



**HEC Montréal**

**Relation rendement-risque du marché agrégé des actions  
et son impact sur l'allocation tactique en contexte canadien**

**par**

**Marc-Antoine Viens**

Sciences de la gestion

(Économie financière appliquée)

*Mémoire présenté en vue de l'obtention*

*du grade de maîtrise ès sciences*

*(M. Sc.)*

Août 2015

© Marc-Antoine Viens, 2015

## Résumé

Ce mémoire estime le prix du risque pour le marché des actions au Canada. Dans un premier temps, la relation entre le rendement excédentaire quotidien d'un indice phare de la bourse canadienne et sa volatilité conditionnelle est spécifiée afin d'évaluer le prix du risque systématique. Pour ce faire, un modèle GARCH-M est utilisé avec une variance conditionnelle caractérisée par un processus asymétrique NGARCH auquel la volatilité implicite du marché des options est ajoutée à titre de variable exogène. Le modèle est estimé par maximum de vraisemblance en approximant la fonction de densité de probabilité à partir de l'expansion Gram-Charlier.

Empiriquement, l'estimation obtenue du prix du risque est positive et significativement différente de zéro. Les résultats indiquent que les estimations du prix du risque sont fortement influencées par la présence de la composante asymétrique intervenant dans le processus de variance conditionnelle. De plus, l'utilisation de la loi normale mène à des estimations moins précises par rapport à celles obtenues à partir de l'expansion Gram-Charlier.

Ensuite, le prix du risque est intégré à un modèle d'allocation tactique afin d'évaluer son apport dans un cadre moyenne-variance. Lorsque les projections des rendements des actions tiennent compte de la relation entre le rendement et le risque, l'allocation en actions est supérieure, en période de haute volatilité (par rapport à un scénario de référence) tandis qu'elle est inférieure en période de faible volatilité. Cela mène à un rendement ajusté pour le risque qui est supérieur en période de croissance boursière. Toutefois, lors d'un krach boursier, la surexposition en actions affecte négativement les rendements du portefeuille et augmente sa volatilité.

**Mots-clés :** prix du risque, relation rendement-risque, GARCH-M, VIXC, expansion Gram-Charlier.

## Table des matières

Résumé .....	i
Table des matières .....	ii
Liste des tableaux .....	iv
Liste des figures.....	v
Liste des sigles.....	vi
Remerciements .....	viii
1. Introduction .....	1
2. Revue de la littérature.....	6
2.1 Relation risque-rendement.....	6
2.1.1 Modèle théorique.....	6
2.1.2 Modèles empiriques.....	7
2.1.3 Données et résultats empiriques .....	10
2.2 Allocation de l'actif.....	12
2.2.1 Risque intra-horizon .....	12
2.2.2 Modèles DCC .....	15
3. Modèles et méthodologie .....	19
3.1 Modèle d'évaluation du prix du risque.....	19
3.2 Modèle d'allocation de l'actif .....	21
3.3 Méthodologie.....	25
4. Données .....	28
5. Résultats empiriques.....	35
5.1 Prix du risque.....	35
5.1.1 Estimation du prix du risque.....	35

5.1.2 Spécification du modèle d'estimation du prix du risque .....	38
5.2 Allocation de l'actif .....	45
5.2.1 Estimation de la variance conditionnelle des actifs .....	45
5.2.2 Estimation de la corrélation conditionnelle entre les actifs .....	48
5.2.3 Formation et évaluation des portefeuilles .....	51
6. Conclusion .....	59
Annexe 1 : Pondération pour un ratio de Sharpe optimal .....	61
Annexe 2 : Expansion Gram-Charlier type A .....	63
Bibliographie .....	66

## Liste des tableaux

Tableau 1 : Statistiques descriptives.....	30
Tableau 2 : Estimation du prix du risque.....	36
Tableau 3 : Proportion du rendement excédentaire prévu capturée par la prime de risque. ....	37
Tableau 4 : Estimation du prix du risque avec la loi normale. ....	39
Tableau 5 : Estimation du prix du risque avec l'EGARCH. ....	40
Tableau 6 : Estimation du prix du risque avec l'écart-type.....	41
Tableau 7 : Estimation du prix du risque à différentes fréquences. ....	41
Tableau 8 : Estimation du prix du risque conditionnel à la crise de 2008.....	43
Tableau 9 : Variance conditionnelle des obligations.....	47
Tableau 10 : Corrélation conditionnelle entre les rendements des actions et des obligations. ....	49
Tableau 11 : Statistiques descriptives de l'allocation en actions. ....	53
Tableau 12 : Statistiques descriptives des rendements de portefeuille des simulations. 56	
Tableau 13 : Ratio de Sharpe avant et après le krach de 2008. ....	57

## Liste des figures

Figure 1: Autocorrélation partielle des rendements des actions.....	31
Figure 2: Autocorrélation partielle du carré des rendements des actions.....	32
Figure 3: Corrélation approximée entre les actions et les obligations.....	33
Figure 4 : Évolutions des données.....	34
Figure 5: Prix du risque conditionnel au niveau du VIXC.....	44
Figure 6: Volatilité conditionnelle des actions.....	46
Figure 7: Volatilité conditionnelle des obligations.....	48
Figure 8: Corrélation conditionnelle entre les rendements des actions et des obligations. .....	49
Figure 9: Prix du risque IQPF.....	52
Figure 10: Allocation en actions : scénario de référence.....	53
Figure 11: Allocation en actions : écarts avec le scénario de référence.....	54
Figure 12 : Comparaison entre la loi normale et l'expansion Gram-Charlier.....	63
Figure 13: Frontière skewness/kurtosis pour l'expansion Gram-Charlier.....	64

## Liste des sigles

ARCH	AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity
CCC	Corrélation Conditionnelle Constante
CRSP	The Center for Research in Security Prices
DCC	Corrélation Conditionnelle Dynamique
EGARCH	Exponential GARCH
FNB	Fonds Négocié en Bourse (ETF)
GARCH	Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity
HARA	Hyperbolic absolute risk aversion
ICAPM	Intertemporal Capital Asset Pricing Model
INT	Intégré
-M	-en-moyenne
MIDAS	Mixed-data sampling
MR	Mean Reverting
MV	Maximum de vraisemblance
MVX	MVX Index, volatilité implicite des options du XIU
NGARCH	Nonlinear Asymmetric GARCH
SR	Ratio de Sharpe (Sharpe Ratio)
TAA	Allocation tacticle (Tactical Asset Allocation)
TMX	Groupe TMX
TSX	Toronto Stock Exchange
VIX	The CBOE Volatility Index
VIXC	S&P/TSX 60 VIX® index
XBB	iShares Canadian Universe Bond Index ETF
XIU	iShares S&P/TSX 60 Index ETF

*À ma chère Anne-Sophie et à tous les professionnels de la finance.*

## Remerciements

Je souhaite remercier mon directeur de mémoire, Michel Normandin, sans qui ce travail n'aurait pu être réalisé avec autant de rigueur. Merci pour les conseils et pour toute cette aide si précieuse.

Mes pensées vont aussi à mes collègues de classe qui se sont intéressés à mes recherches et aux professeurs qui m'ont offert leur support et leur savoir. Les ressources d'HEC Montréal qui étaient à ma disposition m'ont été essentielles afin de réussir adéquatement mes recherches.

Je remercie également ma conjointe Anne-Sophie qui m'a encouragé à poursuivre mes travaux tout au long de ma maîtrise. Je me souviendrai toujours des soirées à discuter des avancés de mon mémoire et des problèmes auxquels je faisais face.

Pour conclure, merci encore à Michel et à Anne-Sophie pour toutes les longues heures de lecture et de correction.

Finalement, merci aux membres du jury pour votre temps.

# 1. Introduction

Ce mémoire a pour but d'examiner la relation entre le rendement et le risque pour le marché des capitaux au Canada. Dans un premier temps, la relation entre le rendement excédentaire d'un indice phare de la bourse canadienne et sa variance conditionnelle est spécifiée afin d'évaluer le prix du risque systématique. Dans un second temps, le prix du risque est intégré aux prévisions de rendement des actions afin d'évaluer son apport sur l'allocation tactique dans un cadre moyenne-variance. Les conséquences de prendre en compte le prix du risque dans les prévisions des rendements des actions sont évaluées en comparaison à un scénario de référence, où les prévisions des rendements des actions correspondent aux normes d'hypothèses de projections financières des planificateurs financiers canadiens.

Dans le contexte actuel où le niveau de participation financière de l'état lors de notre retraite est incertain et où les fonds de pension publics autant que privés accumulent les déficits actuariels, la saine gestion de notre patrimoine financier est indispensable. Depuis plusieurs années, la multitude de produits indiciels offerts sur le marché permet de réduire à faible coût le risque idiosyncratique présent à l'intérieur d'une classe d'actifs. Toutefois, les différentes classes d'actifs affichent des rendements à court terme qui divergent substantiellement de leurs rendements anticipés à long terme. Tout comme pour les rendements, la volatilité conditionnelle (mesure de risque importante en gestion de portefeuille) varie considérablement dans le temps.

Selon la théorie financière du nobéliste Merton (1973, 1980), la variance conditionnelle des rendements est l'unique facteur qui explique l'espérance de rendement du marché agrégé des actions. Dans ce cas, estimer le prix du risque permet d'apprécier empiriquement la relation positive entre le rendement et le risque et ainsi de confirmer ou d'infirmer la théorie financière. Advenant que la théorie soit infirmée, les gestionnaires de portefeuille ont intérêt à augmenter l'allocation de leur portefeuille en actions lors de période de faible volatilité et de réduire l'allocation en actions lors de période de volatilité élevée afin d'allouer le capital à une classe d'actifs ayant un meilleur rendement par unité de risque. À l'opposé, si la théorie est confirmée, les périodes où la volatilité des rendements est élevée mènent à des rendements prévus qui

sont plus élevés. Dans ce cas, le risque est compensé et l'allocation en actions du portefeuille dépend de la tolérance au risque de l'investisseur.

Dans un autre ordre d'idées, lorsque vient l'occasion de rééquilibrer un portefeuille, poser des hypothèses en ce qui concerne les rendements et les covariances des rendements des classes d'actifs financiers est nécessaire afin d'atteindre les cibles de performances et d'en gérer les risques. Pour l'investisseur, de nombreuses techniques sont disponibles afin d'effectuer une prévision de la variance des rendements d'un titre. En ce qui a trait à la corrélation, les méthodes sont limitées, mais quelques techniques intéressantes ont fait leur apparition au cours des dernières années. Pour les professionnels canadiens de l'industrie des services financiers tels que les planificateurs financiers et les représentants en fonds communs de placement, il est très fortement recommandé d'utiliser des normes de projections financières semblables à celles qui sont offertes auprès d'institutions telles que l'Institut Québécois de Planification Financière (IQPF)<sup>1</sup>. Les professionnels offrant des services de gestion de patrimoine plus avancés appliquent parfois une stratégie d'allocation tactique dans l'objectif d'offrir un meilleur rendement ajusté pour le risque en modifiant régulièrement la pondération des actifs de leurs clients. Advenant le choix d'offrir un tel service, les conséquences de prendre en compte le prix du risque dans les prévisions de rendement des actions sont à ma connaissance inconnues. Il est cependant fort probable que la prise en considération de la relation rendement-risque ait des effets sur l'allocation de l'actif ainsi que sur les performances du portefeuille.

En ce qui a trait à l'estimation du prix du risque, il existe une grande littérature sur le sujet. Cette littérature définit le prix du risque comme étant l'espérance de rendement à offrir par unité de risque. La principale mesure de risque utilisée est la variance des rendements. Cependant, la littérature empirique rapporte des résultats ambigus et est majoritairement concentrée sur le marché des États-Unis. De plus, les études portant sur plusieurs marchés obtiennent fréquemment des résultats différents d'un pays à l'autre. Dans ces circonstances, il devient délicat de supposer que le marché canadien possède

---

<sup>1</sup> <http://www.iqpf.org/index/accueil-nouvelles/accueil-normes-projection2014.fr.html>

des caractéristiques semblables à ceux des États-Unis. Des articles publiés dernièrement, incluant l'indice de volatilité implicite VIX<sup>2</sup> dans la dynamique de la variance, ont obtenu des résultats significatifs quant à l'évaluation du prix du risque pour le marché américain. Considérant qu'un tel indice de volatilité n'existe au Canada que depuis la fin de 2002, seules des études très récentes peuvent inclure cette variable avec une quantité raisonnable de données. Récemment, deux ouvrages s'intéressant à l'indice canadien de volatilité VIXC sont arrivés à la même conclusion : afin de prévoir la volatilité à court terme, l'indice VIXC contient de l'information qui n'est pas incluse dans les rendements historiques (Biktimirov et Wang, 2011; Wang, 2011).

Ce mémoire se distingue des études existantes sur plusieurs points. D'abord, le prix du risque est estimé pour un indice canadien liquide et accessible à tous les investisseurs, par l'intermédiaire de plusieurs fonds négociés en bourse (FNB). Puis, une méthodologie inspirée de celle de Kanas (2013) est appliquée pour le contexte canadien à l'aide des indices de volatilité implicite VIXC et MXV afin de mieux prévoir la variance conditionnelle des rendements des actions. À ma connaissance, ceci n'a jamais été effectué au Canada et mènerait à des résultats utiles à l'industrie canadienne des services financiers. Puis, l'estimation des paramètres est effectuée par le maximum de vraisemblance en approximant la fonction de densité de probabilité à partir de l'expansion Gram-Charlier. Cette expansion prend en compte le skewness négatif et le kurtosis excédentaire positif qui caractérisent les données financières. Pour terminer, ce texte se distingue des précédents en analysant les conséquences de prendre en compte le prix du risque dans les prévisions de rendement des actions pour un modèle d'allocation tactique composé d'actions et d'obligations et développé dans un cadre moyenne-variance<sup>3</sup>.

La méthodologie utilisée dans ce mémoire est la suivante. Le rendement excédentaire des actions et sa variance conditionnelle sont spécifiés à partir d'un modèle

---

<sup>2</sup> L'indice représente l'écart-type annualisé des rendements des prochains 30 jours qui est implicite dans le marché des options pour l'indice d'actions américaines S&P500.

<sup>3</sup> L'optimisation de portefeuille dans le cadre moyenne-variance est réalisée en maximisant le rendement par unité de risque (écart-type).

NGARCH-M auquel l'indice de volatilité implicite est ajouté au processus de variance conditionnelle. Le paramètre reliant le rendement à sa variance conditionnelle équivaut au prix du risque. La stratégie d'allocation tactique correspond à l'allocation en actions et en obligations qui maximise le ratio de Sharpe calculé à l'aide des prévisions des rendements, des variances conditionnelles des rendements et de la corrélation conditionnelle des rendements entre les actions et les obligations. La variance conditionnelle des rendements des actions est estimée avec le même modèle que celui utilisé pour estimer le prix du risque, tandis que la variance conditionnelle des rendements des obligations est estimée à l'aide d'un processus NGARCH. La corrélation conditionnelle des rendements entre les actions et les obligations est estimée avec un modèle de corrélation conditionnelle dynamique et asymétrique (A-DCC). Les prévisions des rendements des obligations correspondent aux normes d'hypothèses de projections financières. Dans le scénario de référence, les prévisions des rendements des actions correspondent aussi aux normes d'hypothèses de projections financières tandis que dans un second scénario, les prévisions correspondent à celles obtenues à partir du modèle utilisé afin d'estimer le prix du risque.

Les rendements sont quotidiens et proviennent des fonds négociés en bourse canadiens de la famille iShares (XIU.TO et XBB.TO) pour la période du 2 décembre 2002 au 27 février 2015. La volatilité implicite est déterminée par les indices MXV et VIXC de la Bourse de Montréal, tout comme le taux sans risque (indice CDOR). Les normes d'hypothèses de projections financières proviennent des évaluations actuarielles du Régime de Pension du Canada et de l'IQPF.

Empiriquement, l'estimation du prix du risque est positive et significativement différente de zéro, ce qui confirme la théorie financière portant sur la relation positive entre le rendement et le risque. Les principales conséquences pour l'allocation tactique de prendre en considération le prix du risque sont une augmentation de l'allocation en actions lors de périodes de volatilité des rendements élevée par rapport au scénario de référence et l'opposé en période de faible volatilité. En période de croissance boursière, un ratio de Sharpe plus élevé est obtenu par rapport au scénario de référence. Cependant, lors d'un krach boursier, le scénario de référence performe mieux (en terme de rendement moyen et de ratio de Sharpe).

Le mémoire est organisé comme suit. Le chapitre 2 porte sur la revue de la littérature et aborde les modèles de relation rendement-risque ainsi que l'allocation de l'actif. Au chapitre 3, le modèle d'évaluation du prix du risque, le modèle d'allocation d'actifs ainsi que la méthodologie sont présentés. Le chapitre 4 décrit les données utilisées, alors que le chapitre 5 présente les résultats obtenus. Finalement, le chapitre 6 conclue.

## 2. Revue de la littérature

La revue de la littérature porte d'abord sur la relation entre le risque et le rendement des actifs financiers. Ensuite, celle-ci couvre l'allocation de l'actif en gestion de portefeuilles dans un cadre moyenne-variance.

### 2.1 Relation risque-rendement

Une littérature abondante porte sur la relation entre le risque et le rendement des différents actifs financiers. Une façon de scinder cette littérature en deux approches est la suivante : 1) l'analyse intertemporelle, qui consiste à évaluer la relation risque-rendement entre les diverses périodes, 2) l'analyse en coupe transversale, qui porte l'accent sur la relation risque-rendement entre les différents instruments financiers à une période donnée. Considérant que l'approche intertemporelle est retenue dans le contexte de ce mémoire, la revue de la littérature se concentre exclusivement sur celle-ci.

#### 2.1.1 Modèle théorique

Les deux articles de Merton (1973, 1980) établissent la base fondamentale du modèle intertemporel d'évaluation des actifs financiers (ICAPM). Parmi les résultats rapportés dans ces articles, la relation entre le rendement du marché et sa volatilité est une base très importante en gestion de portefeuille. En contexte discret, celle-ci se résume à :

$$E_t(r_{m,t+1} - r_{f,t+1}) = \lambda E_t(\varepsilon_{m,t+1}^2), \quad (1)$$

où  $r_{m,t+1}$  et  $r_{f,t+1}$  correspondent respectivement au rendement du marché et au rendement de l'actif sans risque à la période  $t + 1$ . Aussi,  $\lambda$  est le prix du risque, qui est directement relié à l'aversion au risque de l'investisseur représentatif, et  $E_t(\varepsilon_{m,t+1}^2)$  est la variance conditionnelle des rendements du marché à la période  $t + 1$ , alors que  $E_t$  est l'opérateur d'espérance conditionnelle à l'information disponible au temps  $t$ . Dans ce modèle, la mesure de risque est la variance conditionnelle. Merton (1980) met en évidence le défi d'évaluer  $\lambda$  étant donné que la variance conditionnelle n'est ni observable, ni constante. De plus, le terme  $E_t(r_{m,t+1} - r_{f,t+1})$  intervenant en (1) n'est pas non plus observable. Ces deux défis n'empêcheront pas les chercheurs de tenter d'évaluer l'équation (1).

## 2.1.2 Modèles empiriques

En ce qui a trait aux différents modèles adoptés par les auteurs dans la littérature, les divers articles se distinguent principalement par la modélisation de la variance conditionnelle. On débute cette section en présentant les modèles GARCH, puis on la poursuit avec les modèles comprenant des variables exogènes.

Tout d'abord, les modèles généralisées d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive (GARCH) développés par Engle (1982) et ses extensions, telles que le GARCH-en-moyenne (GARCH-M), sont à la base de nombreux ouvrages. Le modèle GARCH-M (French, Schwert et Stambaugh, 1987) est probablement le plus utilisé. Celui-ci consiste à imposer une dynamique GARCH au processus de variance conditionnelle et d'intégrer cette variance comme variable explicative du rendement excédentaire du marché. Le modèle se présente en deux équations :

$$(r_{m,t} - r_{f,t}) = c + \lambda h_t + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}. \quad (2.2)$$

Le terme  $c$  correspond à l'ajout d'une constante dans l'équation (1) et le terme  $\varepsilon_t/\sqrt{h_t}$  représente un terme d'erreur bruit blanc. La variance conditionnelle  $h_t$  des rendements est spécifiée à partir d'une constante  $\omega$  et deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  qui multiplient respectivement le carré du terme d'erreur retardé et la variance conditionnelle de la période précédente. Pour obtenir un processus stationnaire, nous devons imposer :  $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$  et  $\beta + \alpha < 1$  (Carrasco et Chen, 2002). Parfois, on applique la restriction que le paramètre  $c$  soit égal à zéro afin qu'aucun rendement excédentaire ne soit possible sans la prise de risque (Kanas, 2012). Cette équation est la base du modèle qui sera présenté à la section 3.1.

Empiriquement, la volatilité semble croître avec les mauvaises nouvelles et décroître avec les bonnes nouvelles (Engle et Ng, 1993). Dans ce contexte, plusieurs GARCH-M ont une composante additionnelle afin de refléter l'asymétrie de la réaction de la volatilité face au signe du choc associé au rendement. Nelson (1991) a développé le

GARCH exponentiel (EGARCH) qui se distingue du modèle précédent par la complexification du processus de variance conditionnelle :

$$\ln h_t = \omega + \alpha \left( |z_{t-1}| - \sqrt{2/\pi} \right) + \gamma z_{t-1} + \beta \ln h_{t-1}, \quad (3)$$

où  $z_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}$  est le choc associé au rendement, standardisé, tandis que  $\alpha$  et  $\gamma$  sont les paramètres reliés à l'amplitude et à l'asymétrie du choc de rendement. L'EGARCH est critiqué pour impliquer une variance conditionnelle trop élevée (Engle et Ng, 1993).

Le GARCH non linéaire asymétrique (NGARCH) corrige ce problème tout en incluant une composante asymétrique (Engle et Ng, 1993). Plus simple que le précédent, le NGARCH se présente comme suit:

$$h_t = \omega + \alpha \left( \varepsilon_{t-1} - \gamma \sqrt{h_{t-1}} \right)^2 + \beta h_{t-1}. \quad (4)$$

Ce qui le distingue du GARCH traditionnel, c'est l'ajout du paramètre  $\gamma$  qui multiplie la racine de la variance conditionnelle de la dernière période. Lorsque le paramètre  $\gamma$  est nul, le processus de variance est le même que pour le GARCH-M (2). Il est à noter que ce modèle a d'abord été développé dans un cadre de prévision de variance conditionnelle et non de GARCH-M. Dans ce modèle, lorsque le coefficient  $\gamma$  est positif et que la variance conditionnelle est élevée, un choc de rendement négatif va maintenir une variance conditionnelle élevée, tandis qu'un choc positif va réduire cette dernière, tel qu'observé empiriquement en finance de marché. À l'opposé, lorsque la variance conditionnelle est faible, l'impact du coefficient d'asymétrie se fait moins ressentir.

Pour que la variance conditionnelle du NGARCH soit stationnaire, les conditions suivantes doivent être respectées :  $\omega > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\beta + \alpha(1 + \gamma^2) < 1$  (Carrasco et Chen, 2002). Ce processus de variance conditionnelle sera repris dans le chapitre relatif au modèle d'évaluation du prix du risque systématique.

Parmi les alternatives possibles, il y a de nombreuses extensions aux modèles GARCH de base, principalement développées afin d'enrichir la dynamique du processus. Par exemple, il existe une version augmentée du NGARCH-M afin de mieux s'adapter à une fonction d'utilité HARA des investisseurs (Lüders et Schröder, 2004) de même qu'une version GARCH asymétrique en composante (A-CGARCH) ayant une composante de long terme et de court terme (Engle et Lee, 1999). Plus récemment, certains auteurs se sont intéressés au modèle de volatilité stochastique (SVM) qui se distingue par l'ajout d'une composante aléatoire dans le processus de variance  $h_t$  (Loudon, 2006). Toutefois, d'une version à l'autre, l'intuition économique derrière le modèle reste plus ou moins la même et les données utilisées sont les rendements historiques. De plus, ces modèles apportent une complexité supplémentaire.

Dans l'objectif d'augmenter l'ensemble d'information prise en considération, il existe l'approche Mixed Data Sampling<sup>4</sup> (MIDAS) qui consiste à utiliser les rendements intra-périodes afin d'obtenir une estimation de la variance (León, Nave et Rubio, 2007). Par exemple, on peut utiliser les rendements mensuels comme variables dépendantes et calculer la variance non conditionnelle pour chaque mois à partir de données quotidiennes.

Enfin, il y a l'introduction de variables exogènes dans le GARCH-M afin d'enrichir l'ensemble d'informations disponible. Rappelons que tous les modèles précédents font intervenir uniquement les rendements des actifs (possiblement à différentes fréquences). Ainsi, ces modèles n'intègrent pas les anticipations du marché ni les conditions économiques. Pour contrer cette lacune, certains auteurs ajoutent des variables macroéconomiques telles que le ratio consommation-richeesse (Guo, 2006). La contrainte avec ces variables est l'absence de leur disponibilité en temps réel. Effectivement, celles-ci peuvent prendre plusieurs mois avant d'être disponibles aux investisseurs. Subséquemment, leur utilisation ne permet pas de prendre de meilleures décisions ex ante.

---

<sup>4</sup> L'échantillonnage de données mixtes correspond à l'utilisation de données ayant des fréquences différentes.

Il est à noter que la volatilité implicite des options portant sur le marché des actions semble, selon plusieurs auteurs, contenir de l'information utile à la prévision (Biktimirov et Wang, 2011; Kanas, 2012, 2013; Wang, 2011). Ainsi, l'ajout de cette variable enrichit l'ensemble d'information et permet d'intégrer une variable disponible en temps réel, reflétant les anticipations des investisseurs face à la variance du marché des actions. Dans cette veine, l'indice VIX est utilisé comme substitut de la variance conditionnelle dans l'équation (2.1) (Bali et Peng, 2006) ou alternativement, le GARCH-M peut être augmenté ainsi :

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \delta VIX_{t-1}. \quad (5)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \delta VIX_{t-1}^2. \quad (6)$$

Kanas (2012) ajoute le VIX comme variable exogène pour la prédiction de la variance dans le modèle GARCH-M (éq. (5)). Kanas (2013) substitue l'indice VIX par le carré de celui-ci (éq. (6)), ce qui est cohérent avec le fait que l'indice correspond à la racine de la variance implicite et que la dynamique correspond à la variance.

Le paramètre  $\delta$  des équations (5) et (6) correspond au coefficient affectant l'indice de volatilité implicite. Lorsque ce paramètre est nul, la dynamique est la même que celle du GARCH-M (2). Kanas (2012, 2013) démontre, à l'aide de simulations Monte-Carlo<sup>5</sup>, dans le cadre d'un GARCH-M, que l'omission d'une variable dans le processus de variance mène à la non-significativité de la prime de risque  $\lambda$ . Le terme  $\delta VIX_{t-1}^2$  de l'équation (6) sera repris dans le processus de variance présenté au chapitre 3.1.

### 2.1.3 Données et résultats empiriques

Aux fins de comparaison de nos résultats avec ceux rapportés dans la littérature, ces derniers sont brièvement présentés ci-dessous.

Au départ, Merton (1980) a testé son modèle avec des données mensuelles du New York Stock Exchange Index (pondérée par la valeur) de 1926 à 1978 et a obtenu une valeur estimée pour  $\lambda$  qui est positive, étant donné qu'il avait imposé une restriction de

---

<sup>5</sup> Il s'agit de simulations à l'aide de nombres aléatoires pour créer des séries de rendements fictifs.

non-négativité pour le prix du risque. Cependant, la variance des estimations est très élevée. Ensuite, à l'aide des rendements quotidiens du S&P Composite (US) de 1928 à 1984, French, Schwert et Stambaugh (1987) obtiennent une relation entre le rendement et la volatilité dans le cadre du GARCH-M qui s'avère positive et significative. Puis, Nelson (1991) obtient une relation négative, mais non significativement différente de zéro, en utilisant les rendements quotidiens de l'indice américain CRSP Value-Weighted Market Index pour la période de 1962 à 1987.

Dans son modèle à volatilité stochastique, Loudon (2006) obtient majoritairement des résultats non concluants à partir de données quotidiennes de 1995 à 2003 pour 15 indices d'Asie-Pacifique, dont 10 marchés émergents. En se basant sur cinq indices européens, León, Nave et Rubio (2007) testent leurs modèles MIDAS asymétrique avec des rendements mensuels de 1988 à 2003 et une volatilité estimée à l'aide de rendements quotidiens. Ils obtiennent une relation positive et significative entre le rendement et la volatilité. Toutefois, lorsqu'ils testent le GARCH-M, les résultats ne sont pas concluants.

À l'aide des rendements quotidiens d'indices de 19 pays de 1974 à 2002, Guo (2006) obtient peu de résultats concluants en utilisant un modèle GARCH-M. Cependant, avec l'ajout de variables macroéconomiques américaines (constante pour tout un trimestre), il obtient alors une relation positive et significative. En ce qui concerne le Canada, aucune relation entre les rendements et la variance n'apparaît.

Bali et Peng (2006) basent leur analyse sur les données quotidiennes de l'indice S&P500 de 1986 à 2002 et sur le CRSP Value-Weighted Index de 1962 à 2002. Ils obtiennent des relations positives et significatives entre le rendement et la volatilité, autant pour le modèle GARCH-M que pour l'utilisation du VIX ou du carré du VIX comme substitut de la variance.

Kanas (2012) utilise les rendements hebdomadaires du S&P100 de 1989 à 2007 dans le cadre du GARCH-M et de ses extensions. Il obtient une relation rendement-volatilité positive et significative lorsque l'indice VIX est ajouté au processus de variance conditionnelle, tandis que son omission mène à des résultats non significatifs. De plus, Kanas (2013) utilise le rendement quotidien et hebdomadaire du S&P500 et obtient une

relation rendement-volatilité positive et significative lorsque le carré de l'indice VIX est ajouté au GARCH standard, alors que son omission mène encore une fois à des résultats non significatifs.

Enfin, Jin, Wang et Yu (2007) trouvent que la relation entre le rendement du marché et sa volatilité tient, peu importe la fréquence utilisée. En effet, selon eux, l'agrégation temporelle des rendements ne devrait pas affecter la relation rendement volatilité. En somme, la fréquence des rendements qui diverge d'un article à l'autre ne justifie pas les écarts dans les résultats. En outre, cet article vient confirmer la validité d'effectuer l'estimation des modèles à l'aide de données ayant une fréquence quotidienne, telle qu'utilisée dans ce mémoire.

## **2.2 Allocation de l'actif**

L'allocation tactique (TAA) se définit par le changement dynamique des pondérations des différentes classes d'actifs d'un portefeuille dans l'objectif d'améliorer la performance ajustée pour le risque. La TAA est remise en question par plusieurs. D'abord, Brinson, Hood et Beebower (1986) décomposent le rendement de grands fonds de pension américains et concluent que la politique d'investissement<sup>6</sup> explique 93,6% de la variance des rendements. Combiné avec la sélectivité<sup>7</sup>, celles-ci en expliquent 97,8%. De plus, plusieurs auteurs tels que Daniel et al. (1997) considèrent que les gestionnaires de fonds n'ont aucune habileté particulière quant à l'allocation tactique. Toutefois, la TAA prend son importance dans la gestion du risque intra-horizon, ainsi qu'en présence de corrélation dynamique dans le temps.

### **2.2.1 Risque intra-horizon**

Kritzman et Rich (2002) défendent l'importance de la prise en considération des risques intra-horizon. Selon eux, l'évaluation des risques basée uniquement sur le rendement du portefeuille à la fin de l'horizon ne reflète pas les préoccupations des investisseurs. Les auteurs soulignent plusieurs raisons pour lesquelles un gestionnaire doit se préoccuper

---

<sup>6</sup> La pondération associée à chaque classe d'actifs à long terme.

<sup>7</sup> Le choix d'un titre par rapport à un autre à l'intérieur d'une même classe d'actifs.

de la trajectoire du portefeuille jusqu'à l'horizon. D'abord, le client évalue la performance de ses avoirs à une fréquence plus élevée. Advenant une performance insatisfaisante en cours de mandat, celui-ci peut mettre un terme à la relation d'affaires. Puis, lorsque le propriétaire du compte utilise un levier financier,<sup>8</sup> son créancier exige un capital minimal qui mène à la liquidation des avoirs en cas de franchissement du seuil. Dans ce sens, les actifs peuvent aussi servir de collatéral à un prêt. Pour finir, plusieurs institutions financières exigent un minimum de capitaux dans les comptes afin de maintenir certains avantages et droits.

Amenc, Goltz et Grigoriu (2010) poursuivent dans la même voie en soulignant l'importante préoccupation des investisseurs face aux risques de perte intra-horizon. Selon eux, la gestion de ce risque s'accomplit par une gestion dynamique des classes d'actifs : l'allocation tactique. Bien que la TAA soit principalement associée à des objectifs de surperformance, les auteurs estiment que celle-ci peut être un instrument important dans la gestion des risques. En effet, ils considèrent que la politique d'investissement comme seule stratégie d'allocation de l'actif est insuffisante étant donné que la corrélation entre les classes d'actifs est instable dans le temps et que la prime de risque varie elle aussi. Les actifs considérés dans cet article sont des FNB puisqu'ils soutiennent les grands avantages de leur simplicité, leur liquidité et leur variété. Ce point de vue est en accord avec celui de Goltz et Schröder (2011) qui ont sondé l'opinion des investisseurs et qui arrivent aux mêmes résultats. Dans cette optique, les rendements présentés au chapitre 4 proviennent de FNB.

Dans l'article d'Amenc, Goltz et Grigoriu (2010), deux mesures sont utilisées pour la performance de la gestion intra-horizon : la perte maximale (maximum drawdown) et le ratio de Sharpe. La perte maximale est calculée comme étant la plus grande perte d'un sommet jusqu'à un creux pour l'horizon en question. Elle représente la perte du pire scénario possible où un investisseur aurait débuté la stratégie à un sommet et l'aurait quitté à son plus bas. Le ratio de Sharpe se présente comme suit :

---

<sup>8</sup> Le recours à l'endettement pour investir dans de plus grandes positions.

$$SR = \frac{R_p - R_f}{\sqrt{VAR(R_p - R_f)}}, \quad (7)$$

où  $R_p$  et  $R_f$  sont respectivement les rendements du portefeuille et de l'actif sans risque pour la période en question. Le numérateur représente le rendement excédentaire, tandis qu'au dénominateur, c'est l'écart-type du rendement excédentaire. Ainsi, le ratio correspond à un rendement par écart-type, généralement annualisé. Ces deux mesures seront utilisées à la section des résultats afin d'évaluer la performance des portefeuilles simulés.

Le ratio de Sharpe découle du concept de portefeuille optimal, celui du marché. Sharpe (1964) a repris le concept de frontière efficiente de Markowitz (1952) et a ajouté l'hypothèse que les investisseurs peuvent prêter et emprunter à un même taux : le taux sans risque. Ainsi, il existe une seule droite qui passe par ce taux et qui est tangente à la frontière des portefeuilles non dominés de Markowitz. Dans un cadran où l'axe de l'abscisse correspond au risque (en écart-type) et celui de l'ordonnée au rendement du portefeuille, l'ordonnée à l'origine de la droite est égale au taux sans risque et la pente est le ratio de Sharpe du meilleur portefeuille possible. Ex post, ce ratio est facile à calculer et permet la comparaison des fonds ou des stratégies entre eux, ajustés pour le risque.

Ainsi, dans un cadre moyenne-variance, il est possible de déterminer les pondérations  $w^*$  qui maximisent le rendement par unité de risque du portefeuille, à condition de connaître l'espérance et la matrice de covariance des rendements des actifs

$$w^* = \arg \max \frac{w'R}{\sqrt{w'\Sigma w}}, \quad (8)$$

où  $w$  est le vecteur de pondération des actifs,  $R$  est le vecteur d'espérance des rendements excédentaires des actifs et  $\Sigma$  est la matrice de covariance des rendements excédentaires. Puisque la covariance des rendements entre deux actifs correspond au produit de la volatilité de ces rendements et de leur corrélation, calculer séparément la volatilité et la corrélation permet d'arriver au même résultat. Cette approche est détaillée à la section 3.2 lors de la formation de portefeuille pour la simulation. Pour

conclure, lorsque l'emprunt est possible (puisque prêter est peu difficile), tous ont intérêt à maximiser le ratio de Sharpe de leur portefeuille.

### 2.2.2 Modèles DCC

Tel que spécifié précédemment, la maximisation du rendement par unité de risque nécessite trois composantes : les rendements anticipés, la volatilité conditionnelle ainsi que la corrélation conditionnelle. Les modèles présentés en 2.1.2 permettent de prévoir la volatilité conditionnelle pour la prochaine période, d'estimer le prix du risque et ainsi, de prévoir l'espérance de rendement. Toutefois, il reste la corrélation conditionnelle à estimer étant donné que celle-ci est dynamique. Les modèles de corrélation conditionnelle dynamique (DCC) existent à ces fins.

La prévision de la corrélation est un sujet d'étude beaucoup plus jeune que celui de la variance. Débutons par une brève revue des différentes techniques de prévision de corrélation.

D'abord, selon Engle (2002), l'évolution des divers modèles de corrélation débute avec les estimateurs calculés sur une fenêtre glissante. Par exemple, il est possible d'estimer la corrélation à l'aide des rendements des 100 derniers jours. Puis, RiskMetrics<sup>9</sup> a présenté une version avec un lissage exponentiel, faisant ainsi décliner le poids d'une période à l'autre dans le calcul de la corrélation. Par la suite, plusieurs GARCH multivariés ont fait leur apparition. Cependant, ceux-ci sont difficilement calculables avec plus de cinq séries temporelles.

Le modèle CCC (corrélation conditionnelle constante) est le premier à estimer la corrélation à l'aide de données standardisées. Dans le CCC, la matrice de variance-covariance estimée  $H_t$  se présente comme suit :

$$H_t = D_t P D_t \quad \text{où } D_t = \text{diag} \{ \sqrt{h_{i,t}} \}. \quad (9)$$

Tel que présenté, chaque élément de la matrice de variance-covariance est le produit des volatilités estimées et de leur corrélation constante.  $D_t$  est une matrice contenant sur sa

---

<sup>9</sup> Famille de produit de gestion du risque de MSCI.

diagonale les valeurs  $\sqrt{h_{i,t}}$  pour chacun des actifs  $i$ , calculées à l'aide d'un modèle de la famille des GARCH, et  $P$  est la matrice des corrélations. Par contre, ce modèle est critiqué puisque la corrélation observée dans les données empiriques ne semble pas constante dans le temps. Pour cette raison, il est préférable d'opter pour un processus dynamique.

Dans son article, Engle (2002) modifie l'équation (9) en ajoutant une dynamique à la corrélation afin que  $P$  dépende du temps :

$$H_t = D_t P_t D_t \quad \text{où } D_t = \text{diag} \{ \sqrt{h_{i,t}} \}. \quad (10)$$

Engle propose deux versions pour la dynamique de la corrélation. La première est un processus intégré (DCC INT) dont la valeur de la période précédente est mise à jour en ajoutant la nouvelle réalisation sous la forme suivante :

$$q_{i,j,t} = (1 - \beta)(z_{i,t-1}z_{j,t-1}) + \beta(q_{i,j,t-1}), \quad (11.1)$$

$$\rho_{i,j,t} = \frac{q_{i,j,t}}{\sqrt{q_{i,i,t}q_{j,j,t}}} \quad (11.2)$$

où  $\beta$  est l'unique paramètre par coefficient de corrélation et correspond à la pondération que l'on attribue à la valeur passée de notre estimateur  $q_{i,j,t-1}$ . Le processus étant intégré, toute la pondération non allouée à  $q_{i,j,t-1}$  est attribuée à la nouvelle réalisation. Le terme  $z_{i,t-1} = \varepsilon_{i,t-1}/\sqrt{h_{i,t-1}}$  est le résidu standardisé du rendement de l'actif  $i$  de la dernière période. L'équation (11.2) assure que la corrélation  $\rho_{i,j,t}$  se situe dans l'intervalle  $[-1,1]$ . Le processus est défini pour  $0 < \beta < 1$ .

La seconde version décrivant la dynamique de la corrélation est le DCC avec retour à la moyenne (DDC MR). Inspiré du GARCH, une constante est ajoutée à l'équation (11.1) pour obtenir:

$$q_{i,j,t} = (1 - \alpha - \beta)\bar{\rho}_{i,j} + \alpha(z_{i,t-1}z_{j,t-1}) + \beta(q_{i,j,t-1}), \quad (12.1)$$

$$\rho_{i,j,t} = \frac{q_{i,j,t}}{\sqrt{q_{i,i,t}q_{j,j,t}}} \quad (12.2)$$

Le paramètre  $\alpha$  est ajouté pour pondérer la dernière réalisation, tandis que  $\beta$  est la pondération appliquée à la corrélation conditionnelle passée. Ainsi, tout choc est considéré avoir un effet temporaire et la divergence de la corrélation par rapport à sa corrélation inconditionnelle  $\bar{\rho}_{i,j}$  n'est pas permanente. Pour ce faire, les conditions suivantes doivent être respectées :  $\alpha, \beta > 0$  et  $\alpha + \beta < 1$ .

Cappiello, Engle et Sheppard (2006) généralisent le DCC afin de permettre l'asymétrie : le DCC asymétrique généralisé (AG-DCC). Dans sa version où les corrélations n'ont pas d'interaction entre elles et que les paramètres sont des scalaires, le modèle se présente comme suit :

$$q_{i,j,t} = (1 - \alpha - \beta)\bar{\rho}_{i,j} - g\bar{n}_{i,j} + \alpha(z_{i,t-1}z_{j,t-1}) + g(n_{i,t-1}n_{j,t-1}) + \beta(q_{i,j,t-1}), \quad (13.1)$$

$$\rho_{i,j,t} = \frac{q_{i,j,t}}{\sqrt{q_{i,i,t}q_{j,j,t}}}. \quad (13.2)$$

Dans cette équation,  $n_{i,t} = I[z_{i,t} < 0]z_{i,t}$ , ce qui signifie que  $n_{i,t}$  prend la valeur du terme d'erreur lorsque celui-ci est négatif et prend la valeur zéro dans les autres cas. Notons que cette définition de  $n_{i,t}$  peut être modifiée selon le contexte. Le coefficient  $g$  est la pondération associée au terme d'asymétrie tandis que  $\bar{n}_{i,j}$  représente l'espérance inconditionnelle de  $n_{i,t} \times n_{j,t}$ . Cappiello, Engle et Sheppard (2006) présentent ce modèle comme étant le DCC asymétrique (A-DCC) et le généralisent en substituant les paramètres  $\alpha, \beta$  et  $g$  par des matrices carrées. Ainsi, le AG-DCC permet que les corrélations interagissent entre elles. Toutefois, dans le cas de deux séries temporelles, cette extension ne s'impose pas étant donné qu'il n'existe qu'une corrélation. Pour que le processus soit cohérent, certaines conditions doivent être satisfaites :  $\alpha, \beta, g > 0$  et  $\alpha + \beta + \vartheta g < 1$  où

$$\vartheta = \max \text{valeur propre} \left\{ \left[ E \begin{bmatrix} z_i^2 & z_i z_j \\ z_i z_j & z_j^2 \end{bmatrix} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[ E \begin{bmatrix} n_i^2 & n_i n_j \\ n_i n_j & n_j^2 \end{bmatrix} \right] \left[ E \begin{bmatrix} z_i^2 & z_i z_j \\ z_i z_j & z_j^2 \end{bmatrix} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}.$$

La valeur de  $\vartheta$  est évaluée directement à partir de l'échantillon. Les termes  $\bar{\rho}_{i,j}$  et  $\bar{n}_{i,j}$  correspondent respectivement aux estimations de  $E[z_i z_j]$  et  $E[n_i n_j]$ .

Pour conclure, dans la classe des modèles DCC, la version de retour à la moyenne avec une composante asymétrique est celle qui offre le plus de flexibilité quant au processus de corrélation et est celle qui est le plus riche de tous les modèles présentés. Pour ces raisons, ce processus sera repris au chapitre portant sur le modèle d'allocation de l'actif.

### 3. Modèles et méthodologie

Cette section présente les modèles utilisés dans ce mémoire. En premier lieu, on estime le prix du risque  $\lambda$  pour le marché des actions. Pour ce faire, on utilise un modèle de la famille des GARCH-M. En second lieu, on détermine la contribution reliée à l'ajout du prix du risque dans un modèle d'allocation tactique, dans le cadre moyenne-variance. Dans ce cas, il est indispensable d'estimer la volatilité conditionnelle des rendements des obligations ainsi que les corrélations conditionnelles entre les rendements des différents actifs, ce qui est effectué, respectivement, à l'aide d'un modèle NGARCH et d'un modèle A-DCC. Pour conclure, la méthodologie nécessaire à l'estimation des divers paramètres est présentée.

#### 3.1 Modèle d'évaluation du prix du risque

L'estimation du prix du risque établi par le marché est réalisée à l'aide des modèles GARCH-M. Ces modèles permettent d'estimer directement, en une seule étape, le prix du risque systématique. Rappelons que le MIDAS nécessite l'obtention de données intra-journalières pour évaluer la volatilité lorsque les rendements sont quotidiens. Par ailleurs, le GARCH-M utilise plutôt la même fréquence pour toutes ses variables. Cela rend donc l'expérience plus facile à reproduire ou à mettre à jour, étant donné que la disponibilité de rendements intra-journaliers est restreinte pour de nombreux actifs canadiens. Puis, les GARCH-M, tel que présentés dans la revue de la littérature, offrent tous la flexibilité souhaitée afin de refléter l'asymétrie de la volatilité face aux signes des chocs de rendements et d'inclure l'anticipation des investisseurs quant à la volatilité des rendements des actions pour les 30 prochains jours.

Le modèle comprenant l'ensemble des extensions que nous allons considérer se présente comme suit :

$$(r_{m,t} - r_{f,t}) = c_m + \lambda h_{m,t} + \varepsilon_{m,t}, \quad (14.1)$$

$$h_{m,t} = \omega_m + \alpha_m (\varepsilon_{m,t-1} - \gamma_m \sqrt{h_{m,t-1}})^2 + \beta_m h_{m,t-1} + \delta_m VIXC_{t-1}^2. \quad (14.2)$$

Le rendement excédentaire des actions  $r_{m,t} - r_{f,t}$  est affecté par une constante  $c_m$ , le prix du risque  $\lambda$  pour le risque défini par  $h_{m,t}$ , ainsi qu'un terme d'erreur  $\varepsilon_{m,t}$ . Aussi, la variance conditionnelle  $h_{m,t}$  du terme d'erreur est reliée à une constante  $\omega_m$ , à un effet non linéaire retardé  $(\varepsilon_{m,t-1} - \gamma_m \sqrt{h_{m,t-1}})^2$ , à la variance conditionnelle retardée  $h_{m,t-1}$ , ainsi qu'à un facteur retardé  $VIXC_{t-1}^2$  défini comme étant la volatilité implicite dans le marché des options. Rappelons que les restrictions suivantes tiennent :  $\omega_m > 0$ ,  $\alpha_m \geq 0$ ,  $\beta_m \geq 0$  et  $\beta_m + \alpha_m(1 + \gamma_m^2) < 1$ .

D'un point de vue global, la spécification (14.1) correspond à l'équation (2.1) du modèle générique. La spécification (14.2) est un processus GARCH, auquel on ajoute une variance conditionnelle asymétrique ainsi que la volatilité implicite, tel que reporté à l'équation (6). Pour ce qui est du choix de la version asymétrique, le modèle NGARCH-M (4) est privilégié pour la raison spécifiée dans la revue de la littérature (voir la section 2.1.2). La composante asymétrie  $(\varepsilon_{m,t-1} - \gamma_m \sqrt{h_{m,t-1}})$  implique une réponse de la volatilité conditionnelle qui diffère selon le signe du choc. Spécifiquement, les chocs positifs ont tendance à réduire la volatilité tandis que les chocs négatifs l'augmentent. De plus, l'ajout d'un indice de volatilité implicite permet d'améliorer la prévision de la variance (voir la section 2.1.2). Contrairement aux rendements passés, la volatilité implicite dans le marché des options  $VIXC_{t-1}^2$  reflète l'opinion des investisseurs concernant le niveau de volatilité à venir dans les prix des actions. Étant donné que  $h_t$  correspond à la variance conditionnelle et que l'indice de volatilité correspond à l'écart-type conditionnelle, l'indice doit être élevé au carré, tel qu'effectué par Kanas (2013).

Certains auteurs sont portés à ajouter les valeurs retardées du rendement dans l'équation (2.1). Cependant, à une fréquence quotidienne, les données empiriques n'affichent pas de persistance, tel qu'il le sera démontré au chapitre 4. De plus, les facteurs tels que ceux de Fama-French ne sont pas pertinents à haute fréquence (Kim, Park et Chang, 2011). Selon ces derniers, la volatilité des rendements quotidiens est trop élevée pour pouvoir être expliquée par les facteurs Fama-French. Subséquemment, aucun rendement ni facteur retardé ne sera inclus dans les modèles.

Dans un autre ordre idée, il est possible d'imposer certaines contraintes concernant les paramètres. Tout d'abord, il est intéressant d'estimer le modèle avec les contraintes  $\gamma_m = 0$  et/ou  $\delta_m = 0$  dans l'objectif de comparer nos résultats avec ceux provenant d'autres papiers utilisant le GARCH-M classique. En effet, de nombreux articles présentent les résultats de ce modèle à titre comparatif (Bali et Peng, 2006; Guo, 2006; Kanas, 2012, 2013; León, Nave et Rubio, 2007). De la sorte, il est possible de distinguer l'apport individuel ou conjoint relié à l'effet d'asymétrie et à la volatilité implicite.

### **3.2 Modèle d'allocation de l'actif**

L'analyse de la répartition de l'actif est fréquemment réalisée dans un cadre moyenne-variance. Cette approche se limite au deux premiers moments conditionnels de la distribution des rendements. Dans ce contexte, il existe une seule combinaison d'actifs risqués qui est optimale. Cette approche est largement utilisée par les praticiens de la finance. Celle-ci permet de comparer les investissements sur la base de rendement par unité de volatilité. Cette méthode sous-entend que les individus possèdent une fonction d'utilité quadratique en ce qui a trait à leur richesse financière. Notons qu'il existe des fonctions d'utilité qui prennent en considération les moments supérieurs. Toutefois, il n'existe pas de solution explicite quant à la formation du portefeuille pour ces fonctions d'utilité. Les principaux avantages liés à l'utilité quadratique sont sa simplicité et sa solution explicite pour déterminer le portefeuille optimal, tandis que son principal défaut est de ne pas tenir compte des moments supérieurs de la distribution des rendements. Pour ces raisons et étant donné que le risque intra-horizon est important, tel que précisé à la section 2.2.1, l'objectif visant à maximiser la performance à toutes les périodes dans le cadre moyenne-variance semble le plus approprié.

Dans cette situation, l'allocation optimale du portefeuille d'actifs risqués est donc celle qui maximise le ratio de Sharpe. Ici, le théorème de séparation de Tobin (1958), stipulant qu'il n'existe qu'un seul portefeuille d'actif risqué, est appliqué. Advenant que ce portefeuille soit trop risqué pour un individu, celui-ci peut investir une partie de sa richesse dans des certificats de placements garantis, maximisant ainsi le rendement excédentaire par unité de volatilité, tout en maintenant un risque adéquat en fonction de

son aversion au risque. Dans le cas opposé, où le portefeuille n'est pas suffisamment risqué, il est possible d'envisager des produits avec levier intégré, d'opter pour un compte sur marge ou bien de privilégier l'épargne par rapport au remboursement hypothécaire. Pour la suite, uniquement le portefeuille d'actifs risqués est analysé.

Lorsqu'il est question de former un portefeuille d'actifs risqués, deux grandes classes d'actifs dominant : les actions et les titres à revenus fixes, plus précisément les obligations. Dans cette perspective, il est judicieux d'évaluer une simulation composée d'un indice du marché des actions et d'un indice du marché des obligations.

L'objectif de cette section est d'évaluer l'importance de la volatilité actuelle associée au marché des actions au moment d'établir des projections de rendement. Le modèle d'allocation de l'actif entre les actions et les obligations est le suivant :

$$w_{m,t} = \frac{(r_{b,t}^* - r_{f,t})\sigma_{m,t}\sigma_{b,t}\rho_{m,b,t} - (r_{m,t}^* - r_{f,t})\sigma_{b,t}^2}{(r_{m,t}^* + r_{b,t}^* - 2r_{f,t})\sigma_{m,t}\sigma_{b,t}\rho_{m,b,t} - (r_{m,t}^* - r_{f,t})\sigma_{b,t}^2 - (r_{b,t}^* - r_{f,t})\sigma_{m,t}^2}, \quad (15.1)$$

$$w_{b,t} = 1 - w_{m,t}. \quad (15.2)$$

La dérivation de l'équation (15) se trouve à l'annexe 1. La solution (15) fait intervenir les termes suivants.

$w_{m,t}$  et  $w_{b,t}$  sont les pondérations associées aux actions et aux obligations à la période  $t$  qui maximise le ratio de Sharpe.

$r_{f,t}$  correspond au taux sans risque en vigueur à la période  $t$ .

$r_{m,t}^*$  représente le taux de rendement anticipé sur les actions. L'allocation de l'actif entre les actions et les obligations est effectuée sous deux scénarios. Le premier correspond au scénario de référence et utilise le rendement anticipé des actions qui est disponible auprès d'institutions spécialisées en prévision financière. Celui-ci est davantage détaillé au chapitre 4. Le second scénario utilise le rendement conditionnel des actions, défini par l'équation (14.1), qui prend en considération la volatilité des rendements des actions. Dans ce scénario,  $r_{m,t}$  se calcul comme suit :

$$r_{m,t}^* = r_{f,t} + \hat{c}_m + \hat{\lambda} \hat{h}_{m,t}, \quad (16)$$

où  $\hat{c}_m$  et  $\hat{\lambda}$  sont les estimations du modèle GARCH-M, alors que  $\hat{h}_{m,t}$  est l'estimation de la variance conditionnelle à la période  $t$ . Ces simulations sont effectuées dans l'objectif d'identifier l'impact sur la détermination des pondérations de prendre ou non en considération la volatilité conditionnelle dans la prévision des rendements des actions. Des simulations supplémentaires sont effectuées en variant les valeurs des paramètres  $\hat{c}_m$  et  $\hat{\lambda}$  et sont présentés en détail à la section 5.2.3. À l'exception des prévisions de rendements pour les actions, toutes les autres variables seront les mêmes dans les deux scénarios afin que toutes les différences entre les simulations ne proviennent uniquement que de la méthode de prévision des rendements.

$r_{b,t}^*$  correspond au rendement sur les obligations qui est disponible auprès d'institutions spécialisées en prévision financière. Cette avenue semble être l'approche qui sera la plus utilisée en pratique depuis que ces projections sont uniformisées au Canada pour tous les planificateurs financiers<sup>10</sup>.

$\sigma_{m,t}$  se définit comme étant la volatilité conditionnelle des rendements des actions.

Cette volatilité est calculée telle que  $\sigma_{m,t} = \sqrt{\hat{h}_{m,t}}$  à l'aide de l'équation (14.2). Dans les deux scénarios mentionnés ci-dessus, la même série chronologique de variance conditionnelle est utilisée.

$\sigma_{b,t}$  est la volatilité conditionnelle des obligations. Celle-ci correspond à  $\sqrt{h_{b,t}}$  dans le modèle suivant :

$$(r_{b,t} - r_{f,t}) = c_b + (r_{b,t}^* - r_{f,t}) + \varepsilon_{b,t}, \quad (17.1)$$

$$h_{b,t} = \omega_b + \alpha_b (\varepsilon_{b,t-1} - \gamma_b \sqrt{h_{b,t-1}})^2 + \beta_b h_{b,t-1}, \quad (17.2)$$

où  $r_{b,t} - r_{f,t}$  est le rendement excédentaire des obligations,  $c_b$  est une constante,  $r_{b,t}^* - r_{f,t}$  est le rendement excédentaire anticipé des obligations et  $\varepsilon_{b,t}$  est le terme d'erreur. Il est à noter qu'un NGARCH est appliqué pour modéliser la variance conditionnelle des résidus centrés de la différence entre le rendement réalisé des

---

<sup>10</sup> <http://www.iqpf.org/userfiles/File/outils/IQPF-normes-projection2015.pdf>

obligations et celui prédit par les institutions spécialisées en prévision financière. De cette façon, le processus de variance conditionnelle des obligations est semblable à celui des actions. La constante  $c_b$  est ajoutée afin de tenir compte de l'existence potentielle d'une erreur systématique de prévision dans notre échantillon.

$\rho_{m,b,t}$  est le coefficient de corrélation conditionnelle entre les actions et les obligations à la date  $t$ . On l'estime à l'aide du modèle A-DCC (13) qui se présente comme suit :

$$\begin{aligned}
 q_{m,b,t} &= (1 - \alpha_q - \beta_q)\bar{\rho}_{m,b} - g_q\bar{n}_{m,b} + \alpha_q(z_{m,t-1}z_{b,t-1}) + g_q(n_{m,t-1}n_{b,t-1}) \\
 &\quad + \beta_q(\rho_{m,b,t-1}), \\
 \rho_{m,b,t} &= \frac{q_{m,b,t}}{\sqrt{q_{m,m,t}q_{b,b,t}}}, \\
 z_{m,t} &= \varepsilon_{m,t}/\sqrt{h_{m,t}}, \quad z_{b,t} = \varepsilon_{b,t}/\sqrt{h_{b,t}}, \\
 n_{m,t} &= I[z_{m,t} > 0]z_{m,t}, \quad n_{b,t} = I[z_{b,t} > 0]z_{b,t},
 \end{aligned} \tag{18}$$

où,  $\alpha_q$ ,  $g_q$  et  $\beta_q$  sont les paramètres du modèle, alors que  $I[\cdot]$  est une fonction indicatrice qui prend la valeur 1 lorsque l'affirmation est vraie et 0 dans les autres cas. Ce modèle capte le cas où la corrélation conditionnelle répond différemment en présence de chocs positifs simultanément pour les deux actifs, d'où l'asymétrie. Plus spécifiquement, il s'agit du cas où l'investissement est stimulé à l'aide de différentes politiques économiques, ce qui rend les deux actifs corrélés positivement entre eux.

Une fois que la pondération du portefeuille investi en actions et en obligations est calculée pour toutes les périodes de la simulation portant sur des données historiques et sous les deux scénarios, on peut construire deux séries temporelles représentant le rendement de portefeuilles  $r_{p,t} = w_{m,t}r_{m,t} + w_{b,t}r_{b,t}$ . Par la suite, il est possible de comparer les performances de ces scénarios afin d'évaluer l'apport du prix du risque dans un modèle d'allocation tactique. La comparaison des portefeuilles est effectuée sur les critères de rendement, de volatilité, de ratio de Sharpe, ainsi que du maximum de perte. Le portefeuille préféré d'un individu averse aux risques est celui qui présente le plus de rendement et le moins de volatilité, qui présente le ratio de Sharpe le plus élevé et qui affiche le plus faible maximum de perte.

### 3.3 Méthodologie

Les paramètres de l'équation (14) sont estimés à l'aide de la méthode de maximum de vraisemblance. Celle-ci consiste à maximiser la somme du logarithme naturel de la fonction de densité de probabilité (pdf) associée aux termes d'erreur  $\varepsilon_{m,t}$ . Notons que les restrictions concernant les paramètres du processus de variance conditionnelle sont imposées à même les conditions de la maximisation. Cette dernière est effectuée à l'aide d'un algorithme de programmation quadratique séquentielle (SQP), algorithme de pointe en optimisation non-linéaire selon le fournisseur de logiciel Mathworks<sup>11</sup>.

Étant donné que les données financières ne sont pas distribuées normalement (skewness négatif et kurtosis excédentaire positif), la pdf associée à la distribution normale ne peut pas être directement utilisée. Sous l'hypothèse que les deux premiers moments de la distribution sont valides, il est possible d'utiliser le quasi maximum de vraisemblance. Toutefois, la perte d'efficacité liée à son utilisation mène à une augmentation de la variance des estimateurs qui peut être jusqu'à 6.25 fois plus élevée (Engle et Gonzalez-Rivera, 1991). En outre, ne pas prendre en considération l'asymétrie négative caractérisant les données risque d'affecter l'estimation de  $\lambda$  à la baisse en accordant trop d'importance aux rendements présentant une perte de plus de trois écarts-type, ce qui est invraisemblable sous la loi normale.

Dans cette optique, en optant pour une approximation de la fonction de densité, impliquant les quatre premiers moments, l'expansion Gram-Charlier type A permet de corriger la pdf pour tenir compte du skewness et du kurtosis. Plusieurs auteurs utilisent cette approximation pour l'estimation obtenue à partir de GARCH (Brownlee, Engle et Kelly, 2011; Gallant et Tauchen, 1989; Lee et Tse, 1991) ou bien pour l'évaluation des prix des options (Christoffersen, 2012). Cette extension est présentée en détail à l'annexe 2.

Lors de l'estimation, les moments supérieurs inconditionnels sont estimés à chaque itération. L'algorithme permet de maximiser la vraisemblance en choisissant les valeurs

---

<sup>11</sup> <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/constrained-nonlinear-optimization-algorithms.html#f26684>

des paramètres  $c_m, \lambda, \omega_m, \alpha_m, \gamma_m, \beta_m, \delta_m$  ainsi que la variance conditionnelle pour la période initiale  $E[\varepsilon_{m,1}^2] = h_{m,1}$ . Pour ce qui est de la variance des estimateurs des paramètres, celle-ci est déterminée à l'aide de l'inverse de la négative de l'hessien de la log-vraisemblance (Jondeau, Poon et Rockinger, 2007). Les valeurs p sont calculées sous l'hypothèse que les estimateurs des paramètres sont distribués normalement.

Pour vérifier l'apport lié à l'utilisation de l'expansion Gram-Charlier, les modèles sont parfois estimés à l'aide de la pdf associée à la loi normale. Dans ces cas, nous posons l'hypothèse sous laquelle les deux premiers moments caractérisent entièrement la distribution. Cela permet d'utiliser le maximum de vraisemblance, plutôt que le quasi maximum de vraisemblance. Ainsi, le calcul des valeurs p se fait exactement de la même façon que lorsque l'expansion Gram-Charlier est utilisée. Notons que ce choix n'affecte pas la valeur des estimations, mais uniquement la variance des paramètres.

Lors de l'analyse empirique, une extension vise à faire varier la fréquence des rendements pour examiner les éventuels changements dans le prix du risque. Pour ce cas, les rendements sont sommés à l'intérieur de chaque période de 2, 5 ou 21 jours. Pour les périodes de 5 jours, la dernière donnée quotidienne de l'échantillon est éliminée, tandis que pour les périodes de 21 jours, les dix dernières données quotidiennes sont retirées.

Afin d'évaluer l'importance de la prime de risque  $\hat{\lambda} \hat{h}_{m,t}$  dans l'équation (16), nous allons calculer le poids moyen de cette prime de risque dans la prévision du rendement excédentaire. Pour ce faire, nous déterminons la portion du rendement excédentaire prévu qui est expliquée par la prime de risque de la manière suivante :

$$\text{Rendement capté} = \frac{\text{moyenne}(\hat{\lambda} \hat{h}_{m,t})}{\hat{c}_m + \text{moyenne}(\hat{\lambda} \hat{h}_{m,t})}. \quad (19)$$

Plus le rendement capté se rapproche de 100%, plus le rôle de la prime de risque est important par rapport à la constante  $\hat{c}_m$ , où cette dernière représente le rendement inconditionnel au niveau de risque. Toutefois, cette mesure n'est définie que pour des valeurs positives des estimations de  $c_m$  et  $\lambda$ .

Les paramètres de l'équation (17) sont estimés exactement de la même façon que ceux de l'équation (14). La somme du logarithme naturel de la pdf associée aux termes d'erreur  $\varepsilon_{b,t}$  est maximisée. L'algorithme détermine les valeurs des paramètres  $c_b, \omega_b, \alpha_b, \gamma_b, \beta_b$  ainsi que la variance conditionnelle pour la période initiale  $E[\varepsilon_{b,1}^2] = h_{b,1}$ .

Pour ce qui est de l'équation (18), décrivant la corrélation entre les rendements des actions et des obligations, ces paramètres sont estimés par maximisation du log de la vraisemblance multivariée, où les valeurs des paramètres intervenant dans (14) et (17) sont fixées (plutôt qu'estimées) aux estimations obtenues précédemment. Les détails concernant la pdf multivariée de l'expansion Gram-Charlier se trouvent à l'annexe 2. Cette approche en deux étapes respecte la méthodologie d'Engle (2002) et mène à des estimations convergentes. Tout comme pour les équations (14) et (17), les restrictions du modèle A-DCC sont imposées (voir la section 2.2.2). L'algorithme SQP choisit les valeurs des paramètres  $\alpha_q, g_q, \beta_q$  ainsi que la corrélation conditionnelle pour la période initiale  $E[z_{m,1}z_{b,1}] = \rho_{m,b,1}$ . Le calcul des valeurs p suit la même méthodologie qu'exprimée précédemment.

À l'aide de la variance conditionnelle des actions et des obligations, de la corrélation conditionnelle ainsi que des projections de rendements, les portefeuilles sont simulés à l'aide du modèle (15) sous différentes hypothèses concernant la projection des rendements des actions.

## 4. Données

Les données s'échelonnent sur la période s'étalant du 2 décembre 2002 au 27 février 2015, comprenant 3076 jours ouvrables. La date de début est déterminée à partir de la disponibilité du premier indice de volatilité implicite sur le marché des options, soit l'indice de volatilité MXV.

Tout d'abord, les rendements des actions et des obligations au Canada sont représentés par les fonds négociés en bourse (FNB) de la famille iShare. Pour les actions, l'*iShares S&P/TSX 60 Index ETF (XIU)* est retenu car il représente les 60 plus grandes capitalisations boursières canadiennes. De plus, il est le titre sous-jacent aux indices de volatilité implicite du marché des options au Canada. Pour les obligations, l'*iShares Canadian Universe Bond Index ETF (XBB)* est utilisé puisqu'il représente le marché obligataire canadien de qualité (*investment grade*). Aussi, son indice de référence est largement utilisé par l'industrie financière au Canada en ce qui a trait au marché des titres à revenus fixes, dont IQPF. Avant 2014, l'indice était nommé *DEX Universe Bond Index*. Les données proviennent de Yahoo Finance et aucune donnée n'est manquante pour la période. Les rendements sont calculés comme étant la soustraction des logarithmes naturels entre la valeur du titre de la période en cours et celle de la journée ouvrable précédente, ajustée pour les dividendes et le fractionnement. Les dividendes sont supposés être réinvestis la journée suivant celle à laquelle le registre des actionnaires est déterminé pour le versement du dividende.

Puis, le rendement de l'actif sans risque est déterminé par le *Canadian Dollar Offered Rate (CDOR)* d'une durée d'un mois. Il s'agit du taux offert pour les acceptations bancaires canadiennes. Le CDOR est utilisé comme taux sans risque pour les contrats à terme sur acceptations bancaires canadiennes (BAX) ainsi que pour les swaps de taux canadiens. Également, ce taux de rendement est plus représentatif du taux auquel un investisseur peut placer ses économies dans un véhicule garanti que les rendements des bons du Trésor. Les données proviennent de Bloomberg. Douze valeurs sont manquantes, correspondant aux jours fériés des banques commerciales. Pour ces valeurs, le taux du CDOR de la journée précédente est utilisé.

Ensuite, l'indice de volatilité implicite est mesuré par le MVX et par le VIXC. Le MVX est disponible à partir du 2 décembre 2002. À partir du 1<sup>er</sup> octobre 2009, l'indice VIXC est utilisé. Le changement d'indice est dû à une modification dans la méthodologie liée au calcul de l'indice. Plus précisément, le VIXC tient compte de l'asymétrie de la volatilité en utilisant différents prix de lever pour les options de l'indice S&P/TSX 60 tandis que le MVX utilisait uniquement les prix des options à parité sur le FNB XIU. Les deux indices représentent la volatilité annuelle en points de pourcentage qui est implicite dans le marché des options pour le FNB XIU et de son indice sous-jacent pour un horizon de 30 jours. Dans le cadre de ce mémoire, la différence de méthodologie dans les deux indices n'affecte pas de façon importante notre démarche et nos résultats. Les niveaux des deux indices se suivent et la motivation première de la Bourse de Montréal d'effectuer ce changement était la possibilité de créer des produits dérivés sur l'indice VIXC, ce qui n'était pas possible sur l'indice MVX. Les données proviennent de la Bourse de Montréal. Une seule valeur est manquante et elle est remplacée par la valeur de la journée précédente. Pour fins de simplification, on fait référence à la série temporelle constituée de ces deux indices sous le nom de VIXC.

Les projections pour le rendement des actions et des obligations proviennent des évaluations actuarielles du Régime de Pensions du Canada (RPC) et de l'IQPF. Pour les années 2002 à 2004, les données correspondent à l'évaluation actuarielle du RPC de 2000 et pour les années 2005 à 2007, de celle de 2003. Pour les années 2008 à 2014, il s'agit des normes de projection de l'IQPF de chacune des années. Pour l'année 2015, les projections de 2014 sont utilisées, car au 27 février 2015, les projections de 2015 n'étaient pas encore accessibles. Pour les normes de l'IQPF, celles-ci seront mises à jour le lendemain de la date de leurs publications. Les normes de l'IQPF sont actuellement établies en combinant de manière équipondérant les hypothèses du RRQ, du RPC, de l'enquête annuelle des gestionnaires de Towers Watson, de l'indice d'Aon Hewitt et des rendements historiques. Il s'agit de prévision à moyen terme et à long terme des rendements nominaux bruts. On fait référence à ces projections comme étant celles de l'IQPF dans la suite du mémoire.

Le tableau 1 résume les principales statistiques descriptives pour les quatre indices.

Tableau 1 : Statistiques descriptives.

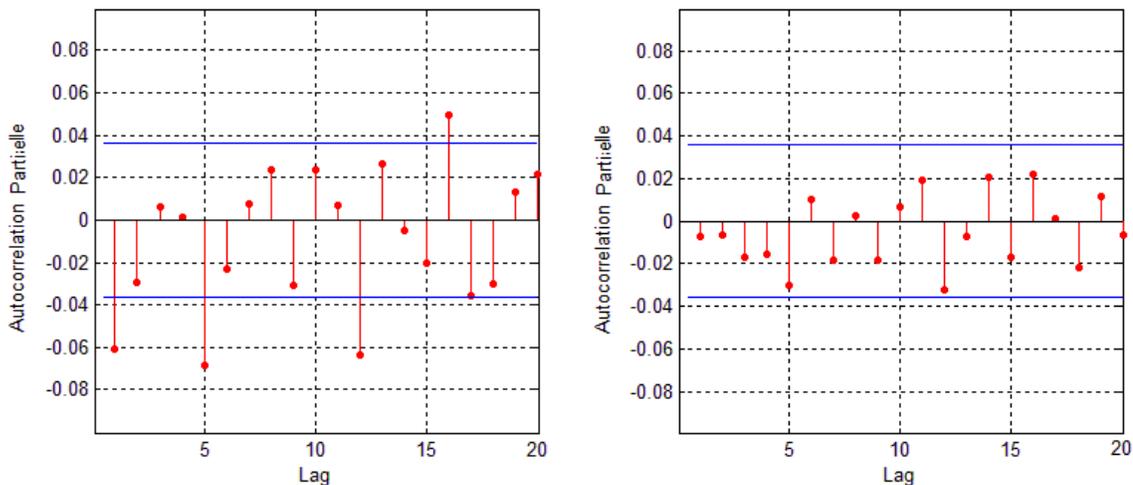
Statistiques	XIU		XBB		CDOR	VIXC
	Quot.	Annualisée	Quot.	Annualisée		
Moyenne	0,035%	8,78%	0,019%	4,89%	2,16%	18,24
Médiane	0,076%	19,03%	0,032%	8,05%	1,45%	15,75
Minimum	-8,525%		-2,357%		0,39%	7,80
Maximum	7,960%		1,375%		5,06%	87,68
Écart-type	1,129%	17,89%	0,298%	4,72%	1,30%	8,59
Skewness	-0,62		-0,34		0,51	2,95
Kurtosis	11,70		5,89		2,02	14,50

Notes : XIU est l'indice d'actions et les rendements sont quotidiens. XBB est l'indice d'obligations et les rendements sont quotidiens. CDOR est le taux sans risque et correspond à un rendement annuel. VIXC est l'indice de volatilité implicite et correspond à un taux annuel, en points de pourcentage. Les moyennes et médianes annualisées correspondent aux valeurs quotidiennes multipliées par 251 jours. Les écarts-type annualisés correspondent aux valeurs quotidiennes multipliées par  $\sqrt{251}$  jours.

Les statistiques correspondent à ce que l'on devrait s'attendre. Le rendement moyen des actions est supérieur à celui des obligations, supposément moins risquées. Les rendements moyens des actions et des obligations sont inférieurs aux médianes, ce qui met en évidence que les données sont caractérisées par une asymétrie négative. Cette asymétrie est plus forte pour les actions que pour les obligations, avec une médiane plus de deux fois supérieure à sa moyenne. Les skewness associés aux rendements des actions et des obligations sont négatifs, mais le skewness (en valeur absolue) relié aux rendements des actions est deux fois plus élevé. La volatilité des rendements des actions est près de quatre fois plus élevée que celle des rendements des obligations. Il est intéressant de noter que la volatilité annualisée des rendements des actions correspond à 17,89%, ce qui est légèrement inférieur à la moyenne du VIXC. Ce dernier indice est connu pour être biaisé à la hausse.

La figure 1 présente les autocorrélations partielles. En ce qui a trait à l'autocorrélation partielle des rendements des actions, quelques valeurs retardées sont significativement différentes de zéro au seuil de 95%. Toutefois, lorsque les rendements des actions sont standardisés afin de retirer l'hétéroscédasticité à l'aide d'un GARCH(1,1), plus aucune valeur retardée n'est significativement différente de zéro. Cela nous indique que les rendements courants et retardés n'ont aucun pouvoir prédictif sur les rendements futurs.

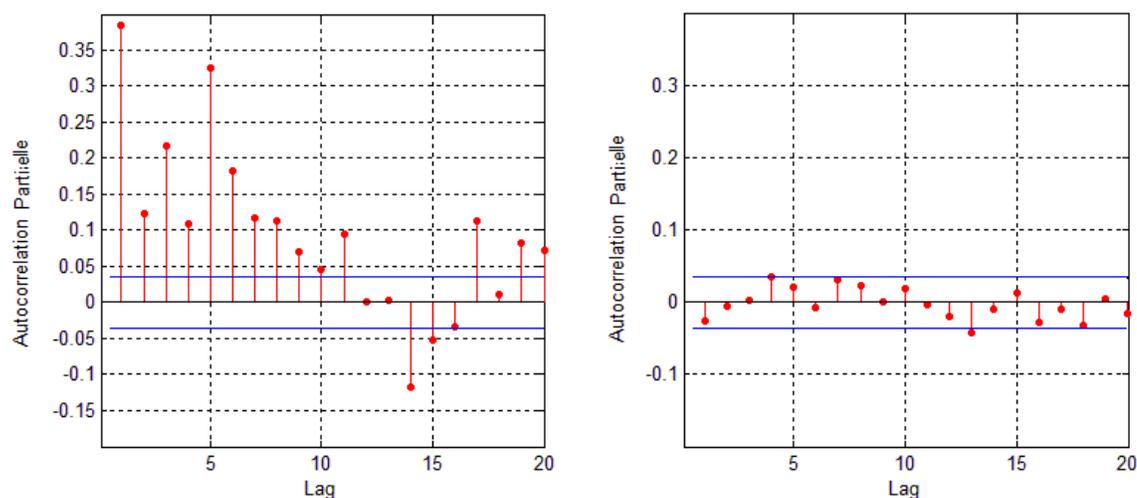
Figure 1: Autocorrélation partielle des rendements des actions.



Notes : À gauche, l'autocorrélation partielle est estimée sur les rendements des actions. À droite, l'autocorrélation est estimée sur les rendements standardisés à l'aide d'un processus GARCH(1,1).

La figure 2 met en évidence que lorsque les rendements des actions sont élevés au carré, ceux-ci présentent une forte autocorrélation. Ceci indique l'existence d'hétéroscédasticité conditionnelle. Cependant, lorsque les rendements standardisés à l'aide d'un GARCH(1,1) sont élevés au carré, les valeurs retardées ne sont plus significativement différentes de zéro. Cela suggère qu'un processus GARCH(1,1) est une spécification adéquate pour décrire l'hétéroscédasticité conditionnelle.

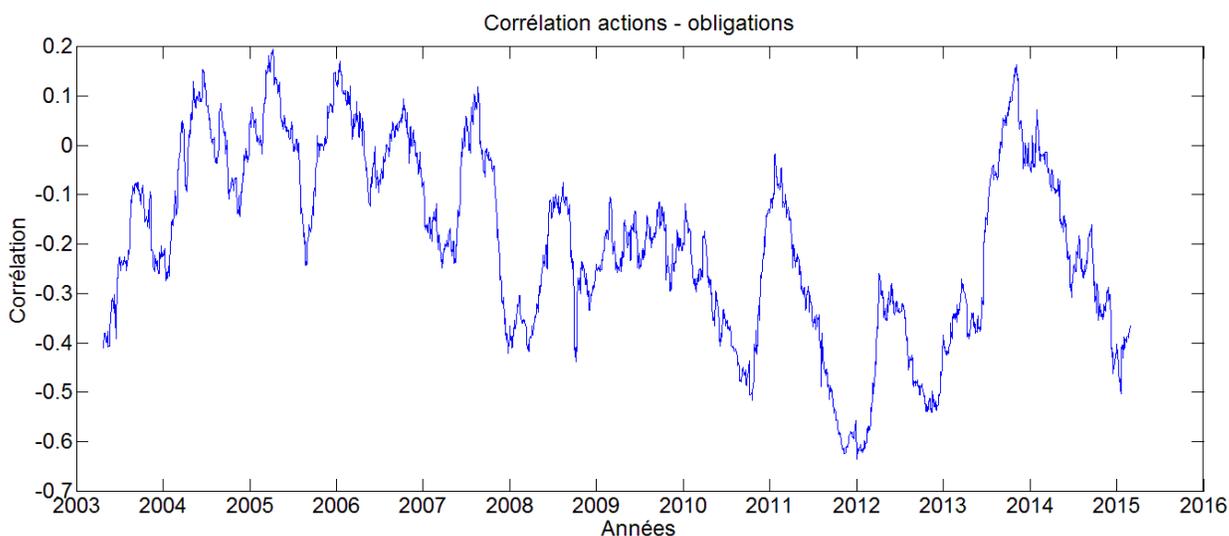
Figure 2: Autocorrélation partielle du carré des rendements des actions.



Notes : À gauche, l'autocorrélation partielle est estimée sur les carrés des rendements des actions. À droite, l'autocorrélation est estimée sur les carrés des rendements standardisés à l'aide d'un processus GARCH(1,1).

Dans les chapitres précédents, il a été mis en évidence que l'allocation tactique est importante lorsque la corrélation entre les rendements des actions et des obligations varie dans le temps. La figure 3 présente la corrélation entre les rendements des deux actifs à l'aide d'une fenêtre glissante de 100 jours. La corrélation semble avoir tendance à osciller autour de zéro en période de croissance économique et prendre des valeurs plus basses en période de stress économique, tel qu'en 2008 ainsi qu'en 2011. Toutefois, en ce qui concerne l'avenir, les taux d'intérêt actuels qui sont très bas restreignent la possibilité que les obligations prennent beaucoup de valeur en situations de krach boursier, ce qui risque de réduire la diversification entre les actions et les obligations.

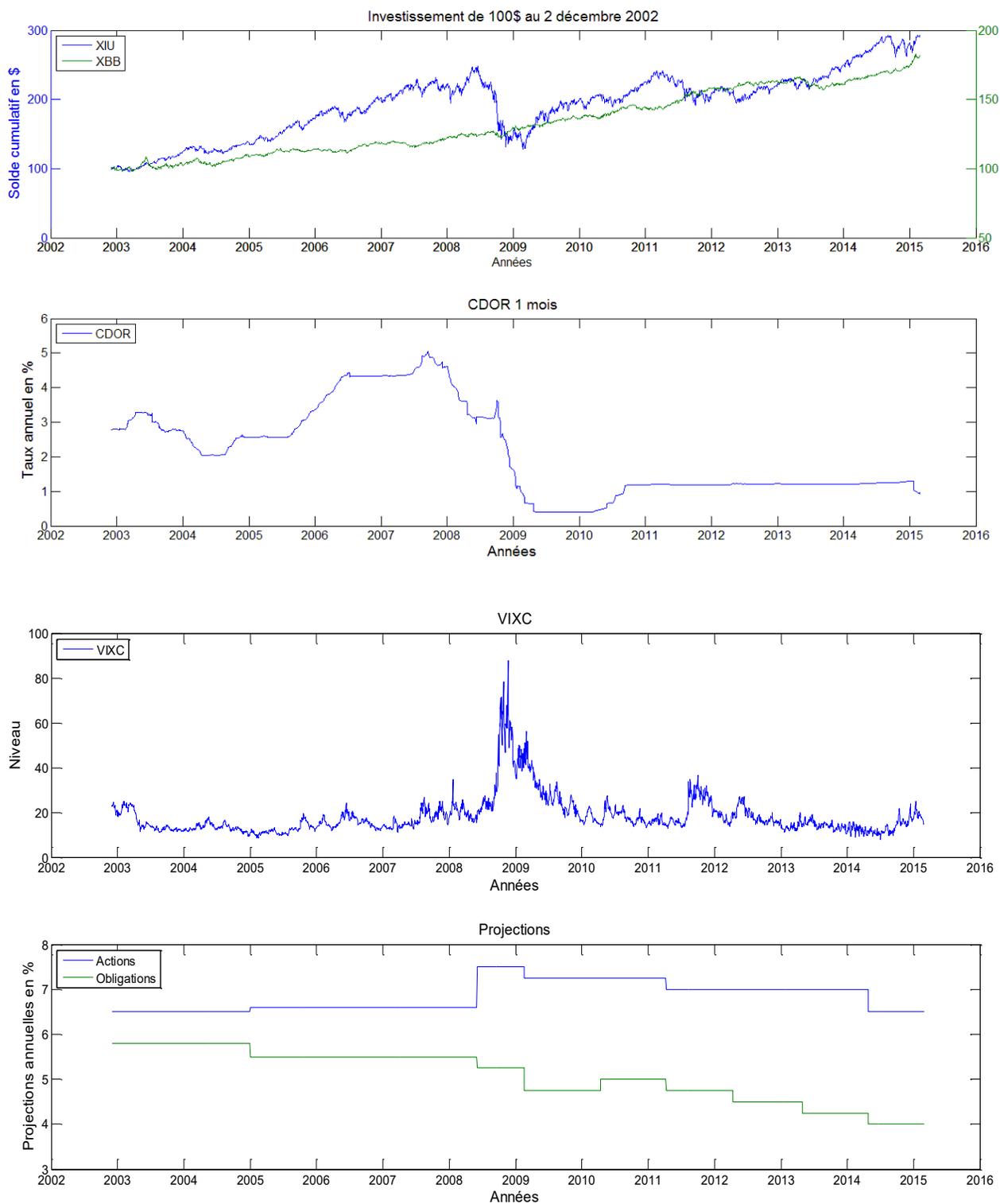
Figure 3: Corrélation approximée entre les actions et les obligations.



Note : La corrélation est estimée pour les rendements des actions et des obligations à l'aide d'une fenêtre glissante de 100 jours ouvrables.

La figure 4 présente l'évolution des rendements, de la volatilité implicite sur le marché des options et des projections financières. Il est facile de percevoir les effets de la crise financière de 2008, ainsi que la crise de la dette souveraine européenne de 2011. À la fin 2008, les actions ont perdu beaucoup de valeur, le taux sans risque a baissé et la volatilité implicite sur le marché des options a atteint des sommets. Par la suite, les actions ont repris de la valeur, puis ont subi une seconde baisse en 2011. Le VIXC a également augmenté substantiellement en 2011, alors que le taux sans risque est resté bas depuis la crise financière de 2008. Pour ce qui est des projections de rendements, celles-ci sont révisées à la baisse régulièrement depuis la crise financière. Enfin, l'écart entre les rendements projetés des actions et des obligations n'a cessé de croître dans le temps. Il est à noter que puisque les projections ne sont pas à court terme et qu'il y a une variance élevée dans les rendements des actions et des obligations, les rendements annuels réalisés divergent considérablement des projections d'une année à l'autre.

Figure 4 : Évolutions des données.



## 5. Résultats empiriques

Ce chapitre présente d'abord les résultats relativement au prix du risque. Ensuite, les résultats ayant trait à l'allocation de l'actif dans un portefeuille d'actifs risqués sont discutés.

### 5.1 Prix du risque

Cette section présente les valeurs du prix du risque obtenues en estimant les équations (14.1)- (14.2). Par la suite, une analyse de la spécification du modèle est effectuée à partir de cinq axes : la fonction de densité, la composante asymétrique du modèle, le choix de la mesure de risque, la fréquence des données et le conditionnement sur différents régimes.

#### 5.1.1 Estimation du prix du risque

Trois éléments doivent être portés à notre attention lorsque nous évaluons le prix du risque  $\lambda$  : le signe de celui-ci, sa significativité, ainsi que la proportion du rendement moyen captée par la prime de risque. Un signe positif pour  $\lambda$  signifie qu'une augmentation du risque mène à un rendement espéré plus élevé. Puis, lorsque  $\lambda$  est significativement différent de zéro, il est possible d'affirmer que le rendement dépend du risque. Pour finir, lorsque la prime de risque  $\lambda h_{m,t}$  capture une grande proportion du rendement excédentaire prévu, alors le facteur de risque est bien spécifié, sous l'hypothèse que seul le risque est rémunéré.

Le tableau 2 présente les paramètres estimés de l'équation (14) pour différentes combinaisons de restrictions sur les paramètres d'asymétrie  $\gamma_m$  et de volatilité implicite des options  $\delta_m$ . Étant donné que  $VIXC^2$  correspond à la variance annuelle, ce facteur est divisé par 251 jours. Ainsi, le paramètre  $\delta_m$  affecte une variable qui est du même ordre de grandeur que  $h_{m,t}$ .

Tableau 2 : Estimation du prix du risque.

Restrictions	$c_m$	$\lambda$	$\omega_m$	$\alpha_m$	$\gamma_m$	$\beta_m$	$\delta_m$
$\gamma_m, \delta_m = 0$	0,00045 (0,02)	1,07 (0,60)	0,00 (0,00)	0,07 (0,00)		0,91 (0,00)	
$\delta_m = 0$	0,00018 (0,19)	1,02 (0,02)	0,00 (0,00)	0,05 (0,00)	1,01 (0,00)	0,88 (0,00)	
$\gamma_m = 0$	0,00042 (0,04)	1,18 (0,63)	0,00 (0,41)	0,09 (0,41)		0,82 (0,00)	0,06 (0,03)
aucune	0,00005 (0,73)	2,84 (0,00)	0,00 (0,03)	0,06 (0,00)	1,32 (0,00)	0,77 (0,00)	0,05 (0,00)

Notes : Estimations du modèle (14) obtenues à l'aide de l'expansion Gram-Charlier. Sous chaque valeur estimée se trouve entre parenthèses la valeur p calculée sous l'hypothèse que les estimateurs sont distribués normalement.

Dans tous les cas, l'estimation du prix du risque est positive, signifiant que la relation risque-rendement est positive. L'obtention de ce signe est en accord avec les résultats rapportés dans plusieurs articles (Bali et Peng, 2006; French, Schwert et Stambaugh, 1987; Kanas, 2012, 2013; León, Nave et Rubio, 2007). De plus, un signe positif pour  $\lambda$  respecte la théorie de Merton (1973, 1980).

L'ajout de la composante asymétrique dans le processus de variance conditionnelle implique que l'estimation de  $\lambda$  est significativement différente de zéro au seuil de 5%, tandis que son omission mène à des estimations de  $\lambda$  qui ne sont pas significativement différentes de zéro. Ce résultat est aussi documenté par León, Nave et Rubio (2007).

L'estimation du paramètre  $\delta_m$  de la variable  $VIXC^2$  est significativement différente de zéro, tout comme l'a observé Kanas (2012, 2013). Par ailleurs, l'omission de la composante asymétrique implique que l'estimation du prix du risque n'est pas significativement différente de zéro. Toutefois, en combinant les composantes d'asymétrie et de volatilité implicite, l'estimation de  $\lambda$  augmente et est significativement différente de zéro.

Tableau 3 : Proportion du rendement excédentaire prévu capturée par la prime de risque.

Restrictions	$c_m$	$\lambda$	% $\lambda h_{m,t}$
$\gamma_m, \delta_m = 0$	0,00045 (0,02)	1,07 (0,00)	22,50%
$\delta_m = 0$	0,00018 (0,19)	1,02 (0,02)	42,26%
$\gamma_m = 0$	0,00042 (0,04)	1,18 (0,63)	24,92%
aucune	0,00005 (0,73)	2,84 (0,00)	86,45%

Notes : La proportion du rendement excédentaire prévu capturée par la prime de risque est basée sur les estimations du modèle (14) obtenues à l'aide de l'expansion Gram-Charlier. Sous chaque valeur estimée se trouve entre parenthèses la valeur p calculée sous l'hypothèse que les estimateurs sont distribués normalement.

Cette synergie est illustrée au tableau 3 en présentant la proportion du rendement excédentaire prévu qui est reliée à la prime de risque  $\lambda h_{m,t}$ . Dans la version sans asymétrie, la prime de risque explique un peu moins que le quart du rendement excédentaire prévu. Lorsque l'on tient compte de l'asymétrie, ce taux double, suggérant que l'asymétrie est importante. Si on se limite au modèle (1) de Merton (1973, 1980), deux interprétations sont possibles : soit le risque est mal spécifié, soit une portion du rendement excédentaire prévu n'est pas reliée à la prise de risque. Cependant, lorsque le modèle est évalué en combinant les composantes d'asymétrie et de volatilité implicite, la prime de risque capte environ 86% du rendement excédentaire prévu. De plus, puisque l'estimation de la constante  $c_m$  n'est pas significativement différente de zéro, cela signifie que seul le risque semble rémunéré. Il n'est toutefois pas possible de comparer ses résultats avec d'autres articles étant donné que ceux-ci ne présentent pas ces estimations.

Somme toute, ces résultats suggèrent que l'utilisation d'un modèle de variance conditionnelle asymétrique avec volatilité implicite du marché des options est nécessaire afin de bien évaluer le prix du risque.

### 5.1.2 Spécification du modèle d'estimation du prix du risque

Maintenant, cinq extensions du modèle visant à estimer le prix du risque sont considérées. La première extension est reliée au choix de la fonction de densité de probabilité. La seconde extension porte sur des spécifications alternatives d'asymétrie du GARCH-M. La troisième extension aborde le choix de la mesure de risque. La quatrième extension considère d'autres fréquences de rendements. La dernière extension évalue un modèle à changements de régime afin de contrôler pour les différentes conditions des marchés financiers.

#### Fonction de densité de probabilité

Le choix de la fonction de densité de probabilité (pdf) pour l'estimation du modèle par maximum de vraisemblance peut potentiellement avoir des conséquences importantes pour la détermination du prix du risque. En pratique, la loi normale est fréquemment utilisée pour modéliser les résidus standardisés. Toutefois, lorsque ces derniers ne sont pas distribués normalement, des conclusions erronées peuvent être obtenues.

Les estimations rapportées à la section 5.1.1 sont effectuées en approximant la pdf à partir de l'expansion Gram-Charlier. Cette approximation de la fonction de densité prend en considération les moments supérieurs de la distribution, tandis que la loi normale se limite aux deux premiers moments. Certains auteurs tels que French, Schwert et Stambaugh (1987) utilisent la pdf de la loi normale afin d'estimer le modèle GARCH-M. Toutefois, ceux-ci reconnaissent que leurs estimations peuvent être biaisées étant donné que les résidus standardisés sont caractérisés par une asymétrie négative, ce qui viole l'hypothèse de normalité des résidus standardisés.

Afin de vérifier les conséquences suite à l'imposition de la loi normale, le tableau 4 présente les estimations obtenues sous l'hypothèse que seuls les deux premiers moments conditionnels caractérisent la distribution. Il est intéressant de noter que les estimations du processus de variance conditionnelle obtenues sous la loi normale sont semblables à celles obtenues à l'aide de l'expansion Gram-Charlier. Par ailleurs, les estimations de  $\lambda$  sont systématiquement inférieures et celles pour  $c_m$  sont systématiquement supérieures. En outre, sous l'hypothèse de la loi normale, aucune des

quatre estimations de  $\lambda$  est significativement différente de zéro et de plus, l'une d'entre elles est numériquement négative. Il est possible de conclure en comparant les tableaux 2 et 4 que l'utilisation de l'expansion Gram-Charlier, plutôt que la loi normale, a un effet important sur le signe et la significativité de l'estimation du prix du risque.

Tableau 4 : Estimation du prix du risque avec la loi normale.

Restrictions	$c_m$	$\lambda$	$\omega_m$	$\alpha_m$	$\gamma_m$	$\beta_m$	$\delta_m$
$\gamma_m, \delta_m = 0$	0,00056 (0,00)	0,07 (0,96)	0,00 (0,00)	0,08 (0,00)		0,91 (0,00)	
$\delta_m = 0$	0,00022 (0,20)	0,59 (0,73)	0,00 (0,00)	0,06 (0,00)	0,94 (0,00)	0,88 (0,00)	
$\gamma_m = 0$	0,00057 (0,00)	-0,57 (0,66)	0,00 (0,65)	0,09 (0,00)		0,81 (0,00)	0,07 (0,00)
aucune	0,00015 (0,51)	1,78 (0,39)	0,00 (0,28)	0,06 (0,00)	1,17 (0,00)	0,77 (0,00)	0,05 (0,04)

Notes : Estimations du modèle (14) obtenues à l'aide de la loi normale. Sous chaque valeur estimée se trouve entre parenthèses la valeur p calculée sous l'hypothèse que les estimateurs sont distribués normalement.

### GARCH-M asymétrique

La composante asymétrique du processus de variance conditionnelle peut s'exprimer de plus d'une façon. Dans la revue de la littérature, l'EGARCH est présenté comme une alternative au NGARCH afin de considérer l'éventuelle présence d'asymétrie. Lorsque le NGARCH est substitué par l'EGARCH dans le modèle (14), nous obtenons :

$$(r_{m,t} - r_{f,t}) = c_m + \lambda h_{m,t} + \varepsilon_{m,t}, \quad (20.1)$$

$$\ln h_{m,t} = \omega_m + \alpha_m \left( |z_{m,t-1}| - \sqrt{2/\pi} \right) + \gamma_m z_{m,t-1} + \beta_m \ln h_{m,t-1} + \delta_m \ln VIXC_{t-1}^2. \quad (20.2)$$

Lorsque nous estimons l'équation ci-dessus à l'aide de la pdf de la loi normale ainsi que de l'expansion Gram-Charlier, nous obtenons des estimations de  $\lambda$  significativement différentes de zéro, tel que présenté au tableau 5. Toutefois, ces estimations sont

inférieures à celles associées au NGARCH. De plus, le prix du risque défini par le modèle (20) et estimé à l'aide de l'expansion Gram-Charlier capture uniquement 59,19% du rendement excédentaire prévu, par rapport à 86,45% pour le modèle (14) impliquant un NGARCH. Il faut toutefois noter que l'EGARCH (20.2) est spécifiquement conçu pour la loi normale, puisque le terme  $\sqrt{2/\pi}$  représente l'espérance de  $|z_{m,t-1}|$  sous la loi normale. Cette caractéristique de la distribution étant inconnue pour l'expansion Gram-Charlier, le paramètre  $\sqrt{2/\pi}$  est maintenu pour fins de simplification.

Tableau 5 : Estimation du prix du risque avec l'EGARCH.

pdf	$c_m$	$\lambda$	$\omega_m$	$\alpha_m$	$\gamma_m$	$\beta_m$	$\delta_m$
Loi normale	0,00029 (0,02)	0,22 (0,00)	-0,08 (0,00)	0,11 (0,00)	-0,13 (0,00)	0,88 (0,00)	0,12 (0,00)
Gram-Charlier	0,00016 (0,22)	1,98 (0,00)	-0,14 (0,00)	0,11 (0,00)	-0,13 (0,00)	0,89 (0,00)	0,09 (0,00)

Notes : Estimations du modèle (20) obtenues à l'aide de la loi normale et de l'expansion Gram-Charlier. Sous chaque valeur estimée se trouve entre parenthèses la valeur p calculée sous l'hypothèse que les estimateurs sont distribués normalement.

### Mesure de risque

Le modèle utilisé suppose que la mesure de risque est la variance conditionnelle des rendements. Une mesure alternative du risque est l'écart-type conditionnel. Dans cette veine, Bali et Peng (2006) ont comparé leurs estimations obtenues à l'aide de la variance conditionnelle et de l'écart-type conditionnel. Lorsque la variance est substituée par l'écart-type dans l'équation (14.1), nous obtenons les estimations présentées au tableau 6. Cela indique que les estimations du prix du risque ne sont pas significativement différentes de zéro lorsque l'écart-type conditionnel est utilisé. Rappelons qu'un résultat opposé est obtenu lorsque la variance conditionnelle est utilisée (voir le tableau 2). Ceci suggère que la variance conditionnelle est une meilleure

mesure de risque que l'écart-type conditionnel. Les résultats sont en accord avec ceux de Bali et Peng (2006).

Tableau 6 : Estimation du prix du risque avec l'écart-type.

pdf	$c_m$	$\lambda$	$\omega_m$	$\alpha_m$	$\gamma_m$	$\beta_m$	$\delta_m$
Loi normale	0,00013 (0,74)	0,02 (0,73)	0,00 (0,03)	0,06 (0,00)	1,15 (0,00)	0,78 (0,00)	0,05 (0,00)
Gram-Charlier	-0,00022 (0,67)	0,06 (0,34)	0,00 (0,05)	0,06 (0,00)	1,28 (0,00)	0,77 (0,00)	0,04 (0,00)

Notes : Estimations du modèle (14) où la variance conditionnelle est substituée par l'écart-type conditionnel dans l'équation (14.1). Les estimations sont obtenues à l'aide de la loi normale et de l'expansion Gram-Charlier. Sous chaque valeur estimée se trouve entre parenthèses la valeur p calculée sous l'hypothèse que les estimateurs sont distribués normalement.

### Fréquence des rendements

Jusqu'à présent, la fréquence des rendements utilisée est quotidienne. Cependant, d'autres fréquences sont utilisées dans la littérature empirique. Selon Jin, Wang et Yu (2007), la relation risque-rendement devrait tenir peu importe la fréquence (voir la section 2.1.3). Afin de vérifier ceci, le modèle (14) est estimé à nouveau à l'aide de l'expansion Gram-Charlier pour des périodes non superposées de 2 jours, 5 jours et 21 jours ouvrables.

Tableau 7 : Estimation du prix du risque à différentes fréquences.

pdf	$c_m$	$\lambda$	$\omega_m$	$\alpha_m$	$\gamma_m$	$\beta_m$	$\delta_m$
2 jours	0,00034 (0,23)	1,07 (0,44)	0,00 (0,00)	0,09 (0,00)	1,23 (0,00)	0,61 (0,00)	0,08 (0,00)
5 jours	0,00095 (0,18)	1,75 (0,23)	0,00 (0,00)	0,06 (0,03)	2,65 (0,03)	0,19 (0,38)	0,13 (0,00)
21 jours	0,00224 (0,62)	2,47 (0,38)	0,00 (0,00)	0,05 (0,10)	3,49 (0,01)	0,00 (1,00)	0,03 (0,54)

Notes : Estimations du modèle (14) obtenues à l'aide de l'expansion Gram-Charlier lorsque des rendements sur 2, 5 et 21 jours sont utilisés. Sous chaque valeur estimée se trouve entre parenthèses la valeur p calculée sous l'hypothèse que les estimateurs sont distribués normalement.

Le tableau 7 indique que le choix de la fréquence des rendements affecte à la fois les estimations des paramètres de l'équation (14.1), ainsi que celles associées au processus de variance conditionnelle. Plus les périodes sont longues, moins la variance conditionnelle de la période retardée  $h_{m,t-1}$  a de l'importance. Également, la volatilité implicite du marché des options a plus d'impact lorsque l'horizon est court. Les trois estimations du prix du risque sont positifs, mais non significativement différent de zéro. Les primes de risque capturent respectivement 34,19%, 50,51% et 59,4% du rendement excédentaire prévu, ce qui est inférieur à ce qui est obtenu à l'aide de données quotidiennes (voir le tableau 3). Ceci suggère que l'utilisation d'une fréquence quotidienne permet de mieux évaluer le risque.

### **Modèle à changement de régimes**

Une dernière extension est analysée, où une variable indicatrice est ajoutée à notre modèle afin de contrôler pour le régime financier en place. Par exemple, lorsque le marché des actions s'effondre, tel qu'à la fin 2008, il y a présence d'une période où la volatilité atteint des sommets et où les rendements sont très négatifs. Ces comouvements négatifs entre la volatilité et les rendements tendent à réduire la valeur du prix du risque. Ainsi, lorsque l'échantillon inclut une forte crise financière, alors il est vraisemblable que cet événement contribue à réduire la valeur du prix du risque (qui peut même devenir négatif).

Afin de contrôler pour ceci, la variable binaire  $F_t$  est ajoutée afin de modifier l'équation (14.1) comme suit:

$$(r_{m,t} - r_{f,t}) = [c_{m,1} + \lambda_1 h_{m,t}] \times (1 - F_t) + [c_{m,2} + \lambda_2 h_{m,t}] \times F_t + \varepsilon_{m,t} \quad (21)$$

où les termes  $c_{m,1}$  et  $\lambda_1$  sont les paramètres du premier régime, tandis que  $c_{m,2}$  et  $\lambda_2$  sont les paramètres du second régime. La variable  $F_t$  est déterminée de deux façons.

Dans un premier temps, définissons  $F_t$  comme prenant la valeur 1 durant la période du krach de 2008, s'étalant du 25 septembre au 20 novembre, et 0 autrement. Notons que c'est entre le 25 septembre et le 20 novembre 2008 que les actions ont perdu le plus de

valeur. Le tableau 8 présente les paramètres estimés à l'aide de l'équation (21) avec la variance conditionnelle (14.2) sous l'expansion Gram-Charlier.

Tableau 8 : Estimation du prix du risque conditionnel à la crise de 2008.

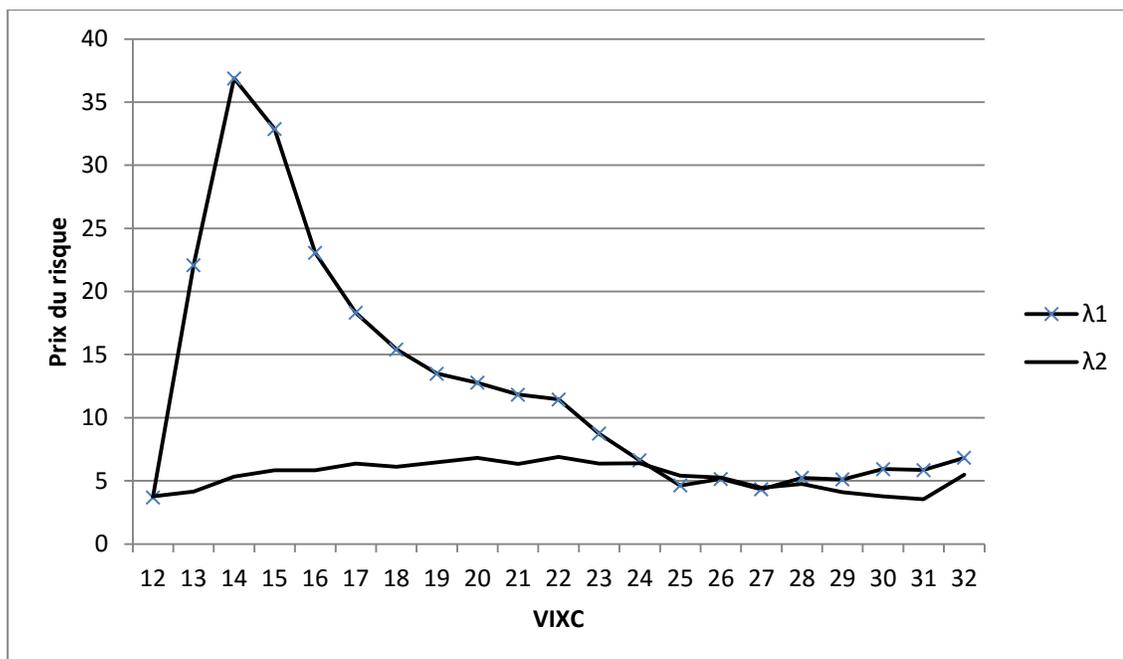
	$c_{m,1}$	$c_{m,2}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
25 sep. au	-0,00009	-0,02908	5,32	23,88
20 nov. 08	(0,85)	(0,00)	(0,32)	(0,00)

Notes : Estimation du modèle (21) avec la variance conditionnelle (14.2) obtenues à l'aide de l'expansion Gram-Charlier. Le second régime correspond à la période du 25 septembre 2008 au 20 novembre 2008. Sous chaque valeur estimée se trouve entre parenthèses la valeur p calculée sous l'hypothèse que les estimateurs sont distribués normalement.

Le tableau 8 indique que les estimations du prix du risque sont positives pour chacun des régimes. Nous savons *ex post* que l'automne 2008 présente des rendements très négatifs, et le coefficient  $c_{m,2}$  en témoigne avec une perte de 2,91% par jour. Ces résultats révèlent qu'en période de krach boursier, la relation entre le rendement et la variance conditionnelle demeure positive malgré des rendements moyens négatifs.

Dans un second temps, nous définissons  $F_t = I[VIXC_{t-1} > seuil]$  où  $I[\cdot]$  est une fonction indicatrice. Cette variable repose sur l'existence d'une relation positive prononcée entre la volatilité implicite et les crises financières (voir Nagel (2012)). La figure 5 présente les estimations du prix du risque pour les différents seuils du VIXC allant de 12 à 32. Le paramètre  $\lambda_1$  correspond au prix du risque pour les journées où le VIXC a clôturé à un niveau égal ou sous le seuil prédéterminé, tandis que le paramètre  $\lambda_2$  est associé à un niveau supérieur au seuil.

Figure 5: Prix du risque conditionnel au niveau du VIXC.



Notes : Estimations du modèle (21) avec la variance conditionnelle (14.2) obtenues à l'aide de l'expansion Gram-Charlier. Les changements de régimes sont définis par le niveau du VIXC de la journée précédente.

La figure 5 révèle que les périodes où l'indice VIXC est inférieur au seuil sont généralement associées à un prix du risque plus élevé. De plus, pour distinguer les deux régimes, le seuil ne doit pas être trop élevé. Rappelons que la moyenne du VIXC pour notre échantillon est approximativement de 18 avec une médiane d'environ 15 (voir le tableau 1). Lorsque le seuil est défini autour de ces valeurs, une nette distinction apparaît entre l'estimation du prix du risque des deux régimes. Toutefois, l'estimation du prix du risque est toujours positive pour les deux régimes et pour les différents seuils, signifiant que la prise de risque est rémunérée peu importe l'état du marché.

La crise de 2008 a été associée à des niveaux pour le VIXC largement supérieurs à 32. Étant donné que peu de journées affichent un niveau supérieur à 32 pour le VIXC, les résultats ne sont pas présentés. Toutefois, il est à noter que la relation s'inverse et que  $\lambda_2$  prend des valeurs supérieures à  $\lambda_1$  pour des hauts niveaux du VIXC, présentant ainsi

des estimations semblables à celles obtenues lorsque la crise de 2008 correspond au second régime (voir le tableau 8).

Pour conclure la section couvrant l'estimation du prix du risque, l'utilisation des rendements quotidiens combinée à l'estimation du modèle (14) sans restriction à l'aide de l'expansion Gram-Charlier mène à une relation positive entre les rendements et le risque qui est plus prononcée que celle obtenue lorsque

- (i) la loi normale est imposée,
- (ii) l'asymétrie est captée par un EGARCH plutôt qu'un NGARCH,
- (iii) la mesure de risque est l'écart-type conditionnel plutôt que la variance conditionnelle et
- (iv) les rendements de 2, 5 ou 21 jours sont utilisés plutôt que les données quotidiennes.

De plus, l'utilisation de modèle à changement de régimes indique que les estimations du prix du risque sont positives pour tous les régimes. Pour ces raisons, les estimations obtenues à l'aide du modèle (14) sans restriction à partir de l'expansion Gram-Charlier seront reprises à la section suivante afin d'analyser l'allocation tactique. Pour finir, tout indique que le prix du risque est positif au Canada pour le marché des actions.

## **5.2 Allocation de l'actif**

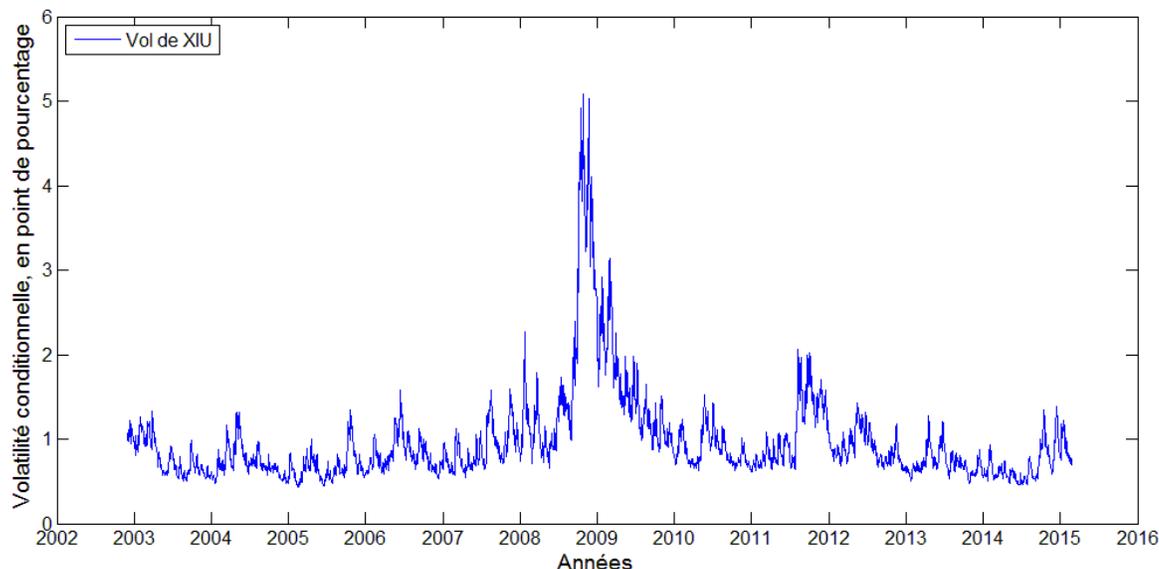
Cette section analyse le rôle de la relation entre les rendements et le risque pour les actions au niveau de l'allocation de l'actif. L'analyse s'effectue dans un cadre moyenne-variance où un portefeuille d'actifs risqués est composé d'un fonds d'actions et d'un fonds d'obligation. Dans un premier temps, l'estimation de la variance conditionnelle des deux actifs est discutée. Dans un second temps, la corrélation conditionnelle entre les actions et les obligations est estimée. Dans un dernier temps, les différents portefeuilles sont formés et évalués.

### **5.2.1 Estimation de la variance conditionnelle des actifs**

La section 5.1 a permis de conclure que l'utilisation de données quotidiennes et l'estimation du modèle (14) sans restriction à l'aide de l'expansion Gram-Charlier impliquent une relation positive prononcée entre le rendement des actions et la variance

conditionnelle. Pour cette raison, la variance conditionnelle des rendements des actions est estimée à l'aide de ce modèle. Cette volatilité est présentée à la figure 6. Il est à noter que la majeure partie du temps, la volatilité conditionnelle se situe sous les 1%. Plusieurs hausses de la volatilité se situent autour de 1,5%. Lors de la crise financière de 2008, la volatilité conditionnelle a atteint un sommet de 5,09%.

Figure 6: Volatilité conditionnelle des actions.



Notes : Estimation de la volatilité conditionnelle des actions associée au modèle (14) et obtenue à l'aide de l'expansion Gram-Charlier. La volatilité conditionnelle correspond à  $\sqrt{\hat{h}_{m,t}}$ .

Pour l'estimation de la variance conditionnelle des rendements des obligations, celle-ci est réalisée à l'aide du modèle (17) avec l'expansion Gram-Charlier. Tout comme pour les actions, la variance conditionnelle des rendements des obligations suit un processus NGARCH. Le tableau 9 révèle que les résultats obtenus sont similaires à ceux générés à partir d'un GARCH sans effet asymétrique et à partir de la pdf associée à la loi normale.

Tableau 9 : Variance conditionnelle des obligations.

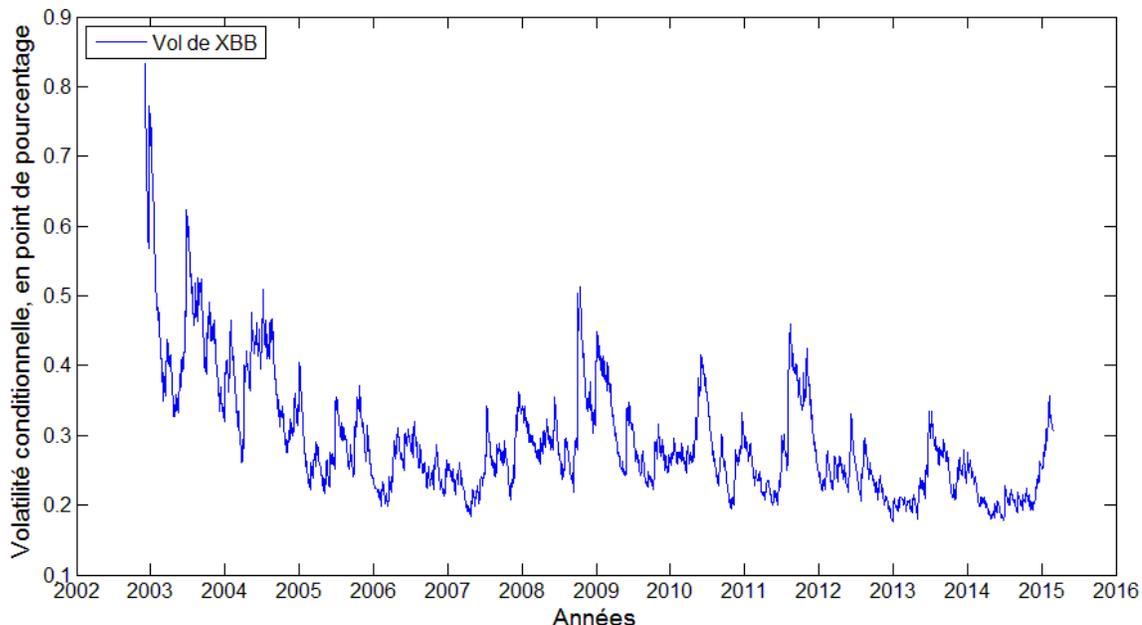
pdf	Restriction	$c_b$	$\omega_b$	$\alpha_b$	$\gamma_b$	$\beta_b$
Loi normale	$\gamma_b = 0$	-0,000033 (0,51)	0,00 (0,11)	0,05 (0,00)		0,94 (0,00)
	aucune	-0,000020 (0,72)	0,00 (0,78)	0,04 (0,66)	0,11 (0,58)	0,95 (0,00)
Gram-Charlier	$\gamma_b = 0$	-0,000017 (0,70)	0,00 (0,11)	0,05 (0,00)		0,94 (0,00)
	aucune	0,000001 (0,97)	0,00 (0,17)	0,05 (0,00)	0,06 (0,48)	0,94 (0,00)

Notes : Estimations du modèle (17) obtenues à l'aide de la loi normale et de l'expansion Gram-Charlier. Sous chaque valeur estimée se trouve entre parenthèses la valeur p calculée sous l'hypothèse que les estimateurs sont distribués normalement.

Dans tous les cas, la constante  $c_b$  n'est pas significativement différente de zéro, ce qui indique que le modèle (17) ne produit pas d'erreur systématique de prévision. Pour ce qui est des autres paramètres, leurs estimations diffèrent peu entre elles. Il est à noter que les estimations de la composante asymétrique ne sont pas significativement différentes de zéro.

La figure 7 présente l'estimation de la volatilité conditionnelle des rendements des obligations. Contrairement aux actions, la volatilité conditionnelle des obligations n'est pas plus élevée durant la crise financière de 2008 que durant la crise de la dette souveraine de 2011 ou bien pendant l'année 2003.

Figure 7: Volatilité conditionnelle des obligations.



Notes : Estimation de la volatilité conditionnelle des obligations associée au modèle (17) et obtenue à l'aide de l'expansion Gram-Charlier. La volatilité conditionnelle correspond à  $\sqrt{\hat{h}_{b,t}}$ .

Pour conclure, les variances conditionnelles des rendements des actions et des obligations qui sont présentées aux figures 6 et 7 correspondent à celles qui seront utilisées pour le calcul de la corrélation conditionnelle à la section 5.2.2 ainsi que pour la formation des portefeuilles à la section 5.2.3.

### 5.2.2 Estimation de la corrélation conditionnelle entre les actifs

La corrélation conditionnelle entre les rendements des actions et des obligations est estimée à l'aide d'un processus A-DCC représenté par le modèle (18). Ce modèle peut être estimé avec ou sans la composante asymétrique, ainsi qu'avec la loi normale multivariée ou bien avec l'expansion Gram-Charlier multivariée. Le tableau 10 présente les estimations pour les quatre cas. Il n'y a pas de différence perceptible entre les résultats obtenus en utilisant la loi normale ou l'expansion Gram-Charlier. Pour ce qui est de la composante asymétrique, son ajout mène à des estimations similaires à celles

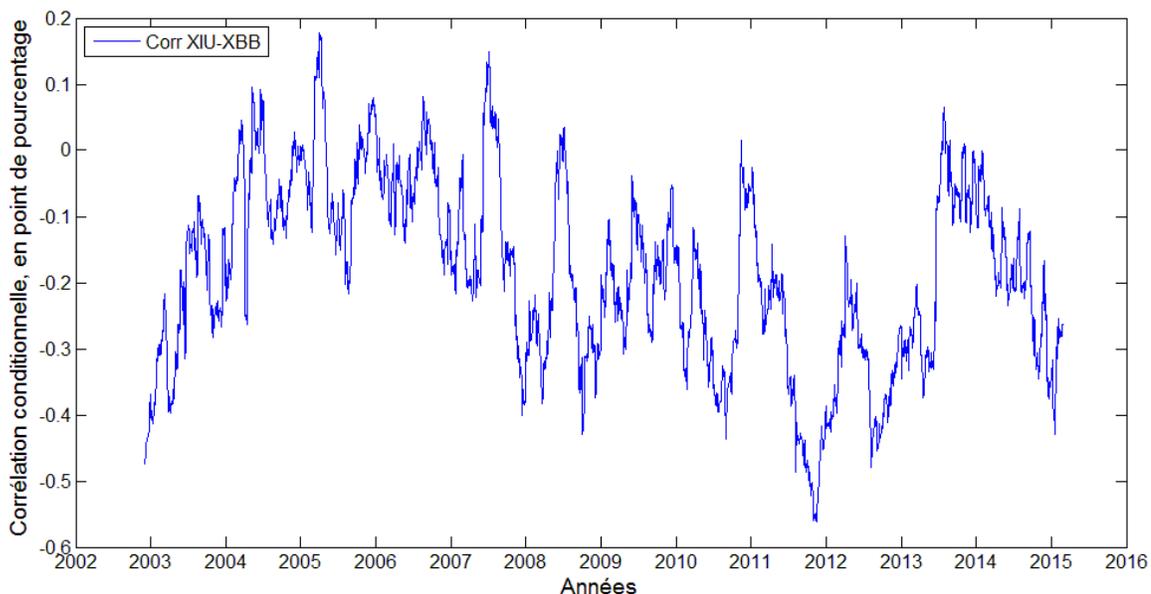
obtenues lorsque l'asymétrie est omise. De plus, l'estimation du coefficient associé à l'asymétrie  $g_q$  n'est pas significativement différente de zéro.

Tableau 10 : Corrélacion conditionnelle entre les rendements des actions et des obligations.

pdf	Restriction	$\alpha_q$	$g_q$	$\beta_q$
Loi normale	$g_q = 0$	0,0197 (0,00)		0,9721 (0,00)
	aucune	0,0200 (0,00)	0,0008 (0,96)	0,9715 (0,00)
Gram-Charlier	$g_q = 0$	0,0197 (0,00)		0,9721 (0,00)
	aucune	0,0200 (0,00)	0,0008 (0,63)	0,9715 (0,00)

Notes : Estimations du modèle (18) obtenues à l'aide de la loi normale et de l'expansion Gram-Charlier. Sous chaque valeur estimée se trouve entre parenthèses la valeur p calculée sous l'hypothèse que les estimateurs sont distribués normalement.

Figure 8: Corrélacion conditionnelle entre les rendements des actions et des obligations.



Note : Estimation de la corrélation conditionnelle entre les rendements des actions et des obligations associée au modèle (18) sans restriction et à l'aide de l'expansion Gram-Charlier.

La figure 8 présente l'estimation de la corrélation conditionnelle entre les rendements des actions et des obligations qui sera utilisée à la section 5.2.3. Elle correspond à l'estimation obtenue à l'aide du modèle (18) incluant la composante asymétrique et de l'expansion Gram-Charlier multivariée. La période 2004-2007 affiche une corrélation conditionnelle élevée et s'interprète comme une période de croissance et de stabilité. La crise financière de 2008 et la crise de la dette souveraine de 2011 ont mené à une corrélation négative importante. Enfin, il est apparent que la corrélation conditionnelle suit un processus dynamique et n'est pas fixe dans le temps. Il s'en suit que l'utilisation de l'allocation tactique est nécessaire afin d'ajuster l'allocation du portefeuille en fonction de la corrélation conditionnelle entre les rendements des actions et des obligations.

Lorsque la figure 8 est comparée à la figure 3 représentant la corrélation approximée à l'aide d'une fenêtre glissante de 100 jours (voir la section 4), les schémas sont semblables. Cependant, il existe des différences notables. D'abord, l'approximation à l'aide de la fenêtre glissante présente une corrélation positive beaucoup plus souvent que l'estimation à l'aide du modèle A-DCC. Ensuite, l'approximation affiche un retard significatif par rapport au modèle A-DCC. Par exemple, au premier jour de 2009, la corrélation estimée à l'aide du modèle A-DCC a significativement augmenté, tandis que la fenêtre glissante affiche encore une corrélation très négative. L'effet est encore plus marqué au début de 2012 lorsque la crise de la dette souveraine s'estompe et que la fenêtre glissante affiche le creux de la corrélation et qu'à l'opposé, le modèle A-DCC affiche une corrélation qui a déjà augmenté significativement. En somme, l'utilisation d'une fenêtre glissante pour approximer la corrélation conditionnelle des rendements entre les actions et les obligations mène à des résultats décalés. Il est donc nécessaire d'utiliser un modèle de corrélation conditionnelle dynamique afin de répondre rapidement aux nouvelles informations et d'estimer au mieux la corrélation conditionnelle.

### 5.2.3 Formation et évaluation des portefeuilles

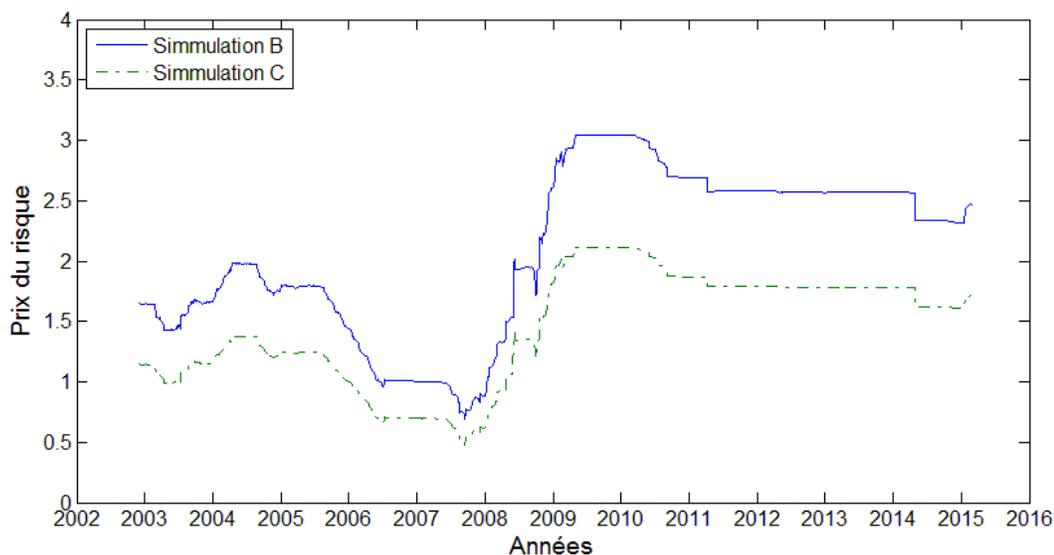
Dans l'objectif de bien évaluer le rôle du prix du risque pour l'allocation des actifs, deux scénarios sont comparés. Le premier scénario consiste à déterminer le rendement attendu des actions comme étant celui prévu par l'IQPF, tel que discuté à la section 4. Celui-ci représente le scénario de référence. Le second scénario fait explicitement intervenir l'estimation du prix du risque. Sous ce scénario, trois simulations sont effectuées à partir de la spécification suivante :

$$r_{m,t}^* = r_{f,t} + \hat{c}_m + \hat{\lambda} \hat{h}_{m,t}, \quad (16)$$

La simulation (A) utilise les estimations obtenues à la section 5.1.1, soit un prix du risque défini par  $\hat{c}_m = 0,00005$  et  $\hat{\lambda} = 2,84$ . Pour ce qui est des simulations (B) et (C), la valeur de  $\hat{c}_m$  est fixée à zéro tandis que la valeur de  $\hat{\lambda}$  est déterminée sous les hypothèses que le rendement moyen correspond à celui de l'IQPF et la volatilité inconditionnelle est soit de 15% ou de 18% par année. Ces deux volatilités concordent approximativement à la médiane et la moyenne du VIXC.

Plus spécifiquement, pour les deux dernières simulations, le prix du risque  $\hat{\lambda}$  est calculé en divisant le rendement excédentaire prévu par la variance de 15%<sup>2</sup> ou 18%<sup>2</sup>. Le prix du risque est donc fonction des projections de rendements et du taux sans risque (voir la figure 9). Rappelons que le prix du risque de la simulation (A) est de 2,84 (voir le tableau 2). La simulation (B) présente un prix du risque inférieur à celui associé à la simulation (A) pour la période avant 2009. De 2009 à 2011, le prix du risque est supérieur pour la simulation (B) et par la suite, le prix du risque est semblable pour les simulations (A) et (B). À l'opposé, la simulation (C) affiche un prix du risque toujours inférieur à celui obtenu pour les deux autres simulations. Pour conclure, la simulation (A) présente un prix du risque qui est en moyenne supérieur à ce qui est documenté à partir des simulations (B) et (C).

Figure 9: Prix du risque IQPF.



Notes : Prix du risque des simulations (B) et (C). Il correspond au rendement prévu de l'IQPF pour les actions auquel le taux sans risque est soustrait, divisé par une variance de  $15\%^2$  et  $18\%^2$ .

Le tableau 11 présente les statistiques descriptives pour les allocations en actions obtenues pour chaque simulation. La simulation (A) implique un investissement plus élevé en actions que les simulations (B) et (C). Tout étant égal par ailleurs, un rendement prévu pour les actions plus élevé dans un des portefeuilles mène à une allocation plus élevée pour les actions dans ce portefeuille. Puis, l'équation (16) indique qu'un prix du risque plus élevé signifie un rendement prévu supérieur. Ainsi, les différentes allocations du scénario 2 peuvent être expliquées ainsi : le prix du risque de la simulation (A) est plus élevé en moyenne que celui de la simulation (B) et celui de la simulation (B) est systématiquement supérieur à celui de la simulation (C).

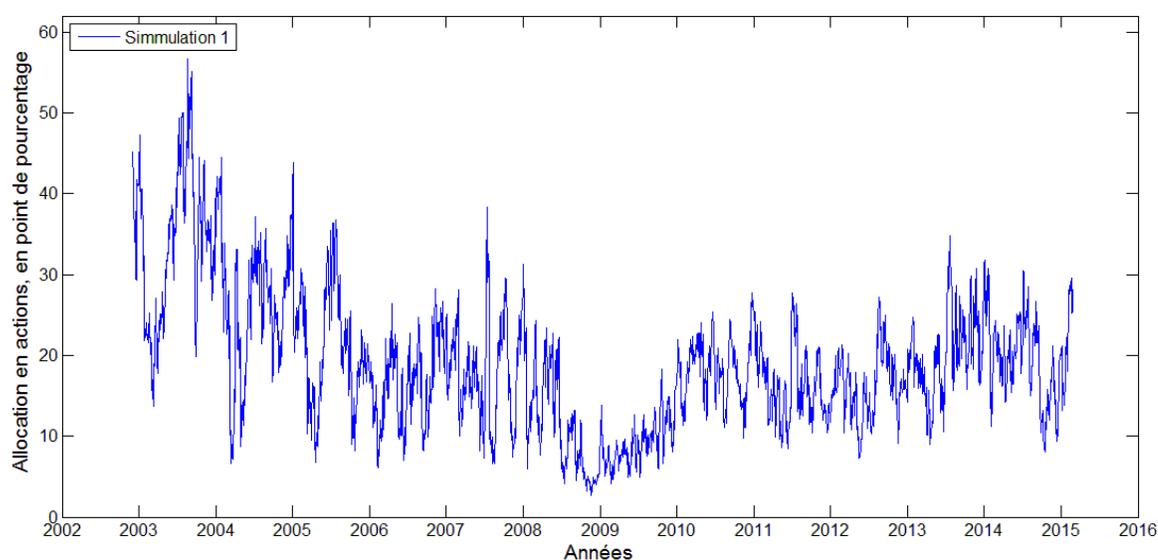
Lorsque le scénario 2 est comparé au scénario de référence, l'allocation en action du scénario de référence se situe entre la simulation (A) et la simulation (B). Cependant, l'allocation minimum en actions du scénario de référence est inférieure à celles des simulations (A) et (B). Cela s'explique par le fait que, lors de la crise financière de 2008, la forte volatilité des rendements des actions a mené à une augmentation des rendements prévus des actions, ce qui implique une allocation supérieure en actions que pour le scénario de référence.

Tableau 11 : Statistiques descriptives de l'allocation en actions.

Statistiques en %	Scénario 1	Scénario 2		
		A	B	C
Moyenne	19,02	23,62	15,99	13,27
Médiane	18,10	20,60	14,74	12,13
Minimum	2,70	9,87	3,67	0,40
Maximum	56,64	59,53	45,94	42,75

Notes : Proportion de l'allocation en actions, présentée en points de pourcentage. Le scénario 1 représente le scénario de référence. Le scénario 2 regroupe les simulations (A), (B) et (C).

Figure 10: Allocation en actions : scénario de référence.



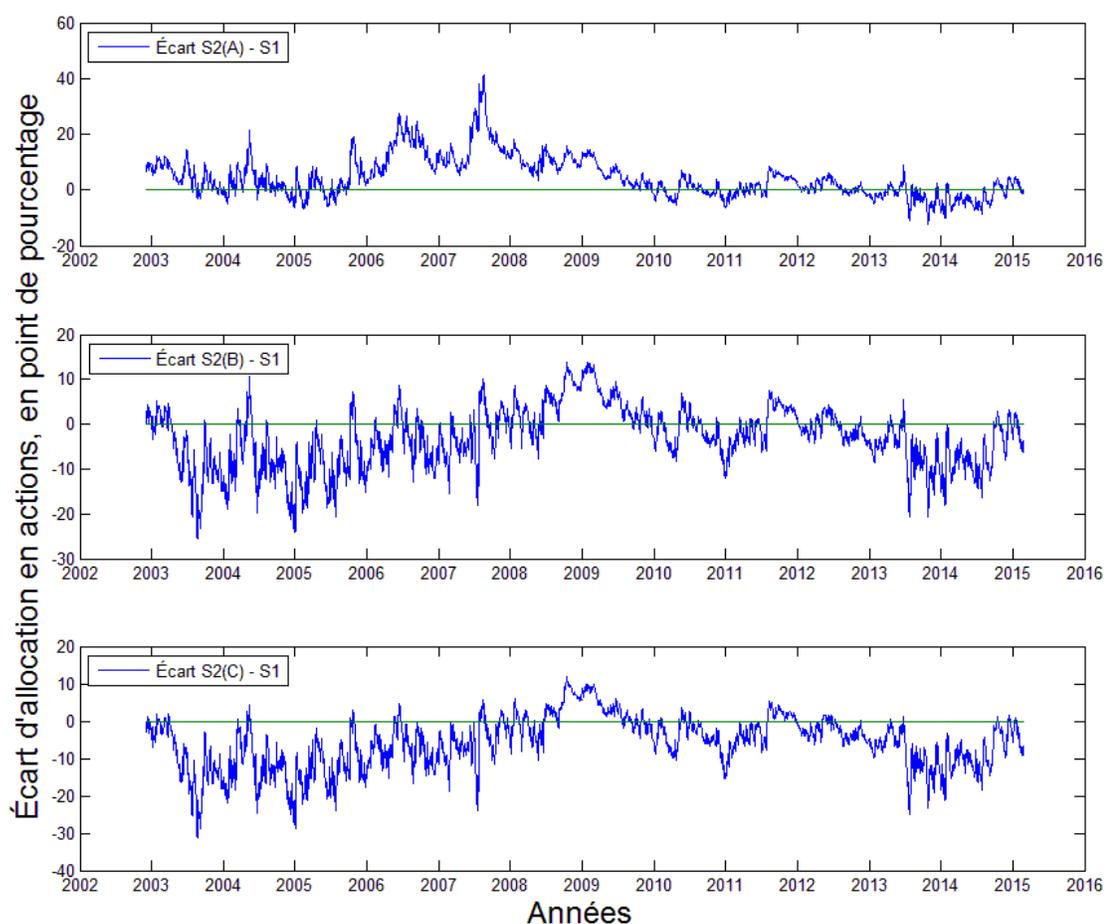
Note : Allocation en actions, en points de pourcentage, pour le scénario de référence.

La figure 10 présente l'allocation en actions du scénario de référence dans le temps. La plus faible allocation en actions correspond à la crise financière de 2008. Au début de l'échantillon, on retrouve une forte allocation en actions puisque la volatilité des obligations était très élevée à ce moment. L'effet lié à la variation de la corrélation conditionnelle sur l'allocation en action est plus complexe, mais non négligeable. Par

exemple, le 14 novembre 2011, la corrélation conditionnelle des rendements entre les actions et les obligations est estimée à  $-0,5614$ . Utiliser la corrélation inconditionnelle qui est approximativement de  $-0,20$  a comme impact de réduire l'allocation en actions de  $17,76\%$  à  $13,66\%$ . En somme, les variances conditionnelles des rendements ainsi que la corrélation conditionnelle affectent l'allocation en actions.

Par la suite, l'emphase est portée sur les écarts entre le scénario 2 et le scénario de référence.

Figure 11: Allocation en actions : écarts avec le scénario de référence.



Notes : Écarts d'allocations en actions entre les simulations (A), (B) et (C) et le scénario de référence. Les écarts sont présentés en points de pourcentage.

La figure 11 présente les écarts d'allocations entre le scénario 2 et le scénario de référence. La simulation (A) se différencie du scénario de référence par une allocation supérieure en actions pour la période plus volatile de 2006 à 2010. Pour les autres périodes, l'allocation en actions oscille autour de celle du scénario de référence. Les simulations (B) et (C) présentent des écarts d'allocation en actions qui sont positifs durant la crise financière de 2008 et la crise de la dette souveraine de 2011 et négatifs durant les périodes de croissances boursières.

En somme, les périodes où la volatilité des rendements des actions est plus élevée mènent à une allocation en actions qui est supérieure au scénario de référence. À l'opposé, les périodes où le marché des actions est calme sont caractérisées par un plus grand investissement en obligations que le scénario de référence. Cela s'explique par la relation positive entre le risque et le rendement. Une plus grande variance conditionnelle implique un rendement prévu plus élevé (voir l'équation (16)). Rappelons-nous que l'objectif est de maximiser le rendement par unité de risque. Le scénario de référence utilise un rendement indépendant à la volatilité ce qui implique qu'en période de volatilité élevée, un faible rendement par unité de risque est prévu. À l'opposé, dans le second scénario, le rendement étant ajusté en fonction de la volatilité, le rendement par unité de risque n'est pas réduit lorsque la volatilité est élevée. Toutefois, il est à noter que l'allocation en actions pour toutes les simulations est inférieure durant la crise financière de 2008 que pour le reste de l'échantillon, malgré la relation risque-rendement prise en compte.

Le tableau 12 présente les statistiques descriptives des rendements prévus des portefeuilles associés aux deux scénarios. Le scénario de référence est celui qui offre la plus faible volatilité, la perte maximale la plus faible ainsi que la plus petite perte en une journée. En contrepartie, ce n'est pas le portefeuille qui offre le meilleur rendement moyen. Toutefois, il s'agit du meilleur ratio de Sharpe. Les trois simulations du scénario 2 affichent des ratios de Sharpe comparables, alors qu'ils offrent différentes combinaisons rendement-risque. Le rendement et le risque des simulations du scénario 2 suivent la même tendance que pour l'allocation en actions. La simulation (A) est celle qui a la plus forte allocation en actions, le rendement moyen le plus élevé et les mesures de risque les plus hautes.

Tableau 12 : Statistiques descriptives des rendements de portefeuille des simulations.

Statistiques en %	Scénario 1	Scénario 2		
		A	B	C
Moyenne <sup>1</sup>	5,31	5,46	5,19	5,12
Mediane <sup>1</sup>	7,62	8,58	7,69	6,88
Minimum	-1,59	-1,74	-1,64	-1,62
Maximum	1,23	1,88	1,76	1,62
Écart-type <sup>1</sup>	4,13	4,78	4,38	4,28
Ratio de Sharpe <sup>1,2</sup>	0,76	0,69	0,69	0,69
Maximum de perte	7,22	12,24	10,43	9,26

Notes : Statistiques descriptives des rendements prévus des portefeuilles associés aux quatre simulations. Le scénario 1 représente le scénario de référence. Le scénario 2 regroupe les simulations (A), (B) et (C).

(1) Les statistiques sont annualisées.

(2) Les résultats sont présentés en points de pourcentage, à l'exception du Ratio de Sharpe.

Dans le cadre moyenne-variance, le ratio de Sharpe peut être interprété en tant que la meilleure mesure de performance étant donné qu'elle intègre le rendement excédentaire moyen ainsi que le risque, défini par l'écart-type des rendements excédentaires. Dans ce cas, la principale raison pour laquelle le scénario de référence affiche un meilleur ratio de Sharpe que le second scénario est dû au fait que ce dernier implique une allocation beaucoup plus élevée en actions durant la crise financière de 2008. Le krach diminue la performance globale du second scénario, en plus d'augmenter la volatilité moyenne sur la période. Si l'échantillon est fractionné afin de présenter les résultats avant la chute boursière la plus sévère (25 septembre 2008) et après (20 novembre 2008), les résultats obtenus indiquent que le scénario de référence n'offre pas le meilleur ratio de Sharpe (voir le tableau 13). Il est à noter que seule la simulation (A) affiche un ratio de Sharpe plus élevé que le scénario de référence avant et après le krach de 2008.

La simulation (C) affiche une meilleure performance que les autres simulations après le krach de 2008 étant donné que cette simulation a une allocation en obligations qui est plus élevée et que celles-ci présentent un rendement élevé durant cette période. À l'opposé, l'avant krach se caractérise par de faibles rendements pour les obligations, ce

qui implique un ratio de Sharpe plus faible pour les simulations ayant une plus forte allocation en obligation.

Tableau 13 : Ratio de Sharpe avant et après le krach de 2008.

Ratio de Sharpe	Scénario 1	Scénario 2		
		A	B	C
Avant crash	0,44	0,51	0,42	0,38
Après crash	1,36	1,40	1,42	1,43

Notes : Ratios de Sharpe associés aux quatre simulations. Le scénario 1 représente le scénario de référence. Le scénario 2 regroupe les simulations (A), (B) et (C). Les statistiques sont annualisées. L'avant krach est défini comme étant la période du 2 décembre 2002 au 25 septembre 2008, et l'après krach comme étant la période du 20 novembre 2008 au 27 février 2015.

Brièvement, le principal impact sur l'allocation de l'actif de prendre en compte la relation entre le risque et le rendement est, par rapport au scénario de référence, de surpondérer les actions lorsque la volatilité est élevée et de les sous-pondérer en période de basse volatilité. Cette approche pourrait se rapprocher d'une stratégie à contre-courant (contrarian strategy). Cela mène à un rendement supérieur, au coût d'une volatilité plus élevée.

En période de croissance boursière, la prise en compte du prix du risque permet d'obtenir une meilleure performance du portefeuille ajustée pour le risque et exige moins de capitaux pour atteindre un rendement souhaité. À l'opposé, en krach boursier, la plus forte exposition aux marchés des actions mène à une réduction du rendement du portefeuille ainsi qu'à une volatilité du portefeuille plus élevée. En somme, pour le spécialiste de la finance, la décision de considérer le prix du risque au moment d'effectuer la prévision de rendement des actions n'est pas simple à prendre. Cette option offre généralement une meilleure performance au client. Cependant, lorsqu'un krach se présente, la surpondération en actions peut affecter négativement la performance.

La simulation (A) offre un ratio de Sharpe, sur une fenêtre glissante d'un an, supérieur à celui du scénario de référence 75% du temps. Il est possible d'interpréter ceci comme

un risque asymétrique où la performance (en termes de ratio de Sharpe et de rendement moyen) est supérieure lorsque le prix du risque est pris en compte lors des prévisions de rendements des actions, mais qu'à de rares moments (krach boursier), la performance est fortement réduite. Donc, le contrat de gestion des investissements avec le client peut fortement influencer le choix de prendre en compte le rendement associé à la volatilité des actions.

En conclusion à ce chapitre, il est possible d'estimer le prix du risque de façon adéquate à l'aide d'un NGARCH-M augmenté de la volatilité implicite du marché des options sur actions. En particulier, lorsque le modèle est estimé en approximant la pdf à l'aide de l'expansion Gram-Charlier pour des rendements quotidiens, l'estimation du prix du risque est plus précise et importante dans la prévision des rendements excédentaires. Lorsque le prix du risque est intégré aux prévisions des rendements des actions dans un modèle d'allocation d'actifs risqués, dans un cadre moyenne-variance, les actions sont surpondérées en période de forte volatilité et sous-pondérées lors de faibles volatilités. Les conséquences de la prise en compte du prix du risque s'apparentent à celles de l'utilisation d'une stratégie à contre-courant. Cela améliore la performance ajustée pour le risque lors de croissances boursières, mais l'allocation supérieure en actions lors de krach boursier affecte significativement la performance.

## 6. Conclusion

Ce mémoire a examiné la relation entre le rendement et le risque. Pour ce faire, le rendement excédentaire des actions et sa variance conditionnelle sont spécifiés à partir d'un modèle NGARCH-M auquel l'indice de volatilité implicite est ajouté au processus de variance conditionnelle. La stratégie d'allocation tactique correspond à l'allocation en actions et en obligations qui maximise le ratio de Sharpe calculé à l'aide des prévisions des rendements, des variances conditionnelles des rendements et de la corrélation conditionnelle des rendements entre les actions et les obligations.

Les rendements utilisés étaient quotidiens et provenaient des fonds négociés en bourse canadiens de la famille iShares (XIU.TO et XBB.TO) pour la période du 2 décembre 2002 au 27 février 2015. La volatilité implicite était déterminée par les indices MXV et VIXC de la Bourse de Montréal, tout comme le taux sans risque (indice CDOR). Les normes d'hypothèses de projections financières provenaient des évaluations actuarielles du Régime de Pension du Canada et de l'IQPF.

Empiriquement, l'estimation du prix du risque est positive et est significativement différente de zéro. Tenir compte de la relation entre le rendement et le risque lors de l'allocation de l'actif mène à une augmentation de l'allocation en actions lors de périodes de plus forte volatilité et à une réduction de l'exposition aux actions en période de faible volatilité. En périodes de croissances boursières, l'augmentation de la volatilité des rendements lors de correction de la bourse mène à une augmentation de l'exposition aux actions et ainsi, à un rendement du portefeuille plus élevé grâce aux bons rendements qui suivent ces corrections. Ceci mène à un meilleur rendement ajusté pour le risque pour ces périodes de croissances boursières. À l'opposé, lorsque la correction de marché se transforme en krach boursier, le portefeuille est surexposé aux actions et subit des pertes supplémentaires. Ce portefeuille devient plus volatil que celui de référence, soit celui qui ne tient pas compte de la relation entre le risque et le rendement.

La principale conclusion de ce mémoire est qu'il existe une forte relation positive entre le rendement des actions au Canada et leur variance conditionnelle. De mauvaises

spécifications du modèle d'évaluation du prix du risque peuvent mener à des estimations erronées.

Différentes avenues se présentent aux gestionnaires de placement concernant la prise en compte du prix du risque. Une possibilité est d'allouer le capital vers les régions ou les secteurs dont les prévisions de volatilité conditionnelle sont plus élevées afin de bénéficier d'un rendement espéré plus élevé. Une alternative est de varier entre des projections de rendement qui tiennent compte du prix du risque et d'autres qui n'en tiennent pas compte selon la probabilité conditionnelle de faire face ou non à un krach boursier.

Une extension intéressante de ce mémoire est d'évaluer si le prix du risque est fixe dans le temps, et sinon, quels en sont ses déterminants. En particulier, il serait pertinent de tester si l'évolution temporelle du prix du risque est expliquée par les indices de confiance des investisseurs.

## Annexe 1 : Pondération pour un ratio de Sharpe optimal

En prenant la condition de premier ordre par rapport au poids des actions de l'équation (8) présentée ci-dessous, et en appliquant la restriction selon laquelle la somme des poids est égale à un, il est possible d'identifier les pondérations optimales  $w_m^*$  et  $w_b^*$  :

$$\begin{aligned}
 SR^* &= \frac{w_m E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) + w_b E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t})}{\sqrt{w_m^2 E_{t-1}(\sigma_{m,t}^2) + w_b^2 E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2) + 2w_m w_b E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t})}} \\
 &= \frac{w_m E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) + (1 - w_m) E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t})}{\sqrt{w_m^2 E_{t-1}(\sigma_{m,t}^2) + (1 - w_m)^2 E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2) + 2w_m (1 - w_m) E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t})}}
 \end{aligned}$$

Le numérateur correspond au rendement attendu du portefeuille. Lorsque les rendements attendus ne sont pas identiques,  $E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) \neq E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t})$ , il existe des valeurs de  $w_m$  telle que le rendement du portefeuille est positif, tout comme il existe des valeurs de  $w_m$  telle que le rendement du portefeuille est négatif. Étant donné que le dénominateur de l'équation correspond à l'écart-type du portefeuille et que celui-ci est toujours positif, seul de numérateur affecte le signe du ratio de Sharpe. En appliquant la condition de premier ordre, nous obtenons un maximum ou un minimum. Si la valeur du ratio de Sharpe est positive en ce point, cela ne peut pas être un minimum étant donné qu'il existe des valeurs pour lesquelles le rendement sera négatif, et donc le ratio sera négatif. Ainsi, un ratio de Sharpe  $SR^*$  positif nous indique que la valeur de  $w_m$  est une solution qui maximise ce ratio de Sharpe. Pour plus de détail sur la maximisation du ratio de Sharpe, voir Chapados (2011) ou Maller, Durand et Jafarpour (2010).

En bref, la condition de premier ordre correspond à :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial SR^*}{\partial w_m} &= [w_m E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t}) - w_m E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2)] \\
&\quad + E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2) \\
&\quad + w_m E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t}) \\
&\quad - E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t}) \\
&\quad - w_m E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{m,t}^2)] \\
&\quad \div [-2w_m^2 E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t}) + 2w_m E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t}) \\
&\quad + w_m^2 E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2) - 2w_m E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2) + E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2) + w_m^2 E_{t-1}(\sigma_{m,t}^2)]^{3/2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour la preuve de la dérivation, voir <http://www.calcul-derivee.fr/> et ajouter l'équation suivante :  $(x^*a+(1-x)*b)/\text{sqrt}(x^2*c+(1-x)^2*d+2*x*(1-x)*e)$ .

En multipliant le dénominateur de chaque côté, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= [w_m E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t}) - w_m E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2)] \\
&\quad + E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2) \\
&\quad + w_m E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t}) \\
&\quad - E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t}) \\
&\quad - w_m E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{m,t}^2)].
\end{aligned}$$

En isolant  $w_m$ , on arrive à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
w_m &= [E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t}) - E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2)] \\
&\quad \div \left[ [E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) + E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t})] E_{t-1}(\sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t}) \right. \\
&\quad \left. - E_{t-1}(r_{m,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{b,t}^2) - E_{t-1}(r_{b,t} - r_{f,t}) E_{t-1}(\sigma_{m,t}^2) \right],
\end{aligned}$$

ou encore :

$$w_m^* = \frac{(r_{b,t}^* - r_{f,t}) \sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t} - (r_{m,t}^* - r_{f,t}) \sigma_{b,t}^2}{(r_{m,t}^* + r_{b,t}^* - 2r_{f,t}) \sigma_{m,t} \sigma_{b,t} \rho_{m,b,t} - (r_{m,t}^* - r_{f,t}) \sigma_{b,t}^2 - (r_{b,t}^* - r_{f,t}) \sigma_{m,t}^2}.$$

## Annexe 2 : Expansion Gram-Charlier type A

L'expansion Gram-Charlier type A consiste à l'ajout d'un facteur à la fonction de densité de probabilité (pdf) de la loi normale. Ce facteur vient corriger la loi normale pour tenir compte de la présence de skewness et de kurtosis. Dans le cas où les deux premiers moments sont standardisés à zéro et un, l'approximation de la pdf se présente comme suit :

$$g(z|m_3, m_4) = \varphi(z) \times \left( 1 + \frac{m_3}{6} H_3(z) + \frac{m_4}{24} H_4(z) \right),$$

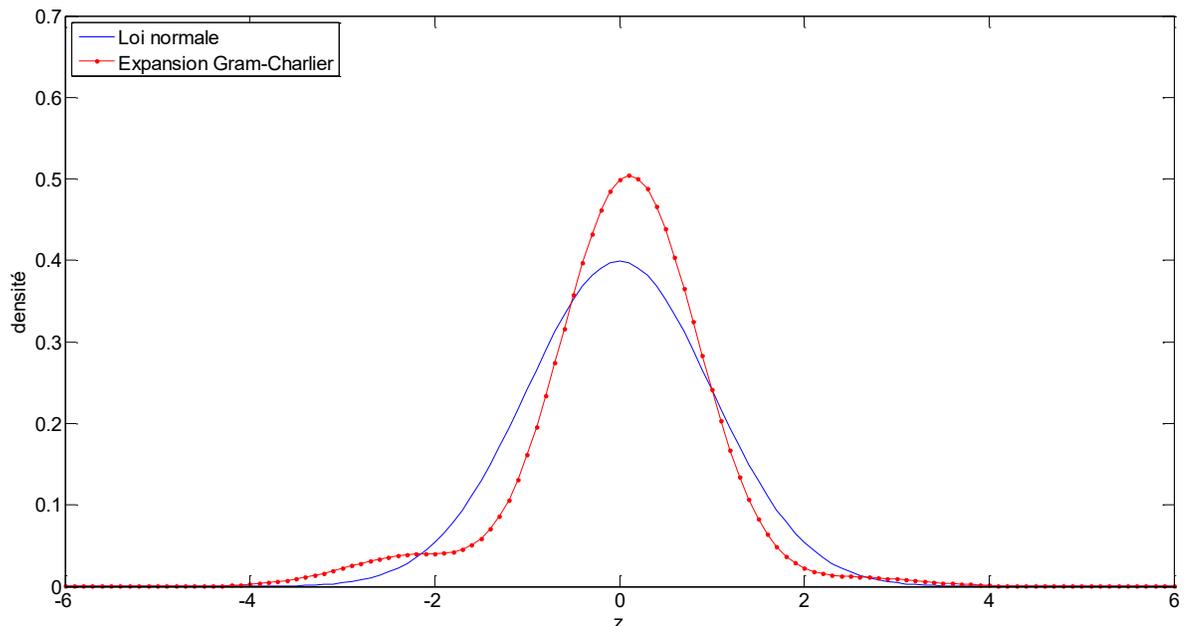
$$H_3(z) = z^3 - 3z,$$

$$H_4(z) = z^4 - 6z^2 + 3,$$

où  $z$  est le terme d'erreur standardisé pour lequel on cherche à évaluer la fonction de densité de probabilité. La fonction  $\varphi(z)$  est la pdf de la loi normale. Le terme  $m_3$  est le skewness et le terme  $m_4$  est le kurtosis excédentaire. Le kurtosis de la loi normale est de trois. Les fonctions  $H_3(z)$  et  $H_4(z)$  sont les troisième et quatrième polynômes d'Hermite (Jondeau, Poon et Rockinger, 2007).

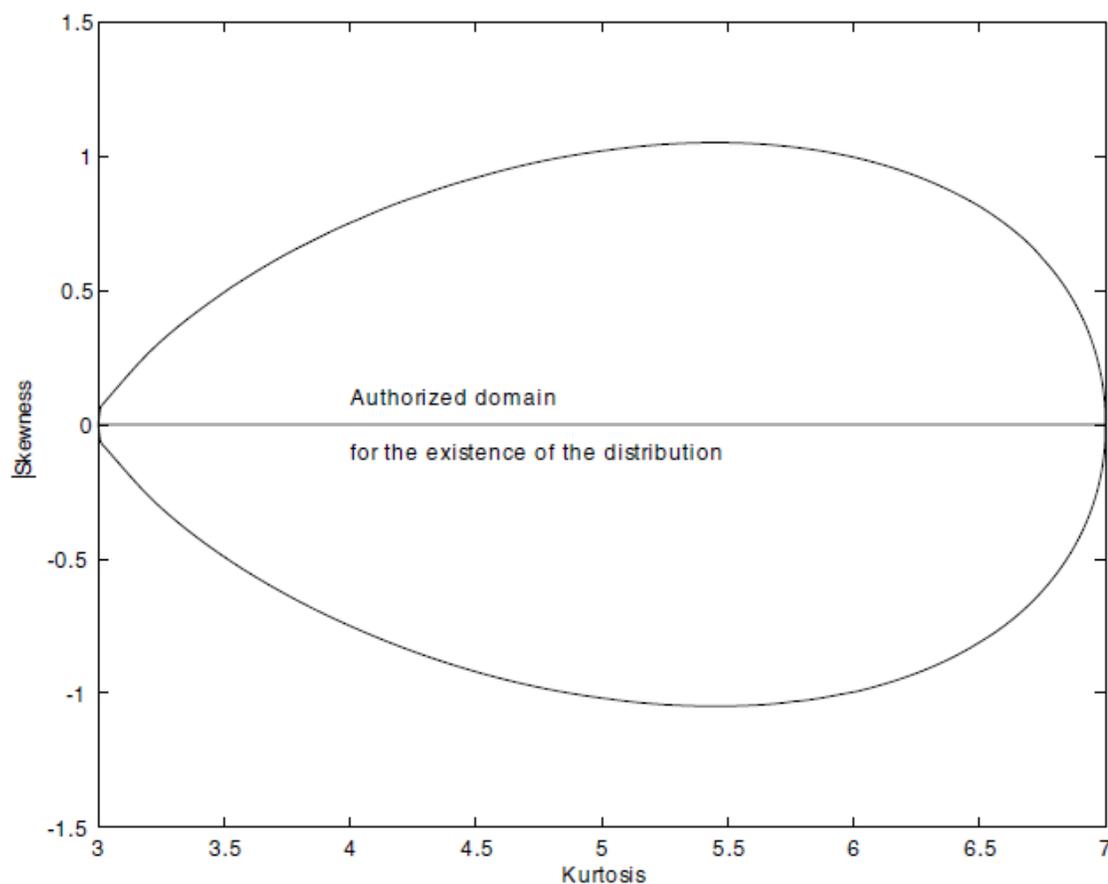
La Figure 12 présente un exemple d'une pdf normale et l'approximation de l'expansion Gram-Charlier type A avec  $m_3 = -0.5$  et  $m_4 = 2$  :

Figure 12 : Comparaison entre la loi normale et l'expansion Gram-Charlier.



Pour que la fonction  $g(z|m_3, m_4)$  soit définie positive, le skewness et le kurtosis doivent être défini à l'intérieur des frontières présentées à la Figure 13.

Figure 13: Frontière skewness/kurtosis pour l'expansion Gram-Charlier.



Notes : Frontière des combinaisons de skewness et de kurtosis possible pour une expansion Gram-Charlier type A ayant une densité positive. Figure provenant de Jondeau, Poon et Rockinger (2007: 159).

Del Brio, Niguez et Perote (2009) présentent une version multivariée de l'expansion Gram-Charlier Type A. La pdf faisant intervenir les quatre premiers moments:

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4) = \frac{\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\Sigma})}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left\{ \prod_{i=1}^n \varphi(\varepsilon_i|\sigma_i^2) \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \left[ 1 + \sum_{s=2}^4 d_{i,s}^2 H_s(\varepsilon_i)^2 \right] \right\},$$

$$H_2(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^2 - 1,$$

$$H_3(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^3 - 3\varepsilon_i,$$

$$H_4(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^4 - 6\varepsilon_i^2 + 3,$$

$$c_i = 1 + \sum_{s=2}^4 d_{i,s}^2 \times s!.$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  contient les  $n$  termes d'erreurs centrées, ayant  $\boldsymbol{\Sigma}$  comme matrice de variance-covariance. Les vecteurs  $\mathbf{m}_3$  et  $\mathbf{m}_4$  contiennent les troisièmes et quatrièmes moments marginaux des distributions. La fonction  $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\Sigma})$  correspond à la pdf normale multivariée tandis que la fonction  $\varphi(\varepsilon_i|\sigma_i^2)$  correspond à la pdf normale univariée. Le terme  $d_{i,s}$  correspond au  $s^{\text{ième}}$  moment du  $i^{\text{ième}}$  terme.

Cette fonction de densité multivariée a l'avantage de fournir une densité toujours positive.

## Bibliographie

- Amenc, Noël, Felix Goltz et Adina Grigoriu (2010). « Risk Control Through Dynamic Core-Satellite Portfolios of ETFs: Applications to Absolute Return Funds and Tactical Asset Allocation », *Journal of Alternative Investments*, vol. 13, no 2, p. 47-57.
- Bali, Turan G. et Lin Peng (2006). « Is There a Risk-Return Trade-Off? Evidence from High-Frequency Data », *Journal of Applied Econometrics*, vol. 21, no 8, p. 1169-1198.
- Biktimirov, Ernest N. et Chunrong Wang (2011). « Fear Factor: Does the VIXC Provide the Most Accurate Forecast of Canadian Stock Market Volatility? », *Canadian Investment Review*, vol. 10, no 16, p. 5-20.
- Brinson, Gary P., L. Randolph Hood et Gilbert L. Beebower (1986). « Determinants of Portfolio Performance », *Financial Analysts Journal*, vol. 42, no 4, p. 39-44.
- Brownlees, Christian, Robert Engle et Bryan Kelly (2011). « A Practical Guide to Volatility Forecasting through Calm and Storm », *The Journal of Risk*, vol. 14, no 2, p. 3-22.
- Cappiello, Lorenzo, Robert F. Engle et Kevin Sheppard (2006). « Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns », *Journal of Financial Econometrics*, vol. 4, no 4, p. 537-572.
- Carrasco, Marine et Xiaohong Chen (2002). « Mixing and Moment Properties of Various Garch and Stochastic Volatility Models », *Econometric Theory*, vol. 18, no 1, p. 17-39.
- Chapados, Nicolas (2011). *Portfolio Choice Problems*, New York, Springer-Verlag New York, coll. Springer Briefs in Electrical and Computer Engineering, 96 p.
- Christoffersen, Peter F. (2012). « 10 - Option Pricing », dans Peter F. Christoffersen (dir.), *Elements of Financial Risk Management (Second Edition)*, San Diego, Academic Press, p. 219-250.
- Daniel, Kent, Mark Grinblatt, Sheridan Titman et Russ Wermers (1997). « Measuring Mutual Fund Performance with Characteristic-Based Benchmarks », *The Journal of Finance*, vol. 52, no 3, p. 1035-1058.
- Del Brio, Esther B., Trino-Manuel Niguez et Javier Perote (2009). « Gram-Charlier Densities: A Multivariate Approach », *Quantitative Finance*, vol. 9, no 7, p. 855-868.
- Engle, Robert (2002). « Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models », *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 20, no 3, p. 339-350.
- Engle, Robert F. (1982). « Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation », *Econometrica*, vol. 50, no 4, p. 987.

- Engle, Robert F. et Gary G. J. Lee (1999). « A Long-Run and Short-Run Component Model of Stock Return Volatility », dans Robert F. Engle et Halbert White (dir.), *Cointegration, Causality and Forecasting : A Festschrift in Honor of Clive W.J. Granger*, Oxford, Oxford University Press, p. 475-497.
- Engle, Robert F. et Victor K. Ng (1993). « Measuring and Testing the Impact of News on Volatility », *The Journal of Finance*, vol. 48, no 5, p. 1749-1778.
- Engle, Robert et Gloriá Gonzalez-Rivera (1991). « Semiparametric ARCH Models », *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 9, no 4, p. 345-359.
- French, Kenneth R., G. William Schwert et Robert F. Stambaugh (1987). « Expected stock returns and volatility », *Journal of Financial Economics*, vol. 19, no 1, p. 3-29.
- Gallant, A. Ronald et George Tauchen (1989). « Semiparametric Estimation of Conditionally Constrained Heterogeneous Processes: Asset Pricing Applications », *Econometrica*, vol. 57, no 5, p. 1091.
- Goltz, Felix et David Schröder (2011). « Passive Investing before and after the Crisis: Investors' Views on Exchange-Traded Funds and Competing Index Products », *Bankers Markets & Investors*, vol. 110, p. 5-20.
- Guo, Hui (2006). « The Risk-Return Relation in International Stock Markets », *Financial Review*, vol. 41, no 4, p. 565-587.
- Jin, Xing, Leping Wang et Jun Yu (2007). « Temporal Aggregation and Risk-Return Relation », *Finance Research Letters*, vol. 4, no 2, p. 104-115.
- Jondeau, E., S.H. Poon et M. Rockinger (2007). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*, 1<sup>o</sup> éd., Springer-Verlag London, coll. Springer Finance, 541 p.
- Kanas, Angelos (2012). « Modelling the Risk-Return Relation for the S&P 100: The Role of VIX », *Economic Modelling*, vol. 29, no 3, p. 795-809.
- Kanas, Angelos (2013). « The Risk-Return Relation and VIX: Evidence from the S&P 500 », *Empirical Economics*, vol. 44, no 3, p. 1291-1314.
- Kim, Hwagyun, Joon Y. Park et Yoosoon Chang (2011). « Evaluating Factor Pricing Models Using High Frequency Panels », *Mays Business School Research Paper*, vol. 2012, no 37.
- Kritzman, Mark et Don Rich (2002). « The Mismeasurement of Risk », *Financial Analysts Journal*, vol. 58, no 3, p. 91-99.
- Lee, Tom K. Y. et Y. K. Tse (1991). « Term Structure of Interest Rates in the Singapore Asian Dollar Market », *Journal of Applied Econometrics*, vol. 6, no 2, p. 143-152.
- León, Ángel, Juan M. Nave et Gonzalo Rubio (2007). « The Relationship Between Risk and Expected Return in Europe », *Journal of Banking & Finance*, vol. 31, no 2, p. 495-512.

- Loudon, Geoffrey F. (2006). « Is the Risk-Return Relation Positive? Further Evidence from a Stochastic Volatility in Mean Approach », *Applied Financial Economics*, vol. 16, no 13, p. 981-992.
- Lüders, Erik et Michael Schröder (2004). « Modeling Asset Returns: A Comparison of Theoretical and Empirical Models », *ZEW*, vol. 04, no 19, p. 1-24.
- Maller, Ross A., Robert B. Durand et Hediah Jafarpour (2010). « Optimal Portfolio Choice Using the Maximum Sharpe Ratio », *The Journal of Risk*, vol. 12, no 4, p. 49-73.
- Markowitz, Harry (1952). « PORTFOLIO SELECTION\* », *The Journal of Finance*, vol. 7, no 1, p. 77-91.
- Merton, Robert C. (1973). « An Intertemporal Capital Asset Pricing Model », *Econometrica*, vol. 41, no 5, p. 867-887.
- Merton, Robert C. (1980). « On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation », *Journal of Financial Economics*, vol. 8, no 4, p. 323-361.
- Nagel, Stefan (2012). « Evaporating Liquidity », *Review of Financial Studies*, vol. 25, no 7, p. 2005-2039.
- Nelson, Daniel B. (1991). « Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach », *Econometrica*, vol. 59, no 2, p. 347-370.
- Sharpe, William F. (1964). « Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk », *The Journal of Finance*, vol. 19, no 3, p. 425-442.
- Tobin, J. (1958). « Liquidity Preference as Behavior Towards Risk », *The Review of Economic Studies*, vol. 25, no 2, p. 65-86.
- Wang, Chunrong (2011). *The Information Content of Canadian Implied Volatility Indexes*, Master of Science St. Catharines, Ontario, Canada, Brock University, 74 p.

