de non arbitrage ne visent pas à définir la structure des taux d'une manière endogène: Celle ci est au contraire considérée comme une donnée exogène du modèle. Ainsi, en aucun cas, les résultats fournis ne peuvent être en contradiction avec l'observation effective de la structure actuelle des taux. En outre, ces modèles sont à l'origine de méthodes pratiques d'évaluation des actifs contingents liés au taux d'intérêt.

D'une façon générale, les modèles de deuxième génération partent de la structure à terme des taux d'intérêt pour dériver ensuite ses mouvements subséquents et obtenir des modèles qui évaluent les actifs financiers relativement à la structure à terme observée. Les mouvements subséquents doivent satisfaire certaines contraintes afin de s'assurer qu'ils sont compatibles avec un cadre d'équilibre: Comme leur nom l'indique, ils ne peuvent permettre des opportunités de profit d'arbitrage.

Il existe trois grandes familles de modèles de deuxième génération: La première représentée par les modèles de Ho et Lee (1986) et Hull et White (1993), implique la spécification à chaque période du processus suivi par le prix des obligations à coupons détachés. La seconde, représentée par les modèles de Heath, Jarrow et Morton (1992), nécessite la spécification du processus suivi par les taux forwards. La troisième, représentée par les modèles de Black, Derman et Toy (1990), Hull et White (1990), et Black et Karasinski (1991), implique quant à elle la spécification du processus suivi par le taux à court terme. Dans ce qui suit, nous allons présenter les principaux modèles qui ont été développés dans le cadre de ces trois familles.

*a) Le modèle de HO et LEE (1986):*

L'article de Ho et Lee (1986) décrit un modèle d'équilibre partiel dans le sens où la structure à terme initiale et le processus qui génère ses variations sont exogènes. Ho et Lee (1986) se sont penchés sur le problème de modélisation de la variation du prix d'une obligation à coupons détachés, sachant que c'est seulement au moment présent et à la date de maturité que ce prix est connu avec certitude. Ils sont les premiers auteurs à développer un modèle de taux d'intérêt à court terme qui soit cohérent avec la structure à terme courante. Pour cela, ils considèrent que les prix des obligations varient seulement à des intervalles fixes dans le temps, qu'ils varient soit à la hausse soit à la baisse, et que ces variations ont une probabilité associée. Ceci les amène à construire un arbre binomial reliant explicitement les mouvements futurs de la courbe des taux de rendement à l'échéance à sa forme initiale. L'idée essentielle derrière l'évolution des prix des obligations est que les taux forwards sous-jacents à la structure à terme initiale seront les taux spots futurs qui prévaudront en l'absence de chocs causant des variations dans les taux. Chaque prix à un point donné de l'arbre, représente le taux forward initial altéré par une accumulation de chocs à la hausse et à la baisse, résultant d'une position particulière dans l'arbre. La logique interne du modèle veut qu'aucun portefeuille

d'arbitrage d'obligations de différentes maturités rapportant plus que le taux sans risque ne puisse être formé quand le portefeuille est parfaitement couvert.

Ce modèle présente un avantage majeur, dans la mesure où la structure ainsi constituée coïncide parfaitement avec celle observée empiriquement. Un autre avantage de ce modèle est qu'il permet d'analyser de façon satisfaisante des clauses particulières telles que: obligations avec remboursement anticipé, avec clauses optionnelles... Cependant, des problèmes apparaissent dans la mise en oeuvre pratique de ce modèle. Tout d'abord la détermination de l'écart type qui caractérise l'évolution du taux à court terme n'est guère explicitée. D'un autre côté, le modèle de Ho et Lee présente certaines faiblesses du fait qu'il n'intègre pas l'aspect de retour à la moyenne introduit pour la première fois par Vasicek (1977) et qu'il permet des taux d'intérêt négatifs. En effet, si l'évolution des prix est telle que l'on monte toujours dans l'arbre, il peut arriver une date où l'un des prix est supérieur à 1 ce qui se traduit par un taux d'intérêt négatif. De plus, tous les taux d'intérêt sur obligations à coupons détachés sur toutes les périodes sont normalement distribués et possèdent la même variance. En d'autres termes, aussi bien les taux au comptant que les taux à terme possèdent le même écart type, tous les taux au comptant futurs sont normalement distribués et toutes les structures à terme futures sont parallèles.

Les modèles qui ont suivi celui de Ho et Lee (1986), notamment ceux de Hull et White (1990), celui de Black et Karasinski (1991) et de Heath, Jarrow et Morton (1992) ont essayé de garder ses avantages tout en éliminant ses inconvénients.

**b) *Modèle de Heath, Jarrow et Morton (1992):***

Heath, Jarrow et Morton (1992),<sup>10</sup> ont développé un modèle d'évaluation des actifs sensibles aux taux d'intérêt inspiré de celui de Black et Scholes (1973). Comme pour ce dernier, les seules variables requises sont le sous-jacent: dans ce cas la structure à terme complète des taux d'intérêt, et une mesure de sa volatilité qui indique comment elle fluctue dans le temps. La structure à terme est un intrant dans leur modèle, tout comme le prix de l'action dans le modèle de Black et Scholes.

Ils commencent par spécifier une courbe initiale des taux à terme, choisie de manière à être compatible avec la structure observée initialement. Dans leur modèle, sur chaque incrément de temps, les taux à terme:  $f(t,T)$ , varient selon le processus suivant:

$$df(t,T) = \mu_f(t,T)dt + \sigma_f(t,T)dw(t) \quad (2.14)$$

Avec:

- $\mu_f(t,T)$ : La tendance du taux à terme
- $\sigma_f(t,T)$ : La volatilité du taux à terme.
- $dw(t)$ : Un processus de Wiener.

La tendance ainsi que la volatilité de  $f(t,T)$  sont choisies de manière à éviter les opportunités d'arbitrage sans risque. En effet, la contribution de HJM à la littérature en (1992) a été de déterminer les restrictions sur la tendance et la volatilité du processus du taux à terme qui permettent d'obtenir un processus sans opportunités d'arbitrage. Ils démontrent que la variation anticipée de  $f(t,T)$  doit être une fonction particulière de la volatilité soit:

---

<sup>10</sup> Qu'on notera aussi HJM

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du \quad (2.15)$$

Si ce n'est pas le cas, le processus permettra des opportunités d'arbitrage. HJM proposent alors leur modèle à n facteurs qui s'écrit:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(v, T, w) dv + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(v, T, w) dw_i(v) \quad (2.16)$$

Avec  $T \in [0, \tau]$  et pour tout  $0 \leq t \leq T$ ,

- $f(0, t)$  est la courbe des taux à terme initiale, fixée et observable.
- $\alpha(v, T, w)$  est la tendance instantanée des taux à terme
- $\sigma_i(v, T, w)$  est la volatilité du  $i^{\text{ème}}$  facteur responsable des variations du taux à terme,  $1 \leq i \leq n$ .
- $W_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  processus de Wiener indépendant des autres.

Quand l'échéance  $T$  est proche et que  $t$  tend vers  $T$ , la dynamique du taux d'intérêt à court terme formulée par HJM est:

$$r(t) = f(0, t) + \int_0^t \alpha(v, t, w) dv + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(v, t, w) dw_i(v), t \in [0, T] \quad (2.17)$$

Cette dynamique très générale du taux d'intérêt à court terme est fondée sur  $n$  mouvements browniens indépendants, déterminant les mouvements stochastiques de la courbe des taux d'intérêt. A première vue, on a l'impression que  $r(t)$  et  $f(t, T)$  suivent le même processus. Cependant pour  $r(t)$  le temps et la maturité varient simultanément, ce qui n'est pas le cas pour le taux à terme où la maturité reste fixe.

Dans le modèle de HJM, la structure à terme future peut dépendre du cheminement entier des prix depuis que la structure a été initialisée. Ainsi, le taux à

terme à la date  $(t + \Delta t)$  peut dépendre non seulement de son niveau au temps  $t$  mais aussi de ses niveaux antérieurs à partir de la date 0. De plus, le taux d'intérêt n'est pas toujours l'unique variable d'état. La connaissance du taux d'intérêt courant à la date  $t$ :  $r(t)$ , peut s'avérer insuffisante pour la détermination de tous les taux à terme en  $t$ . Ces propriétés engendrent des difficultés d'évaluation, en particulier dans les procédures de construction d'un arbre, les chemins peuvent ne pas recombinaison. A titre d'exemple, un arbre binomial avec 20 pas de temps aura  $2^{20}$  soit 1.048.576 cheminements uniques jusqu'aux noeuds terminaux. Si le nombre de pas augmente de 1 ( passe à 21), le nombre de cheminements possibles passe au double soit 2.097.152 ( $2^{21}$ ). Cette explosion engendre des problèmes de calcul surtout lorsqu'il s'agit de l'évaluation de produits dérivés à long terme qui demandent une fine partition sur plusieurs années ( $\Delta t$  faible). Cet inconvénient, qui ressort encore plus dans le cadre d'un mémoire où nous sommes limités par le temps et les moyens, nous a dissuadés de recourir au modèle de HJM. Leur modèle analytique est selon certains plus solide théoriquement que la majorité des autres puisqu'il est le dernier né de la famille et qu'il a cherché à combler les lacunes de chacun de ses prédécesseurs. Cependant, un des objectifs de notre mémoire étant de joindre le pratique au théorique, nous avons opté pour un modèle défendable sur les deux plans. La construction d'une procédure numérique à la HJM nécessitant des moyens hors de notre portée, nous avons décidé de s'en détourner.

Un autre modèle qui a attiré notre attention et qui, si ce n'est le manque de temps, aurait été intéressant à examiner de plus près, est celui de Black et Karasinski (1991), nous le présentons dans ce qui suit.

c) *Modèles de Black, Derman et Toy (1990) et de Black et Karasinski (1991):*

Black et Karasinski (1991) ont simplifié le modèle de Black, Derman, Toy<sup>11</sup> (1990): un modèle qui possède l'avantage d'éliminer les taux d'intérêt négatifs, mais qui reste difficile à appliquer et ils y ont intégré certaines spécificités du modèle de Hull et White (1990): Comme ils le disent eux mêmes dans leur article: « notre modèle est un cas particulier du leur ».

Comme BDT, Black et Karasinski utilisent un modèle Lognormal pour décrire le processus du taux à court terme. En effet, adoptant leur notation, le modèle de BDT peut s'écrire:

$$d(\text{Log } r) = [\theta(t) - \varphi(t)\text{Log } r]dt + \sigma(t)dz \quad (2.18)$$

avec:

- $r$ : le taux d'intérêt à court terme.
- $\sigma(t)$ : l'écart type de  $\text{Log } r$  dépendant de  $\varphi(t)$
- $\varphi(t)$ : Le niveau d'attraction vers le niveau cible

BDT montrent ensuite comment construire un arbre binomial qui soit cohérent, à la fois avec les volatilités courantes de tous les rendements à l'échéance, ainsi qu'avec la structure à terme courante des taux d'intérêt. Leur modèle suppose que tous les taux de rendements à l'échéance sont parfaitement corrélés, que les rendements espérés sur tous les titres sont égaux sur une période donnée, que les taux à court terme suivent une loi lognormale en tout point dans le temps et qu'il n'y a ni impôts, ni coûts de transactions.

---

<sup>11</sup> Qu'on notera aussi BDT.



Black et Karasinski s'inspirent plutôt du modèle de Hull et White (1990), en introduisant la notion de "taux d'intérêt cible " ou encore le taux vers lequel tendra le taux d'intérêt à long terme. Leur modèle s'écrit ainsi:

$$d(\text{Log } r) = \varphi(t)[\text{Log}\mu(t) - \text{Log}(r)]dt + \sigma(t)dz \quad (2.19)$$

avec:

$\mu(t)$ : Le taux d'intérêt cible

$\varphi(t)$ : Le niveau d'attraction vers le niveau cible

$\sigma(t)$ : La volatilité de  $\text{Log } r$ .

Black et Karasinski proposent deux approches pour la construction de l'arbre décrivant l'évolution du taux d'intérêt.

(1) Première approche:

Comment peut-on construire un arbre compatible avec les fonctions représentant le niveau d'attraction, le niveau cible et la volatilité si l'on possède ces trois fonctions comme données, soit:  $\mu(t)$ ,  $\varphi(t)$  et  $\sigma(t)$ ? Pour cela, l'espacement entre deux branches de l'arbre à la même période doit correspondre à la volatilité, la tendance entre deux périodes consécutives doit correspondre au niveau cible du taux d'intérêt et l'espacement entre les différentes périodes consécutives doit correspondre au niveau d'attraction.

Posons  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ ,

$\varphi_n = \varphi(t_n)$

et  $\sigma_n = \sigma(t_n)$

On a alors:

$$\varphi_n = 1/\tau_n [1 - (\sigma_n \sqrt{\tau_n} / \sigma_{n-1} \sqrt{\tau_{n-1}})] \quad (2.20)$$

Résolvant cette équation en  $\tau_n$ , on obtient:

$$\tau_n = \tau_{n-1} * 4(\sigma_{n-1}/\sigma_n)^2 / [1 + \sqrt{1 + 4\varphi_n(\sigma_{n-1}/\sigma_n)^2 \tau_{n-1}}] \quad (2.21)$$

Le choix de  $\tau_0$  est arbitraire. Plus il est faible, plus fin sera l'arbre et plus précises seront les réalisations. Par contre, un arbre trop fin peu se révéler trop coûteux et difficile à manipuler. Connaissant  $\sigma_0$  à partir de  $\sigma(0)$ ,  $\sigma_1$  à partir de  $\sigma(t_0)$  et  $\varphi_1$  à partir de  $\varphi(t_0)$ , on peut utiliser l'équation ci-dessus et construire l'arbre graduellement.

## (2) Deuxième approche:

Supposons maintenant qu'on ignore les fonctions  $\mu(t)$ ,  $\varphi(t)$  et  $\sigma(t)$  et qu'on veuille les choisir de manière à avoir des résultats cohérents avec les données observées, soient la structure des taux de rendements à l'échéance, la structure des volatilités, ainsi que la structure des prix des « at the money diff cap<sup>12</sup> » (Black et Karasinski introduisent cette structure comme l'un de leurs inputs car, il s'agit de données qu'on peut observer sur le marché).

Ce qu'ils proposent de faire, c'est de prendre des segments de temps et de diviser chaque segment en plusieurs intervalles. Ensuite, ils choisissent  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\varphi$  de façon à ce qu'ils soient cohérents avec les outputs dont on dispose à la fin du premier segment de temps. Ils prennent  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\varphi$  du début du deuxième segment jusqu'à sa fin de manière à ce qu'ils soient cohérents avec les outputs à la fin de ce deuxième segment et ils répètent le procédé. Les variables  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\varphi$  qui en résultent

<sup>12</sup> Un diff cap ou cap différentiel est une option sur un différentiel de taux d'intérêt.

seront respectivement considérées comme: « niveau cible implicite », « volatilité implicite » et « niveau d'attraction implicite ».

Black et Karasinski ont ainsi simplifié le modèle de BDT, très complexe à mettre en place. Ils n'ont cependant pas remédié au problème d'absence de solutions analytiques pour l'évaluation de produits dérivés sensibles à la marche des taux d'intérêt, et principalement pour les prix des obligations sans coupons et des options sur celles-ci. Hull et White proposent un modèle qui se prête aussi bien à une application analytique que numérique, du moins dans le cadre de notre problématique à savoir l'évaluation des diff swaps. C'est ce que nous exposons dans la prochaine section.

#### *d) Modèles de Hull et White (1990, 1993, 1994):*

Hull et White proposent eux aussi, un modèle de non arbitrage, qui comme tous les modèles de la deuxième génération, permet une cohérence parfaite avec la structure à terme observée. Le modèle analytique le plus général de Hull et White est celui qu'ils proposent pour la première fois en 1993, il s'écrit:

$$dr = \mu[\theta(t), r, t]dt + \sigma dz(t) \quad (2.22)$$

où:

- $r$ : le taux d'intérêt à court terme.
- $\sigma$ : est l'écart type instantané du taux à court terme, il s'agit par hypothèse d'une constante connue.
- $\mu$ : est la tendance du taux à court terme, dont par hypothèse la forme fonctionnelle est connue.
- $\theta(t)$ : est une fonction inconnue du temps.

Un cas particulier de ce modèle n'est autre que le modèle de Hull et White (1990) ou encore, ce qu'ils appellent le modèle de Vasicek étendu, modèle où ils ont exploité les propriétés de ceux de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross, soit:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz(t) \quad (2.23)$$

Le modèle peut être écrit autrement:

$$dr = a \left[ \frac{\theta(t)}{a} - r \right] dt + \sigma dz(t) \quad (2.24)$$

Ceci montre qu'à tout moment  $t$ ,  $r$  tend vers la valeur  $\theta(t)/a$ , à une vitesse  $a$ , avec  $a$  et  $\sigma$  des constantes. C'est ce modèle que nous appellerons celui de Hull et White. Considéré de plus près, on s'aperçoit qu'il s'agit :

1- Du modèle de Ho et Lee (1986) mais avec un coefficient de retour à la moyenne  $a \neq 0$ .

2- Du modèle de Vasicek avec un niveau de retour à la moyenne qui dépend du temps, ce qui lui permet de rester cohérent avec la structure à terme observée.

Comme dans Ho et Lee (1986), les prix des obligations zéro coupons peuvent être déterminées analytiquement ainsi:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r} \quad (2.25)$$

Avec

$$B(t, T) = 1/a[1 - e^{-a(T-t)}] \quad (2.26)$$

et

$$\log A(t, T) = \log[P(0, T)/P(0, t)] + B(t, T)F(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2 \quad (2.27)$$

La structure de la volatilité chez Hull et White est déterminée par  $a$  et  $\sigma$ , ce qui donne plus de flexibilité au modèle de ce point de vue. En effet, si  $\sigma$  est l'écart type instantané du taux à court terme, on peut montrer que:

1- La volatilité au temps  $t$  du prix d'une obligation qui arrive à échéance en  $T$  est:

$$\frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) \quad (2.28)$$

2- L'écart type instantané au temps  $t$  d'un taux zéro coupons à échéance  $T$  est:

$$\frac{\sigma}{a(T-t)}[1 - e^{-a(T-t)}] \quad (2.29)$$

Lorsque, comme chez Ho et Lee, le paramètre  $a$  est nul, les prix des obligations sans coupons forment une fonction linéaire de la maturité  $T$  et l'écart type instantané des taux zéro coupons et des taux à terme sont constants ce qui n'est pas le cas dans la réalité. Enfin, l'écart type instantané du taux à terme à échéance  $T$  est  $\sigma e^{-a(T-t)}$ .

Dans leur article de (1993), Hull et White considèrent aussi des modèles qui font appel à deux fonctions du temps et qui peuvent être cohérents avec la structure par terme initiale des taux d'intérêt, et avec la structure initiale des volatilités. Cependant, ils font remarquer que ce type de modèles ne coïncide avec les volatilités des rendements des obligations à zéro coupon qu'au temps zéro, alors qu'en pratique ces volatilités à des périodes ultérieures s'en écartent généralement. Ils en concluent que les modèles à une seule fonction du temps inconnue, même s'ils ne sont pas compatibles avec la structure des volatilités, restent plus robustes. En effet, ils excluent des structures de volatilité stationnaires et peuvent être plus appropriés pour évaluer des options à long terme (cas des *over the counter bond*

*options* et des *swap options*) dont le prix peut être sensible à l'évolution des volatilités des rendements des obligations.

Tandis que Hull et White (1990) construisent un arbre trinomial décrivant le processus suivi par le taux d'intérêt à court terme, le modèle de Hull et White (1993) nous procure une procédure encore plus générale qui peut être utilisée pour construire une plus large famille de modèles de non arbitrage à un facteur pour décrire le processus de  $r$ . En effet, ce modèle repose sur l'hypothèse que le processus des taux d'intérêt à court terme a été spécifié en termes de fonctions du temps inconnues et utilise l'arbre trinomial afin de déterminer ces fonctions. Leur article de (1994) (I) ne présente pas un nouveau modèle au vrai sens du terme, mais plutôt une procédure de construction de l'arbre trinomial qui est plus efficace et moins coûteuse que celle qu'ils présentèrent en (1993). Cette approche est non seulement utile pour leurs modèles plus anciens, mais aussi à tous ceux qui intègrent un processus de retour à la moyenne dans leur spécification du taux court terme. Elle peut être utilisée pour le modèle de Ho et Lee (1986), ainsi que celui de Black et Karasinski (1991), comme on peut y recourir pour développer de nouveaux modèles. Lorsque  $r$  est remplacé par  $\text{Log } r$  et  $a(t)$  par  $(-\sigma'(t)/\sigma(t))$ , le modèle devient celui de Black, Derman et Toy (1990). Ils améliorent leur modèle de (1993) en arrangeant la géométrie de l'arbre de telle manière que le noeud central corresponde toujours à la valeur anticipée de  $r$ .

Dans ce qui suit, nous exposons les différentes procédures numériques proposées par Hull et White depuis 1990.

## C. PROCÉDURES NUMÉRIQUES CHEZ HULL ET WHITE:

### 1. Hull et White 1990:

En 1990<sup>13</sup>, Hull et White ont montré, pour la première fois, comment un arbre trinomial peut être utilisé afin d'évaluer des options américaines sur obligations, ou sur tout autre actif sensible aux taux d'intérêt, lorsque ces derniers suivent un processus de Vasicek (1977). La valeur de  $r$  sur l'arbre au temps 0 correspond à  $r_0$ : le taux à court terme initial. Les valeurs de  $r$  considérées aux noeuds suivants s'écrivent:  $r_0+k\Delta r$  avec  $k$  un entier positif ou négatif. La relation entre  $\Delta r$  et  $\Delta t$ : le pas de temps s'écrit:

$$\Delta r = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

La construction d'un arbre trinomial est plus compliquée que celle d'un arbre binomial. D'abord, comme son nom l'indique, l'arbre trinomial possède trois branches à chaque noeud. Ensuite, les probabilités sur les différentes branches diffèrent d'une partie à l'autre de l'arbre. Enfin, la forme des branches peut varier d'un noeud à l'autre selon le niveau atteint par les taux d'intérêt. En effet, l'arbre trinomial est construit de manière à ce que la moyenne et l'écart type de  $\Delta r$  soient correctement évalués. Dans la majorité des cas, le taux d'intérêt à court terme  $r$  est susceptible soit:

- D'augmenter de  $\Delta r$ .
- De demeurer inchangé.
- De baisser de  $\Delta r$ .

Cependant, lorsque  $r$  est élevé, les variations éventuelles peuvent:

---

<sup>13</sup> Il s'agit de leur article " Valuing Derivative Securities using the Explicit Finite Differences Method " Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25, ( Mars 1990) 87-100

- Demeurer inchangé.
- Baisser de  $\Delta r$ .
- Baisser de  $2\Delta r$ .

Et si  $r$  est faible, elles peuvent:

- Augmenter de  $2\Delta r$ .
- Augmenter de  $\Delta r$ .
- Demeurer inchangé.

## 2. Hull et White 1993:

En (1993), Hull et White ont introduit une méthodologie améliorée de la construction d'un arbre trinomial. En fait, la géométrie de l'arbre de (1993) ressemble beaucoup à celle de (1990). Cependant, il existe une différence majeure. Dans le modèle de Vasicek (1977), le processus de  $r$  est connu et l'arbre est choisi de manière à s'en rapprocher le plus possible. Dans le modèle de Vasicek étendu ou encore de Hull et White (1990), une grande partie de la méthodologie de construction de l'arbre vise à déterminer  $\theta(t)$ : la fonction du temps inconnue afin de pouvoir correctement évaluer les obligations sans coupons. Ainsi, la première méthode vise une évaluation approximative, la seconde une évaluation exacte. Sur l'arbre, le taux à court terme  $r$  est défini comme le taux de rendement continu composé d'une obligation sans coupons qui arrive à maturité en  $\Delta t$ . Comme en (1990), les valeurs de  $r$  sur l'arbre sont de la forme:  $r_0 + j\Delta r$  avec  $r_0$  la valeur courante de  $r$  et  $j$  un entier positif ou négatif. Sur l'arbre, le noeud auquel on a  $t = i\Delta t$  et  $r = r_0 + j\Delta r$  ( $i \geq 2$ ) est noté le noeud  $(i,j)$ .

Soit:

- $R(i)$ : Le rendement au temps 0 d'une obligation sans coupons qui arrive à maturité en  $i\Delta t$ .
- $r_j$ :  $r_0 + j\Delta r$
- La tendance de  $r$  au noeud  $(i,j)$ .



Le taux d'intérêt  $r$  au temps  $i\Delta t$  est celui qui sera appliqué à la période à courir entre  $i\Delta t$  et  $(i+1)\Delta t$  et un arbre construit jusqu'à la date  $n\Delta t$  reflète les valeurs de  $R(i)$  pour  $i \leq n+1$ . A chaque étape de la construction de l'arbre, soit entre  $n\Delta t$  et  $(n+1)\Delta t$ , on doit choisir une valeur de  $\theta(n\Delta t)$  de manière à atteindre la valeur de  $R(n+2)$ . L'équation qui nous donne  $\theta(n\Delta t)$  est:

$$\theta(n\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}(n+2)R(n+2) + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} + \frac{1}{\Delta t^2} \text{Ln} \sum_j Q(n, j) e^{-2r_j \Delta t + ar_j \Delta t^2} \quad (2.30)$$

Où  $Q(i, j)$  est la valeur d'un actif qui paie 1\$ si le noeud  $(i, j)$  est atteint, 0 sinon. Les  $Q(i, j)$  sont ainsi calculés:

$$Q(i, j) = \sum_{j^*} Q(i-1, j^*) q(j^*, j) e^{-r_{j^*} \Delta t} \quad (2.31)$$

Avec,  $q(j^*, j)$  la probabilité de passer du noeud  $(i-1, j^*)$  au noeud  $(i, j)$ .

Après avoir déterminé les  $\theta(n\Delta t)$ , on calcule les tendances  $\mu_{n, j}$  de  $r$  ainsi:

$$\mu_{n, j} = \theta(n\Delta t) - a(r_0 + j\Delta r) \quad (2.32)$$

Les branches émanant des noeuds correspondants au temps  $n\Delta t$  et leurs probabilités associées sont alors choisies de manière à correspondre aux  $\mu_{n, j}$  et à  $\sigma$ .

### 3. Hull et White 1994 et 1996:

Ce sont leurs deux articles de (1994) qui nous ont le plus intéressé, car outre le fait qu'ils améliorent leur méthodologie de (1993), ils présentent une procédure tout à fait appropriée à l'évaluation d'actifs tels que le diff swap. L'amélioration par rapport à la méthodologie de (1993) peut se résumer dans le fait que le noeud

central correspond exactement à la valeur anticipée de  $r$  et ce dans tous les cas. Pour cela ils procèdent par étape:

Dans la première étape, il s'agit de construire un arbre préliminaire, en posant  $\theta(t) = 0$  et la valeur initiale de  $r = 0$ . Le processus du taux à court terme s'écrit:

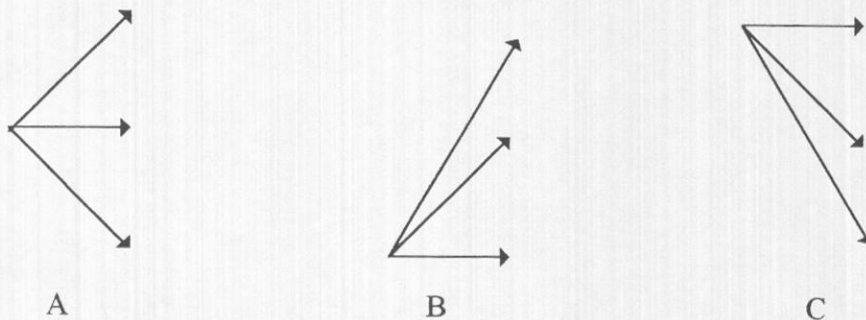
$$dr = -ardt + \sigma dz \quad (2.33)$$

Où:

- $r$  est défini comme le taux composé continu à la période  $\Delta t$ .
- Le processus  $r(t+\Delta t) - r(t)$  est normalement distribué, avec:  $r(t)M$ , sa valeur espérée et  $V$  sa variance.

Hull et White, commencent alors par définir l'incrément de temps  $\Delta t$  et par poser celui de taux d'intérêt  $\Delta r = \sqrt{3}V^{14}$ . Tel qu'expliqué précédemment, le but de leur article étant de spécifier la forme exacte de l'arbre, le premier problème auquel s'attaquent Hull et White ici est de définir la forme des branches de l'arbre à chaque noeud.

Les branches de l'arbre pouvant prendre l'une des trois formes ci-dessus:



Soit  $(i,j)$  le noeud auquel  $t=i\Delta t$  et  $r=j\Delta r$ .

Soit  $p_u$ ,  $p_m$  et  $p_d$  les probabilités respectives des branches du haut, du milieu et du bas, ces probabilités sont choisies de façon à ce que leur somme soit égale à 1 et

<sup>14</sup> Ils expliquent que les travaux théoriques sur les procédures numériques suggèrent que ce choix permet la minimisation de l'erreur.

qu'elle soient compatibles avec la valeur anticipée de la variation de  $r$  et de la variance de celle-ci sur l'intervalle de temps  $\Delta t$ . Ceci nous amène à un système de trois équations qui diffère selon la forme des branches de l'arbre.

La deuxième étape correspond à l'introduction de la vraie tendance qui dépend du temps. Pour ceci, ils ne font que déplacer les noeuds au temps  $i\Delta t$  d'une valeur  $\alpha_i$  afin de produire un nouvel arbre. Les probabilités restent inchangées, et les valeurs des  $\alpha_i$  sont choisies de manière à ce que les prix des obligations zéro coupon sur l'arbre soient compatibles avec la structure à terme initiale observée sur le marché. Les  $\alpha_i$  sont calculés à l'aide d'une procédure itérative. Le processus que modélise cette deuxième catégorie d'arbres est:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz \quad (2.34)$$

Leur article de 1994 (II), vient compléter le premier, en permettant de modéliser la structure à terme des taux d'intérêt de deux différents pays simultanément. Cet article, nous sera de la plus grande utilité, d'autant plus que, comme l'indique la définition des diff-swaps, nous avons besoin de modéliser les structures à terme de différents pays pour évaluer cet instrument. Cette approche est parfaitement appropriée au problème de notre investisseur qui s'intéresse à la structure à terme des taux d'intérêt de deux pays et qui voudrait recevoir et payer les paiements rattachés aux deux taux en une seule devise. En bref, si nous considérons A: le pays dans la devise duquel les paiements sont effectués et B le deuxième pays, cette démarche que nous détaillons dans notre méthodologie consiste à:

1- Construire un arbre pour chacune des deux structures à terme des pays A et B séparément. La construction des arbres se fait comme il a été décrit précédemment dans le paragraphe correspondant à leur article 1994(I).

2- Ajuster les deux arbres pour qu'ils correspondent au point de vue de notre investisseur. En effet, comme les cash flows seront réalisés dans la monnaie de celui-ci, il est obligatoire de considérer l'évolution de la structure à terme du pays B du point de vue d'un investisseur du pays A.

3- Combiner les deux arbres avec l'hypothèse d'absence de corrélation. Le résultat est alors un arbre tridimensionnel, avec 9 branches émanant de chaque noeud. La probabilité associée à chaque branche est le produit des probabilités associées aux mouvements correspondants dans les deux structures. Chaque noeud au temps  $i\Delta t$  dans l'arbre tridimensionnel correspond à un noeud au temps  $i\Delta t$  dans l'arbre A et à un noeud au temps  $i\Delta t$  dans l'arbre B. Les probabilités associées à chaque branche d'un noeud  $(i,j,k)$  de l'arbre tridimensionnel sont décrites dans le tableau suivant:

		$r_A$		
		Baisse	Inchangé	Hausse
$r_B$	Baisse	$p_d q_u$	$p_m q_u$	$p_u q_u$
	Inchangé	$p_d q_m$	$p_m q_m$	$p_u q_m$
	Hausse	$p_d q_d$	$p_m q_d$	$p_u q_d$

Avec,

$r_A$ : Le taux à court terme du pays A.

$r_B$ : Le taux à court terme du pays B, mais du point de vue d'un investisseur du pays A.

$P_d, P_m, P_u$ : les probabilités de baisse, de non changement et de hausse du taux court terme du pays A.

$q_d, q_m, q_u$ : les probabilités de baisse, de non changement et de hausse du taux à court terme du pays B.

4- Finalement, introduire un niveau de corrélation adéquat entre  $r_A$  et  $r_B$  en ajustant les probabilités sur les différentes branches. En effet, en tenant compte de la corrélation, la géométrie de l'arbre reste la même, il n'y a que les probabilités qui doivent être ajustées.

Elles deviennent alors:

$r_B$	$r_A$		
	Baisse	Inchangé	Hausse
Baisse	$p_d q_u - \varepsilon$	$p_m q_u - 4\varepsilon$	$p_u q_u + 5\varepsilon$
Inchangé	$p_d q_m - 4\varepsilon$	$p_m q_m + 8\varepsilon$	$p_u q_m - 4\varepsilon$
Hausse	$p_d q_d + 5\varepsilon$	$p_m q_d - 4\varepsilon$	$p_u q_d - \varepsilon$

Avec  $\rho$  le coefficient de corrélation entre les deux taux d'intérêt des pays A et B et  $\varepsilon = \rho/36$ .

Ainsi, il apparaît clairement, que cette méthodologie peut très bien être adaptée au principe d'évaluation de diff-swaps qui repose en premier lieu sur la modélisation de deux structures différentes de taux d'intérêt de deux pays différents: soient A et B, la structure du pays B étant considérée du point de vue d'un investisseur du pays A. Elle peut aussi être adaptée à l'évaluation d'un diff-swap plus général qui implique les taux d'intérêt de deux différents pays A et B, le paiement s'effectuant dans la devise d'un tiers pays soit C.

#### 4. Application de Hull et White (1994) au modèle de Black et Karasinski:

Hull et White nous montrent aussi comment leur méthodologie peut être adaptée à une famille de modèles de la structure à terme beaucoup plus large, soit celle qui s'écrit:

$$df(r) = [\theta(t) - af(r)]dt + \sigma dz. \quad (2.35)$$

Lorsque  $f(r) = \text{Log}(r)$  le modèle devient celui de Black et Karasinski (1991). Ils posent alors  $x = f(r)$  tel que l'on a:

$$dx = [\theta(t) - ax]dt + \sigma dz. \quad (2.36)$$

La procédure de construction de l'arbre décrivant la marche de la fonction des taux d'intérêt,  $x$ , demeure sensiblement la même. Elle se fait toujours en deux étapes: Dans la première, on pose la valeur initiale de  $x = 0$  tout comme celle de  $\theta(t)$ . Dans la deuxième, on déplace les noeuds au temps  $i\Delta t$  d'une valeur  $\alpha_i$  afin de calibrer l'arbre avec la structure initiale observée. Cependant, les équations qui permettent de déterminer  $\alpha_i$  et  $Q_{i,j}$  diffèrent de celles utilisées pour la modélisation à la Hull et White (1994 I). Ainsi, supposons que les  $Q_{i,j}$  des  $i \leq m$  ont été calculés. La prochaine étape serait de calculer les  $\alpha_m$  qui permettent d'évaluer correctement une obligation sans coupons venant à échéance en  $(m+1)\Delta t$ .

Posons  $g$  la fonction inverse de  $f$ , le taux d'intérêt sur  $\Delta t$  périodes au noeud  $j$  au temps  $m\Delta t$  est dans ce cas:  $g(\alpha_m + j\Delta x)$ . Le prix au temps 0 d'une obligation sans coupons qui arrive à échéance en  $t_{m+1}$  est donné par:

$$P(0, m+1) = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-g(\alpha_m + j\Delta x)\Delta t] \quad (2.37)$$

Cette équation peut, selon Hull et White, être résolue après quelques itérations si l'on utilise la méthode de Newton-Raphson.

Les  $Q_{i,j}$  pour  $i = m+1$  peuvent alors être calculés ainsi:

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) \exp[-g(\alpha_m + k\Delta x)\Delta t] \quad (2.38)$$

Avec  $q(k,j)$  la probabilité de passer du noeud  $(m,k)$  au noeud  $(m+1,j)$ . On prend ensuite la somme sur toutes les valeurs de  $k$  différentes de zéro.

Les critères qui nous ont permis de choisir le modèle le plus pertinent sont:

- Le niveau de rapidité des calculs qu'offre le modèle.
- Le degré de simplicité du modèle et de l'évaluation de ces paramètres comparé à d'autres modèles de même niveau de rigueur.
- La facilité de calibrer le modèle avec des données de marché afin de s'assurer de la cohérence avec la structure à terme observée des taux d'intérêt.

La classification suivante en a découlé:

MODÈLE	RAPIDITÉ DES CALCULS	SIMPLICITÉ DU MODÈLE	CALIBRAGE AUX DONNÉES DE MARCHÉ
HEATH JARROW ET MORTON	<b>Lent, arbres non recombinauts</b>	<b>Pas de résultats analytiques</b>	<b>Difficile à calibrer</b>
BLACK ET KARASINSKI	<b>Rapide, arbres recombinauts</b>	<b>Pas de résultats analytiques</b>	<b>Facile à calibrer</b>
HULL ET WHITE	<b>Rapide, arbres recombinauts</b>	<b>Plusieurs résultats analytiques exploitables</b>	<b>Facile à calibrer</b>

Cette comparaison nous a aidé dans notre choix et nous a amené à bien définir les traits de notre problématique que nous exposons dans ce qui suit.

## PROBLÉMATIQUE:

L'évaluation de produits dérivés est une tâche délicate, à laquelle il faut s'atteler avec beaucoup de prudence. En effet, dans notre cas, un mauvais choix du modèle décrivant la structure à terme des taux d'intérêt pourrait s'avérer nuisible et entraîner des erreurs de sur ou sous-évaluation. Dans le même temps, certains modèles trop rigoureux théoriquement, tels que celui de Cox, Ingersoll et Ross (1985) qui se veut un modèle général tenant compte des moindres facteurs d'une économie, peut s'avérer, d'un point de vue pratique, trop coûteux par rapport au surplus d'exactitude qu'il est susceptible d'apporter à l'évaluation. Une analyse comparative avantages/coûts entre les différents modèles que l'on vient de passer en revue s'impose. D'un autre côté, il faut garder en perspective les objectifs premiers que nous nous sommes fixés au début de ce mémoire, à savoir: développer un modèle analytique d'évaluation, mais aussi avoir la possibilité d'implanter un modèle numérique afin de pouvoir découvrir les avantages et limites éventuels de cette famille de méthodes qui ne cesse de s'élargir.

A vrai dire, trois modèles nous ont intéressé et notre souhait aurait été de les étudier et de les appliquer. Ce désir est aiguisé par la concurrence farouche qui s'est installée entre leurs auteurs respectifs. Cependant, cet objectif est jugé trop ambitieux pour un mémoire, nous espérons avoir l'occasion de le réaliser dans le cadre d'un travail qui disposera de plus de ressources en temps et en moyens financiers. Les trois modèles sus-cités sont celui de Heath, Jarrow et Morton



(1992), celui de Black et Karasinski (1991) et celui de Hull et White (1990) suivi de leur procédure numérique détaillée dans leurs articles de (1994) et (1996).

Le premier, celui de Heath, Jarrow et Morton (1992) tel qu'expliqué dans le paragraphe qui lui est consacré dans la revue de littérature, débouche sur la construction d'un arbre binomial qui ne se recombine pas dans le sens qu'un mouvement de hausse suivi d'un mouvement de baisse n'aboutit pas à la même structure qu'une baisse suivie d'une hausse. Ainsi, après  $n$  incréments de temps, on obtient  $2^n$  noeuds ce qui pousse à réduire le nombre de pas de temps sur l'arbre et entraîne des difficultés de calcul non négligeables.

Concernant l'article de Black et Karasinski (1991), nous avons bien montré qu'un arbre à la Hull et White qui convient exactement à l'évaluation d'un diff swap peut être mis en place. C'est en fait le modèle qu'on regrette le plus de ne pas avoir eu le temps de tester puisqu'il aurait pu enrichir notre mémoire sans trop l'encombrer. Il est à noter cependant, que les modèles de HJM et Black et Karasinski sont analytiquement inexploitable et ne nous auraient pas permis de réaliser notre objectif premier, à savoir le développement d'un modèle analytique d'évaluation du diff swap.

Notre choix final se pose sur le modèle de Hull et White en raison de la double possibilité qu'il offre c'est-à-dire pouvoir servir au développement d'un modèle analytique et présenter une méthodologie d'élaboration d'une procédure numérique.

Le choix de notre modèle étant fait, on se propose de :

- Dériver un modèle analytique d'évaluation des diff swaps, où le processus suivi par les taux domestique et étranger serait celui proposé par Hull et White en (1990), modèle qu'ils appellent aussi Vasicek modifié. Ce modèle, contrairement à

celui de Vasicek utilisé par Wei, permet d'exploiter pleinement l'information contenue dans la structure à terme observée. Outre cet avantage, l'amélioration que Hull et White apportent dans leur article de 1994 nous permet d'explicitier le processus suivi par le taux d'intérêt étranger dans un monde domestique neutre au risque.

- Programmer et mettre en place leur procédure numérique, soit un arbre tridimensionnel qui projette l'évolution future du différentiel de taux domestique/étranger en tenant compte du point de vue d'un investisseur domestique neutre au risque. C'est dans le cadre de cette partie que nous détaillerons l'estimation, à partir de données de marché, de certains paramètres tels que les volatilités et les coefficients de corrélation des processus de taux de change et de taux d'intérêt. Ce volet constitue l'un des principaux objectifs du présent mémoire.

### III. LE MODÈLE ANALYTIQUE D'ÉVALUATION DES DIFF SWAPS:

Dans la spécification de notre problématique, nous avons mis l'accent sur deux principaux objectifs, à savoir:

- La dérivation d'un modèle analytique d'évaluation des diff swaps, où nous modélisons la structure à terme des taux d'intérêt selon le processus proposé par Hull et White(1990).
- La mise en place de l'approximation numérique aux moyens d'arbres trinomiaux qu'ils proposent dans leurs articles de (1994).

Dans le présent chapitre, nous nous intéressons au premier objectif. Nous commençons par évaluer les deux parties: domestique et étrangère du swap séparément. Les détails de la dérivation de la partie étrangère seront exposés à l'annexe B.

Au départ, spécifions que le modèle de base utilisé par les marchés financiers pour l'évaluation des swaps est celui de la valeur actuelle nette (VAN):

Un swap est un échange de deux séries de cash flows libellées en une ou plusieurs monnaies, son prix est la différence entre leurs VAN respectives.

En partant d'hypothèses sur les processus des taux d'intérêt et du taux de change que nous détaillerons par la suite, nous écrivons ainsi la valeur d'un diff-swap  $V$ :

$$V = V_f - V_d - \frac{c(t_{i+1} - t_i)}{360} P \sum_{i=1}^n B_d(t, t_i) \quad (3.1)$$

Avec:

- $V_d$  et  $V_f$  : Les VAN respectives des paiements d'intérêt domestiques et étrangers ou encore, ce qui est dû par la contrepartie étrangère et domestique respectivement.
- $c$ : Une marge spécifiée à la conclusion du contrat de swap afin de compenser le différentiel d'intérêt à cette date.

$V^d$  et  $V^f$  sont donc les deux principales composantes de la valeur de notre diff-swap. Dans l'article de Wei (1994), la détermination de  $V^d$  repose sur l'hypothèse que les taux d'intérêt à court terme domestique et étranger suivent un processus Ornstein-Uhlenbeck. L'utilisation de ce processus constitue, tel qu'expliqué dans la revue de littérature, l'inconvénient majeur de son modèle. En effet, ce processus procure une approximation de la structure des taux observée et non la structure elle-même. Cette approximation semble être insuffisante car si elle engendre une évaluation du sous-jacent faiblement erronée, les praticiens avancent que l'erreur sur l'évaluation du produit dérivé qui en découle est multipliée par 50.

La difficulté majeure se pose quand on se retourne vers  $V^f$ . Outre le choix du processus adéquat pour le taux d'intérêt à court terme, l'évaluation de la série des flux des paiements étrangers est compliquée. Ces paiements sont déterminés selon le taux d'intérêt étranger, mais libellés en monnaie domestique, d'où l'effet implicite du taux de change dont il faut tenir compte. Cet impact du taux de change

apparaît essentiellement par le biais du processus du taux d'intérêt étranger considéré du point de vue d'un investisseur domestique: processus que Wei n'arrive pas à écrire explicitement. Pour y remédier, nous proposons d'utiliser directement la formulation explicite du processus du taux d'intérêt étranger du point de vue d'un investisseur domestique proposée par Hull et White (1994). Cette formulation est compatible avec notre choix concernant la modélisation de la structure à terme des taux d'intérêt.

Notre apport se résume en deux points majeurs:

1/ L'utilisation du processus de taux d'intérêt de Hull et White pour décrire l'évolution des taux domestique et étranger. Ce processus est à la base d'un modèle de non arbitrage qui permet d'être parfaitement cohérent avec la structure à terme observée dans la pratique

2/ L'utilisation, dans la dérivation analytique de  $V^f$ , du processus explicite du taux d'intérêt étranger du point de vue d'un investisseur domestique en se basant toujours sur le modèle de Hull et White.

Dans ce qui suit, nous exposons nos hypothèses sur les processus des différentes variables d'état. Nous procédons par la suite à la dérivation des différents termes de l'équation d'évaluation des diff swaps.

#### **A. HYPOTHÈSES SUR LES PROCESSUS DES VARIABLES D'ÉTAT:**

Dans notre modèle, nous avons retenu trois variables d'état<sup>15</sup> :

---

<sup>15</sup> Une variable d'état est une variable qui résume une partie ou toute l'information sur l'incertitude dans l'économie.

1/ Le prix  $B_d$  de l'obligation nationale à coupons détachés, supposé suivre un processus de diffusion géométrique.

$$dB_d / B_d = \mu_d(r_d, t)dt + \sigma_d(t, T)dz_d \quad (3.2)$$

Ce prix découle du taux d'intérêt à court terme domestique dont la dynamique est décrite par l'équation différentielle stochastique<sup>16</sup> suivante:

$$dr_d = \alpha_d(r_d, t)dt + \rho_d(t, T)dw_d \quad (3.3)$$

2/ Le prix  $B_f$  de l'obligation étrangère à coupons détachés est supposé suivre un processus de diffusion géométrique similaire à celui de l'obligation domestique.

$$dB_f / B_f = \mu_f(r_f, t)dt + \sigma_f(t, T)dz_f \quad (3.4)$$

Ce prix découle du taux d'intérêt à court terme étranger, qui comme le taux d'intérêt à court terme national, est supposé vérifier:

$$dr_f = \alpha_f(r_f, t)dt + \rho_f(t, T)dw_f \quad (3.5)$$

3/ Le taux de change est supposé suivre un processus de diffusion géométrique.

$$dX / X = \mu_x dt + \sigma_x dx(t) \quad (3.6)$$

<sup>16</sup>Un processus stochastique  $dx = a(x, t)dt + B(x, t)dw(t)$  possède une solution en système d'intégrales de la forme:

$$x(s) = x(t) + \int_t^s a(x(u), u)du + \int_t^s B(x(u), u)dw(u)$$

Avec  $a(x(t), t)$  le vecteur des variations anticipées de  $x$ , et  $B(x(t), t)$  la matrice de covariances des variations de  $x$ .

Avec:

- Les termes  $\mu_i$  qui désignent les tendances des processus des prix des obligations  $i = d, f$ . Ils dépendent du temps et du taux d'intérêt à court terme.
- Les termes  $\sigma_i$  qui désignent les écart types des processus des prix des obligations.
- Les termes  $\alpha_i$  qui désignent les tendances des processus des taux d'intérêt à court terme.
- Les termes  $\rho_i$  qui désignent les écart types des processus des taux d'intérêt à court terme.
- Les termes  $dx, dz_d, dz_f$  qui sont des processus standards de Wiener à variance unitaire avec une matrice de corrélation:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{xf} & \rho_{xd} \\ \rho_{xf} & 1 & \rho_{fd} \\ \rho_{xd} & \rho_{fd} & 1 \end{bmatrix}$$

Plus loin, nous spécifions la forme exacte des processus suivis par les taux à court terme dans les deux économies. Nous donnons les expressions exactes des termes  $\alpha_d$  et  $\alpha_f$  en se basant sur une modélisation de la structure à terme selon Hull et White.

Par ailleurs, afin de déterminer le processus neutre au risque des taux d'intérêt, Wei utilise l'argument d'évaluation dans un contexte de neutralité au risque. Faisant partie des modèles de la structure à terme de la deuxième génération, le modèle de structure à terme des taux d'intérêt présenté par Hull et White intègre cet aspect de neutralité au risque d'une façon "endogène" puisqu'il décrit directement le processus du taux à court terme qui est compatible avec un processus des prix des obligations neutre au risque. En effet, l'amplitude des

variations des prix des obligations à zéro coupons est contrainte de manière à ce qu'aucune opportunité d'arbitrage sans risque n'est possible. La logique du modèle requiert qu'aucun portefeuille d'arbitrage constitué d'obligations à zéro coupons de différentes échéances et qui a un rendement supérieur au taux d'intérêt sans risque ne puisse être formé lorsque le portefeuille est parfaitement couvert (sans risque). Ainsi, la procédure décrite par Hull et White aboutit directement à un arbre représentant le processus neutre au risque de  $r$ . Aucune hypothèse quant au prix du risque sur le marché n'est nécessaire<sup>17</sup>.

Le taux de change est, quant à lui, supposé suivre un processus de diffusion géométrique:

$$dX / X = \mu_x dt + \sigma_x dx(t) \quad (3.7)$$

Où:

- $\mu_x$  est le rendement espéré du taux de change.
- $\sigma_x$  est la volatilité du taux de change.
- $dx$  un processus de Wiener.

Garman et Kohlhagen décomposent le rendement espéré  $\mu_x$  sur le taux de change en une tendance reliée au différentiel de taux d'intérêt plus une prime de risque soit

$$\mu_x = (r_d - r_f) + \lambda_x \sigma_x \quad (3.8)$$

Qu'on peut écrire:

$$\mu_x = r_d - (r_f - \lambda_x \sigma_x) \quad (3.9)$$

---

<sup>17</sup> Un développement plus détaillé du modèle de Hull et White sera présenté dans une section ultérieure.



Avec  $\lambda_x$  le prix du risque du marché de la devise, soit la variation anticipée du rendement instantané de la devise pour une unité additionnelle de risque.

D'autre part, si on applique le lemme 4 de CIR<sup>18</sup> au taux d'intérêt étranger, on peut en déduire le processus ajusté au risque de ce dernier en déduisant de sa tendance la prime de risque correspondante. En effet, nous pouvons alors écrire:

$$r'_f = r_f - \lambda_x \sigma_x \quad (3.10)$$

et le processus du taux de change s'écrit alors:

$$dX/X = (r_d(t) - r'_f(t))dt + \sigma_x dw_x(t) \quad (3.11)$$

Ayant spécifié les processus de nos différentes variables, nous pouvons passer à la dérivation du modèle terme par terme.

## **B. DÉRIVATION DU MODÈLE:**

Nous considérons dans ce qui suit, que la valeur nette des échanges de paiements d'intérêt périodiques est la différence entre le prix de deux obligations à taux d'intérêt variable: une domestique et l'autre étrangère. Dans ce qui suit, nous commençons par déterminer la valeur de la partie du swap rattachée au taux d'intérêt domestique ( $V^d$ ), ensuite nous procédons à déterminer celle rattachée au taux d'intérêt étranger ( $V^f$ ).

---

<sup>18</sup> Le lemme 4 de CIR stipule que le prix d'équilibre d'un actif est donné par sa valeur anticipée actualisée au taux sans risque.

### 1. Détermination de $V^d$ (la valeur des paiements domestiques):

Tout au long de notre développement, nous allons exposer le problème du point de vue d'un investisseur domestique. Soit l'intervalle de temps  $[t, T]$ ; au temps  $t_i \in [t, T]$ ; les paiements qui ont été déterminés en  $t_{i-1}$  sont échangés, et les paiements qui seront effectués en  $t_{i+1}$  sont déterminés. Soit  $V^d_i$ , la valeur actuelle au temps  $t$  d'un paiement d'intérêt domestique déterminée en  $t_i$ , on peut démontrer que  $V^d_i$  est la différence entre le prix de deux obligations à zéro coupons que multiplie le principal du swap  $P$ . En effet, si on note:

- $B_d(t, t_i)$  la valeur actuelle au temps  $t$  d'une obligation à zéro coupons venant à échéance en  $t_i$ .
- $r_0^d, r_1^d \dots r_i^d$  les taux d'intérêt utilisés respectivement aux temps:  $t, t_1$  et  $t_i$  pour déterminer les paiements en  $t_1, t_2$  et  $t_{i+1}$ .

Alors ayant:

$$B_d(t, t_i) = 1/(1+r_0^d)(1+r_1^d)\dots(1+r_{i-1}^d) \quad (3.12)$$

$$B_d(t, t_{i+1}) = 1/(1+r_0^d)(1+r_1^d)\dots(1+r_{i-1}^d)(1+r_i^d) \quad (3.13)$$

La relation entre le prix de deux obligations venant à échéance dans deux périodes successives  $t_i$  et  $t_{i+1}$  s'écrit:

$$B_d(t, t_{i+1}) = B_d(t, t_i)/(1+r_i^d) \quad (3.14)$$

ou encore:

$$r_i^d * B_d(t, t_{i+1}) = B_d(t, t_i) - B_d(t, t_{i+1}) \quad (3.15)$$

D'autre part, la valeur actualisée du paiement qui s'effectue en  $t_{i+1}$  et qui est déterminée en  $t_i$  est le principal multiplié par le taux d'intérêt domestique et actualisé sur la période  $[t, t_{i+1}]$ , cette valeur s'écrit:

$$V_i^d = P * r_i^d * B_d(t, t_{i+1}) \quad (3.16)$$

Les équations (3.15) et (3.16) nous donnent:

$$V_i^d = P[B_d(t, t_i) - B_d(t, t_{i+1})] \quad (3.17)$$

Ceci peut s'expliquer par le fait que pour la majorité des diff swaps, ce sont les taux Libor relatifs à la période suivante qui sont utilisés pour déterminer les paiements d'intérêt.

D'autre part,  $V^d$ : la somme des valeurs actuelles de tous les paiements d'intérêt domestiques futurs effectués jusqu'à la date d'échéance du swap, peut être décomposée en:

- $V_0^d$ , la VAN du paiement calculé en  $t_0$  et qui a lieu en  $t_1$
- $\sum_{i=1}^{n-1} V_i^d$ , la somme des VAN des paiements domestiques futurs calculés à partir de

l'instant  $t_1$  soit la première date d'échange effectif.

Ainsi, on a:

$$V^d = \sum_{i=0}^{n-1} V_i^d = V_0^d + \sum_{i=1}^{n-1} V_i^d \quad (3.18)$$

or,  $V_0^d$  étant le paiement qu'on détermine sur la base du taux courant domestique à la date de signature du swap:  $r_0^d$ , Nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} V_0^d &= PB_d(t, t) - PB_d(t, t_1) \\ &= PB_d(t, t_1) r_0^d \end{aligned} \quad (3.19)$$

En faisant la somme des paiements successifs jusqu'en T, on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} V_i^d &= PB_d(t, t_1) + PB_d(t, t_2) - PB_d(t, t_2) - PB_d(t, t_3) \\ &\quad + \dots + PB_d(t, t_{i-1}) - PB_d(t, T) \\ &= PB_d(t, t_1) - PB_d(t, T) \end{aligned} \quad (3.20)$$

En remplaçant  $V_0^d$  et  $V_i^d$  par leurs expressions respectives, on a:

$$\begin{aligned} V^d &= PB_d(t, t_1)r_0^d + PB_d(t, t_1) - PB_d(t, T) \\ V^d &= P[B_d(t, t_1)(1 + r_0^d) - B_d(t, T)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$r_0^d$  étant une donnée du marché, afin de déterminer  $V_d$ , il nous reste à développer la formule d'évaluation explicite du prix d'une obligation zéro coupon domestique, soit  $B_d$ , ce que nous détaillons dans les paragraphes qui suivent.

Tel qu'expliqué au départ, nous nous proposons d'utiliser le modèle de Hull et White pour la modélisation de la structure à terme des taux d'intérêt. Une des propriétés les plus intéressantes de ce modèle est qu'il permet d'écrire le prix d'obligations sans coupons analytiquement. D'une manière générale, partant d'un processus de taux d'intérêt qui s'écrit:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz \quad (3.22)$$

où:

- $\sigma$  représente la volatilité instantanée du processus de taux d'intérêt.

- $a$  représente son coefficient de retour à la moyenne, il est connu en  $t = 0$ .
- $\theta(t)$  est une fonction inconnue du temps qui permet au modèle d'être cohérent avec la structure à terme initiale.

Une approximation de  $\theta(t)$  est la pente de la courbe des taux à terme au temps 0, soit:

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (3.24)$$

Où:

- $F(t, T)$ : le taux à terme instantané au temps  $t$  d'un contrat venant à échéance en  $T$ .  $F_t$  est sa dérivée partielle par rapport à  $t$ .

Le prix au temps  $t$  d'une obligation zéro coupons est alors donné par:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r} \quad (3.25)$$

Avec

$$B(t, T) = 1/a[1 - e^{-a(T-t)}] \quad (3.26)$$

et

$$\log A(t, T) = \log[P(0, T)/P(0, t)] + B(t, T)F(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2 \quad (3.27)$$

Les éléments nécessaires à l'évaluation de la partie du diff swap rattachée au taux d'intérêt domestique sont donc:

- $t$  et  $T$ : respectivement la date d'évaluation et l'échéance du swap et qui sont directement observables sur le marché.
- $a$  et  $\sigma$  les paramètres de volatilité du processus des taux d'intérêt à court terme tels que décrits par Hull et White. L'estimation de ces deux paramètres est assez complexe et fera l'objet d'une section dans le prochain chapitre. Elle se fait cependant elle aussi, à partir de données de marché et ne nécessite pas d'autres développements mathématiques.

- $P(0,t)$  et  $P(0,T)$ : respectivement, les prix d'une obligation sans coupons qui arrivent à échéance en  $t$  et  $T$  sont directement extraits du marché.

Nous avons donc détaillé l'évaluation de la partie domestique du swap et l'avons réduite à des données que nous pouvons directement obtenir sur le marché.

## 2. Détermination de $V^f$ (la valeur des paiements étrangers):

Le problème se pose quand nous nous retournons vers la partie du swap reliée au taux étranger. En effet, la difficulté réside dans le fait que ces paiements périodiques sont déterminés selon le taux d'intérêt étranger, mais libellés en monnaie domestique. Afin de reproduire ces cash flows, un investisseur devra prendre position à la fois sur les obligations domestiques et étrangères, ce qui l'expose au risque de change. L'impact du taux de change apparaît dans la valeur actuelle des paiements d'intérêt rattachés au taux étranger. Si l'on définit  $r'_f$  comme le processus du taux sans risque étranger au pays domestique,  $CF_i$  la valeur actuelle des paiements d'intérêt déterminés au temps  $t_i$  (qui seront effectués au temps  $t_{i+1}$ ) est:

$$CF_i = P \left[ \frac{I}{E_{t_i}^d \left( \exp \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right] \right)} - I \right] \quad (3.28)$$

avec:

$E_{t_i}^d$  : Un opérateur d'anticipation basée sur l'information disponible au temps  $t_i$  dans l'économie domestique. Ainsi  $CF_i$  n'est autre que le prix au temps  $t_i$  d'une

obligation étrangère sans coupons qui paiera 1\$ en  $t_{i+1}$ , et  $\frac{1}{E_{t_i}^d \left[ \exp \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right]}$  est le

taux d'intérêt étranger sur une période du point de vue d'un investisseur domestique.

On calcule ensuite  $V_i^f$ : la valeur actuelle des cashs flows  $CF_i$  selon l'expression suivante:

$$V_i^f = E^d \left[ \exp \left( - \int_t^{t_i} r_d(s) ds \right) * E_{t_i}^d \left( \exp \left( - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds \right) \right) CF_i \right] \quad (3.29)$$

Il s'agit d'une actualisation en deux étapes: Premièrement, du moment que le paiement est effectué au temps  $t_{i+1}$  mais fixé au temps  $t_i$ , il faut l'actualiser au temps  $t_i$ . Deuxièmement, on actualise la valeur actuelle de  $CF_i$  en la ramenant du temps  $t_i$  au temps  $t$ .

Afin d'évaluer cette quantité, on a besoin d'écrire la forme explicite de  $r'_f$ . En vue de contourner cette difficulté, Wei démontre que l'on peut substituer  $r'_f$  par le processus de  $r_f$ : le taux d'intérêt sans risque étranger en utilisant une proposition qui permet de relier l'économie domestique à l'économie étrangère à travers le taux de change. Cette proposition s'énonce ainsi:

Si les taux d'intérêt domestique et étranger sont normalement distribués et que le taux de change possède une distribution lognormale alors:

$$\begin{aligned} & E_d \left[ \exp \left( \int_t^T r'_f(s) ds \right) \right] \\ &= E_f \left[ \exp \left( \int_t^T r_f(s) ds \right) \right] * \exp \left[ - \text{cov} \left( \int_t^T r_f(s) ds, \int_t^T \sigma_x dw_x(s) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

$\sigma_x$  et  $w_x(t)$  sont l'écart type et un processus de Wiener pour le taux de change X. En utilisant cette proposition et les propriétés d'une variable lognormale, il dérive une forme plus explicite de  $V_i^f$ , soit:

$$V_i^f = P \frac{B_d(t, t_{i+1}) B_f(t, t_i)}{B_f(t, t_{i+1})} \exp(-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8) - P B_d(t, t_{i+1}) \quad (3.31)$$

où  $B_f(t, t_i)$  est la contrepartie de  $B_d(t, t_i)$  et les termes  $a_i$  sont des fonctions des différents paramètres des processus des taux d'intérêt et du taux de change.

Du fait que nous avons opté pour une modélisation de la structure à terme des taux selon le modèle proposé par Hull et White, nous pouvons directement utiliser leur formulation explicite du taux  $r'_f$  pour déterminer  $V_i^f$  sans passer par la proposition susmentionnée: Ceci constitue en majeure partie l'originalité de notre modèle.

En effet, Hull et White écrivent ainsi le processus de  $r'_f$ :

$$d r'_f = [\theta_f(t) - \rho_x \sigma_f \sigma_x - a_f r'_f] dt + \sigma_f dz_f \quad (3.32)$$

Nous nous proposons donc de redériver l'équation (3.29) en utilisant le processus de  $r'_f$  afin d'aboutir à une forme analytique simple de  $V_i^f$  tout en utilisant le modèle de Hull et White. On pourra, par la suite, écrire  $V_f$ , la valeur actuelle de l'ensemble des paiements futurs basés sur le taux d'intérêt étranger comme:



$$V_f = \text{Pr}_f^0 B_d(t, t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} V_i^f \quad (3.33)$$

Avec  $r_f^0$ , le taux d'intérêt étranger utilisé pour déterminer le paiement en  $t_1$ .

La valeur actuelle du diff swap sera alors:

$$V = V_f - V_d - \left[ c(t_{i+1} - t_i) / 360 \right] * P \sum_{i=1}^n B_d(t, t_i) \quad (3.34)$$

où  $c$  est la valeur du taux annualisé du spread spécifié lors de la signature du contrat de swap et qui est due par l'investisseur domestique. En effet,  $c(t_{i+1} - t_i)/360$  serait alors le taux du spread correspondant à la période  $(t_{i+1} - t_i)$  et  $\left[ c(t_{i+1} - t_i)/360 \right] * P \sum_{i=1}^n B_d(t, t_i)$  serait la valeur en dollars du spread.

*Notre dérivation de  $V_i^f$  (Valeur des paiements étrangers):*

$r_f'$  étant le processus du taux étranger du point de vue d'un investisseur domestique, alors de manière similaire à la partie domestique du swap, la valeur actuelle du paiement déterminée en  $t_i$  (qui sera effectué en  $t_{i+1}$ ) s'écrit:

$$V_i^f = E^d \left[ \exp \left( - \int_t^{t_i} r_d(s) ds \right) E_{t_i}^d \left\{ \exp \left( - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds \right) \right\} P \left\{ \frac{1}{E_{t_i}^d \left\{ \exp \left( - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right) \right\}} - 1 \right\} \right] \quad (3.35)$$

Cette équation peut être réécrite ainsi:

$$V_i^f = PE^d \left[ \frac{\exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \right\}}{E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right) \right\}} \right] - PB_d(t, t_{i+1}) \quad (3.36)$$

Afin d'évaluer directement cette anticipation, on a besoin de formuler explicitement le processus de  $r_f'$ . Cox, Ingersoll et Ross (1985) montrent que d'une manière générale, si  $Z$  est la valeur d'une variable du point de vue d'un investisseur étranger et  $Z^*$  sa valeur du point de vue d'un investisseur domestique avec le processus de  $dZ$  s'écrivant:

$$dZ = \mu(Z)Zdt + \sigma(Z)Zdz$$

Alors, on a:

$$dZ^* = [\mu(Z^*) - \lambda\sigma(Z^*)]Z^*dt + \sigma(Z^*)Z^*dz \quad (3.37)$$

Où la prime de risque,  $\lambda$ , est fonction de  $Z^*$ .

En appliquant ce résultat au cas où la variable en question est le prix en monnaie étrangère d'une obligation étrangère ( $B_f$ ), on a alors:

$$dB_f = r_f B_f dt + \sigma_{B_f} B_f dz_f$$

Avec  $\sigma_{B_f}$  la volatilité de  $B_f$ . Si  $B_f'$  est le prix de l'obligation étrangère du point de vue d'un investisseur domestique, on a:

$$dB'_f = \left[ r'_f - \lambda \sigma_{B'_f} \right] dt + \sigma_{B'_f} B'_f dB'_f \quad (3.38)$$

D'autre part, le processus du point de vue d'un investisseur neutre au risque du taux de change X est:

$$dX = (r_f - r'_f)Xdt + \sigma_x X dx \quad (3.39)$$

Avec dx un processus de Wiener.

Si  $XP'$  est le prix en monnaie domestique de l'obligation étrangère, sa tendance dans un monde domestique neutre au risque devrait être  $r_d XP'$ . À partir des deux dernières équations, on peut démontrer que cette tendance est aussi égale à:

$$XP' (r_d - \lambda \sigma_p + \rho_x \sigma_x \sigma_p) \quad (3.40)$$

Il s'ensuit que:

$$\lambda = \rho_x \sigma_x \quad (3.41)$$

Ainsi, passer du point de vue d'un investisseur étranger neutre au risque, à celui d'un investisseur domestique neutre au risque entraîne un prix du marché d'ajustement au risque de  $\rho_x \sigma_x$ .

Si on applique ce résultat à la variable taux d'intérêt on a:

$$dr_f = [\theta_f(t) - ar_f]dt + \sigma_f dp \quad (3.42)$$

et

$$dr'_f = [\theta_f(t) - \rho_x \sigma_f \sigma_x - ar_f]dt + \sigma_f dp \quad (3.43)$$

On a donc écrit explicitement les processus de  $r_d$ ,  $r_f$  et  $r_f'$ . Notons que la distribution jointe de  $r_d$  et  $r_f'$  est une loi normale bivariée, puisque les deux processus suivent des lois normales.

$$\text{D'autre part l'expression: } \left[ \frac{\exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \right\}}{E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right) \right\}} \right]. \quad (3.44)$$

suit une loi Lognormale trivariée puisqu'elle peut être exprimée sous forme d'exponentielles dont l'argument est une fonction linéaire des taux d'intérêt au temps  $t$ ; qui, eux, sont normalement distribués.

En utilisant les propriétés suivantes d'une loi lognormale:

$$\begin{aligned} E[e^x] &= \exp\left(E(x) + \frac{\text{var}(x)}{2}\right); \\ E[e^y] &= \exp\left(E(y) + \frac{\text{var}(y)}{2}\right); \\ E[e^{x+y}] &= E[e^x]E[e^y]e^{\text{cov}(x,y)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

On peut démontrer que:

$$V_i^f = P \frac{B_d(t, t_{i+1}) B_{f'}(t, t_i)}{B_{f'}(t, t_{i+1})} \exp(-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6) - P B_d(t, t_{i+1}) \quad (3.46)$$

Où  $B_{f'}$  est le prix d'une obligation étrangère du point de vue d'un investisseur domestique et les  $a_i$  des termes de covariance:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \text{cov} \left( - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right) = - \text{cov} \left( - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds, - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right) \\
&= - \frac{\sigma_d \sigma_f \rho_{df}}{a_d a_f} \left[ (t_{i+1} - t_i) - \frac{1}{a_d} \left( 1 - e^{-a_d(t_{i+1}-t_i)} \right) - \frac{1}{a_f} \left( 1 - e^{-a_f(t_{i+1}-t_i)} \right) \right] \\
&\quad \left[ + \frac{1}{a_d + a_f} \left( 1 - e^{-(a_d + a_f)(t_{i+1}-t_i)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$a_2 = \text{var} \left( - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right) = \frac{\sigma_f^2}{a_f^2} \left[ (t_{i+1} - t_i) - \frac{2}{a_f} \left( 1 - e^{-a_f(t_{i+1}-t_i)} \right) + \frac{1}{2a_f} \left( 1 - e^{-2a_f(t_{i+1}-t_i)} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= \text{cov} \left( - \int_t^{t_i} r'_f(s) ds, - \int_t^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right); \\
&= \frac{\sigma_f^2}{a_f^2} \left[ (t_i - t) - \frac{1}{a_f} \left( e^{-a_f(t_{i+1}-t_i)} - e^{-a_f(t_{i+1}-t)} \right) - \frac{1}{a_f} \left( 1 - e^{-a_f(t_i-t)} \right) \right] \\
&\quad \left[ + \frac{1}{2a_f} \left( e^{-a_f(t_{i+1}-t_i)} - e^{-a_f(t_{i+1}+t_i-2t)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \text{cov} \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds, - \int_t^{t_i} r'_f(s) ds \right); \\
&= \frac{\sigma_d \sigma_f \rho_{df}}{a_d a_f} \left[ (t_i - t) - \frac{1}{a_d} \left( e^{-a_d(t_{i+1}-t_i)} - e^{-a_d(t_{i+1}-t)} \right) - \frac{1}{a_f} \left( 1 - e^{-a_f(t_i-t)} \right) \right] \\
&\quad \left[ + \frac{1}{a_d + a_f} \left( e^{-a_d(t_{i+1}-t_i)} - e^{-a_d(t_{i+1}-t) - a_f(t_i-t)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 &= \text{cov} \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds, - \int_t^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right); \\
&= \frac{\sigma_d \sigma_f \rho_{df}}{a_d a_f} \left[ (t_{i+1} - t) - \frac{1}{a_d} \left( 1 - e^{-a_d(t_{i+1}-t)} \right) - \frac{1}{a_f} \left( 1 - e^{-a_f(t_{i+1}-t)} \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{a_d + a_f} \left( 1 - e^{-(a_d + a_f)(t_{i+1}-t)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_6 &= \text{var} \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right) \\
 &= \frac{\sigma_f^2}{a_f^2} \left[ (t_{i+1} - t) - \frac{2}{a_f} (1 - e^{-a_f(t_{i+1}-t)}) + \frac{1}{2a_f} (1 - e^{-2a_f(t_{i+1}-t)}) \right]
 \end{aligned}$$

Il ressort de l'expression de  $V_f^i$  donnée par l'équation (3.46) que l'on a besoin de déterminer analytiquement: 1/ le prix d'une obligation domestique:  $B_d(t_1, t_2)$  et 2/ le prix d'une obligation étrangère du point de vue d'un investisseur domestique:  $B_f'(t_1, t_2)$ .

L'expression de  $B_d(t_1, t_2)$  a déjà été donnée au chapitre 3 au paragraphe 3.2.1. C'est celle de  $B_f'(t_1, t_2)$  qui pose un problème puisque l'on ne possède pas sa forme explicite. Dans le paragraphe qui suit nous exposerons sa dérivation détaillée.

*Dérivation du prix d'une obligation étrangère du point de vue d'un investisseur domestique:*

L'équation différentielle partielle qui décrit le prix d'une obligation sans coupons lorsque le taux d'intérêt suit le processus suivant:

$$dr = [\theta(t) + u - ar]dt + \sigma dz \quad (3.47)$$

est:

$$f_t + [\theta(t) + u - ar]f_r + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{rr} - rf = 0 \quad (3.48)$$

Une solution de cette équation est de la forme:

$$f = A(t, T)e^{-B(t, T)r - C(t, T)u} \quad (3.49)$$

Avec:

$$\begin{cases} B_t - aB + 1 = 0 \\ C_t + B = 0 \\ A_t - \theta(t)AB + \frac{1}{2}\sigma^2 AB^2 = 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

La solution de ce système d'équations qui satisfait les conditions de borne:  $B(t, t) = 0$ ,  $C(t, t) = 0$  et  $A(T, T) = 1$  est:

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{1}{a} \left[ 1 - e^{-a(T-t)} \right] \\ C(t, T) &= \frac{1}{a} (T - t) + \frac{1}{a^2} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{a^2} \\ \text{Log}A(t, T) &= \text{Log} \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T)F(0, T) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B(t, T)^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

En appliquant ce résultat à notre processus particulier soit:

$$dr'_f = \left[ \theta_f(t) - \rho_x \sigma_f \sigma_x - ar'_f \right] dt + \sigma_f dz \quad (3.52)$$

On obtient le prix  $P'_f$  d'une obligation étrangère du point de vue d'un investisseur domestique ainsi:

$$P'_f(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r + C(t, T)\rho_x \sigma_f \sigma_x} \quad (3.53)$$

Avec:

$$C(t, T) = \frac{1}{a_f}(T - t) + \frac{1}{a_f^2}e^{-a_f(T-t)} - \frac{1}{a_f^2}$$

$$B(t, T) = \frac{1}{a_f} \left[ 1 - e^{-a_f(T-t)} \right]$$

$$\text{Log}A(t, T) = \text{Log} \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T)F(0, T) - \frac{\sigma_f^2}{4a_f}(1 - e^{-2a_f t})B(t, T)^2 \quad (3.54)$$

Ainsi, nous avons dérivé chacune des différentes valeurs de notre modèle et réduit la valeur du diff swap à une formule analytique qui dépend uniquement de paramètres qu'on peut directement extraire du marché. Les modalités d'extraction de ces paramètres ainsi que la validation empirique du modèle analytique font l'objet des deux prochains chapitres.



### C. RÉCAPITULATION:

Ainsi, on a détaillé dans les sections précédentes comment déterminer les valeurs respectives des deux jambes du diff swap. La valeur de la jambe domestique s'écrit:

$$V^d = P[B_d(t, t_1)(1 + r^d_0) - B_d(t, T)] \quad (3.55)$$

Celle de la jambe étrangère s'écrit:

$$V_f = Pr_f^0 B_d(t, t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} V_i^f \quad (3.56)$$

et la valeur du diff swap est:

$$V = V_f - V_d - [c(t_{i+1} - t_i) / 360] * P \sum_{i=1}^n B_d(t, t_i) \quad (3.57)$$

Ce modèle nous permet d'évaluer:

- la valeur de  $c$ , la marge payée par l'acheteur du swap, si on choisit  $t$  comme sa date d'initiation. Celle-ci sera la valeur qui annule la valeur du swap. Nous avons alors:

$$\hat{c} = \frac{(V_f - V_d) * 360}{P \sum_{i=1}^n B_d(t, t_i) * (t_{i+1} - t_i)} \quad (3.58)$$

- La valeur du swap en tout instant  $t$  autre que sa date d'initiation. Pour cela, il faut avoir déterminé au préalable la valeur de  $c$  qui sera constante tout au long de la vie du swap.

Notre modèle ainsi dérivé, nous pouvons évaluer son apport en comparant ses résultats empiriques à ceux obtenus par la procédure numérique mise en place par Hull et White en 1994. C'est ce que nous nous proposons de faire dans les prochains chapitres.

## IV. LA DESCRIPTION DES MODÈLES:

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'exposer pour chacun des deux modèles que nous avons à tester, le type de données utilisées, la procédure d'estimation de certains paramètres, et le choix de certains autres. En effet, certaines variables sont directement observées sur le marché, telles que le montant principal et l'échéance du swap, le taux d'intérêt à court terme prévalant au moment de l'initiation de celui-ci... D'autres ne le sont pas, à savoir les volatilités des taux d'intérêt domestique et étranger, celle du taux de change, les corrélations entre ces instruments... Nous devons donc procéder à des estimations, en utilisant des données de marché afin de s'assurer que l'on ne s'éloigne pas de la réalité.

Ce chapitre se compose principalement de deux parties: Dans la première, nous traitons du modèle analytique et de l'estimation des paramètres et variables qui en découlent. Dans la deuxième, nous nous retournons vers la méthodologie de construction de l'arbre à la Hull et White (1994) pour la détailler et en dégager les principales étapes.

## A. LE MODÈLE ANALYTIQUE:

La forme générale de notre modèle est la suivante:

$$V = V_f - V_d - \left[ c(t_{i+1} - t_i) / 360 \right] * P \sum_{i=1}^n B_d(t, t_i) \quad (4.1)$$

Avec  $t$  la date de l'évaluation du swap.

Il diffère du modèle proposé par Wei (1994) sur deux points:

- Dans notre modèle, l'expression de  $B_d(t, T)$  est donnée par le modèle de Hull et White et non pas selon le modèle de Vasicek. Le modèle de Hull et White présente l'avantage de tenir compte de la structure à terme initiale des taux d'intérêt.
- Dans notre modèle, le processus du taux d'intérêt étranger du point de vue d'un investisseur domestique est donné explicitement. Wei démontre quant à lui une proposition qui lui permet de substituer le processus du taux étranger du point de vue d'un investisseur domestique par celui du taux étranger du point de vue d'un investisseur étranger.

Dans ce qui suit, nous présenterons les principales variables de notre modèle ainsi que les procédures d'estimation choisies pour chacune d'elles.

### 1. L'évaluation de $V_d$ :

Reprenons l'équation de  $V_d$  telle qu'elle a été dérivée au chapitre 2, soit:

$$V^d = P[B_d(t, t_1)(1 + r^d_0) - B_d(t, T)] \quad (4.2)$$

Avec :

- $t$ , la date de l'évaluation du swap.
- $r^d_0$ , le taux d'intérêt à court terme prévalant en  $t$ .
- $T$ , l'échéance du swap.

Nous pouvons déduire de cette équation que pour déterminer la valeur de cette partie du diff swap, on a besoin de connaître  $P$ ,  $B_d$  et  $r^d_0$ .  $P$  n'est autre que le montant principal du diff swap qui est donc donné par les clauses du contrat.  $r^d_0$  est le taux d'intérêt à court terme en vigueur au moment de l'initiation du swap. La détermination de  $B_d$  est quant à elle un peu plus complexe.

Comme nous l'avons vu, on se propose d'utiliser le modèle de Hull et White pour la modélisation de la structure à terme des taux d'intérêt. D'après leur modélisation du taux à court terme et en utilisant un argument d'arbitrage, ils démontrent que le prix d'une obligation nationale à coupons détachés s'écrit:

$$B_d(t, T) = A_d(t, T) \exp(D_d(t, T) r_d(t)) \quad (4.3)$$

où:

- $A_d$  est le terme qui permet de relier le prix de l'obligation nationale à coupons détachés à la structure à terme des taux d'intérêt observée. Sa formule explicite est:

$$\log A_d(t, T) = \log[B_d(0, T)/B_d(0, t)] + D_d(t, T)F(0, t) - \frac{\sigma_d^2}{4a_d} (1 - e^{-2a_d t}) D_d(t, T)^2$$

- $D$  est défini comme égal à :  $\frac{1 - \exp(-a_d(T - t))}{a_d}$ .

Pour évaluer le prix d'une obligation domestique analytiquement, nous avons besoin de déterminer les valeurs de  $a_d$  et  $\sigma_d$  sur le marché. En effet, le modèle de Hull et White utilise deux paramètres de volatilité: Le premier:  $\sigma_d$ , qui détermine le niveau global de la volatilité et le deuxième: Le taux de retour à la moyenne (*reversion level*),  $a_d$ , qui détermine les volatilités relatives des taux à court et long terme.

La procédure que Hull et White proposent pour calibrer leur arbre est celle de la volatilité implicite: c'est-à-dire la volatilité qui découle du prix d'une option observé sur le marché. Il s'agit en fait, de dériver les volatilités qui sont implicites aux prix actuels des options en prenant comme hypothèse que les investisseurs sur le marché se comportent comme s'ils évaluaient les options sur obligations selon le modèle de Hull et White. Nous avons envisagé trois méthodes différentes:

#### *a) Méthode analytique de détermination des volatilités:*

Il s'agit d'utiliser une procédure d'optimisation qui permet de minimiser, selon les deux paramètres  $a$  et  $\sigma$ , l'écart entre les prix marchands des options et leurs prix donnés par le modèle. On cherche donc à déterminer  $a$  et  $\sigma$  qui minimisent la fonction  $\sum (P_i - V_i)^2$  avec  $P_i$  le prix sur le marché de la  $i^{\text{ème}}$  option et  $V_i$  le prix donné par le modèle de cette même option. Les prix d'options sur obligations à coupons détachés étant des instruments très peu liquides, on peut utiliser les prix marchands des caps de taux d'intérêt qui eux sont beaucoup plus faciles à obtenir. En effet les caps sont des options activement négociées qui sont particulièrement appropriées à cet objectif d'autant plus qu'on peut démontrer qu'un cap est équivalent à un portefeuille d'options de ventes européennes sur obligations à coupons détachés. Ayant la formule analytique qui nous permet d'évaluer une option de vente européenne sur obligations à zéro coupons lorsque les taux d'intérêt suivent un processus stochastique décrit par le modèle de Hull et

White, on peut confronter les prix marchands des caps à leurs prix analytiques et en déduire les volatilités du processus soit  $a$  et  $\sigma$ . Cette méthode possède cependant des inconvénients très contraignants. Il s'agit, en effet, d'un problème de minimisation selon deux paramètres d'une fonction non linéaire, ce qui peut conduire à des solutions non convergentes ou simplement à une absence de solutions. Hull et White eux-même n'évoquent pas le recours à ce genre de méthodes. Ces derniers choisissent d'ailleurs les valeurs des paramètres de volatilité de manière tout à fait arbitraire, en suggérant que ça correspond approximativement à la structure à terme américaine. Ayant à décrire la structure des taux d'intérêt de plusieurs pays à la fois, on ne peut se contenter de ce genre de suggestions. Nous avons donc été dans l'obligation de trouver une méthode simple à mettre en place mais en même temps efficace.

#### ***b) Méthode de grille:***

C'est une méthode qu'on peut traiter d'"archaïque" mais qui nous a apparue comme la plus appropriée pour résoudre notre problème. Elle ne requiert ni logiciel d'optimisation sophistiqué, ni programmes d'itérations. Il s'agit tout simplement de prendre différentes valeurs de  $a$  et de  $\sigma$  et de procéder aux calculs des valeurs de l'option correspondantes. Les valeurs retenues sont celles qui nous rapprochent le plus de la valeur marchande observée. Si on l'appelle méthode de grille, c'est parce qu'on peut concevoir que nos deux paramètres  $a$  et  $\sigma$  se déplacent sur une grille dont on a fixé le pas de variation.

Hull et White suggèrent que  $a$  varie entre 1% et 10% tandis que  $\sigma$  varie entre 1 et 2%. Ceci nous permet de réduire notre intervalle sur la grille pour les deux paramètres. Nous avons choisi de faire varier  $a$  d'un pas de 1% et  $\sigma$  de 0.1%. Voici à titre d'exemple, comment fonctionne la grille:

a/σ	1.0%	1.2%	1.4%	1.6%	1.8%	1.9%
1%	0.354	0.426	0.498	0.569	0.641	0.713
2%	0.350	0.422	0.493	0.564	0.635	0.706
3%	0.347	0.417	0.488	0.558	0.628	0.699
4%	0.343	0.413	0.483	0.552	0.622	0.692
5%	0.340	0.409	0.478	0.547	0.616	0.685
6%	0.337	0.405	0.473	0.541	0.610	0.678
7%	0.333	<b>0.401</b>	0.468	0.536	0.603	0.671
8%	0.330	0.397	0.464	0.531	0.597	0.664
9%	0.326	0.393	0.459	0.525	0.591	0.658
10%	0.323	0.389	0.454	0.520	0.585	0.651

Le prix marchand d'une option d'achat sur contrat à terme sur Libor 3 mois de maturité 1 an obtenu sur le marché étant de 0.400, on peut en conclure que les deux paramètres de volatilité du Libor/FF sont de l'ordre de 7% pour  $a$  et de 1.2% pour  $\sigma$ .

## 2. L'évaluation de $V_f$ :

Telle que dérivée au paragraphe 3.2.2, la valeur de la partie étrangère du diff swap s'écrit:

$$V_f = Pr_f^0 B_d(t, t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} V_i^f \quad (4.4)$$

Avec  $V_i^f$  la valeur actuelle du paiement déterminé en  $t_i$  et qui sera effectué en  $t_{i+1}$ .

$$V_i^f = P \frac{B_d(t, t_{i+1}) B_f'(t, t_i)}{B_f'(t, t_{i+1})} \exp(-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6) - P B_d(t, t_{i+1}) \quad (4.5)$$

Et les  $a_i$  des termes de variance et de covariance entre les processus des taux d'intérêt domestique et étranger du point de vue d'un investisseur domestique.



Il ressort de ces formules, qu'afin d'évaluer la partie étrangère du swap, on a besoin d'extraire du marché les données suivantes:

- Les deux termes de volatilité du processus de taux d'intérêt étranger:  $\alpha_f$  et  $\sigma_f$ .
- $\rho_{df}$ : La corrélation entre les deux processus de taux d'intérêt, domestique et étranger.
- La volatilité du taux de change, soit  $\sigma_x$ .
- La corrélation taux de change, taux d'intérêt étranger:  $\rho_x$ .

D'autre part, contrairement à la partie domestique du swap où il suffit de déterminer le prix d'une obligation domestique, soit  $B_d(t, T)$ , dans le cas de la partie étrangère, nous sommes obligés de calculer à chaque date de détermination de paiement  $t_i$ , les valeurs des obligations  $B_d(t, t_i)$ ,  $B'_f(t, t_i)$  et  $B_d(t, t_{i+1})$  afin de pouvoir faire la somme des  $V_i^f$  et obtenir  $V_f$ .

**a) *Détermination des termes de volatilité du processus de taux d'intérêt:***

Ce volet est traité exactement de la même manière que l'estimation des volatilités du processus de taux d'intérêt domestique.

**b) *Détermination de la volatilité du processus de taux de change:***

Nous avons opté pour la détermination d'une manière implicite de la volatilité des taux de change. Pour cela, il nous faudra confronter les prix marchands des options sur taux de change à ceux donnés par un modèle analytique en supposant implicitement que les investisseurs utilisent ce modèle pour évaluer ce

type d'options. On déterminera donc le niveau de volatilité qui permet d'avoir un écart minimum entre ces deux prix.

### c) *Le problème des corrélations:*

La corrélation entre les deux taux d'intérêt: domestique et étranger ainsi que celle entre le taux de change et le taux d'intérêt étranger apparaît comme cruciale dans l'évaluation de la partie étrangère du diff swap. Afin d'éviter de sérieux problèmes d'évaluation, une bonne estimation de ces corrélations est importante.

D'une manière générale les prix des produits dérivés ne sont pas toujours disponibles et la corrélation doit être estimée à partir de données historiques. En effet, en l'absence de corrélations implicites tirées du marché d'options activement transigées, il est raisonnable de supposer que la meilleure estimation de la corrélation relative à la vie du produit dérivé est la corrélation actuelle, qui, elle, est estimée à partir de données historiques. La majorité des modèles d'évaluation de produits dérivés supposent que les variables de marché sous-jacentes ont une distribution conjointe lognormale ce qui est aussi le cas pour notre modèle d'évaluation des diff-swaps. La corrélation entre le Log du rendement de deux variables A et B sur un intervalle de temps,  $\Delta t$  est définie comme:

$$\rho = \frac{E[(u - E[u])(v - E[v])]}{\sigma_A \sigma_B \Delta t} \quad (4.7)$$

Avec:

$$\begin{aligned} u &= \ln\left(\frac{A(t + \Delta t)}{A(t)}\right) \\ v &= \ln\left(\frac{B(t + \Delta t)}{B(t)}\right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$\sigma_A$  et  $\sigma_B$  sont les volatilités respectives de A et B, et  $E[\cdot]$  est un opérateur d'espérance.

Ainsi, pour déterminer la corrélation entre le taux de change et le taux d'intérêt étranger on pose: A: Le taux de change et B: Le taux d'intérêt étranger.

D'autre part, pour déterminer la corrélation entre les deux taux d'intérêt domestique et étranger, on pose: A: Le taux d'intérêt domestique et B: Le taux d'intérêt étranger.

## **B. LE MODÈLE NUMÉRIQUE:**

Hull et white présentent leur nouvelle méthodologie de 1994 comme étant relativement "simple", beaucoup plus efficace que toutes les procédures proposées précédemment et permettant une évaluation plus correcte. Dans leur deuxième article de 1994, ils montrent de quelle manière cette procédure peut être utilisée afin de modéliser les structures à terme des taux d'intérêt de deux pays respectivement. Ils commencent par construire deux arbres, qu'on appellera "arbres de base" décrivant chacun une structure par pays. Ils les ajustent ensuite de manière à ce qu'ils reflètent tous les deux le point de vue d'un investisseur neutre au risque du pays dans la monnaie duquel les cash flows sont réalisés. Enfin, ils combinent les deux arbres et introduisent un niveau de corrélation entre les deux taux d'intérêt approprié en ajustant les probabilités des branches émanant de chaque noeud de l'arbre.

Nous avons procédé à la mise en place d'un programme informatique. Il nous permet de construire ces arbres pour différentes valeurs de nos variables et de calculer la marge appliquée à un swap différentiel correspondant, et ce selon la méthodologie que nous détaillons dans la suite de ce chapitre. Pour cela, nous avons eu recours au logiciel GAUSS.

Dans ce qui suit, nous commençons dans une première partie par exposer en détail la méthodologie de construction d'un arbre décrivant la structure à terme. Dans une deuxième partie, nous détaillons les méthodologies respectivement d'ajustement et de combinaison des deux arbres.

### 1. Construction de l'arbre de base:

En 1993, Hull et White présentent une procédure de construction d'un arbre trinomial qui décrit les mouvements de  $r$ : le taux d'intérêt à court terme. Ce dernier est défini comme le taux de rendement annuel composé d'une obligation à coupons détachés venant à échéance dans  $\Delta t$  périodes. Les valeurs de  $t$  s'écrivent donc  $i\Delta t$  où  $i$  est un entier positif et  $\Delta t$  une variation donnée de la variable  $t$ . Ils considèrent à la fin de chaque pas de temps des valeurs de  $r$  de la forme:  $r_0 + k\Delta r$  où  $k$  est un entier positif ou négatif,  $r_0$  est la valeur courante de  $r$  et  $\Delta r$  est une variation donnée des taux d'intérêt. Les travaux théoriques sur les procédures numériques suggèrent qu'un bon choix de  $\Delta r$  du point de vue de la minimisation d'erreur est:

$$\Delta r = \sqrt{3V}.$$

Dans leur article de 1994, Hull et White améliorent cette procédure. Ils arrangent la géométrie de l'arbre de manière à ce que le noeud central corresponde toujours à la valeur anticipée de  $r$ . Afin de simplifier leur procédure, ils décomposent la construction de l'arbre en deux étapes:

#### a) *Construction d'un arbre préliminaire avec $\theta(t)=0$ et $r_0=0$ :*

Le processus de  $r^{*19}$  s'écrit alors:

---

<sup>19</sup> Dans un but de construction de l'arbre, on définit  $r$  comme le taux composé continu de  $\Delta t$  périodes.

$$dr^* = -ar^* dt + \sigma dz \quad (4.9)$$

Dans ce processus,  $r(t+\Delta t) - r(t)$  suit une distribution normale avec  $r(t)M$  sa valeur anticipée et  $V$  sa variance. On commence par choisir le pas de temps à savoir  $\Delta t$ . Ensuite, on détermine un pas  $\Delta r$  approprié pour le taux d'intérêt sur l'arbre. Soit  $(i, j)$  le noeud pour lequel on a  $t = i\Delta t$  et  $r = j\Delta r$  où  $j$  est le nombre de hausses préalables moins le nombre de baisses préalables. Soit  $p_u, p_m, p_d$  les probabilités des branches émanant de chaque noeud et décrivant respectivement une hausse, un non changement et une baisse du taux d'intérêt. Les probabilités sont choisies de manière à décrire la variation anticipée de  $r$  et sa variance sur l'intervalle de temps  $\Delta t$  suivant et telle que leur somme soit égale à 1. Ceci nous amène à un système de trois équations à trois inconnues. Lorsque  $r$  se trouve au noeud  $(i, j)$  la variation anticipée sur l'intervalle de temps  $\Delta t$  suivant est  $j\Delta rM$ , et sa variance est  $V$ .

Comme on l'avait déjà sommairement exposé dans notre revue de la littérature, si la géométrie des branches du noeud  $(i, j)$  est de la forme A alors la solution du système d'équations est:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{j^2 M^2 + jM}{2}$$

$$p_m = \frac{2}{3} - j^2 M^2$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{j^2 M^2 - jM}{2}$$

Si c'est de la forme B alors la solution du système d'équations est:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{j^2 M^2 - jM}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - j^2 M^2 + 2jM$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{j^2 M^2 - 3jM}{2}$$

Si c'est de la forme C alors la solution du système d'équations est:

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{j^2 M^2 + 3jM}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - \frac{j^2 M^2 - 2jM}{2}$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{j^2 M^2 + jM}{2}$$

Dans la majorité des cas c'est la forme A des branches qui est appropriée. Toutefois, lorsque  $a$  est positif et  $j$  très large, il est nécessaire de remplacer la forme A par la forme C afin de s'assurer que les probabilités,  $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$ , restent positives. De même, il est nécessaire de remplacer la forme A par la forme B lorsque  $j$  est négatif et grand en valeur absolue. Soit  $j_{\max}$  la valeur de  $j$  à laquelle on remplace la forme A par la forme C et  $j_{\min}$  la valeur à laquelle on remplace la forme A par la forme B. On peut démontrer qu'afin que les probabilités  $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$  demeurent positives  $j_{\max}$  doit être un entier appartenant à l'intervalle  $-0.184/M$  et  $-0.816/M^{20}$ . Hull et White conseillent de poser  $j_{\max}$  égal au plus faible entier supérieur à  $-0.184/M$  et  $j_{\min}$  égale à  $-j_{\max}$ . Ceci termine la construction de l'arbre pour le processus simplifié. La prochaine étape consiste à introduire la tendance  $\theta(t)$  appropriée. En effet, la différence entre les processus  $r$  et  $r^*$  est une fonction du temps qu'on peut poser comme:

$$x(t) = r(t) - r^*(t) \quad (4.10)$$

Il s'agit de la distance entre deux noeuds comparables sur les deux arbres respectifs de  $r$  et  $r^*$  à un instant  $t$ . En particulier, c'est la distance entre les noeuds centraux ou encore les valeurs anticipées de  $r$  et  $r^*$  au temps  $t$ . La valeur anticipée de  $r^*$  étant nulle,  $x(t)$  peut être considérée comme la valeur anticipée de  $r(t)$ . Comme le

<sup>20</sup> Il est à noter que lorsque  $a > 0$  alors  $M < 0$ .

remarquent Kijima et Nagayama (1994),  $x(t)$  peut être calculée analytiquement de la manière suivante :

Ayant:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \theta(t) - a\alpha(t) \quad (4.11)$$

Où:

$$x(t) = \exp \left\{ -at \left[ r(0) + \int_0^t \theta(q) e^{aq} dq \right] \right\} \quad (4.12)$$

en substituant  $\theta(t)$  par son expression analytique, on obtient:

$$x(t) = F(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2(1 - e^{-at})^2} \quad (4.13)$$

L'utilisation de la forme analytique de  $x(t)$  pour déterminer les noeuds centraux sur l'arbre permet d'éviter le recours à la méthode itérative plus lourde et plus compliquée. Toutefois, l'arbre qui en résulte ne permet pas de réaliser un calibrage exact des données de marché. Ceci, car l'arbre n'est rien d'autre qu'une représentation en temps discret du processus stochastique sous-jacent. L'avantage de la procédure itérative est de permettre la réplique exacte par l'arbre lui-même de la structure à terme des taux d'intérêt. Ceci nous a poussé à choisir la deuxième méthode même si son implantation est beaucoup plus complexe. On explicite cette méthode dans le paragraphe suivant.

### ***b) Introduction de $\theta(t)$ :***

Pour ce faire, on déplace les noeuds aux temps  $i\Delta t$  d'une valeur  $\alpha_i$ . la valeur de  $r$  au noeud  $(i, j)$  sur le nouvel arbre est alors égale à la valeur de  $r$  au noeud  $(i, j)$  sur l'ancien arbre plus  $\alpha_i$ . Les probabilités sur l'arbre demeurent inchangées. Les valeurs

des  $\alpha_i$  sont choisies de manière à ce que l'arbre évalue toutes les obligations à zéro coupons, selon la structure à terme initiale des taux d'intérêt observée sur le marché. Le fait de déplacer l'arbre tel que présenté ci-dessus, modifie notre processus des taux d'intérêt qui de:

$$dr = -ardt + \sigma dz \quad (4.14)$$

passé à:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz \quad (4.15)$$

Ainsi l'arbre des taux est entièrement défini par la détermination du coefficient  $\theta$  à chaque période et par la connaissance des différents taux d'intérêt à chaque noeud ainsi que de leurs probabilités de réalisation respectives. Même si Hull et White dérivent analytiquement la valeur de  $\theta(t)$ , on préfère utiliser l'approche itérative décrite ci-dessous car elle permet d'obtenir un arbre qui décrit exactement la structure à terme observée.

Calcul itératif des paramètres  $\theta$  du processus de taux d'intérêt à court terme:

Posons  $\theta'(t)$  l'estimé de  $\theta$  donné par l'arbre entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . La tendance de  $r$  au temps  $i\Delta t$  au point médium de l'arbre est:  $\theta'(t) - a\alpha_i$ . On a alors:

$$[\theta'(t) - a\alpha_i]\Delta t = \alpha_i - \alpha_{i-1} \quad (4.16)$$

Ou encore:

$$\theta'(t) = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{\Delta t} + a\alpha_i \quad (4.17)$$

Cette équation permet de relier les  $\theta^{21}$  aux  $\alpha$ .

---

<sup>21</sup> Il n'est pas nécessaire de calculer les  $\theta$  ou  $\theta'$  pour pouvoir construire ou utiliser l'arbre.



Soit  $Q_{i,j}$ <sup>22</sup> la valeur actuelle d'un actif qui paie 1\$ si le noeud  $(i, j)$  est atteint et 0 sinon. La valeur de  $Q_{0,0}$  est 1. La valeur de  $\alpha_0$  est choisie de manière à donner le prix exact d'une obligation à zéro coupon de maturité  $\Delta t$ . En d'autres termes,  $\alpha_0$  prend la valeur du taux d'intérêt initial  $\Delta t$  périodes. D'une manière générale, si l'on suppose que les  $Q_{i,j}$  pour  $i \leq m$  ( $m \geq 0$ ) ont été déterminés, il nous reste à déterminer  $\alpha_m$  tel que, au temps 0, l'arbre évalue correctement une obligation à zéro coupons échéant en  $(m+1)\Delta t$ . Le taux d'intérêt au noeud  $(m, j)$  est  $\alpha_m + j\Delta r$  et le prix d'une obligation à zéro coupons de maturité  $(m+1)\Delta t$  est :

$$P(0, m+1) = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-(\alpha_m + j\Delta r)\Delta t] \quad (4.18)$$

Où  $n_m$  est le nombre de noeuds sur chaque côté autour du noeud central au temps  $m\Delta t$ . Les prix  $P(0, m+1)$  des obligations à coupons détachés pouvant être déterminés directement à partir de la structure à terme des taux d'intérêt observée, la solution de cette équation est :

$$\alpha_m = \frac{\text{Log} \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta r\Delta t} - \text{Log} P(0, m+1)}{\Delta t}$$

$$\text{Avec: } P(0, m+1) = e^{-r_{0,m+1}(m+1)\Delta t} \quad (4.19)$$

Une fois les  $\alpha_m$  déterminés, le  $Q_{i,j}$  pour  $i = m+1$  peut être calculé ainsi:

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta r)\Delta t] \quad (4.20)$$

<sup>22</sup> Ce sont les prix Arrow-Debreu.

Où  $q(k, j)$  est la probabilité de se déplacer du noeud  $(m, k)$  au noeud  $(m+1, j)$ , et on prend la somme sur toutes les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $q(k, j)$  est différent de zéro.

Ainsi, on calcule à chaque noeud le prix Arrow-Debreu  $Q_{m,j}$  et ce sont ces prix à une période donnée qui vont nous permettre de déterminer le  $\alpha_m$  correspondant, enfin, c'est le  $\alpha_m$  qui va nous permettre de calculer le prix Arrow-Debreu de la période suivante soit:  $Q_{m+1,j}$ .

## 2. Construction simultanée des deux arbres de base et leur combinaison:

La nature même du diff swap requiert la modélisation simultanée des deux structures à terme des taux d'intérêt dans les deux pays. Afin d'être plus clairs, supposons que les deux pays en question sont les USA et le Canada, et que les cash flows du diff swap sont réalisés en \$US. On commence par construire l'arbre des taux sur \$US à court terme ainsi que l'arbre des taux d'intérêt à court terme canadiens (CAD). La construction de ces deux arbres se fait selon la procédure décrite en détails dans le paragraphe ci-dessus. On obtient un arbre décrivant l'évolution des taux d'intérêt américains du point de vue d'un investisseur américain neutre au risque et un arbre décrivant l'évolution des taux d'intérêt canadiens du point de vue d'un investisseur canadien neutre au risque. Or, du moment que les cash flows sont réalisés en \$US, l'arbre canadien doit être ajusté de manière à refléter l'évolution des taux d'intérêt du point de vue d'un investisseur américain plutôt que celui d'un investisseur canadien.

On a déjà démontré que le processus du taux d'intérêt étranger du point de vue d'un investisseur domestique, soit  $r_f^*$  s'écrit ainsi:

$$dr'_f = [\theta_f(t) - \rho_x \sigma_f \sigma_x - a_f r'_f] dt + \sigma_f dz_f \quad (4.21)$$

Avec:

- $r'_f$ : Le taux d'intérêt canadien du point de vue d'un investisseur américain.
- $\sigma_f$ : La volatilité du taux d'intérêt étranger.
- $a_f$ : le niveau de retour à la moyenne .
- $\theta_f$ : Le paramètre de tendance.
- $X$ : Le taux de change (nombre de \$US par CAD).
- $\sigma_x$ : La volatilité du taux de change  $X$ .
- $\rho_x$ : Le coefficient de corrélation instantanée entre le taux de change ,  $X$ , et le taux d'intérêt canadien  $r_f$ .
- $\rho$ : Le coefficient de corrélation instantanée entre les taux d'intérêt américain et canadien.

L'effet de passer d'un monde canadien neutre au risque à un monde américain neutre au risque est donc de réduire la tendance de  $r_f$  de  $\rho_x \sigma_f \sigma_x$ . La valeur anticipée de  $r_f$  est réduite de :

$$\int_0^t \rho_x \sigma_x \sigma_f e^{-a_f(t-\tau)} d\tau = \frac{\rho_x \sigma_f \sigma_x}{a_f} (1 - e^{-a_f t}) \quad (4.22)$$

Afin d'ajuster l'arbre des taux canadiens pour qu'il reflète le point de vue d'un investisseur américain, les valeurs de  $r'_f$  aux noeuds correspondants au temps

$i\Delta t$  (i.e, après  $i$  pas des temps) doivent être réduites de:  $\frac{\rho_x \sigma_f \sigma_x}{a_f} (1 - e^{-a_f i \Delta t})$

a) ***Construction de l'arbre tridimensionnel en supposant une corrélation nulle:***

Le but de cette étape est de combiner des taux US et canadiens en supposant une corrélation nulle entre ces deux taux. Le résultat est un arbre tridimensionnel où 9 branches émanent de chaque noeud. La probabilité associée à chacune des neuf branches est le produit des probabilités inconditionnelles associées aux mouvements correspondants des deux taux d'intérêt à court terme.

Sur l'arbre tridimensionnel, il y a:

- Un noeud à l'instant 0.
- Neuf noeuds au temps  $\Delta t$ .
- 25 noeuds aux temps  $2\Delta t$  et  $3\Delta t$ ...

Le phénomène de retour à la moyenne ayant pour effet de réduire la vitesse à laquelle le nombre de noeuds sur l'arbre augmente, celui-ci se stabilise à 25 à partir de la deuxième période. A chaque noeud au temps  $i\Delta t$  de l'arbre tridimensionnel, correspond un noeud au temps  $i\Delta t$  de l'arbre des taux d'intérêt domestique et un noeud au temps  $i\Delta t$  de l'arbre des taux d'intérêt étranger ajusté. Soit XY le noeud sur l'arbre tridimensionnel qui correspond au noeud X de l'arbre domestique et au noeud Y de l'arbre étranger.

Notons:

- $(i, j)$ : Le noeud de l'arbre des taux domestique  $r_d$  au temps  $i\Delta t$  sur lequel,  $j$  est le nombre de hausses préalables moins le nombre de baisses préalables.
- $(i, k)$ : Le noeud de l'arbre des taux étrangers du point de vue d'un investisseur domestique  $r_f'$  au temps  $i\Delta t$  sur lequel  $k$  est le nombre de hausses préalables moins le nombre de baisses préalables.
- $r_d(i, j)$  la valeur de  $r_d$  au noeud  $(i, j)$  et  $r_f'(i, k)$  la valeur de  $r_f'$  au noeud  $(i, k)$ .

L'arbre tridimensionnel est une combinaison des deux arbres bidimensionnels. Au temps  $i\Delta t$  les noeuds sont notés  $(i, j, k)$  avec  $r_d = r_d(i, j)$  et  $r_f' = r_f'(i, k)$  pour tout  $j$  et  $k$ . Supposons que les probabilités associées aux branches émanant du noeud  $(i, j)$  d'une hausse, un non changement ou une baisse sur l'arbre des taux d'intérêt domestiques sont respectivement:  $p_u, p_m$  et  $p_d$ . De façon similaire, supposons que ces probabilités sur l'arbre des taux d'intérêt étrangers du point de vue d'un investisseur domestique sont:  $q_u, q_m$  et  $q_d$ .

Sur l'arbre tridimensionnel, neuf branches sont associées à chaque noeud  $(i, j, k)$ . Les probabilités associées à chacune des neuf branches sont données par le tableau suivant:

$r_f'$	$r_d$		
	Baisse	Inchangé	Hausse
Baisse	$p_d q_u$	$p_m q_u$	$p_u q_u$
Inchangé	$p_d q_m$	$p_m q_m$	$p_u q_m$
Hausse	$p_d q_d$	$p_m q_d$	$p_u q_d$

### *b) Introduction de la corrélation:*

Dans ce paragraphe, on envisagera le cas où la corrélation  $\rho_{df}$  entre les deux taux d'intérêt  $r_d$  et  $r_f'$  est non nulle.

- Cas où la corrélation est positive:

Dans ce cas, la géométrie de l'arbre demeure exactement la même, mais les probabilités devront être ajustées à :

$r_B$	$r_A$		
	Baisse	Inchangé	Hausse
Baisse	$p_d q_u - \varepsilon$	$p_m q_u - 4\varepsilon$	$p_u q_u + 5\varepsilon$
Inchangé	$p_d q_m - 4\varepsilon$	$p_m q_m + 8\varepsilon$	$p_u q_m - 4\varepsilon$
Hausse	$p_d q_d + 5\varepsilon$	$p_m q_d - 4\varepsilon$	$p_u q_d - \varepsilon$

Notons que la somme des ajustements sur chaque colonne et sur chaque ligne est égale à 0. Ainsi, les ajustements n'ont aucun effet sur la moyenne et la variance des mouvements inconditionnels de  $r_d$  et  $r_f'$ . Ils ont uniquement pour effet d'introduire une corrélation de  $36\varepsilon$  entre  $r_d$  et  $r_f'$  et la valeur appropriée de  $\varepsilon$  est alors  $\rho/36$ . Le choix des ajustements de probabilité est motivé par le fait qu'à la limite, lorsque  $\Delta t$  tend vers 0, les probabilités tendent vers  $p_u = q_u = 1/6$ ,  $p_m = q_m = 2/3$ , et  $p_d = q_d = 1/6$ . Lorsque la corrélation est de 1.0, la matrice des probabilités ajustées se présente comme suit:

$r_B$	$r_A$		
	Baisse	Inchangé	Hausse
Baisse	0	0	1/6
Inchangé	0	2/3	0
Hausse	1/6	0	0

Pour des niveaux de corrélation entre 0 et 1, la matrice d'ajustement est obtenue par interpolation entre la matrice pour une corrélation de 0 et celle pour une corrélation de 1.

### 3. Détermination de la valeur d'un diff swap:

La construction de l'arbre tridimensionnel telle que décrite dans les sections précédentes nous permet de déterminer à chaque noeud  $(i-1, j, k)$ :

- La probabilité d'atteindre le noeud  $(i, j^*, k^*)$ .

- Le différentiel de taux associé à ce noeud soit:  $r_f^* - r_d$ .

Nous pouvons calculer les prix des Arrow Debreu associés, selon la formule suivante:

$$Q(i, j, k) = \sum_{j^*, k^*} Q(i-1, j^*, k^*) q(j^*, k^*) e^{-r_d j^* \Delta t} \quad (4.23)$$

Avec:

- $Q(i-1, j^*, k^*)$ : Le prix Arrow Debreu associé au noeud  $(i-1, j^*, k^*)$ .
- $q(j^*, k^*)$ : la probabilité de transition du noeud  $(i-1, j^*, k^*)$  au noeud  $(i, j, k)$ .

La valeur actuelle nette de chaque paiement  $V_i$  survenant en  $t_i$  est alors ainsi déterminée:

$$V_i = \sum_{j, k} P Q(i, j, k) (r_f^* - r_d)_{(j, k)} \quad (4.24)$$

Avec:

- $P$ : le montant notionnel du swap.
- $(r_f^* - r_d)_{(j, k)}$  le différentiel de taux associé au noeud  $(i, j, k)$ .

Enfin,  $V$  la valeur du diff swap est:

$$V = e^{-\Delta t} \sum_i V_i \quad (4.25)$$

A ce stade, nous sommes en mesure de calculer les prix des diff swaps selon notre modèle et d'effectuer notre analyse comparative et de sensibilité qui feront l'objet du chapitre suivant.

## V. INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS:

Dans ce chapitre nous commençons par présenter nos données: celles obtenues directement sur le marché, ainsi que celles extraites à partir de ces dernières, et ce selon les différentes méthodologies présentées au chapitre précédent.

Par la suite, nous essayons d'interpréter les résultats obtenus avec les deux modèles développés tout au long de ce mémoire. Notre interprétation prend la forme d'une analyse comparative de nos deux modèles: analytique et numérique ainsi que de celui de Wei (1994).

Nous procédons enfin, à une analyse de sensibilité de chacun de nos deux modèles où nous examinons les questions suivantes:

- 1- L'importance de la corrélation entre les taux d'intérêt et les taux de change dans l'évaluation des diff swaps.
- 2- La sensibilité de chaque modèle aux paramètres de volatilité tels que présentés dans Hull et White, soit:  $a$  et  $\sigma$ .
- 3- L'importance de l'impact du différentiel observé actuellement sur la valeur d'un diff swap.



## **A. DESCRIPTION DES DONNÉES:**

### **1. Structure par échéance des taux zéro coupons:**

Nous avons choisi d'effectuer notre étude sur les quatre devises suivantes:

- \* Le dollar américain: USD.
- \* La livre britannique: GBP.
- \* Le mark allemand: DEM.
- \* Le yen japonais: JPY.

Ce choix est justifié par l'importance relative du volume des swaps différentiels négociés dans ces monnaies.

Nous avons dû extraire pour chacune de ces devises, la structure par échéance des taux zéro coupons ainsi que le prix des obligations sans coupons correspondantes. Nous pouvons rappeler ici, que ces prix sont importants pour notre modèle analytique comme pour la construction de l'arbre selon Hull et White (1994) puisqu'ils permettent au modèle d'être cohérent avec la structure par terme des taux, observée à l'heure de la signature du swap. Nous avons pu obtenir les taux suivants sur le marché:

1- Les taux des marchés monétaires des différentes devises susmentionnées pour les échéances inférieures ou égales à un an. Ainsi, on a pu obtenir les taux: 1 mois, 2 mois, 3 mois, 4 mois, 5 mois, 6 mois, 7 mois, 8 mois, 9 mois, 10 mois, 11 mois et 1 an.

2- Les taux des marchés swaps pour les échéances supérieures à une année, soit 2 ans, 3 ans ...

A partir de ces données, nous avons déterminé les taux sans coupons et les prix des obligations sans coupons pour les échéances suivantes: 1 mois, 2 mois, 3 mois, 4 mois, 5 mois, 6 mois, 7 mois, 8 mois, 9 mois, 10 mois, 11 mois, 12 mois, 1 an, 2 ans et 3 ans. Cependant, avec ces données, des prix pour des échéances telles que 13 mois, 14 mois etc. ne sont pas disponibles. Or pour la construction de l'arbre, notre pas de temps doit être d'au plus 1 mois et ce, non seulement pour des raisons d'exactitude des calculs, mais aussi parce que les paiements s'effectuent tous les trois mois. Pour résoudre ce problème, nous avons effectué des lissages exponentiels à partir des données de marché. Les résultats de ces lissages sont donnés par le tableau 5.1. Les taux ainsi que les prix des obligations sans coupons sont donnés par le tableau à l'annexe C.

*Tableau 5.1: structures à terme des taux zéro coupons*

<i>DEVISE</i>	<i>Lissage exponentiel</i>	<i>R<sup>2</sup></i>
<i>USD</i>	$r = 0.0538 \exp(0.01 t)$	0.7575
<i>DEM</i>	$r = 0.0297 \exp(0.0305 t)$	0.5799
<i>JPY</i>	$r = 0.0041 \exp(0.0911 t)$	0.7316
<i>GBP</i>	$r = 0.0595 \exp(0.0131 t)$	0.6251

## 2. Les paramètres de corrélation:

On ne saurait trop insister sur l'importance de l'estimation de la corrélation, paramètre qui tiendra un rôle important dans nos tests de sensibilité et l'analyse de nos résultats. En fait, deux paramètres sont à déterminer: La corrélation entre les deux taux d'intérêt et celle entre le taux de change et le taux d'intérêt étranger, soit respectivement:  $\rho_{df}$  et  $\rho_{fx}$ . Pour le premier, nous avons utilisé une base de données historique qui nous donne les taux Libors 3 mois quotidiens sur les différentes devises qui nous intéressent. L'échantillon d'observations s'étend du 2 janvier 1990 au 2 février 1996. Pour le second, nous avons dû joindre à celle des taux Libors,

une base de données décrivant les taux de change des différentes devises par rapport au \$US. Les taux de change sont les taux courants et quotidiens et la base de données s'étend du 1<sup>er</sup> mars 1993 au 15 mars 1996. La détermination des corrélations a été effectuée selon la méthodologie décrite au chapitre IV. Les résultats sont donnés par le tableau 5.2.

***Tableau 5.2: Les paramètres de corrélation***

DEVISE	$\rho$ ( Libor US / Libor devise)	$\rho$ ( Libor devise / TC)
DEM	1.2744%	0.1020%
YEN	0.3058%	-0.0238%
GBP	5.4224%	2.5146%

### 3. Les paramètres de volatilité $a$ et $\sigma$ :

Tel qu'expliqué dans le chapitre IV, nous avons eu recours à la méthode de la grille pour la détermination des volatilités implicites des taux d'intérêt. Les données que nous avons été chercher sur le marché sont les prix des options sur contrats à terme sur taux Libors pour les différentes devises étudiées. Les valeurs obtenues sont données par le tableau 5.3:

***Tableau 5.3: Paramètres de volatilité des taux Libors***

DEVISE	$a$	$\sigma$
USD	1.0%	1.4%
GBP	10%	2.0%
YEN	2.0%	1.2%
DEM	2.0%	1.6%

Nous avons aussi procédé à la détermination des paramètres de volatilité des taux de change selon la méthodologie expliquée au chapitre IV. Les résultats sont regroupés dans le tableau 5.4.

*Tableau 5.4: Paramètres de volatilité des taux de change*

DEVISE	$\sigma_x$
GBP	6.01%
YEN	8.21%
DEM	6.16%

## **B. FIABILITÉ DES RÉSULTATS ET ANALYSE COMPARATIVE :**

Avant de commencer les simulations et l'analyse de nos résultats, il est important de s'assurer que les valeurs données par les deux modèles que nous testons sont fiables. Ainsi notre analyse comparative se fait en deux étapes:

\* Dans la première, nous comparons les résultats de chacun de nos deux modèles aux valeurs marchandes de quelques diff swaps que nous avons réussi à avoir, ainsi qu'à celles données par le modèle de Wei (1994) pour les mêmes diff swaps.

\* Dans la deuxième, nous comparons les résultats de nos deux modèles entre eux et à ceux obtenus selon le modèle de Wei (1994) et nous tentons de dégager les raisons des différences éventuelles entre les trois.

### **1. Fiabilité des résultats:**

Les valeurs marchandes que nous avons pu obtenir étant peu nombreuses (voir tableau 5.5), nous avons préféré comparer nos résultats à ceux donnés par le modèle de Wei, en plus de ces dernières. Nous avons donc programmé la formule

analytique de Wei, afin d'avoir ces deux bornes de fiabilité. Pour rester dans le contexte du marché, nous avons calculé les valeurs des diff swaps pour les maturités et les conditions de celui-ci et ce, d'après nos modèles comme d'après celui de Wei. Les valeurs obtenues auprès de quelques banques au mois de février 1996, sont données par le tableau 5.5.

*Tableau 5.5: Valeurs marchandes de quelques diff swaps*

<i>BANQUE/DEVISE</i>	<i>DEM</i>	<i>YEN</i>	<i>GBP</i>
<b>MERRILL LYNCH NY</b>	LIB-55	LIB-311	LIB+160
<b>GOLDMAN SACHS NY</b>	LIB-57	LIB-314	LIB+167
<b>SOCIÉTÉ GÉNÉRALE PARIS</b>	LIB-57	LIB-313	LIB+165
<b>CRÉDIT LYONNAIS</b>	LIB-59	LIB-310	LIB+165

Ainsi, selon Merrill Lynch NY, un investisseur américain qui achète un diff swap pour échanger le Libor sur \$US contre le Libor sur DM, il devra payer tous les trois mois le Libor sur \$US moins 55 pb et recevoir le Libor sur DM et ce sur 3 ans.

Pour ces mêmes trois swaps différentiels, nous avons pu calculer les marges payées à l'initiation du contrat selon le modèle analytique tel que développé dans le chapitre III, celles calculées selon la procédure numérique, explicitée au chapitre IV, ainsi que celles obtenues selon le modèle de Wei (1994). Dans un premier temps, nous comparons les résultats de nos deux modèles aux valeurs marchandes proposées par les banques.

Tableau 5.6: Valeurs générées par nos deux modèles

DEVISE	Modèle analytique	Procédure numérique
DEM	LIB-46.61	LIB-61.33
YEN	LIB-143.63	LIB-99.51
GBP	LIB+48.49	LIB-6.20

Cette comparaison, nous permet de dire que:

- Les résultats du modèle analytique sont plausibles puisque les marges obtenues sont de même signe que celles proposées par les banques. En effet, l'acheteur d'un diff swap sur le YEN doit payer Lib-300 pb selon les banques. Selon notre modèle, il réduit toujours le Libor, mais d'une marge plus faible soit 143 pb. Le même raisonnement s'applique à l'acheteur d'un diff swap sur GBP qui, lui, paie Libor plus une marge. D'autre part, pour notre modèle analytique comme dans le cas des valeurs proposées par les banques, la marge à réduire du Libor sur \$US dans le cas du diff swap sur YEN est supérieure en valeur absolue à celle à réduire dans le cas du diff swap sur DEM

- Les résultats de la procédure numérique semblent aussi plausibles sauf pour le cas de la GBP, ou selon le modèle numérique, la partie domestique au swap doit retrancher une marge de 6 pb au Libor sur \$ US au lieu de le majorer. Nous tentons d'expliquer cette constatation dans notre analyse comparative.

Même si globalement, nos résultats ne s'éloignent pas beaucoup des cotations du marché, nous constatons cependant qu'ils en diffèrent. Ceci s'explique selon nous, par l'existence de coûts de transaction, par l'écart Bid-Ask et par les méthodes de cotation utilisées par les banques. Celles-ci sont données par le tableau 5.6.

*Tableau 5.7: Méthodes de cotation utilisées par les banques*

<i>BANQUE</i>	<i>MÉTHODE</i>
MERRILL LYNCH NY	Non révélée
GOLDMAN SACHS NY	Méthode paramétrique
SOCIÉTÉ GÉNÉRALE PARIS	Taux forwards
CRÉDIT LYONNAIS	Taux forwards

La méthode des taux forward consiste à appliquer à la partie domestique du diff swap, une marge qui est fonction du différentiel des taux à terme actualisés au taux domestique. Elle ne tient donc pas compte des corrélations entre les taux d'intérêt domestique et étranger ainsi que de celle entre le taux de change et le taux d'intérêt étranger. Elle suppose que les taux d'intérêt et taux de change à terme sont de bons indicateurs de leurs évolutions. La méthode paramétrique consiste à calculer une moyenne pondérée des anticipations probabilisées des économistes de la banque. Il est clair que ces méthodes ne tiennent pas compte de la structure actuelle des taux qui joue un rôle important dans l'évaluation des diff swaps.

Notre deuxième borne de fiabilité est le modèle de Wei (1994). Les valeurs obtenues selon les trois modèles, toujours pour les mêmes swaps différentiels cotés sur le marché sont données par le tableau 5.8.

*Tableau 5.8: Valeurs générées par les trois modèles:*

<b>DEVISE</b>	<b>Notre modèle</b>	<b>Modèle de Wei</b>	<b>Procédure numérique</b>
<b>DEM</b>	LIB-46.61	LIB-34.61	LIB-61.33
<b>YEN</b>	LIB-143.63	LIB-115.25	LIB-99.51
<b>GBP</b>	LIB+48.49	LIB+89.00	LIB-6.20

Nous pouvons constater que les résultats de nos modèles ne sont pas très différents de ceux générés par le modèle de Wei (1994). Ces deux comparaisons

nous permettent d'affirmer que nos résultats sont fiables et que nous pouvons passer à l'étude comparative.

## 2. Analyse comparative:

### a) *Le modèle de Wei (1994) contre notre modèle analytique:*

En comparant les résultats de notre modèle analytique à ceux donnés par le modèle de Wei pour les mêmes diff swaps, on constate que les marges proposées diffèrent dans tous les cas de quelques points de base. La différence de cotations selon les deux modèles varie selon la devise choisie, cependant on peut remarquer que le modèle de Wei associe dans tous les cas une marge plus élevée (plus défavorable à l'investisseur américain) que la nôtre. Une analyse des différences entre les deux modèles pourrait nous éclairer sur les raisons de cette constatation.

Rappelons que les deux différences majeures qui existent entre notre modèle analytique et celui de Wei sont:

- Dans notre modèle, le processus suivi par les taux d'intérêt domestique et étranger, est celui proposé par Hull et White (1990) pour la description de la structure à terme des taux d'intérêt. Ce modèle, contrairement à celui de Vasicek (1977) utilisé par Wei (1994), permet d'exploiter pleinement l'information que recèle la structure à terme observée au moment de l'initiation du diff swap. Ceci engendre une évaluation différente des obligations sans coupons domestiques et étrangères. En effet, selon le modèle de Wei, le prix d'une obligation sans coupons s'écrit:

$$B(t, t') = De^{-rF}$$

avec:



$$F = \frac{1 - e^{-k(t'-t)}}{k}$$

$$D = \exp \left\{ \left[ \mu + \frac{\lambda \sigma}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right] \left( F - (t'-t) - \frac{\sigma^2 F^2}{4k} \right) \right\} \quad (5.1)$$

Selon notre modèle, cette même quantité s'écrit:

$$B(t, t') = A(t, t') e^{-rD} \quad (5.2)$$

Où  $A(t, t')$  est le terme qui permet de relier le prix de l'obligation sans coupons à la structure à terme des taux d'intérêt observée. Sa formule explicite est:

$$\text{Log} A(t, t') = \text{Log} [B(0, t') / B(0, t)] + D(t, t') F(0, t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) D(t, t')^2$$

(5.3)

et

$$D(t, t') = \frac{1 - e^{-\alpha(t'-t)}}{\alpha}$$

Or la formule d'évaluation des diff swaps dans notre modèle analytique comme dans celui de Wei (1994) est principalement basée sur l'évaluation des obligations sans coupons. Cette différence fait que dans notre modèle, à chaque fois que nous évaluons un paiement à une date  $t_i$  donnée, nous intégrons les prix observés des obligations sans coupons domestiques et étrangères soit:

$$B_d(0, t), B_d(0, t_i), B_d(0, t_{i+1})$$

et

$$B_f(0, t), B_f(0, t_i), B_f(0, t_{i+1})$$

Ce qui n'est pas le cas pour Wei.

• Dans notre modèle, nous avons développé explicitement, la formule du taux d'intérêt étranger du point de vue d'un investisseur domestique. Ainsi, nous avons pu tenir compte de l'effet de la corrélation entre le taux d'intérêt et le taux de change ainsi que de la volatilité de celui-ci, directement dans le prix de l'obligation étrangère. Wei intègre cet effet dans les termes de variance et de covariance de son modèle c'est-à-dire les termes  $a_i$ . En effet, dans son article, il parvient à éviter cette difficulté, soit énoncer explicitement le processus de taux d'intérêt étranger du point de vue d'un investisseur domestique, en formulant une proposition qui permet de relier les économies domestiques et étrangères.

Nous pouvons déduire de ces deux points qu'ignorer la structure à terme observée et ne pas intégrer le processus explicite du taux d'intérêt étranger du point de vue d'un investisseur domestique, se reflètent par une marge plus élevée dans le modèle de Wei que dans le nôtre.

#### *b) La procédure numérique contre le modèle analytique:*

Dans notre problématique, nous avons comparé, non pas deux modèles différents, mais le même modèle implanté différemment. En effet, le succès connu par les procédures numériques telles que les arbres binomiaux et trinomiaux nous a incité à choisir un modèle de la structure à terme des taux d'intérêt qu'on pouvait intégrer dans l'évaluation des swaps différentiels analytiquement et numériquement. La différence des résultats obtenus peut donc être attribuée aux différences entre ces deux méthodes du moment que l'un (le modèle numérique) demeure une approximation de l'autre (le modèle analytique).

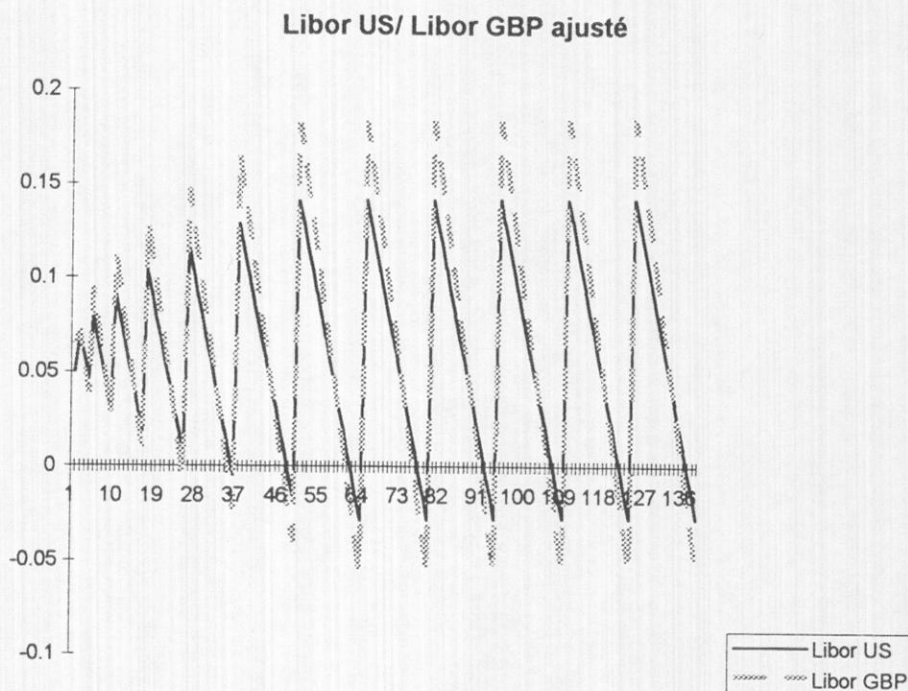
D'autre part, l'implantation de la procédure numérique a révélé certaines limites de cette méthode qui sont en mesure d'influencer largement les résultats, surtout que nous parlons de marges de l'ordre de 0.00001. En effet, au niveau de la construction de l'arbre tridimensionnel, c'est-à-dire la combinaison des deux arbres

des structures des taux d'intérêt domestique et étrangère, l'introduction du paramètre de corrélation entre taux d'intérêt est assez problématique. La procédure préconisée par Hull et White peut engendrer des probabilités négatives. Pour corriger cette lacune, ils proposent de modifier la valeur de  $\rho$  de manière à obtenir des probabilités positives et ce uniquement pour les noeuds où la probabilité est erronée. Ainsi, on peut se retrouver avec un arbre de taux, où la corrélation diffère d'un noeud à l'autre.

Enfin, la tolérance du modèle aux taux d'intérêt négatifs a aussi des effets non négligeables. En effet, à titre d'exemple, pour le cas de la GBP le modèle numérique prévoit que l'investisseur américain doit majorer le Libor de quelques points de base, tandis que le modèle analytique donne un résultat contraire. Si l'on superpose les graphiques du taux d'intérêt américain et de la GBP ajusté<sup>23</sup>, nous pouvons constater que ce dernier est supérieur au taux sur \$US dans la zone des taux d'intérêt positifs ce qui engendrerait une marge positive. Cependant, lorsque l'arbre prévoit des baisses des taux d'intérêts et que ces derniers deviennent négatifs, le différentiel devient favorable à l'investisseur américain ce qui peut renverser la situation. Cet aspect des choses risque d'agir sur la marge exigée de manière à sous-évaluer ou surévaluer le swap tel que c'est apparemment le cas pour la GBP. Le graphique ci-dessous nous permet de visualiser cet aspect des choses.

---

<sup>23</sup> Il s'agit du taux d'intérêt sur la GBP mais du point de vue d'un investisseur américain.



Notre analyse comparative achevée, nous nous retournons vers l'analyse de sensibilité. Ainsi, dans la section qui suit, nous essayons de voir comment se comportent nos deux modèles suite à la variation de certains paramètres auxquels nous considérons que nos résultats sont le plus sensibles.

### **C. ANALYSE DE SENSIBILITÉ:**

#### **1. Analyse de sensibilité sur les paramètres de corrélation:**

C'est en grande partie l'intérêt pratique grandissant des diff swaps qui a attiré l'attention sur le risque de corrélation. Ce risque, n'est autre que celui des hypothèses formulées par les parties au swap, à propos de la corrélation entre les taux d'intérêt domestique et étranger et celle entre le taux d'intérêt étranger et le taux de change. Tester l'impact d'une erreur de mesure ou d'estimation de ce paramètre ainsi que des effets de ses variations sur la valeur d'un swap différentiel

nous a paru primordial. En fait, l'importance de ces deux paramètres peut être expliquée ainsi:

- En ce qui concerne la corrélation: taux d'intérêt, taux de change, le fait de mettre le signe \$ en face du paiement qui s'effectue en monnaie étrangère, montre qu'on a implicitement utilisé un taux de change fixe pour la conversion des paiements étrangers. Le terme de corrélation reflète alors, les pertes ou gains potentiels dus aux fluctuations futures du taux de change.

- Pour ce qui est de la corrélation taux d'intérêt domestique, étranger, c'est à travers le mécanisme d'actualisation qu'apparaît la raison intuitive de l'importance de ce paramètre. En effet, lorsqu'on évalue les paiements étrangers, on détermine le montant de chaque paiement basé sur le taux étranger et on l'actualise au taux domestique. Le fait d'utiliser un taux pour actualiser un autre, montre bien comment leur corrélation est en mesure d'influencer la valeur de notre instrument.

#### a) *Modèle analytique:*

Afin d'effectuer notre analyse de sensibilité sur les paramètres de corrélation, nous avons choisi de faire varier, d'abord la corrélation entre les deux taux d'intérêt en maintenant constant le reste des paramètres, ensuite la corrélation entre taux d'intérêt et taux de change. Dans ce cas, nous considérons que le swap a une durée de vie restante de 3 ans, nous fixons la marge payée à l'initiation du swap selon la structure par échéance initiale des taux d'intérêt et nous déterminons les différentes valeurs du swap selon la formule suivante:

$$V = V_f - V_d - cP \sum_{i=1}^n B_d(t, t_i) \quad (5.4)$$

Les résultats pour le DEM sont présentés par les tableaux 5.9 et 5.10, dans ce cas la marge initiale est de -46.611 pb:

***Tableau 5.9: Analyse de sensibilité sur la corrélation entre le taux d'intérêt domestique et le taux d'intérêt étranger  $\rho_{df}$***

$\rho_{df}$	$V_d$	$V_f$	V	% erreur
0	17.89	12.74	-5.14	0.00
0.1	17.89	12.73	-5.15	-0.19
0.2	17.89	12.72	-5.16	-0.38
0.3	17.89	12.71	-5.17	-0.57
0.4	17.89	12.70	-5.18	-0.76
0.5	17.89	12.69	-5.19	-0.95

***Tableau 5.10: Analyse de sensibilité sur la corrélation entre le taux de change et le taux d'intérêt étranger  $\rho_{fx}$***

$\rho_{fx}$	$V_d$	$V_f$	V	% erreur
0	17.89	12.74	-5.14	0.00
-0.1	17.89	12.77	-5.10	0.76
-0.2	17.89	12.81	-5.06	1.52
-0.3	17.89	12.85	-5.03	2.28
-0.4	17.89	12.89	-4.99	3.04
-0.5	17.89	12.93	-4.95	3.81

Les deux séries de tableaux montrent que la corrélation joue un rôle assez important dans l'évaluation d'un diff swap.

- Dans le tableau 5.9 nous avons fait varier  $\rho_{df}$  (la corrélation entre le taux d'intérêt domestique et le taux d'intérêt étranger). Dans ce cas, les résultats indiquent que cette corrélation joue un rôle secondaire dans l'évaluation du diff swap. En effet, une erreur d'estimation de 0.5 (considérer que la corrélation est de 0.5 alors qu'elle est nulle) aurait mené à une sous-évaluation de 0.95%. D'autre part, la valeur de la partie étrangère du diff swap est une fonction décroissante de la corrélation entre les deux taux d'intérêt. Ainsi, lorsque cette dernière est positive, plus elle est élevée et plus les paiements rattachés au taux d'intérêt étranger sont élevés car ils seront actualisés à des taux plus élevés. Ceci a pour effet de réduire la valeur actuelle des cash flows rattachés au taux étranger par rapport à la situation où la corrélation est nulle. Dans nos tests, nous n'avons traité que le cas où la corrélation est positive. Cependant, par analogie nous pouvons dire que pour le cas où la corrélation est négative, c'est l'effet inverse qui est obtenu. La valeur des paiements rattachés au taux étranger augmente par rapport à la situation où la corrélation est nulle lorsque cette dernière augmente.

D'autre part, la relation entre la corrélation des taux d'intérêt et la valeur globale du diff swap est positive. En effet, une corrélation  $\rho_{df}$  positive (négative) réduit (augmente) la valeur du swap par rapport à la situation où la corrélation est nulle puisque  $V$  n'est autre que la différence entre les valeurs respectives de la partie domestique et étrangère du swap.

- La corrélation entre taux de change et taux d'intérêt étranger semble intervenir dans l'évaluation d'un diff swap, d'une manière plus puissante. Le tableau 5.10 indique qu'une erreur de mesure de -0.5 de ce paramètre, aurait engendré une surévaluation de 3.81% du diff swap. Nous constatons d'autre part que la valeur des paiements basés sur le taux étranger est fonction décroissante de la corrélation entre taux de change et taux d'intérêt étranger. En effet, une corrélation négative, veut dire dans ce cas, que lorsque les paiements basés sur le Libor sur DEM sont

plus faibles, la monnaie dans laquelle ils sont libellés (\$US) s'est vraisemblablement dépréciée. Ceci aura pour effet de réduire la valeur des cash flows par rapport à la situation où la corrélation est nulle. Ainsi la relation corrélation taux de change, taux d'intérêt étranger et la valeur du diff swap est positive dans ce cas aussi.

**b) Procédure numérique:**

Dans l'analyse de sensibilité effectuée sur le modèle numérique, nous avons voulu examiner l'impact d'une variation du paramètre de corrélation sur la valeur de la marge à l'initiation du swap soit:  $c$ . Nous présentons aux tableaux 5.11 et 5.12 les résultats obtenus pour le DEM lorsque l'on fait varier  $\rho_{df}$  entre 0 et 50% et  $\rho_{xf}$  entre 0 et -50%, ceci en maintenant le reste des paramètres constants.

***Tableau 5.11: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\rho_{df}$ .***

$a_d$	$\sigma_d$	$a_f$	$\sigma_f$	$\rho_{df}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	2	1.6	0	0.102	-61.325	0
1	1.4	2	1.6	10	0.102	-61.347	-0.036
1	1.4	2	1.6	20	0.102	-61.369	-0.072
1	1.4	2	1.6	30	0.102	-61.391	-0.109
1	1.4	2	1.6	40	0.102	-61.414	-0.145
1	1.4	2	1.6	50	0.102	-61.436	-0.182



*Tableau 5.12: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\rho_{xf}$ .*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{ar}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	2	1.6	1.27	<b>0</b>	-61.327	0
1	1.4	2	1.6	1.27	<b>-10</b>	-61.284	0.070
1	1.4	2	1.6	1.27	<b>-20</b>	-61.241	0.141
1	1.4	2	1.6	1.27	<b>-30</b>	-61.198	0.211
1	1.4	2	1.6	1.27	<b>-40</b>	-61.154	0.282
1	1.4	2	1.6	1.27	<b>-50</b>	-61.111	0.352

Ces résultats sont tout à fait conformes aux anticipations que nous avons présentées au début de ce mémoire quant à l'évolution de la valeur d'un diff swap suite à une variation des paramètres de corrélation. En effet, selon la procédure numérique comme le modèle analytique, une augmentation de la corrélation entre les deux taux d'intérêt réduit la valeur du diff swap. D'autre part, une augmentation en valeur absolue de la corrélation entre le taux de change et le taux d'intérêt étranger lorsqu'elle est négative, engendre une augmentation de la valeur du diff swap. On peut remarquer cependant, que les résultats de la procédure numérique sont beaucoup moins sensibles à des variations de ce paramètre que ceux du modèle analytique.

En guise de conclusion, nous pouvons dire qu'avec la concurrence sur le marché des produits dérivés, une différence de quelques points de base est importante. Par conséquent, il est important de tenir compte de l'estimation des paramètres de corrélation, en particulier celle entre taux d'intérêt et taux de change dans l'évaluation d'un diff swap.

## 2. Sensibilité du modèle à des variations de $a$ et $\sigma$ :

Dans leur article de 1996, Hull et White suggèrent l'utilisation de leur méthodologie de construction de l'arbre afin de décrire un modèle où  $a$  et  $\sigma$  dépendent du temps. Ainsi, le choix de  $a$  et de  $\sigma$  comme constantes, ainsi que les modalités de leur extraction, restent un point d'interrogation qui, à notre avis, vaut la peine d'être soulevé. C'est la raison pour laquelle nous avons décidé de mesurer l'impact de leurs variations sur la valeur d'un diff swap.

Hull et White suggèrent que le paramètre  $a$  varie dans un intervalle de 1% à 10% et que le paramètre  $\sigma$  varie dans un intervalle de 1% à 2%. Nous avons choisi ces mêmes chiffres pour faire varier les paramètres de volatilité et voir l'impact de leurs variations sur nos résultats.

### a) *Modèle analytique:*

Les deux tableaux suivants regroupent les résultats pour le DEM respectivement pour  $a$  et  $\sigma$ . Dans ce cas, nous avons déterminé les erreurs de mesure par rapport à notre propre estimation du  $a$  et du  $\sigma$  dans le cas du DEM soit  $a = 2\%$  et  $\sigma = 1.6\%$

*Tableau 5.13: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $a$* 

$a_r$	$V_d$	$V_f$	$V$	% erreur
0.01	17.89	12.76	-5.11	0.58
0.02	17.89	12.73	-5.14	0.00
0.03	17.89	12.71	-5.17	-0.55
0.04	17.89	12.68	-5.20	-1.08
0.05	17.89	12.65	-5.23	-1.59
0.06	17.89	12.63	-5.25	-2.07
0.07	17.89	12.60	-5.27	-2.53
0.08	17.89	12.58	-5.30	-2.98
0.09	17.89	12.56	-5.32	-3.40
0.1	17.89	12.54	-5.34	-3.81

*Tableau 5.14: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\sigma$* 

$\sigma_r$	$V_d$	$V_f$	$V$	% erreur
0.010	17.89	12.50	-5.38	-4.54
0.012	17.89	12.57	-5.31	-3.26
0.014	17.89	12.64	-5.23	-1.75
0.016	17.89	12.73	-5.14	0.00
0.018	17.89	12.84	-5.04	1.98
0.020	17.89	12.95	-4.93	4.19

D'après les résultats obtenus, on remarque que la valeur d'un diff swap calculé selon notre modèle analytique est une fonction décroissante du paramètre  $a$  mais une fonction croissante du paramètre  $\sigma$ . Toujours d'après les mêmes tableaux, on peut remarquer que le modèle est assez sensible à des variations de ces paramètres. En effet, pour le taux d'attraction  $a$ , une erreur de mesure de 0.08 engendre une sous-évaluation de -3.81%. Le modèle semble être un peu plus

sensible à la volatilité des taux d'intérêt puisqu'une erreur de -0.6% engendre une sous-évaluation de -4.54%.

**b) Procédure numérique:**

Nous avons effectué une analyse de sensibilité semblable sur la procédure numérique, où nous avons fait varier les paramètres de volatilité des taux d'intérêt domestique et étranger. Nous avons pris les mêmes intervalles de variation, à savoir [1%, 10%] pour  $a$  et [1%, 2%] pour  $\sigma$ . Les résultats de l'analyse figurent aux tableaux 5.15 à 5.18.

**Tableau 5.15: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $a_d$ :**

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{ar}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	2	1.6	1.27	0.102	-61.327	0%
3	1.4	2	1.6	1.27	0.102	-61.328	-0.0014
5	1.4	2	1.6	1.27	0.102	-61.329	-0.0028
7	1.4	2	1.6	1.27	0.102	-61.330	-0.0042
9	1.4	2	1.6	1.27	0.102	-61.331	-0.0056
11	1.4	2	1.6	1.27	0.102	-61.332	-0.0069

*Tableau 5.16: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\sigma_d$ :*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{dr}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	<i>1</i>	2	1.6	1.27	0.102	-61.375	0
1	<i>1.25</i>	2	1.6	1.27	0.102	-61.347	0.045
1	<i>1.5</i>	2	1.6	1.27	0.102	-61.313	0.101
1	<i>1.75</i>	2	1.6	1.27	0.102	-61.272	0.167
1	<i>2</i>	2	1.6	1.27	0.102	-61.225	0.244

*Tableau 5.17: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $a_r$ :*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{dr}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	<i>1</i>	1.6	1.27	0.102	-61.327	0
1	1.4	<i>3</i>	1.6	1.27	0.102	-61.328	-0.002
1	1.4	<i>5</i>	1.6	1.27	0.102	-61.329	-0.004
1	1.4	<i>7</i>	1.6	1.27	0.102	-61.330	-0.006
1	1.4	<i>9</i>	1.6	1.27	0.102	-61.332	-0.008
1	1.4	<i>11</i>	1.6	1.27	0.102	-61.333	-0.010

*Tableau 5.18: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\sigma_r$ :*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{dr}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	2	<i>1</i>	1.27	0.102	-61.406	0
1	1.4	2	<i>1.25</i>	1.27	0.102	-61.378	0.046
1	1.4	2	<i>1.5</i>	1.27	0.102	-61.343	0.102
1	1.4	2	<i>1.75</i>	1.27	0.102	-61.302	0.169
1	1.4	2	<i>2</i>	1.27	0.102	-61.255	0.245

Les conclusions sont les mêmes que pour le modèle analytique. Nous constatons toutefois que la procédure numérique est beaucoup moins sensible à des variations de ces paramètres, nous avons remarqué la même chose en ce qui concerne la sensibilité du modèle à des variations des paramètres de corrélation. D'autre part, nous pouvons ajouter, que les paramètres de la volatilité du taux d'intérêt domestique et de celui étranger agissent exactement de la même manière sur la valeur du diff swap. En effet, une surestimation de  $a_d$  de 10% entraînerait une erreur de mesure de l'ordre de -0.007%, l'erreur serait de -0.01% pour  $a_f$ . D'autre part, une surestimation de  $\sigma_d$  de 1% a le même impact qu'une surestimation semblable de  $\sigma_f$ , à savoir une erreur de 0.245%.

### **3. Impact du différentiel de taux d'intérêt observé sur la marge associée au diff swaps:**

Un des intérêts majeurs de l'utilisation d'un diff swap est de pouvoir profiter du différentiel potentiel entre deux courbes de taux d'intérêt sans encourir de risque de change. On signerait un diff swap, si, par exemple, le différentiel de taux actuel est positif mais que la courbe de taux étrangère est décroissante, contrairement à la courbe domestique qui serait croissante. Le prix du diff swap devrait, ainsi, refléter entre autres choses, la perte ou gain potentiels dus au différentiel actuel et au différentiel de la courbe des taux dont on ne peut que prévoir l'évolution. Cette estimation et la mesure de son impact étant difficiles à effectuer, on n'examine que la manière dont le différentiel courant influence le prix du diff swap. Dans cet objectif, on a effectué une analyse de sensibilité de la marge appliquée au taux Libor au moment de l'initiation du swap, au différentiel actuel entre Libors. Pour ne pas s'éloigner de la réalité, nous avons choisi pour chacune des devises, un différentiel plausible, en accord avec la structure à terme des taux d'intérêt de la devise. Les résultats relatifs aux deux autres devises (GBP et YEN)

sont présentés à l'annexe D. Nous ne présentons ici que les résultats relatifs au DEM pour des durées de vie du swap respectivement de 3 et de 5 ans.

**Tableau 5.19: Analyse de sensibilité sur le différentiel de taux d'intérêt observé pour**  
**T-t = 3 ANS**

$r_d$	$r_f$	$r_d - r_f$	$V_d$	$V_f$	$c$
0.02	0.035	<b>-0.015</b>	7.73	13.26	47.63
0.03	0.035	<b>-0.005</b>	11.20	13.08	16.45
0.035	0.035	<b>0</b>	12.90	12.99	0.77
0.04	0.035	<b>0.005</b>	14.59	12.91	-14.96
0.05	0.035	<b>0.015</b>	17.89	12.73	-46.61
0.06	0.035	<b>0.025</b>	21.12	12.57	-78.50
0.07	0.035	<b>0.035</b>	24.26	12.40	-110.62
0.08	0.035	<b>0.045</b>	27.34	12.24	-142.98
0.09	0.035	<b>0.055</b>	30.34	12.09	-175.59
0.1	0.035	<b>0.065</b>	33.27	11.93	-208.44

**Tableau 5.20: Analyse de sensibilité sur le différentiel de taux d'intérêt observé pour**  
**T-t = 5 ANS**

$r_d$	$r_f$	$r_d - r_f$	$V_d$	$V_f$	$c$
0.02	0.035	<b>-0.015</b>	12.08	21.03	47.34
0.03	0.035	<b>-0.005</b>	17.07	20.54	18.82
0.035	0.035	<b>0</b>	19.49	20.31	4.47
0.04	0.035	<b>0.005</b>	21.86	20.07	-9.95
0.05	0.035	<b>0.015</b>	26.45	19.62	-38.98
0.06	0.035	<b>0.025</b>	30.86	19.18	-68.25
0.07	0.035	<b>0.035</b>	35.08	18.75	-97.79
0.08	0.035	<b>0.045</b>	39.13	18.34	-127.59
0.09	0.035	<b>0.055</b>	43.02	17.94	-157.66
0.1	0.035	<b>0.065</b>	46.76	17.56	-188.00

Nous avons calculé les valeurs des paiements domestiques et étrangers ainsi que la marge appliquée au diff swap pour différentes valeurs du différentiel de taux d'intérêt observé au moment de l'initiation de ce dernier. Nous avons fixé le taux d'intérêt étranger, dans ce cas le Libor sur DEM, à 3.5%<sup>24</sup>. D'autre part, nous avons fait varier le taux Libor sur \$US entre 2% et 10%. Ainsi, même si nous avons gardé le Libor sur DEM constant, nous avons pu couvrir différentes combinaisons du différentiel Américain/Allemand. D'après les résultats obtenus, on remarque que:

- La valeur absolue de la marge, qui est appliquée à la partie domestique du swap, tend à être plus faible lorsque sa durée de vie est plus longue et ce pour le même différentiel de taux initial. Ceci n'est cependant pas toujours vrai, en particulier lorsque le différentiel est nul, puisque dans ce cas,  $c$  est de 4.47 pb si  $T-t = 5$  ans et de 0.77 si  $T-t = 3$  ans.
- Le signe de la marge coïncide avec celui du différentiel. En effet, un différentiel positif veut dire que la partie domestique au swap recevra un taux supérieur à celui qu'elle doit payer, elle paie donc en contre-partie une marge qui permet d'annuler ce différentiel afin d'inciter la partie étrangère à signer. Le même raisonnement s'applique dans le cas inverse.
- La marge  $c$  est généralement plus faible que le différentiel de taux. Par exemple, lorsque  $T-t = 3$  ans, et que le différentiel est de 2.5% en faveur de l'investisseur étranger ( $r_d = 6\%$  et  $r_f = 3.5\%$ ), la partie domestique au swap reçoit uniquement 78.5 pb comme marge constante. Ceci est dû au fait que la courbe des taux domestiques est décroissante et que l'investisseur domestique anticipe de payer moins dans le futur.

---

<sup>24</sup>3.5% est le taux moyen pour le DEM observé durant les premiers mois de 1996.



#### **D. SOMMAIRE DES RÉSULTATS:**

Notre étude empirique se compose de deux analyses: une comparative et une de sensibilité.

La première analyse est basée sur des données réelles extraites du marché. Elle nous a permis de comparer trois modèles d'évaluation des diff swaps: le modèle de Wei (1994), notre modèle analytique et notre modèle numérique.

La comparaison de notre modèle analytique à celui de Wei (1994) montre que ce dernier donne des marges supérieures à celles générées par le nôtre. Ainsi, cette comparaison nous a permis de faire ressortir l'avantage de l'intégration dans notre modèle de la structure selon l'échéance observée, en adoptant pour cela le modèle de Hull et White (1990) au lieu de celui de Vasicek (1977) utilisé par Wei.

La procédure numérique que nous avons implantée dans le cadre de l'évaluation d'un diff swap semble être moins efficace que le modèle analytique construit dans le même objectif. En effet, les difficultés de programmation qui entourent cette procédure, son manque d'exactitude ainsi que les faiblesses que nous avons décelées tout au long de sa construction nous poussent à dire qu'une telle méthode ne doit être envisagée qu'en l'absence d'un modèle analytique. Les analyses de sensibilité effectuées sur la procédure numérique ont toutefois prouvé qu'elle demeure assez robuste pour être utilisée dans le cadre de l'évaluation du diff swap.

Notre analyse de sensibilité nous a permis de connaître le sens des relations qui relie d'un côté les prix des diff swaps de nos deux modèles à :

- La corrélation entre taux d'intérêt domestique et taux d'intérêt étranger.
- La corrélation entre taux d'intérêt étranger et taux de change.

En ce qui concerne ces deux paramètres, nous avons constaté une relation positive entre ces corrélations et la valeur du diff swap générée par le modèle. Ce résultat est conforme à celui qu'on escomptait d'après notre analyse du diff swap.

- Les forces d'attraction des taux d'intérêt à court terme dans l'économie étrangère ( le paramètre  $a$  ) ainsi que leurs volatilités ( le paramètre  $\sigma$  ). Nous avons trouvé que la valeur du diff swap est une fonction décroissante du paramètre  $a$  et une fonction croissante de  $\sigma$ .

- Le différentiel de taux d'intérêt observé au moment de l'initiation du swap. La valeur du diff swap semble être particulièrement sensible à cette donnée du marché bien qu'il ne s'agisse que du différentiel actuel et non du différentiel de la courbe entière des taux.

Globalement, les résultats sont conformes à ceux du modèle de Wei d'évaluation des diff swaps, ainsi qu'aux connaissances de base sur les prix des swaps. Ils tendent donc à confirmer la robustesse de nos modèles.

## CONCLUSION

L'évaluation d'un produit dérivé sur taux d'intérêt tel que le swap différentiel: instrument récent et qui a connu beaucoup de succès sur les marchés financier, est une tâche très délicate. En effet, un tel instrument nécessite la modélisation de deux structures à terme des taux d'intérêt: celle domestique comme celle étrangère.

La revue de la littérature financière nous a montré qu'il y a deux grandes familles de modèles qui nous permettent de réaliser cet objectif, à savoir les modèles analytiques et les modèles numériques. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons voulu examiner les avantages et limites de chacune d'elles en les intégrant dans l'évaluation des diff swaps.

En ce qui concerne le modèle analytique, son cadre d'évaluation reste similaire à celui de Wei (1994), sauf pour le processus suivi par les taux d'intérêt à court terme. Nous avons en fait supposé que ceux-ci sont générés par le modèle de Hull et White (1990) qui présente l'avantage de tenir compte de la structure selon l'échéance des taux. Notre modèle ainsi construit, diffère de celui de Wei (1994) par la manière de déterminer les prix des obligations domestiques et étrangères à

coupons détachés (qui, dans notre modèle sont évalués selon l'approche de Hull et White).

L'étude empirique que nous avons réalisée, nous a montré que notre modèle analytique donne des prix des diff swaps légèrement inférieurs à ceux obtenus avec le modèle de Wei. Ainsi, nous avons pu conclure que les différences observées sont imputables à l'intégration de la structure selon l'échéance des taux dans notre modèle. Par ailleurs, l'analyse de sensibilité nous a permis de nous rassurer sur la robustesse de notre modèle. Toutefois, nous tenons à remarquer que les conclusions tirées de cette dernière restent valables pour les valeurs et les devises choisies uniquement.

D'autre part, nous avons voulu examiner les avantages et inconvénients de l'utilisation des procédures numériques, telles que celle proposée par Hull et White (1994) dans l'évaluation de produits financiers complexes comme le swap différentiel. Cette procédure propose de répondre au besoin de modéliser deux structures de taux d'intérêt et d'en déduire la structure du différentiel entre eux en tenant compte des deux principales corrélations, à savoir, celle entre les deux taux d'intérêt et celle entre le taux d'intérêt étranger et le taux de change. Cette modélisation se fait toutefois d'une manière discontinue dans le temps, ce qui semble influencer l'exactitude des résultats. D'autres difficultés nous ont apparues tout au long de la construction de ce modèle dont nous faisons état dans notre analyse comparative.

L'analyse de sensibilité effectuée sur la procédure numérique proposée par Hull et White (1994) et complétée par nous dans le but de répondre aux besoins spécifiques de l'évaluation d'un diff swap a été conforme à nos attentes. Elle a en effet donné les mêmes résultats que celle effectuée sur le modèle analytique et celles rapportées par Wei (1994). Ceci nous a confirmé la robustesse de notre travail.

Il est certain qu'une étude empirique beaucoup plus large et effectuée avec des données de marché plus fiables et plus nombreuses est nécessaire afin de se prononcer sur les méthodes d'évaluation que nous nous avons examinés à travers ce travail. D'autres modèles peuvent aussi se révéler plus efficaces et plus appropriés à l'évaluation du diff swap. Ces points constituent des avenues de recherche futures intéressantes, surtout avec la constitution probable dans le futur, d'une base de données plus complète des prix de tels instruments, chose quasi inexistante pour l'instant.

Un autre point intéressant à étudier, serait l'évaluation d'un diff swap général qui fait appel à trois devises différentes, celle de l'investisseur et deux autres dont la structure des taux d'intérêt l'intéresserait. L'intégration d'une troisième devise ferait appel à quelques modifications de nos deux modèles, qui pourraient former un point de départ d'un tel travail.

## ANNEXE A

### Le modèle de Hull et White

En exposant ce modèle nous visons à clarifier certains passages mathématiques de sa dérivation. Nous adoptons la même notation que celle de Hull et White soit:

- $P(t, T)$ : le prix au temps  $t$  d'une obligation à coupons détachés venant à échéance en  $T$  avec  $P(T, T) = 1$ .
- $v(t, T)$ : la volatilité de  $P(t, T)$ .
- $F(t, T)$ : le taux à terme instantané au temps  $t$  d'un contrat venant à échéance en  $T$ .
- $r(t)$ : le taux d'intérêt à court terme sans risque au temps  $t$ .
- $f(t, T_1, T_2)$ : le taux à terme au temps  $t$  pour la période allant de  $T_1$  à  $T_2$ .
- $dz(t)$ : un processus de Wiener.

Hull et White supposent que le processus dans un monde neutre au risque de  $P(t, T)$  est:

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + v(t, T)P(t, T)dz(t)$$

Par ailleurs, la théorie des anticipations nous permet de relier le taux à terme  $f(t, T_1, T_2)$  au prix des obligations à coupons détachés. En effet celle ci nous permet d'écrire:

$$(1 + r_1)^{1, T_1-t} (1 + r_{1,2})^{T_1-T_2} = (1 + r_2)^{T_2-t}$$

avec:

$r_1$ : le taux d'intérêt prévalent entre  $t$  et  $T_1$ .

$r_2$ : le taux d'intérêt prévalent entre  $t$  et  $T_2$ .

$r_{1,2}$ : le taux d'intérêt au temps  $t$ , prévalent entre  $T_1$  et  $T_2$ .

D'où:

$$(1 + r_{1,2})^{T_1-T_2} = (1 + r_2)^{T_2-t} / (1 + r_1)^{1, T_1-t}$$

En prenant le logarithme naturel, on obtient:

$$(T_2 - T_1) \ln(1 + r_{1,2}) = \ln(1 + r_2)^{T_2-t} - \ln(1 + r_1)^{1, T_1-t}$$

Or sachant que:

$$P(t, T_i) = 1 / (1 + r_i)^{1, T_i-t} \quad \forall i = 1, 2$$

et que:

$$\ln(1 + r_{1,2}) = f(t, T_1, T_2)$$

Ainsi, on peut écrire que:

$$f(t, T_1, T_2) = (\ln[P(t, T_2)] - \ln[P(t, T_1)]) / (T_2 - T_1)$$

d'un autre côté, et en appliquant le lemme d'Ito sur le processus suivi par le processus d'une obligation à zéro coupon, on obtient:

$$d\ln[P(t, T_1)] = [r(t) - v^2(t, T_1)/2]dt - v(t, T_1)dz(t)$$

et la même procédure appliquée sur  $P(t, T_2)$  nous donne:

$$d\ln[P(t, T_2)] = [r(t) - v^2(t, T_2)/2]dt - v(t, T_2)dz(t)$$

Nous pouvons à ce niveau remplacer les termes  $d\ln[P(t, T_1)]$  et  $d\ln[P(t, T_2)]$  par leurs expressions respectives, puis dériver par rapport à  $t$  la nouvelle équation ainsi obtenue ce qui nous donne:

$$df(t, T_1, T_2) = [v^2(t, T_2) - v^2(t, T_1)]/2(T_2 - T_1) dt + [v(t, T_1) - v(t, T_2)]/(T_2 - T_1) dz(t)$$

Cette dernière équation revêt deux aspects importants: Elle nous montre que le processus neutre au risque du taux à terme ne dépend que de la volatilité, et elle nous permet de dériver le processus du taux à terme  $F(t, T)$ . En effet, en posant  $T_1=T$  et  $T_2=T + \Delta T$ , on aura:

$$df(t, T, T + \Delta T) = \frac{v^2(t, T + \Delta T) - v^2(t, T)}{2\Delta T} dt + \frac{v(t, T) - v(t, T + \Delta T)}{\Delta T} dz(t)$$

En posant que:

$$\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} df(t, T, T + \Delta T) = dF(t, T)$$

On obtient alors:



$$dF(t, T) = v(t, T)v_T(t, T)dt - v_T(t, T)dz(t)$$

où:

$v_t(t, T)$  est la dérivée partielle de  $v(t, T)$  par rapport à  $T$ .

A partir du processus du taux à terme dans un univers neutre au risque, nous dérivons celui du taux à court terme. Sachant que:

$$F(t, t) = F(0, t) + \int_0^t dF(\tau, t)d\tau$$

Et que:

$$r(t) = F(t, t)$$

On a alors:

$$r(t) = F(0, t) + \int_0^t v(\tau, t)v_t(\tau, t)d\tau + \int_0^t v_t(\tau, t)dz(\tau)$$

En dérivant par rapport à  $t$  et en utilisant le résultat que  $v(t, t) = 0$ , on obtient l'équation du processus stochastique du taux d'intérêt à court terme dérivé par Hull et White, soit:

$$dr(t) = F_t(0, t)dt + \int_0^t [v(\tau, t)v_{tt}(\tau, t) + v_t(\tau, t)^2]d\tau dt + \int_0^t v_{tt}(\tau, t)dz(\tau)dt + [v_t(\tau, t) / \tau = t]dz_t$$

Cela étant défini, le modèle de Hull et White va nous permettre d'écrire les processus des taux à court terme domestique et étranger respectivement:

$$dr_d = [\theta_d(t) - ar_d]dt + \sigma_d dz_d$$

$$dr_f = [\theta_f(t) - ar_f]dt + \sigma_f dz_f$$

où:

$\sigma_i$  est constant pour une période donnée.  $i = d, f$ .

$a$  et  $b$  sont les coefficients d'ajustement, ils sont connus en  $t=0$ .

$\theta_i(t)$  une fonction inconnue du temps qui a pour but de permettre au modèle d'être cohérent avec la structure à terme initiale. Une approximation de  $\theta_i(t)$  serait la pente de la courbe des taux à terme au temps zéro. ainsi  $\theta_i(t)$  pourra s'écrire:

$$\theta_i(t) = F_t(0, t)^{25} + aF(0, t) + \sigma^2 / 2a(1 - e^{-2at})$$

Avec  $F(t, T)$  le taux à terme instantané au temps  $t$  pour une obligation à échéance  $T$ .  
Le prix au temps  $t$  d'une obligation zéro coupon est alors donné par:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r}$$

Avec

$$B(t, T) = 1/a[1 - e^{-a(T-t)}]$$

et

$$\log A(t, T) = \log[P(0, T)/P(0, t)] + B(t, T)F(0, t) - \sigma^2/4a(1 - e^{-2at})B(t, T)^2$$

Ainsi, on a tous les éléments nécessaires afin de pouvoir évaluer la partie du diff swap rattachée au taux d'intérêt domestique.

---

<sup>25</sup>L'indice  $t$  dans  $F_t$  désigne la dérivée partielle par rapport à  $t$ .

## ANNEXE B

### Dérivation de la valeur d'un paiement étranger $V_i^f$

$$V_i^f = E^d \left[ \begin{array}{c} \exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \right\} \\ P \left\{ \frac{1}{E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r'_f(s) ds\right) \right\}} - 1 \right\} \end{array} \right]$$

$$V_i^f = PE^d \left[ \begin{array}{c} E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \right\} \right\} \\ \left\{ \frac{1}{E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r'_f(s) ds\right) \right\}} - 1 \right\} \end{array} \right]$$

$$V_i^f = PE^d \left[ \frac{E_{t_i}^d \left\{ \exp \left( - \int_t^{t_i} r_d(s) ds \right) \left\{ \exp \left( - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds \right) \right\} \right\}}{E_{t_i}^d \left\{ \exp \left( - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right) \right\}} - E_{t_i}^d \left\{ \exp \left( - \int_t^{t_i} r_d(s) ds \right) \left\{ \exp \left( - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds \right) \right\} \right\} \right]$$

Or l'expression:

$$PE^d \left[ E_{t_i}^d \left\{ \exp \left( - \int_t^{t_i} r_d(s) ds \right) \left\{ \exp \left( - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds \right) \right\} \right\} \right]$$

peut s'écrire:

$$PE^d \left[ \exp \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds \right) \right] = PB_d(t, t_{i+1})$$

D'où:

$$V_i^f = PE^d \left[ \frac{\exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \right\}}{E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^t r_f'(s) ds\right) \right\}} \right] - PB_d(t, t_{i+1}).$$

Posons A la quantité:

$$A = E^d \left[ \frac{\exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \right\}}{E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^t r_f'(s) ds\right) \right\}} \right].$$

Les propositions suivantes peuvent être démontrées pour des variables  $x, y$  normalement distribuées:

$$E[e^x] = \exp\left(E(x) + \frac{\text{var}(x)}{2}\right);$$

$$E[e^y] = \exp\left(E(y) + \frac{\text{var}(y)}{2}\right);$$

$$E[e^{x+y}] = E[e^x] E[e^y] e^{\text{cov}(x,y)}$$

$$A = E^d \left[ \frac{\exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \right\}}{\exp\left(E_{t_i}^d \left\{ -\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right\}\right) * \exp\left(\frac{\text{var}\left\{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right\}}{2}\right)} \right]$$

$$A = E^d \left[ \frac{\exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \right\} * \exp\left(E_{t_i}^d \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right\}\right)}{\exp\left(\frac{\text{var}\left\{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right\}}{2}\right)} \right]$$

soit:

$$X = -\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_d(s) ds$$

$$Y = \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_f'(s) ds$$

On a alors:

$$E[e^x] * \exp(e^r) = \frac{E(e^{x+r})}{e^{\text{cov}(x,r)} e^{\text{var}(r/2)}}$$

$$A = E^d \left[ \frac{E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) \exp\left(-\int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) * \exp\left(\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right) \right\}}{\exp(a_1 + a_2)} \right]$$

Avec:

$$a_1 = \text{cov}\left(-\int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds, \int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right) = -\text{cov}\left(-\int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds, -\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right)$$

$$a_2 = \frac{\text{var}\left(\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right)}{2} + \frac{\text{var}\left(-\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right)}{2} = \text{var}\left(-\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right)$$

$$A = E^d \left[ \frac{E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_t^{t_i} r_d(s) ds\right) \exp\left(-\int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \exp\left(\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right) \right\}}{\exp(a_1 + a_2)} \right]$$

$$A = E^d \left[ \frac{E_{t_i}^d \left\{ \exp\left(-\int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds\right) \exp\left(\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds\right) \exp\left(\int_t^{t_i} r_f'(s) ds\right) \right\}}{\exp(a_1 + a_2)} \right]$$

Or,

$$E[\exp(x+y+z)] = E[e^x]E[e^y]E[e^z] \exp\{\text{cov}(x,y) \text{cov}(x,z) \text{cov}(y,z)\}$$

D'où

$$A = \frac{E^d \left\{ \exp \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds \right) \right\} E^d \left\{ \exp \left( \int_t^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right) \right\} E^d \left\{ \exp \left( - \int_t^{t_i} r'_f(s) ds \right) \right\}}{\exp(a_1 + a_2 + a_3 + a_5)} \exp(a_4)$$

Avec:

$$a_3 = \text{cov} \left( - \int_t^{t_i} r'_f(s) ds, - \int_t^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right);$$

$$a_4 = \text{cov} \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds, - \int_t^{t_i} r'_f(s) ds \right);$$

$$a_5 = \text{cov} \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds, - \int_t^{t_{i+1}} r'_f(s) ds \right).$$

D'autre part, si on pose  $x = \int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds$ , on peut démontrer que:

$$E(e^x) = \frac{\exp(\text{var } x)}{E(e^{-x})}$$

On a alors:



$$A = \frac{E^d \left\{ \exp \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds \right) \right\} E^d \left\{ \exp \left( - \int_t^{t_i} r_f'(s) ds \right) \right\}}{\exp(a_1 + a_2 + a_3 + a_5) E^d \left\{ \exp \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right) \right\}} \exp(a_4 + a_6)$$

$$\text{avec } a_6 = \text{var} \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right)$$

$$V_i^f = P \frac{B_d(t, t_{i+1}) B_f'(t, t_i)}{B_f'(t, t_{i+1})} \exp(-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6) - P B_d(t, t_{i+1})$$

$$a_1 = \text{cov} \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds, \int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right) = - \text{cov} \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_d(s) ds, - \int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right)$$

$$= - \frac{\sigma_d \sigma_f \rho_{df}}{a_d a_f} \left[ \begin{aligned} & (t_{i+1} - t_i) - \frac{1}{a_d} (1 - e^{-a_d(t_{i+1}-t_i)}) - \frac{1}{a_f} (1 - e^{-a_f(t_{i+1}-t_i)}) + \\ & \frac{1}{a_d + a_f} (1 - e^{-(a_d+a_f)(t_{i+1}-t_i)}) \end{aligned} \right]$$

$$a_2 = \text{var} \left( - \int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right) = \frac{\sigma_f^2}{a_f^2} \left[ (t_{i+1} - t_i) - \frac{2}{a_f} (1 - e^{-a_f(t_{i+1}-t_i)}) + \frac{1}{2a_f} (1 - e^{-2a_f(t_{i+1}-t_i)}) \right]$$

$$a_3 = \text{cov} \left( -\int_t^{t_i} r_f'(s) ds, -\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right);$$

$$= \frac{\sigma_f^2}{a_f^2} \left[ (t_i - t) - \frac{1}{a_f} (e^{-a_f(t_{i+1}-t)} - e^{-a_f(t_i-t)}) - \frac{1}{a_f} (1 - e^{-a_f(t_i-t)}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2a_f} (e^{-a_f(t_{i+1}-t)} - e^{-a_f(t_{i+1}+t_i-2t)}) \right]$$

$$a_4 = \text{cov} \left( -\int_t^{t_{i+1}} r_d'(s) ds, -\int_t^{t_i} r_f'(s) ds \right);$$

$$= \frac{\sigma_d \sigma_f \rho_{df}}{a_d a_f} \left[ (t_i - t) - \frac{1}{a_d} (e^{-a_d(t_{i+1}-t)} - e^{-a_d(t_i-t)}) - \frac{1}{a_f} (1 - e^{-a_f(t_i-t)}) \right. \\ \left. + \frac{1}{a_d + a_f} (e^{-a_d(t_{i+1}-t)} - e^{-a_d(t_{i+1}-t) - a_f(t_i-t)}) \right]$$

$$a_5 = \text{cov} \left( -\int_t^{t_{i+1}} r_d'(s) ds, -\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right);$$

$$= \frac{\sigma_d \sigma_f \rho_{df}}{a_d a_f} \left[ (t_{i+1} - t) - \frac{1}{a_d} (1 - e^{-a_d(t_{i+1}-t)}) - \frac{1}{a_f} (1 - e^{-a_f(t_{i+1}-t)}) \right. \\ \left. + \frac{1}{a_d + a_f} (1 - e^{-(a_d+a_f)(t_{i+1}-t)}) \right]$$

$$a_6 = \text{var} \left( -\int_t^{t_{i+1}} r_f'(s) ds \right)$$

$$= \frac{\sigma_f^2}{a_f^2} \left[ (t_{i+1} - t) - \frac{2}{a_f} (1 - e^{-a_f(t_{i+1}-t)}) + \frac{1}{2a_f} (1 - e^{-2a_f(t_{i+1}-t)}) \right]$$

## ANNEXE C

### Résultats du YEN

### Modèle analytique

*Tableau C.1.1: Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation  $\rho_{df}$*

$\rho_{df}$	$V_d$	$V_f$	$V$	% erreur
0	17.89	2.00	-15.85	0.00
0.1	17.89	1.99	-15.86	-0.05
0.2	17.89	1.99	-15.86	-0.09
0.3	17.89	1.98	-15.87	-0.14
0.4	17.89	1.97	-15.88	-0.18
0.5	17.89	1.97	-15.89	-0.23

*Tableau C.1.2: Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation  $\rho_{fx}$* 

$\rho_{fx}$	V <sub>d</sub>	V <sub>f</sub>	V	% erreur
0	17.89	2.00	-15.85	0.00
-0.1	17.89	2.04	-15.81	0.30
-0.2	17.89	2.08	-15.77	0.59
-0.3	17.89	2.12	-15.73	0.89
-0.4	17.89	2.16	-15.70	1.19
-0.5	17.89	2.20	-15.66	1.48

*Tableau C.1.3: Analyse de sensibilité sur le paramètre a*

a	V <sub>d</sub>	V <sub>f</sub>	V	% erreur
0.01	17.89	2.01	-15.84	0.06
0.02	17.89	2.00	-15.85	0.00
0.03	17.89	1.99	-15.86	-0.06
0.04	17.89	1.98	-15.87	-0.11
0.05	17.89	1.98	-15.88	-0.16
0.06	17.89	1.97	-15.88	-0.21
0.07	17.89	1.96	-15.89	-0.25
0.08	17.89	1.95	-15.90	-0.29
0.09	17.89	1.95	-15.90	-0.33
0.1	17.89	1.94	-15.91	-0.37

*Tableau C.1.4: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\sigma$* 

$\sigma$	Vd	Vf	V	% erreur
0.010	17.89	1.94	-15.92	-0.41
0.012	17.89	2.00	-15.85	0.00
0.014	17.89	2.08	-15.77	0.49
0.016	17.89	2.17	-15.68	1.05
0.018	17.89	2.27	-15.58	1.69
0.020	17.89	2.38	-15.47	2.40

*Tableau C.1.5: Analyse de sensibilité sur le différentiel de taux d'intérêt observé*

$r_d$	$r_f$	$r_d - r_f$	Vd	Vf	c
0.030	0.005	-0.025	11.20	2.06	-80.07
0.040	0.005	-0.035	14.59	2.03	-111.73
0.050	0.005	-0.045	17.89	2.00	-143.64
0.060	0.005	-0.055	21.12	1.97	-175.77
0.070	0.005	-0.065	24.26	1.95	-208.15
0.080	0.005	-0.075	27.34	1.92	-240.78
0.090	0.005	-0.085	30.34	1.89	-273.64
0.100	0.005	-0.095	33.27	1.87	-306.76

## Modèle numérique

*Tableau C.2.1: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $a_d$ :*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{ar}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5145	0
3	1.4	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5152	-0.0007
5	1.4	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5159	-0.0014
7	1.4	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5166	-0.0020
9	1.4	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5172	-0.0027
11	1.4	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5179	-0.0034

*Tableau C.2.2: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\sigma_d$ :*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{ar}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.559	0
1	1.25	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.533	0.0258
1	1.5	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.501	0.0578
1	1.75	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.463	0.0961
1	2	2	1.2	0.3058	-0.0238	-99.419	0.1407

*Tableau C.2.3: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $a_f$* 

$a_d$	$\sigma_d$	$a_f$	$\sigma_f$	$\rho_{df}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	<i>1</i>	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5142	0
1	1.4	<i>3</i>	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5149	-0.0007
1	1.4	<i>5</i>	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5155	-0.0013
1	1.4	<i>7</i>	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5161	-0.0019
1	1.4	<i>9</i>	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5168	-0.0026
1	1.4	<i>11</i>	1.2	0.3058	-0.0238	-99.5174	-0.0032

*Tableau C.2.4: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\sigma_f$* 

$a_d$	$\sigma_d$	$a_f$	$\sigma_f$	$\rho_{df}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	2	<i>1</i>	0.3058	-0.0238	-99.536	0
1	1.4	2	<i>1.25</i>	0.3058	-0.0238	-99.509	0.0276
1	1.4	2	<i>1.5</i>	0.3058	-0.0238	-99.475	0.0616
1	1.4	2	<i>1.75</i>	0.3058	-0.0238	-99.435	0.1017
1	1.4	2	<i>2</i>	0.3058	-0.0238	-99.389	0.1482

*Tableau C.2.5: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\rho_{df}$ .*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{dr}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	2	1.2	<b>0</b>	-0.0238	-99.514	0
1	1.4	2	1.2	<b>10</b>	-0.0238	-99.529	-0.016
1	1.4	2	1.2	<b>20</b>	-0.0238	-99.545	-0.031
1	1.4	2	1.2	<b>30</b>	-0.0238	-99.561	-0.047
1	1.4	2	1.2	<b>40</b>	-0.0238	-99.577	-0.063
1	1.4	2	1.2	<b>50</b>	-0.0238	-99.593	-0.079

*Tableau C.2.6: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\rho_{xf}$ .*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{dr}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	2	1.2	0.3058	<b>-50</b>	-99.314	0
1	1.4	2	1.2	0.3058	<b>-40</b>	-99.354	-0.040
1	1.4	2	1.2	0.3058	<b>-30</b>	-99.394	-0.081
1	1.4	2	1.2	0.3058	<b>-20</b>	-99.434	-0.121
1	1.4	2	1.2	0.3058	<b>-10</b>	-99.475	-0.161
1	1.4	2	1.2	0.3058	<b>0</b>	-99.515	-0.202



## ANNEXE D

### Résultats de la GBP

### Modèle analytique

*Tableau D.1.1: Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation  $\rho_{df}$*

$\rho_{df}$	$V_d$	$V_f$	$V$	% erreur
0	17.89	23.26	5.35	0.00
0.1	17.89	23.25	5.34	0.20
0.2	17.89	23.24	5.33	0.41
0.3	17.89	23.23	5.32	0.61
0.4	17.89	23.21	5.31	0.82
0.5	17.89	23.20	5.30	1.02

*Tableau D.1.2: Analyse de sensibilité sur le paramètre de corrélation  $\rho_{fx}$* 

$\rho_{fx}$	$V_d$	$V_f$	$V$	% erreur
0	17.89	23.27	5.36	0.00
-0.1	17.89	23.31	5.41	-0.83
-0.2	17.89	23.36	5.45	-1.66
-0.3	17.89	23.40	5.50	-2.49
-0.4	17.89	23.44	5.54	-3.32
-0.5	17.89	23.49	5.58	-4.15

*Tableau D.1.3: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $a_f$* 

$a$	$V_d$	$V_f$	$V$	% erreur
0.01	17.89	23.58	5.67	-6.05
0.02	17.89	23.54	5.63	-5.24
0.03	17.89	23.50	5.59	-4.48
0.04	17.89	23.46	5.55	-3.75
0.05	17.89	23.42	5.51	-3.05
0.06	17.89	23.38	5.48	-2.38
0.07	17.89	23.35	5.44	-1.75
0.08	17.89	23.32	5.41	-1.14
0.09	17.89	23.29	5.38	-0.56
0.1	17.89	23.26	5.35	0.00

*Tableau D.1.4: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\sigma_f$* 

$\sigma$	Vd	Vf	V	% erreur
<i>0.010</i>	17.89	22.95	5.05	5.71
<i>0.012</i>	17.89	22.99	5.09	4.88
<i>0.014</i>	17.89	23.05	5.14	3.90
<i>0.016</i>	17.89	23.11	5.20	2.76
<i>0.018</i>	17.89	23.18	5.27	1.46
<i>0.020</i>	17.89	23.26	5.35	0.00

*Tableau D.1.5: Analyse de sensibilité sur le différentiel de taux d'intérêt observé*

$r_d$	$r_f$	$r_d - r_f$	$V_d$	$V_f$	$c$
<i>0.01</i>	0.065	-0.055	4.18	24.52	172.62
<i>0.02</i>	0.065	-0.045	7.73	24.20	141.93
<i>0.03</i>	0.065	-0.035	11.20	23.88	111.02
<i>0.04</i>	0.065	-0.025	14.59	23.56	79.87
<i>0.05</i>	0.065	-0.015	17.89	23.26	48.49
<i>0.06</i>	0.065	-0.005	21.12	22.95	16.87
<i>0.07</i>	0.065	0.005	24.26	22.66	-14.98
<i>0.08</i>	0.065	0.015	27.34	22.37	-47.07
<i>0.09</i>	0.065	0.025	30.34	22.08	-79.40
<i>0.1</i>	0.065	0.035	33.27	21.81	-111.97

## Modèle numérique

*Tableau D.2.1: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $a_d$ :*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{dr}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	10	2	5.424	2.515	-6.205	0
3	1.4	10	2	5.424	2.515	-6.206	-0.014
5	1.4	10	2	5.424	2.515	-6.207	-0.029
7	1.4	10	2	5.424	2.515	-6.208	-0.043
9	1.4	10	2	5.424	2.515	-6.209	-0.057
11	1.4	10	2	5.424	2.515	-6.210	-0.071

*Tableau D.2.2: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\sigma_d$ :*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{dr}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1	10	2	5.424	2.515	-6.252	0
1	1.25	10	2	5.424	2.515	-6.225	0.432
1	1.5	10	2	5.424	2.515	-6.191	0.970
1	1.75	10	2	5.424	2.515	-6.151	1.614
1	2	10	2	5.424	2.515	-6.104	2.364

*Tableau D.2.3: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $a_f$* 

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{dr}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	1	2	5.424	2.5146	-6.197	0
1	1.4	3	2	5.424	2.5146	-6.199	-0.030
1	1.4	5	2	5.424	2.5146	-6.201	-0.059
1	1.4	7	2	5.424	2.5146	-6.203	-0.089
1	1.4	9	2	5.424	2.5146	-6.204	-0.118
1	1.4	11	2	5.424	2.5146	-6.206	-0.146

*Tableau D.2.4: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\sigma_f$* 

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{dr}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	10	1	5.424	2.515	-6.341	0
1	1.4	10	1.25	5.424	2.515	-6.317	0.388
1	1.4	10	1.5	5.424	2.515	-6.286	0.875
1	1.4	10	1.75	5.424	2.515	-6.249	1.461
1	1.4	10	2	5.424	2.515	-6.205	2.147

*Tableau D.2.5: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\rho_{df}$ :*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{df}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	10	2	<i>0</i>	2.515	-6.190	0
1	1.4	10	2	<i>10</i>	2.515	-6.218	-0.464
1	1.4	10	2	<i>20</i>	2.515	-6.247	-0.928
1	1.4	10	2	<i>30</i>	2.515	-6.276	-1.393
1	1.4	10	2	<i>40</i>	2.515	-6.305	-1.858
1	1.4	10	2	<i>50</i>	2.515	-6.334	-2.323

*Tableau D.2.6: Analyse de sensibilité sur le paramètre  $\rho_{xf}$ :*

$a_d$	$\sigma_d$	$a_r$	$\sigma_r$	$\rho_{df}$	$\rho_x$	$c$	% erreur
1	1.4	10	2	5.424	<i>0</i>	-6.191	0
1	1.4	10	2	5.424	<i>-10</i>	-6.134	0.919
1	1.4	10	2	5.424	<i>-20</i>	-6.077	1.839
1	1.4	10	2	5.424	<i>-30</i>	-6.020	2.759
1	1.4	10	2	5.424	<i>-40</i>	-5.963	3.679
1	1.4	10	2	5.424	<i>-50</i>	-5.906	4.599

## BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Amin, K. I and R. A. Jarrow. "Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates", *Journal of International Money and Finance*, 10 (1991), pp. 310-329.
- [2]. Arnold, L. "Stochastic Differential Equations: Theory and Applications", John Wiley & Sons, Inc. 1974.
- [3]. Black, F., E. Derman, and W. Toy. "A One-Factor Model of Interest Rates and its Applications to Treasury Bond Options." *Financial Analysts Journal*, 46 (Jan/ Feb 1990), pp. 33-39.
- [4]. Black, F. And Karasinski. "Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal." *Financial Analysts Journal*, (Jul/ Aug 1991), pp. 52-59.
- [5]. Choi, J.J., and S. Hauser. "The Effects of Domestic and Foreign Yield Curves on the Value of American Currency Call Options." *Journal of Banking and Finance*, 14 (1990), pp. 41-53.
- [6]. Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross. "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices." *Econometrica*, 53 (1985), pp. 363-384.
- [7]. Gardiner, C. W. "Handbook of Stochastic Methods", Springer-Verlag, 1983.

- [8]. Garman, M., and S. Kohlhagen. "Foreign Currency Option Valuation." *Journal of International Money and Finance*, 2, (Dec 1983), pp. 231-237.
- [9]. Gastineau, G. "An Introduction to Special-Purpose Derivatives: Rate Differential Swaps and Deferred Strike options." *Journal of Derivatives*, (Spring 1994).
- [10]. Grabbe, J.O. "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange." *Journal Of International Money and Finance*, 2, (1983), pp. 239-253.
- [11]. Heath, D., R.Jarrow, and A. Morton. "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology." *Econometrica*, 60, 1 (1992), pp. 77-105.
- [12]. Hillard, J.E., J. Madura, and A.L. Tucker. "Currency Option Pricing with Stochastic Domestic and Foreign Interest Rates." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (1991).
- [13]. Ho, T.S.Y., and S.-B. Lee. "Term Structure Contingent Claims." *Journal of Finance*, 41 (Dec 1986), pp. 1011-1029.
- [14]. Hull, J. C. *Options, Futures, and other Derivative Securities*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [15]. Hull, J., and A. White "An Overview of Contingent Claims Pricing", *Canadian Journal of Administrative Science*, (Sep 1988), pp. 55-61.
- [16]. —. "Pricing Interest Rate Derivative Securities." *Review of Financial Studies*, 3, 4 (1990), pp.573-592.



- [17]. — "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models." *Journal of Derivatives*, 2, 1 (Fall 1994), pp. 7-16.
- [18]. — "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models." *Journal of Derivatives*, 2, 1 (Fall 1994), pp. 37-48.
- [19]. — "Using Hull-White Interest Rate Trees." *Journal of Derivatives*, (Spring 1996), pp. 26-33.
- [20]. Jamshidian, F. "An exact Bond Option Pricing Formula." *Journal of Finance*, 44 (Mar 1989), pp. 205-209.
- [21]. Kijima, M., Nagayama. "Efficient Numerical Procedures for the Hull-White Extended Vasicek Model." *The Journal of Financial Engineering*, 3, pp. 275-292.
- [22]. Liebowitz, M. "Breaking the Barrier between Currency and Interest Rates." *Investment Dealers Digest*, (Dec 1991), pp. 17-18.
- [23]. Litzenberger, R. H. "Swaps: Plain and Fanciful", *Journal of Finance*, 47, (1992), pp. 831-850.
- [24]. Mayhew, S. "Implied Volatility", *Financial Analysts Journal*, (Jul/ Aug 1995), pp. 8-20.
- [25]. Parsley, M. " The Last Piece of the Jigsaw.", *Euromoney*, (Nov 1993), pp. 29-32.
- [26]. Ramaswamy, K. And A. M. Sundaresan. "The Valuation of Floating Rate Instruments", *Journal of Financial Economics*, 17, (1986), pp. 251-272.
- [27]. Reiner, E. "Quanto Mechanics", *Risk*, (Mar 1992). pp. 59-63.

[28]. Robinson, D. "Diff Swaps Tempt the Wary", *Euromoney*, (Oct 1991), pp. 10-11.

[29]. Titman, S. "Interest Rate Swaps and Corporate Financing Choices." *Journal of Finance*, (1992)

[30]. Vasicek, O. "An equilibrium Characterization of the Term Structure" *Journal of Financial Economics*, 5, (1977), pp. 177-188.

[31]. Wei, J. "Valuing Differential Swaps." *Journal of Derivatives*, 1, 3 (Spring 1994), pp. 64-76.