

HEC MONTRÉAL

**Bris de la symétrie dans la formulation en nombres entiers du
problème de balancement de la charge de wagons**

par

Luis Lenin Saucedo Prado

**Sciences de la gestion
Option Logistique Internationale**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences
(M.Sc.)*

Septembre 2014
© Luis Lenin Saucedo Prado, 2014

Sommaire

Ce mémoire porte sur le bris de la symétrie dans la formulation en nombres entiers du problème de balancement de la charge de wagons (Ghoniem et Sherali, 2011). Il est amplement constaté qu'en présence de symétrie, pour une solution donnée, plusieurs solutions alternatives sont générées par la permutation de certains objets identiques (Jans, 2009). Ceci produit un ralentissement dans le processus de résolution de l'algorithme de séparation et d'évaluation progressive (SÉP) et par conséquent, des temps de calcul accrus seront nécessaires avant de trouver une solution optimale (Jans et Desrosiers, 2013).

L'objectif principal de ce mémoire est de comparer la performance des techniques de bris de symétrie existant dans la littérature. Pour ce faire, nous avons modélisé une série de formulations issues des approches de reformulation et de l'ajout de contraintes. De plus, nous cherchons aussi à déterminer si l'ordre dans lequel les données sont traitées par le solveur (croissant, décroissant) exerce un impact sur les valeurs relaxées et sur le temps de calcul.

Nos expérimentations permettent d'observer qu'une reformulation judicieuse parvient à réduire le temps de calcul de façon importante. De même, nous avons constaté que certaines combinaisons de contraintes de bris de symétrie (hiérarchiques et lexicographiques) permettent aussi d'alléger le processus de résolution optimal.

Enfin, nous avons observé que le temps de calcul optimal est affecté par l'ordonnement des données et qu'en général un ordre croissant de données semble réduire le temps de calcul dans une plus grande proportion.

Table des matières

Sommaire	ii
Table des matières	iv
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	viii
Remerciements	xi
Chapitre 1 – Introduction	12
1.1-Présentation du contexte	12
1.2-But du mémoire	13
1.3-Motivation et questions de recherche	13
1.4-Méthodologie et approche de résolution	15
1.5-Organisation de ce mémoire	16
Chapitre 2 – Présentation du problème de symétrie	17
2.1-Origine de la symétrie	17
2.2-La symétrie dans un problème de remplissage de conteneurs	18
2.3-La symétrie dans l’algorithme de séparation et d’évaluation progressive (SÉP)	23
Chapitre 3 – Revue de la littérature	29
3.1-La modélisation en nombres entiers	29

3.2-L'étude de la symétrie dans les formulations en nombres entiers	30
3.3-L'ordonnement des données	33
3.4-Les approches de bris de symétrie	34
3.4.1-La reformulation	35
3.4.2-L'ajout de contraintes de bris de symétrie	38
3.4.2.1-Les contraintes hiérarchiques	39
3.4.2.2-Les contraintes lexicographiques	40
3.4.2.3-La réduction de variables	42
3.4.2.4-La perturbation de la fonction objectif	45

Chapitre 4 – Modélisation du problème de balancement de la charge de wagons **47**

4.1-Contexte du problème	44
4.2-Description du problème	48
4.3- Modélisation du problème	49
4.4-Contraintes hiérarchiques concernant les boîtes identiques	52
4.5-Contraintes hiérarchiques concernant les wagons identiques	56
4.6-Contraintes lexicographiques concernant les boîtes identiques	61
4.7-Contraintes lexicographiques concernant les wagons identiques	62
4.8-Bris simultané de la symétrie entre les boîtes et les wagons identiques	64
4.9-La réduction de variables	65
4.10-Des améliorations apportées à la réduction de variables	65
4.11-La reformulation	66
4.12-Des améliorations apportées à la reformulation	68
4.13-La formulation des représentants asymétriques (ARF)	69
4.14-La perturbation de la fonction objectif	71
4.14.1-La perturbation avec des contraintes hiérarchiques	73
4.14.2-La perturbation avec des contraintes lexicographiques	74
4.14.3-La perturbation pour la réduction de variables	75
4.14.4-La perturbation de la reformulation	75
4.15-Conclusions	76

Chapitre 5 – Présentation des résultats **84**

5.1-Résolution du problème de balancement de la charge de wagons (BCWL)	85
5.1.1-Résultats de la formulation symétrique	85
5.1.2-Résultats des contraintes hiérarchiques concernant les boîtes identiques	88

5.1.3-Résultats des contraintes hiérarchiques concernant les wagons identiques	90
5.1.4-Résultats de contraintes lexicographiques concernant les boîtes identiques	92
5.1.5-Résultats du bris simultané de la symétrie entre les boîtes et les wagons identiques	93
5.1.6-Résultats des formulations de réduction de variables	97
5.1.7-Résultats des améliorations apportées à la réduction de variables	98
5.1.8-Résultats de la reformulation	99
5.1.9-Résultats des améliorations apportées à la reformulation	100
5.1.10-Résultats de la formulation des représentants asymétriques (ARF)	103
5.1.11-Résultats de la perturbation de la fonction objectif	104
5.1.11.1-Résultats des formulations perturbées avec une contrainte hiérarchique	104
5.1.11.2-Résultats des formulations perturbées avec la contrainte lexicographique 2.1	108
5.1.11.3-Résultats des formulations perturbées pour les propositions de bris simultané de la symétrie	109
5.1.11.4-Résultats des formulations perturbées pour la réduction de variables	112
5.1.11.5-Résultats de la perturbation de la reformulation	115
5.1.12 -Conclusions	117
5.2- Analyse de la variation de l'ordonnement des données	120
5.2.1-Résultats de l'ordonnement des données pour BCWL	121
5.2.2-Résultats de l'ordonnement des données pour les contraintes hiérarchiques et lexicographiques	121
5.2.3-Résultats de l'ordonnement des données pour les formulations de bris simultané de la symétrie	122
5.2.4-Résultats de l'ordonnement des données pour les formulations de réduction de variables	124
5.2.5-Résultats de l'ordonnement des données pour les reformulations	125
5.2.6-Conclusions	127
Chapitre 6 – Conclusions	129
Bibliographie	131
Annexes	134

Liste des figures

Figure 2.1-Représentation graphique du BPP.....	18
Figure 2.2-Première solution alternative pour BPP.....	20
Figure 2.3-Deuxième solution alternative pour BPP.....	21
Figure 2.4-Troisième solution alternative pour BPP.....	22
Figure 2.5-Solution relaxée pour BPP-1.....	25
Figure 2.6-Arbre de résolution intermédiaire pour BPP-1.....	26
Figure 2.7-Arbre de résolution finale pour BPP-1.....	27

Liste des tableaux

Tableau 2.1-Poids des boîtes pour BPP.....	18
Tableau 2.2-Valeurs des variables décisionnelles correspondant à la figure 2.2.....	20
Tableau 2.3-Valeurs des variables décisionnelles correspondant à la figure 2.3.....	21
Tableau 2.4-Valeurs des variables décisionnelles correspondant à la figure 2.4.....	23
Tableau 2.5-Solutions alternatives pour BPP-1.....	28
Tableau 3.1-Affectation des boîtes à des camions identiques pour BPP-2.....	36
Tableau 3.2-Permutation de variables de décision pour BPP-2.....	37
Tableau 3.3-Variables de décision pour la reformulation ARF pour BPP-2.....	37
Tableau 3.4-Permutation de variables de décision pour ARF pour BPP-2.....	38
Tableau 3.5-Solution admissible de BPP-2 avec la contrainte lexicographique (3.9).....	41
Tableau 4.1-Ensemble de solutions alternatives pour 4 boîtes et 2 wagons identiques avec la contrainte (4.25).....	57
Tableau 4.2-Coefficients identiques pour l'instance de (4;40) avec la contrainte (4.30).....	59
Tableau 4.3-Sommaire de formulations.....	78
Tableau 4.4-Sommaire de combinaisons de formulations de bris de symétrie.....	82
Tableau 5.1-Composition de groupes de données à tester.....	84
Tableau 5.2-Résultats de la formulation symétrique.....	85

Tableau 5.3-Résultats de la formulation symétrique avec le paramètre de bris de symétrie égal à zéro.....	87
Tableau 5.4-Résultats des contraintes hiérarchiques concernant les boîtes identiques.....	88
Tableau 5.5-Résultats des contraintes hiérarchiques concernant les wagons identiques.....	91
Tableau 5.6-Résultats des contraintes lexicographiques concernant les boîtes identiques.....	93
Tableau 5.7-Résultats des combinaisons de deux contraintes hiérarchiques pour les boîtes et les wagons identiques	94
Tableau 5.8-Résultats de la combinaison de la contrainte lexicographique pour les boîtes identiques avec des contraintes pour les wagons identiques.....	95
Tableau 5.9-Résultats de la réduction de variables.....	97
Tableau 5.10-Résultats des améliorations apportées à la réduction de variables.....	98
Tableau 5.11-Résultats de la reformulation (RBCWL).....	100
Tableau 5.12-Résultats de RBCWL augmentée avec des contraintes pour les wagons identiques.....	101
Tableau 5.13-Résultats de la formulation ARF.....	103
Tableau 5.14-Résultats de la perturbation en utilisant une contrainte hiérarchique et les coefficients C1 et C2.....	105
Tableau 5.15-Résultats de la perturbation en utilisant une contrainte hiérarchique et les coefficients NC1 et NC2.....	106
Tableau 5.16-Résultats de la perturbation en utilisant la contrainte lexicographique 2.1 et les coefficients C1 et C2.....	108
Tableau 5.17-Résultats de la perturbation en utilisant la contrainte lexicographique 2.1 et les coefficients NC1 et NC2.....	109
Tableau 5.18-Résultats de la perturbation pour les propositions de bris simultanée de la symétrie avec C1 et C2.....	110
Tableau 5.19-Résultats de la perturbation pour les propositions de bris simultanée de la symétrie avec NC1 et NC2.....	111

Tableau 5.20-Résultats de la perturbation pour la réduction des variables avec C1 et C2.....	113
Tableau 5.21-Résultats de la perturbation pour la réduction des variables avec NC1 et NC2.....	114
Tableau 5.22-Résultats de la perturbation pour les reformulations avec C3 et C4.....	115
Tableau 5.23-Résultats de la perturbation pour les reformulations avec NC3 et NC4.....	116
Tableau 5.24-Classement de la performance des propositions de bris de symétrie.....	118
Tableau 5.25-Bilan de la performance des propositions de perturbation de la fonction objectif.....	120
Tableau 5.26-Résultats obtenus de l'ordonnancement des données pour BCWL.....	121
Tableau 5.27-Résultats obtenus de l'ordonnancement des données pour les propositions hiérarchiques et lexicographiques.....	122
Tableau 5.28-Résultats obtenus de l'ordonnancement des données pour les propositions de bris simultané de la symétrie	123
Tableau 5.29-Résultats obtenus de l'ordonnancement des données pour les réductions de variables.....	125
Tableau 5.30-Résultats obtenus de l'ordonnancement des données pour les reformulations.....	126
Tableau 5.31-Bilan de résultats de l'ordonnancement des données.....	127
Tableau 7.1-Tests de formules additionnelles.....	135
Tableau 7.2- Composition de formules additionnelles.....	136

Remerciements

Je tiens à remercier d'abord à mon directeur de mémoire, le professeur Raf Jans pour tout son support et toute sa patience. Merci beaucoup!

Je remercie aussi mes parents, Luis Alberto et Isabel, parce qu'ils me donnent les forces pour continuer tous les jours dans la vie. Merci pour leurs encouragements! Je vous aime beaucoup!

Un remerciement très spécial à ma femme Kelly qui m'a accompagné tout au long de ce projet. Elle a su m'encourager dans les moments difficiles et c'est grâce à elle que j'ai eu le courage de finir ce projet. Je t'aime à l'infini.

Je tiens à remercier mon beau-père, Vitaliano qui nous regarde du ciel, grâce pour nous avoir transmis l'enthousiasme et l'énergie au maximum.

Chapitre 1 - Introduction

1.1 Présentation du contexte

La programmation linéaire en nombres entiers vise la résolution optimale d'un grand éventail de problèmes venus de différents domaines y compris la logistique. Ses premières applications se trouvent dans le domaine militaire et son succès immédiat a motivé l'extension de son usage à de nombreux autres domaines civils. Cependant, même si cette méthode a largement prouvé son utilité, la plupart des formulations en nombres entiers possèdent des caractéristiques qui compliquent leur résolution. Par exemple, une augmentation du nombre de variables accroît de façon exponentielle le nombre de solutions possibles d'un problème. Par conséquent, le processus de résolution devient plus complexe. La situation s'aggrave dans les cas où pour une même valeur de la fonction objectif, plusieurs solutions alternatives existent. Margot (2010) souligne que sous ces circonstances, même pour des problèmes de petite taille, l'algorithme de résolution exacte s'avère extrêmement inefficace. Cette difficulté est souvent constatée dans les formulations en nombres entiers contenant de la symétrie dans leurs structures.

La symétrie est définie par Cohen et al. (2005) comme étant : « *la possibilité de permuter ou échanger les valeurs des variables de décision sans pour autant faire varier la solution d'un problème* » (librement traduit de Cohen et al., 2005). Dans les problèmes symétriques, la permutation des variables de décision génère plusieurs solutions alternatives. Jans (2009) explique que ces solutions alternatives

produisent une duplication de nœuds au niveau de l'arborescence de l'algorithme de séparation et d'évaluation progressive (SÉP) (*Branch and Bound*). De plus, selon Ghoniem (2007), ces nœuds dupliqués seront explorés sans restriction lors du calcul de la solution optimale. D'après Sherali et Smith (2001), en raison de cette exploration redondante des nœuds dupliqués (équivalents) des temps de calcul accrus seront nécessaires avant d'obtenir une solution optimale.

1.2 But du Mémoire

L'objectif ultime de ce projet de recherche est de comparer la performance de différentes approches de bris de symétrie existant dans la littérature. Ceci va permettre de déterminer dans quelle mesure l'application de ces stratégies parvient à améliorer la capacité de résolution de la formulation en nombres entiers pour le problème de balancement de la charge de wagons (*Wagon Load-Balancing Problem* ou BCW) proposé par Ghoniem et Sherali (2011).

Dans un deuxième temps, nous cherchons à observer l'impact que peut exercer une variation de l'ordre des données (croissant et décroissant) sur les valeurs de la relaxation linéaire et sur le temps de calcul optimal. D'après Jans et Desrosiers (2013), un ordonnancement de données peut améliorer les valeurs relaxées et réduire le temps de calcul. Toutefois, nous voulons constater si les conclusions de ces chercheurs sont aussi valables pour nos expérimentations.

1.3 Motivation et questions de recherche

Le problème de symétrie constitue une barrière à franchir afin d'améliorer la résolution d'un grand nombre de formulations en nombres entiers. Margot (2010) remarque que la symétrie est fréquemment présente dans un grand nombre de problèmes d'optimisation. Ce chercheur cite par exemple : les problèmes de planification de production sur des machines identiques (*Scheduling of Jobs on Parallel Identical Machines*), les problèmes de coloriage sur les arcs (*Graph Coloring Problems*), les problèmes de recouvrements (*Covering Design*

Problems). Bosch et Trick (2005) considèrent que la symétrie peut être la raison principale de l'échec de la résolution d'une formulation en nombres entiers.

Notre motivation pour mener ce projet de recherche se concentre sur notre intérêt de contribuer à la suppression ou diminution efficace de la symétrie dans les problèmes d'optimisation. En général, dans ce mémoire, nous cherchons à savoir :

Comment pourrait-on briser la symétrie dans les formulations en nombres entiers appliquées à des situations tirées de la réalité?

Plus particulièrement, ce mémoire se focalise sur la création de propositions de bris de symétrie permettant l'obtention d'une solution optimale dans des délais raisonnables. En ce sens, nous cherchons à déterminer :

Quelles techniques pourrait-on utiliser pour briser la symétrie dans les formulations en nombres entiers?

Quelle est la performance de ces techniques de bris de symétrie?

Enfin, en raison de l'importance qu'il faut accorder aux valeurs de la relaxation linéaire dans la résolution des formulations en nombres entiers, nous jugeons aussi intéressant d'évaluer le comportement des valeurs relaxées lorsque les données sont ordonnées de différentes façons (croissante, décroissante, aléatoire). Il faut souligner que ces types d'analyses ont été menés pour la première fois par Jans et Desrosiers (2010, 2013). Plus récemment, Laporte et Coelho (2013) appliquent cette même approche sur un problème de tournées de véhicules avec inventaires (*Inventory Routing Problems*). Cependant, ces chercheurs remarquent l'importance d'effectuer ces types d'expérimentations sur de nouvelles applications afin de contribuer à la formation des bases de recherche plus solides.

C'est ainsi que dans un deuxième temps, nous allons observer :

Quel est l'impact de l'ordre des données sur la relaxation linéaire?
Quel est l'impact de l'ordre des données sur le temps de calcul de la solution optimale?

1.4 Méthodologie et approches de résolution

Dans ce mémoire nous allons modéliser plusieurs propositions de bris de symétrie basées sur les principes de la reformulation et de l'ajout de nouvelles contraintes. Ces propositions seront appliquées de manière séparée ainsi que de manière conjointe sur le problème de balancement de la charge de wagons (Ghoniem et Sherali, 2011).

Le problème de balancement de la charge de wagons (Ghoniem et Sherali, 2011) consiste à l'affectation d'un ensemble de boîtes sur des wagons identiques. L'objectif poursuivi est la minimisation de la somme des valeurs absolues de l'écart entre le poids chargé dans chaque wagon et le poids moyen des wagons. La caractéristique principale qui rend ce problème pertinent pour notre recherche est la double présence de symétrie dans sa structure. Il s'agit de la symétrie générée par la présence des boîtes identiques jumelée à la symétrie venant des wagons de même capacité.

Le problème énoncé ci-haut sera modélisé et résolu à l'aide du langage de programmation OPL et du logiciel d'optimisation CPLEX 12.6. L'analyse empirique des résultats obtenus va nous permettre de déterminer les performances de nos propositions quant à leur capacité d'améliorer le processus de résolution du problème traité.

Les données requises pour nos expérimentations seront obtenues de Ghoniem et Sherali (2011). Ces chercheurs ont généré et rendu public 120 instances des données divisées uniformément sur 6 groupes de (4;40), (5;50), (5;60), (6;60),

(5;80) et (4,100) où le premier chiffre correspond au nombre de wagons et le deuxième au nombre de boîtes. De plus, les poids des boîtes pour chaque instance ont été générés aléatoirement à partir du groupe : {17, 27, 30, 35}.

D'ailleurs, nous devons préciser que CPLEX 12.6 contient des paramètres de bris de symétrie allant de 0 à 5 où zéro correspond à un niveau de non-utilisation du bris de symétrie et 5 correspond au niveau le plus agressif de bris de symétrie. Toutefois, Jans et Desrosiers (2013) ont constaté que l'utilisation du niveau 5 de bris de symétrie ne permet pas nécessairement d'améliorer les effets de la symétrie sur le temps de calcul par rapport au niveau 1. C'est pourquoi, nous avons décidé d'utiliser pour toutes nos expérimentations la configuration -1 qui indique que le logiciel va attribuer un niveau de bris de symétrie en accord avec les caractéristiques particulières du problème.

1.5 Organisation de ce mémoire

Dans le deuxième chapitre, nous exposerons le problème de symétrie ainsi que les effets négatifs que celui-ci exerce sur l'algorithme SÉP. La revue de la littérature sera présentée dans le troisième chapitre. Dans ce dernier, nous définirons les techniques de bris de symétrie existantes dans la littérature.

Le quatrième chapitre commence par présenter un bref aperçu du problème de balancement de la charge de wagons. Ensuite, dans ce chapitre nous développerons les formulations de bris de symétrie qui seront appliquées au problème traité. Les résultats de nos expérimentations seront présentés dans le cinquième chapitre. L'analyse de ces résultats et les premières conclusions seront aussi mises en avant dans cette section.

Finalement, dans le sixième chapitre qui est le dernier de ce mémoire, nous ferons d'abord un bilan des étapes les plus importantes de ce projet de recherche. Ensuite, nous répondrons à la question générale et aux questions spécifiques qui mènent ce travail. Enfin, nous allons mentionner les principales contributions ainsi que certaines pistes de recherches pouvant découler de notre recherche.

Chapitre 2 - Présentation du problème de symétrie

Dans ce chapitre nous allons démontrer les effets produits par l'existence de la symétrie dans les formulations en nombres entiers. À cet effet, nous allons présenter et analyser deux problèmes de remplissage de conteneurs (*Bin Packing Problem* ou BPP) contenant de la symétrie dans leurs structures.

2.1 Origine de la symétrie

Jans (2009) remarque que souvent les problèmes symétriques exigent l'affectation d'un ensemble d'objets identiques dans d'autres objets qui des fois sont aussi identiques. D'après Ostrowski (2008) la permutation de ces objets identiques permet l'obtention des valeurs alternatives pour les variables décisionnelles pour une même valeur de la fonction objectif. Ces idées nous amènent à déduire qu'à l'origine de la symétrie se trouve la présence de certains objets identiques.

Afin d'illustrer cette dernière conclusion, nous présentons deux exemples du problème de remplissage des conteneurs. Dans le premier exemple, nous cherchons à constater que pour une solution donnée, plusieurs solutions alternatives peuvent être obtenues par la permutation des objets identiques. Le deuxième exemple va nous permettre de constater que des nœuds équivalents sont présents dans l'arbre de résolution exacte en présence de symétrie.

2.2 La symétrie dans un problème de remplissage de conteneurs

Supposons d'abord que pour le problème BPP nous possédons 6 boîtes (j) et 4 conteneurs identiques (i) ayant une capacité de 10 kg. Il faut placer toutes les boîtes dans les conteneurs avec l'objectif de minimiser le nombre de conteneurs à utiliser. Dans le tableau 2.1 les poids des boîtes sont présentés.

Tableau 2.1 - Poids des boîtes pour BPP

Boîtes	A	B	C	D	E	F
Poids (kg)	2	8	5	3	7	3

L'exemple énoncé ci-dessous est représenté graphiquement dans la figure 2.1.

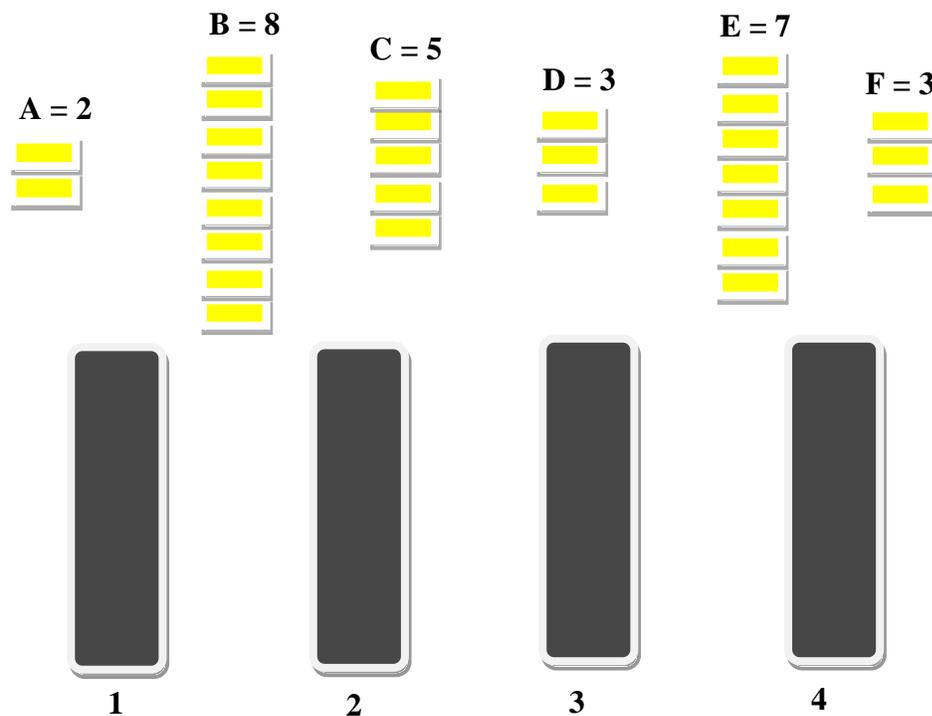


Figure 2.1 - Représentation graphique de BPP

De même, pour ce problème, Martello et Toth (1990) proposent la formulation en nombres entiers suivante (formulation BPP) :

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m y_i \quad (2.1)$$

Sujet à:

$$\sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq c_i y_i \quad \forall i \in I \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (2.3)$$

$$y_i, x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J \quad (2.4)$$

Variables de décision :

$y_i = 1$ si le conteneur i est utilisé, 0 sinon,

$x_{ij} = 1$ si la boîte j est allouée au conteneur i , 0 sinon,

Paramètres :

$c_i =$ capacité du conteneur i ,

$w_j =$ poids de la boîte j .

La fonction objectif (2.1) a pour but la minimisation du nombre de conteneurs à utiliser. La contrainte (2.2) assure que la capacité de chaque conteneur à utiliser ne sera pas dépassée. La contrainte (2.3) impose que toutes les boîtes doivent être placées. Finalement, la contrainte (2.4) exige aux variables de décision de prendre des valeurs binaires (0 ou 1) selon les décisions qui seront prises.

Il est possible de résoudre cette situation à l'aide d'un autre graphique. Dans la figure 2.2 nous proposons une première solution réalisable.

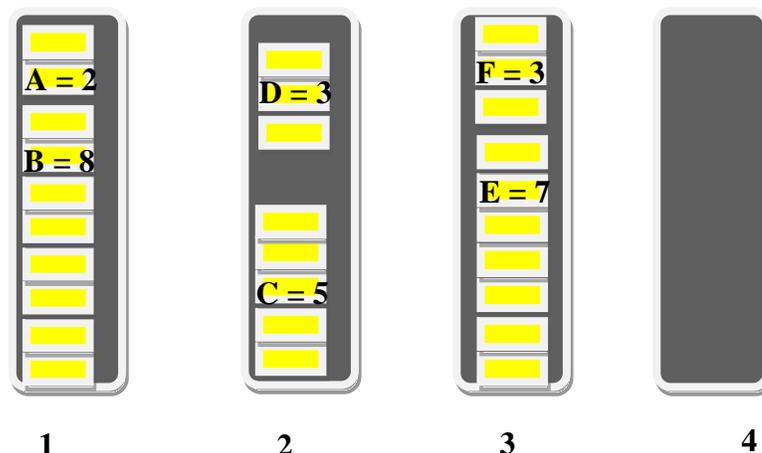


Figure 2.2 - Première solution alternative pour BPP

La figure 2.2 révèle que ce problème peut être résolu en utilisant trois des quatre conteneurs. De plus, les valeurs que les variables de décision vont prendre pour cette affectation sont présentées dans le tableau 2.2.

Tableau 2.2 - Valeurs des variables décisionnelles correspondant à la figure 2.2

$x_{1A} = 1$	$x_{2A} = 0$	$x_{3A} = 0$	$x_{4A} = 0$
$x_{1B} = 1$	$x_{2B} = 0$	$x_{3B} = 0$	$x_{4B} = 0$
$x_{1C} = 0$	$x_{2C} = 1$	$x_{3C} = 0$	$x_{4C} = 0$
$x_{1D} = 0$	$x_{2D} = 1$	$x_{3D} = 0$	$x_{4D} = 0$
$x_{1E} = 0$	$x_{2E} = 0$	$x_{3E} = 1$	$x_{4E} = 0$
$x_{1F} = 0$	$x_{2F} = 0$	$x_{3F} = 1$	$x_{4F} = 0$

Dans le tableau 2.2 les variables avec un résultat de 1 indiquent qu'une boîte est allouée à un certain conteneur. Alors que les variables avec des valeurs 0 indiquent que la boîte n'est pas affectée à ce conteneur. Par exemple $x_{1A} = 1$ détermine que la boîte A sera allouée au conteneur 1. Tandis que $x_{2B} = 0$ détermine que la boîte B ne sera pas allouée au conteneur 2.

Essayons maintenant de permuter la position des conteneurs identiques. Ceci va nous permettre de vérifier si d'autres solutions alternatives sont obtenues. La figure 2.3 illustre cette situation.

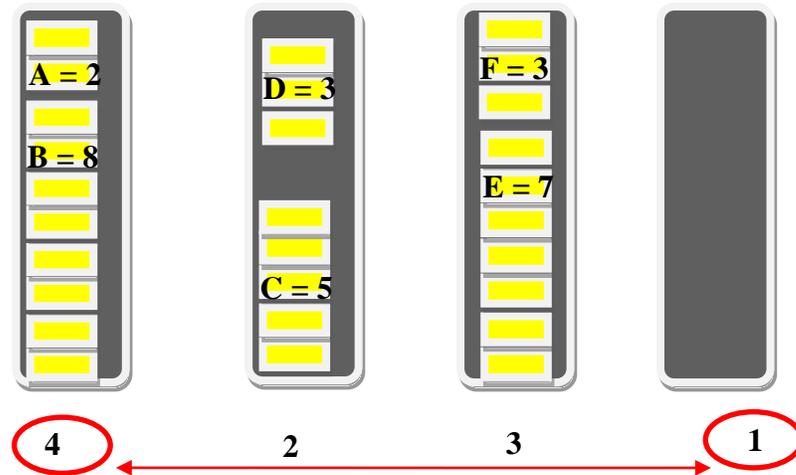


Figure 2.3 - Deuxième solution alternative pour BPP

En effet, dans la figure 2.3 nous observons qu'après la permutation de la position des conteneurs identiques 1 et 4, nous obtenons une nouvelle solution avec une utilisation de 3 conteneurs. De plus, des nouvelles valeurs des variables de décision sont aussi générées par la permutation de ces conteneurs, tel qu'observé dans le tableau 2.3.

Tableau 2.3 - Valeurs des variables décisionnelles correspondant à la figure 2.3

$x_{4A} = 1$	$x_{2A} = 0$	$x_{3A} = 0$	$x_{1A} = 0$
$x_{4B} = 1$	$x_{2B} = 0$	$x_{3B} = 0$	$x_{1B} = 0$
$x_{4C} = 0$	$x_{2C} = 1$	$x_{3C} = 0$	$x_{1C} = 0$
$x_{4D} = 0$	$x_{2D} = 1$	$x_{3D} = 0$	$x_{1D} = 0$
$x_{4E} = 0$	$x_{2E} = 0$	$x_{3E} = 1$	$x_{1E} = 0$
$x_{4F} = 0$	$x_{2F} = 0$	$x_{3F} = 1$	$x_{1F} = 0$

Nous pouvons remarquer que les nouvelles valeurs des variables présentées dans le tableau 2.3 sont des solutions alternatives aux résultats présentés dans le tableau 2.2. Nous confirmons donc que la permutation des conteneurs identiques génère des solutions alternatives.

Nous pouvons déduire que pour BPP le nombre de permutations possible sera égal au factoriel du nombre de conteneurs identiques ($m!$), si tous les conteneurs sont utilisés. C'est-à-dire qu'il peut exister jusqu'à 24 solutions alternatives ($4!$). Imaginons la complexité que le problème de symétrie peut représenter pour une grosse entreprise utilisant une flotte de 12 camions identiques pour la livraison de ses produits. Si tous les camions sont utilisés, il peut exister jusqu'à $12!$ ou 479 001 600 solutions alternatives.

De plus, d'autres solutions alternatives peuvent être générées pour le problème BPP en raison de l'existence de boîtes de poids identiques. En effet, les boîtes D et F ont un poids identique égal à 3kg. Ces boîtes peuvent être permutées de leurs positions donnant lieu à des nouvelles solutions alternatives. La figure 2.4 illustre cette situation.

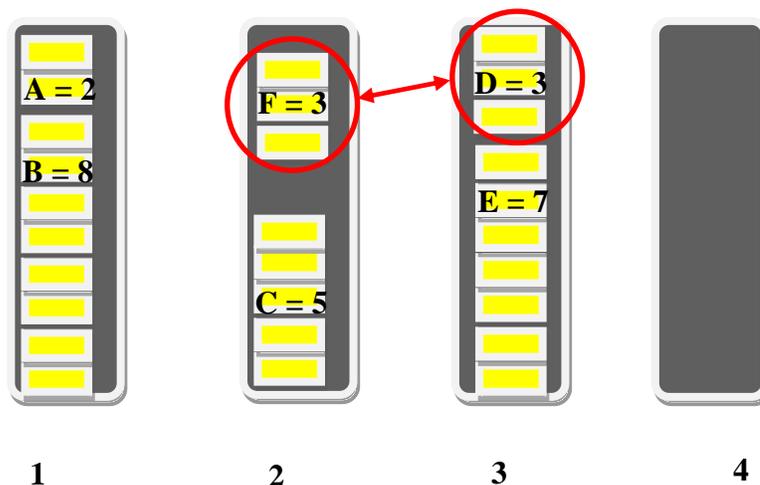


Figure 2.4 - Troisième solution alternative pour BPP

La figure 2.4 permet de constater que la permutation des boîtes identiques donne lieu à une nouvelle solution alternative, toujours, pour la même valeur de la

fonction objectif. Regardons maintenant le comportement des valeurs des variables de décision dans le tableau 2.4.

Tableau 2.4 - Valeurs des variables décisionnelles correspondant à la figure 2.4

$x_{1A} = 1$	$x_{2A} = 0$	$x_{3A} = 0$	$x_{4A} = 0$
$x_{1B} = 1$	$x_{2B} = 0$	$x_{3B} = 0$	$x_{4B} = 0$
$x_{1C} = 0$	$x_{2C} = 1$	$x_{3C} = 0$	$x_{4C} = 0$
$x_{1D} = 0$	$x_{2D} = 0$	$x_{3D} = 1$	$x_{4D} = 0$
$x_{1E} = 0$	$x_{2E} = 0$	$x_{3E} = 1$	$x_{4E} = 0$
$x_{1F} = 0$	$x_{2F} = 1$	$x_{3F} = 0$	$x_{4F} = 0$

Dans le tableau 2.4 nous observons que la permutation des boîtes identiques fait aussi permuer les valeurs des variables de décision. Donc, il est incontestable que nous sommes face à une autre solution alternative qui demande encore l'utilisation de 3 conteneurs.

2.3 La symétrie dans l'algorithme de séparation et d'évaluation progressive (SÉP)

Afin d'illustrer les effets du problème de symétrie sur l'algorithme SÉP nous présentons un deuxième exemple. Supposons que pour BPP-1 nous cherchons à affecter trois boîtes de 6, 2 et 10 kg vers trois conteneurs de capacité identique et égal à 10 kg. L'objectif est de minimiser le nombre de conteneurs à utiliser. La formulation mathématique pour représenter cet exemple sera :

$$\text{Min } y_1 + y_2 + y_3 \quad (2.5)$$

Sujet à :

$$6 x_{1A} + 2 x_{1B} + 10 x_{1C} \leq 10 y_1 \quad (2.6)$$

$$6 x_{2A} + 2 x_{2B} + 10 x_{2C} \leq 10 y_2 \quad (2.7)$$

$$6 x_{3A} + 2 x_{3B} + 10 x_{3C} \leq 10 y_3 \quad (2.8)$$

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 1 \quad (2.9)$$

$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 1 \quad (2.10)$$

$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 1 \quad (2.11)$$

$$y_i, x_{ij} \in \{0,1\} \quad (2.12)$$

Variables de décision :

$y_i = 1$ si le conteneur i est utilisé, 0 sinon,

$x_{ij} = 1$ si la boîte j est allouée au conteneur i , 0 sinon,

La fonction objectif (2.5) cherche à minimiser le nombre de conteneurs à utiliser. Ensuite, les contraintes (2.6) à (2.8) correspondent à la contrainte (2.2) de la formulation BPP. Ces contraintes permettent de respecter la capacité de chaque conteneur. De plus, les contraintes (2.9) à (2.11) qui correspondent à la contrainte (2.3) de la formulation BPP, visent à assurer que chaque boîte sera allouée à exactement un conteneur. Enfin, la contrainte (2.12) exige aux variables à prendre des valeurs 0 ou 1.

Nous allons résoudre cette formulation par le biais de l'algorithme SÉP. Ostrowski (2008) explique que cette technique consiste en une division successive de la région admissible en plusieurs sous-régions de plus petite taille qui seront plus faciles à résoudre de façon individuelle. C'est pourquoi plusieurs auteurs dénomment cette méthode comme la technique de : «*diviser et conquérir*» (Eppen et al., 1998, Wolsey, 1998).

Wolsey (1998) explique que la méthode SÉP demande d'abord de calculer une solution initiale relaxée. Cette solution s'obtient de la résolution de la formulation en nombres entiers sans la contrainte d'intégrité (relaxation linéaire de la formulation en nombres entiers).

Dans la figure 2.5 nous présentons la solution relaxée pour BPP-1.

FO = 1,8		
$x_{1A} = 1$	$x_{2A} = 0$	$x_{3A} = 0$
$x_{1B} = 1$	$x_{2B} = 0$	$x_{3B} = 0$
$x_{1C} = 0$	$x_{2C} = 0$	$x_{3C} = 1$
$y_1 = 0,8$	$y_2 = 0$	$y_3 = 1$

Figure 2.5 - Solution relaxée pour BPP-1

La figure 2.5 présente la solution de la relaxation linéaire de BPP-1 (FO =1,8) Nemhauser et Wolsey (1988) soulignent que l'importance de la relaxation réside dans le fait que cette valeur est en pratique le point de départ (borne inférieure ou supérieure) du calcul d'une solution entière. D'où l'importance d'avoir des relaxations fortes (proche de l'optimum) car dans tels cas, la résolution optimale demandera moins du temps.

Ensuite, l'algorithme SÉP impose la séparation systématique de l'ensemble de solutions admissibles obtenues de la relaxation. Pour ce faire, deux nouvelles contraintes seront créées en utilisant une des variables ayant des valeurs non-entières. Wolsey (1998) explique que généralement on utilise la variable ayant la valeur la plus fractionnelle (plus proche de 0.5) pour créer ces deux contraintes.

Dans notre exemple, nous avons choisi $y_1 = 0,8$ qui sera arrondi vers le haut et vers le bas pour donner lieu aux deux contraintes suivantes :

$$y_1 = 1 \tag{2.13}$$

$$y_1 = 0 \tag{2.14}$$

Ces nouvelles contraintes seront ajoutées séparément au BPP-1 relaxé. Ceci va nous permettre d'obtenir l'arbre intermédiaire de résolution présenté dans la figure 2.6.

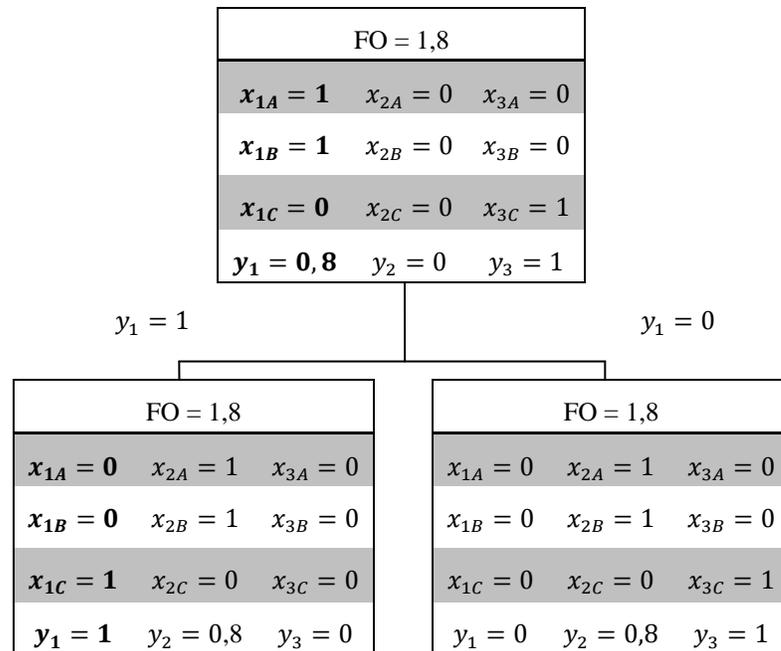


Figure 2.6 - Arbre de résolution intermédiaire pour BPP-1

Dans la figure 2.6, le nœud à gauche est le résultat d'inclure (2.13) dans BPP-1 relaxé, tandis que le nœud à droite est le résultat de la résolution de la formulation BPP-1 relaxée, augmentée de la contrainte (2.14).

Nous remarquons que les résultats intermédiaires obtenus dans ces deux nœuds permettent déjà d'observer les premiers effets de la symétrie. En effet, nous pouvons constater que pour une même valeur de la fonction objectif de 1,8 il existe deux solutions admissibles alternatives. Ces solutions proposent d'utiliser partiellement le conteneur 2 ($y_2 = 0,8$) soit, avec le conteneur 1 ($y_1 = 1$) ou avec le conteneur 3 ($y_3 = 1$).

Par la suite, l'algorithme SÉP continuera à appliquer la même logique de séparation de la région admissible jusqu'à l'obtention de la meilleure solution entière. La figure 2.7 présente l'arbre de résolution finale de BPP-1.

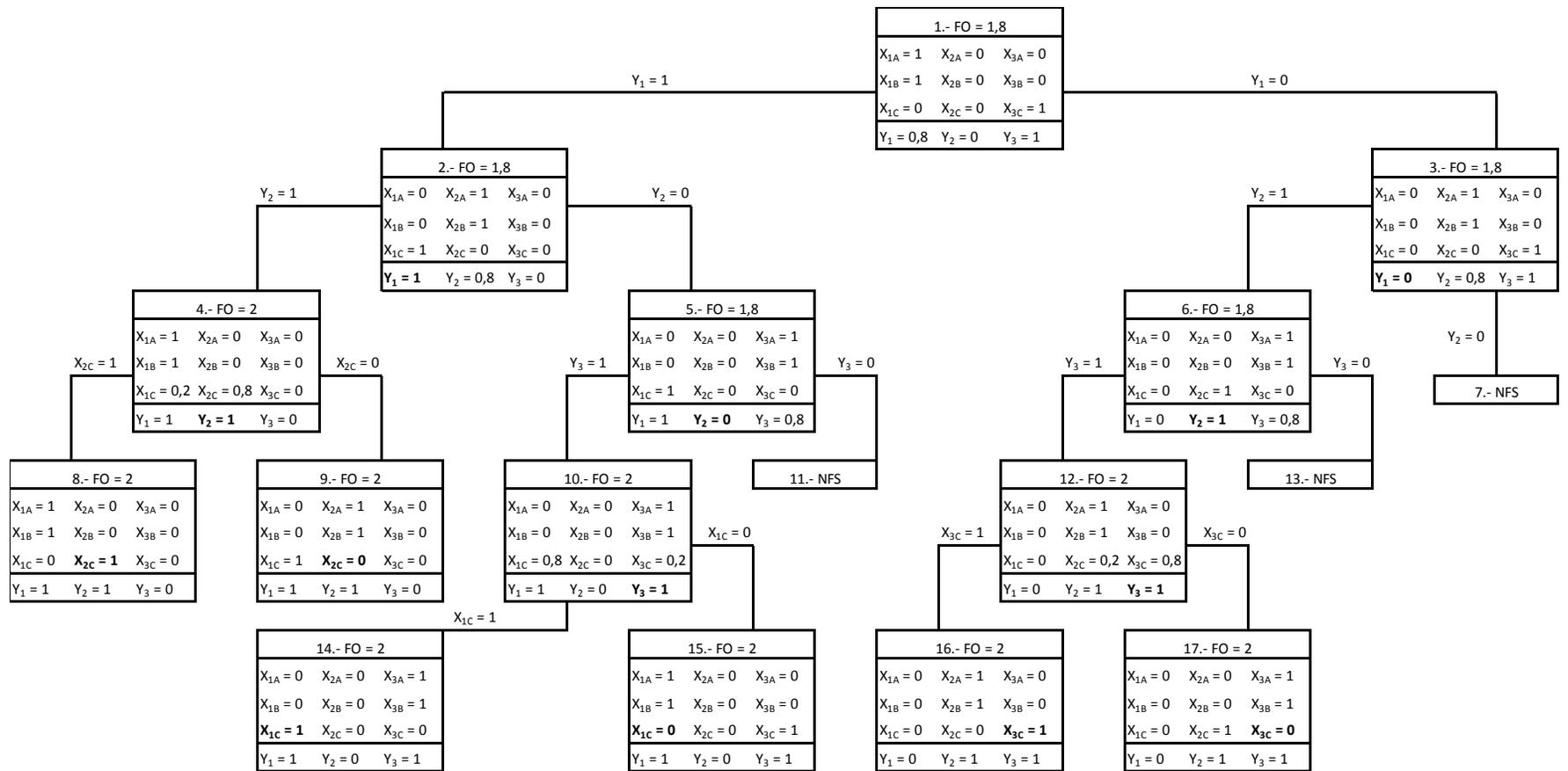


Figure 2.7 - Arbre de résolution final pour BPP-1

La figure 2.7 met en évidence que pour BPP-1 six solutions alternatives existent (factoriel du nombre de conteneurs identiques, égal à 3!) pour une même valeur de la solution optimale. Ces solutions alternatives sont présentées dans le tableau 2.5.

Tableau 2.5 - Solutions alternatives pour BPP-1

	Nœud 8	Nœud 9	Nœud 14	Nœud 15	Nœud 16	Nœud 17
Conteneur1	Boîte A	Boîte C	Boîte C	Boîte A		
	Boîte B			Boîte B		
Conteneur2	Boîte C	Boîte A			Boîte A	Boîte C
		Boîte B			Boîte B	
Conteneur3			Boîte A	Boîte C	Boîte C	Boîte A
			Boîte B			Boîte B

Le tableau 2.5 démontre que pour BPP-1 six solutions alternatives sont calculées par l’algorithme SÉP. Margot (2010) et Ostrowski (2008) expliquent que cet algorithme n’identifie pas l’existence des nœuds équivalents et en conséquence, il se plonge dans un processus improductif d’évaluation de tous ces nœuds.

En conclusion, dans ce chapitre nous avons démontré que la permutation d’objets identiques génère des solutions alternatives et que sous ces circonstances, le processus de résolution devient partiellement redondant.

Le bris de la symétrie dans les formulations en nombres entiers cherche, essentiellement, à supprimer la création des solutions alternatives. Ceci est possible par l’assignation d’attributs distinctifs aux éléments identiques d’un problème. Or, l’accomplissement de cette tâche ne s’avère pas un processus simple. Bien au contraire, il s’agit d’une démarche complexe qui peut s’achever par des techniques spécialisées qui seront présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre 3 - La revue de la littérature

Dans ce chapitre nous présentons d'abord un bref aperçu de la modélisation en nombres entiers. Ensuite, nous allons exposer l'état actuel de la recherche liée au problème de symétrie dans les formulations en nombres entiers. Enfin, nous aborderons les principales techniques de bris de la symétrie agissant au niveau de la formulation. Ces techniques seront appliquées dans le chapitre suivant sur le problème de balancement de la charge des wagons (Ghoniem et Sherali, 2011).

3.1 La modélisation en nombres entiers

La modélisation en nombres entiers a pour but de représenter mathématiquement différents types de problèmes en utilisant des variables avec des valeurs entières (principe d'intégrité) (Williams 2013, Sarker et Newton 2008). Williams (2013) précise que cette caractéristique : *« permet de représenter de façon plus réaliste plusieurs situations où les produits traités sont indivisibles »* (librement traduit de Williams, 2013). De plus, selon Sarker et Newton (2008) la condition d'intégrité permet aussi de modéliser des problèmes qui demandent une prise de décision entre plusieurs alternatives. Ceci s'achève par l'utilisation des variables binaires (0-1).

En pratique, la construction d'un modèle en nombres entiers suit les trois étapes suivantes (Williams 2013, Bosch et Trick 2005, Wolsey 1989) : (i) déclaration de variables de décision, qui sont les éléments inconnus que l'on cherche à déterminer, (ii) génération de contraintes ou limitations auxquelles les variables

sont soumises et (iii) formulation de la fonction objectif qui sera maximisée ou minimisée selon le but poursuivi.

Cependant, Sherali et Driscoll (2000) remarquent qu'un des plus grands défis de la modélisation est la création des formulations non seulement mathématiquement correctes, mais surtout, la création de formulations faciles à résoudre par des moyens exacts. Bosch et Trick (2005) précisent que ces types de formulations possèdent habituellement des valeurs de la relaxation linéaire proche de l'optimum ainsi que des critères permettant de supprimer la symétrie de leur structure.

3.2 L'étude de la symétrie dans les formulations en nombres entiers

Le problème de symétrie est étudié depuis plus de 40 ans. En effet, Ostrowski et al. (2010) constatent que l'intérêt pour ce problème peut remonter à Fulkerson et al. (1974). Ces chercheurs ont tenté de résoudre deux problèmes d'optimisation connus sous le nom de Système Triple de Steiner (*Steiner Triple System* ou STS), ils ont constaté que même des petites tailles de ces problèmes sont très fastidieuses à résoudre en raison de la symétrie existant dans leur structure.

La difficulté de la résolution de problèmes symétriques soulève l'intérêt de plusieurs chercheurs. Ainsi, Sherali et Smith (2001) proposent de briser la symétrie par l'ajout a priori de nouvelles contraintes. Essentiellement, ces contraintes visent à la création d'une hiérarchie entre les éléments identiques d'un problème, empêchant ainsi la création de solutions alternatives. Sherali et Smith (2001) démontrent l'efficacité de cette approche pour réduire le temps de calcul de trois problèmes d'optimisation (problème de conception de réseaux, problème de gestion du bruit en production et un problème d'acquisition et mise en place de machines identiques). Ces chercheurs concluent que : «*en ajoutant à un modèle des contraintes hiérarchiques de bris de symétrie, la structure de ce modèle peut s'améliorer considérablement en réduisant la région admissible que l'algorithme de résolution doit explorer*» (librement traduit et adaptée de Sherali et Smith, 2001).

Ensuite, Campêlo et al. (2008) proposent la technique de formulation des représentants asymétriques (*Asymmetric Representatives Formulation* ou ARF). En général, l'ARF est une reformulation qui permet de briser la symétrie en identifiant certains groupes identiques par l'indice de l'objet possédant le plus petit indice dans le groupe. Jans et Desrosiers (2010) font une généralisation de cette technique aux problèmes de regroupement binaire (problème de remplissage d'objets dans des conteneurs, problème de tournées de véhicules avec des fenêtres du temps, problème de coloriage sur les arcs, entre autres). Par contre, nous soulignons que les travaux de Campêlo et al. (2008) et Jans et Desrosiers (2010) ne permettent pas de confirmer l'efficacité d'ARF en raison de leur nature plutôt théorique. C'est seulement dans le cas de Jans et Desrosiers (2013) que la résolution d'un problème d'assignation de travaux sur des machines identiques (*Job Grouping Problem* ou JGP) met en évidence que la reformulation ARF : «*est capable de résoudre un problème de la littérature 40 fois plus vite que la formulation traditionnelle*» (librement traduit et adaptée de Jans et Desrosiers, 2013).

La recherche sur le bris de symétrie dans les formulations en nombres entiers va se concentrer principalement sur l'application des approches de reformulation et d'ajout de contraintes. Par exemple, Jans (2009) traite la symétrie dans un problème de calcul de la taille du lot et de planification de la production sur des machines identiques (*Lot-Sizing Problem on Parallel Identical Machine*) par l'ajout de nouvelles contraintes. Ce chercheur démontre qu'il est possible de réduire le temps de calcul de cette application et déclare que : «*les résultats obtenus dénotent l'importance et l'efficacité de l'ajout de contraintes de bris de symétrie*» (librement traduit et adaptée de Jans, 2009).

Une autre technique de bris de symétrie est développée par Ghoniem et Sherali (2011). Il s'agit de la perturbation de la fonction objectif (*Objectif Perturbation*). Ces chercheurs proposent de réduire le temps de calcul optimal d'une formulation contenant déjà une contrainte de bris de symétrie, en ajoutant cette contrainte dans la fonction objectif. Ghoniem et Sherali (2011) testent leur propos sur trois

applications (problème de gestion du bruit en production, problème de planification des matchs de tennis double et un problème de balancement de la charge de wagons) où ils démontrent l'efficacité de cette technique en réduisant de façon importante le temps de résolution optimal.

Fanti et al. (2011) confirment l'efficacité de la perturbation de la fonction objectif pour résoudre un problème d'ordonnancement de tâches dans un centre de distribution (*Scheduling Problem in Distribution Centers*). Par contre, Jans et Desrosiers (2013) observent que cette technique n'est pas plus performante que la reformulation ARF pour réduire le temps de calcul du problème JGP. Ces chercheurs semblent ne pas être d'accord avec les conclusions de Ghoniem et Sherali (2011) et pensent que : «*la perturbation de la fonction objectif semble ne pas bien guider le processus d'obtention de la solution optimale, au contraire il semble juste détruire la forme originale de la fonction objectif*» (librement traduit et adapté de Jans et Desrosiers, 2013).

En outre, Jans et Desrosiers (2013) traitent la symétrie dans le problème JGP. D'abord, ces chercheurs modélisent différentes formulations de bris de symétrie (le plus grand nombre observé dans un article de recherche) issues des approches d'ajout de contraintes (hiérarchiques, lexicographiques, de réduction des variables, perturbation de la fonction objectif) et de reformulation (ARF). Ensuite, l'analyse empirique de la performance de ces techniques leur permet de démontrer la supériorité de la reformulation ARF, ainsi que des contraintes lexicographiques. Par contre, Jans et Desrosiers (2013) mettent en évidence que tant les contraintes hiérarchiques, que les contraintes de réduction de variable et surtout la contrainte lexicographique de Plastria (2002) semblent plutôt ralentir le processus de résolution du problème JGP.

Plus récemment, Alemany et al. (2014) testent la performance de l'ajout de contraintes hiérarchiques pour briser la symétrie dans un problème de planification de générateurs d'énergie identiques (*The Unit Commitment Problem*). Ces chercheurs concluent, d'après leurs expérimentations, que cette technique permet une importante réduction dans le processus d'exploration de l'algorithme de

résolution et par conséquent le temps de calcul de solution optimal devient plus court (Alemany et al., 2014).

Cette revue nous permet de constater que les approches d'ajout de contraintes et de reformulation sont souvent utilisées dans la littérature pour briser la symétrie a priori. En particulier, nous soulignons que les performances de ces stratégies de bris de symétrie peuvent varier d'une application à une autre. En conséquence, il résulte qu'il est difficile de tirer des conclusions absolues quant à leur efficacité. Cependant, l'analyse empirique peut aider à déterminer la pertinence de l'utilisation d'une certaine technique. En ce sens, Jans (2009) et Ghoniem et Sherali (2011) insistent sur l'importance de tester l'efficacité des techniques de bris de symétrie sur des nouvelles applications.

Ce mémoire propose l'application de différentes techniques de bris de symétrie existant dans la littérature sur le problème de balancement de la charge de wagons de Ghoniem et Sherali (2011). Ces chercheurs ont déjà testé la performance de la perturbation de la fonction objectif pour réduire la symétrie dans ce problème (pour les boîtes identiques uniquement). Cependant, nous visons à observer la performance des autres techniques de bris de symétrie sur cette même application. De plus, nous allons proposer une utilisation combinée de certaines formulations afin de contrer les deux niveaux de symétrie (pour les boîtes et pour les wagons identiques). Jans et Desrosiers (2013) remarquent que le fait d'utiliser simultanément certaines contraintes de bris de symétrie peut créer une incompatibilité pouvant empêcher la résolution d'un problème. Nos propos tiendront compte de cette remarque et démontreront qu'une combinaison judicieuse de certaines stratégies permet d'améliorer le processus de résolution exacte.

3.3 L'ordonnement des données

Jans et Desrosiers (2010) ont observé pour la première fois que l'ordre dans lequel les données sont traitées par le logiciel d'optimisation a un impact sur les valeurs de la relaxation et sur le temps de calcul optimal. Ces chercheurs déclarent que :

«une de plus remarquables conclusions [...] est le fait que la borne de la relaxation linéaire dépend de l'ordre de traitement des données» (librement traduit et adapté de Jans et Desrosiers, 2013). De plus, ils démontrent que pour le JGP le temps de calcul se réduit de façon importante, lorsque les tâches sont ordonnées en ordre décroissant selon le nombre d'outils requis par tâche.

Laporte et Coelho (2013) corroborent les propos de Jans et Desrosiers (2013) pour la résolution d'un problème de tournées de véhicules avec inventaires. En effet, les expérimentations de ces chercheurs confirment qu'un ordonnancement croissant des données permet de calculer une meilleure valeur de la relaxation linéaire (Laporte et Coelho, 2013).

Les applications pratiques de cette approche ne sont pas nombreuses dans la littérature. En effet, les deux applications mentionnées ci-haut semblent être les seules recherches effectuées jusqu'à présent. En ce sens, Jans et Desrosiers (2013) croient qu'il serait intéressant de vérifier, dans des futures recherches, la validité du lien existant entre l'ordonnancement des données et les valeurs relaxées (Jans et Desrosiers, 2013).

Dans ce mémoire, nous allons appliquer ces mêmes expérimentations sur le problème de balancement de la charge de wagons afin de pouvoir contribuer à la formation de bases de recherche plus solides. Au meilleur de notre connaissance, ceci constitue la première fois que ces types d'expérimentations seront menés sur un problème de charge des wagons identiques.

3.4 Les approches de bris de symétrie

L'ajout des contraintes de bris de symétrie et la reformulation sont les approches fréquemment reconnues dans la littérature pour briser la symétrie a priori dans une formulation en nombres entiers (Jans et Desrosiers 2013, Ghoniem et Sherali 2011, Margot 2010, Jans 2009, Ostrowski 2008, Gent et al. 2006). Toutefois, une troisième approche est aussi reconnue, il s'agit du bris dynamique de la symétrie

(*Dynamic Symmetry Breaking*). Cette dernière est exécutée au niveau de l'algorithme de résolution (l'approche dynamique ne fait pas partie de cette étude).

Dans les lignes suivantes, nous expliquerons en détail le fonctionnement des techniques de bris de symétrie issues des approches de reformulation et d'ajout de contraintes.

3.4.1 La reformulation

Jans et Desrosiers (2013) précisent que la reformulation consiste à modifier un modèle existant dans le but de créer une nouvelle formulation capable de réduire la symétrie. Gent et al. (2006) confirment son importance en disant que «*une reformulation appropriée peut transformer un problème complexe en un problème facile à résoudre*» (librement traduit de Gent et al., 2006). Cependant, ces chercheurs remarquent l'absence d'une technique générale scientifique pour guider les reformulations. En ce sens, Plastria (2002) répond que la modélisation est un art qui ne peut pas être réduit à un ensemble de techniques.

Dans la littérature, nous constatons qu'une des techniques la plus répandue est la décomposition Dantzig-Wolfe. Jans et Desrosiers (2010) ont démontré que cette technique permet de supprimer la symétrie dans les problèmes de regroupement binaire.

Une autre technique de reformulation consiste en la formulation des représentants asymétriques (ARF) de Campêlo et al (2008). Cette reformulation sert à briser la symétrie entre des groupes identiques par l'utilisation d'une nouvelle variable asymétrique. Par exemple, pour le problème BPP introduit dans la section 2.2, Jans et Desrosiers (2010) définissent la variable suivante :

$v_{jh} = 1$ si la boîte j est dans le même groupe que la boîte h et que cette dernière est la boîte de plus petit indice dans le groupe, 0 sinon.

Cette nouvelle variable demande d'affecter la boîte $j \in J = \{1, \dots, n\}$ à un groupe où la boîte $h \in H = \{1, \dots, n\}$ possède le plus petit indice. En conséquence, le

groupe sera toujours identifié par l'indice h (plus petit indice du groupe), permettant ainsi de briser la symétrie.

En utilisant ces nouvelles variables, le problème BPP sera reformulé de la façon suivante (ARF) :

$$\text{Min } \sum_{h=1}^n v_{hh} \quad (3.1)$$

Sujet à :

$$\sum_{j=h}^n v_{jh} w_j \leq c_i v_{hh} \quad \forall h \in H \quad (3.2)$$

$$\sum_{h=1}^j v_{jh} = 1 \quad \forall j \in J \quad (3.3)$$

$$v_{jh} \leq v_{hh} \quad \forall h \in H, \forall j \in \{h, \dots, n\} \quad (3.4)$$

$$v_{jh} \in \{0,1\} \quad \forall h \in H, \forall j \in \{h, \dots, n\} \quad (3.5)$$

La fonction objectif (3.1) minimise le nombre de conteneurs à utiliser. La contrainte (3.2) limite la capacité des conteneurs utilisés. En (3.3) il est imposé qu'une boîte soit allouée à un seul conteneur. La contrainte (3.4) demande d'allouer une boîte à un conteneur seulement si le conteneur est utilisé. Enfin (3.5) assure la nature binaire de la variable de décision.

Afin d'illustrer l'utilité de cette technique pour briser la symétrie, regardons l'exemple BPP-2 qui est une application du BPP où 5 boîtes doivent être affectées vers 2 conteneurs identiques de capacité égale à 3. Le tableau 3.1 propose une première affectation admissible pour cet exemple.

Tableau 3.1 - Affectation des boîtes à des camions identiques pour BPP-2

Conteneurs	Affectation de boîtes	Valeurs de variables de décision
C1	1, 2	$x_{11} = 1, x_{12} = 1$
C2	3, 4, 5	$x_{23} = 1, x_{24} = 1, x_{25} = 1$

Nous observons dans le tableau 3.1 que les boîtes 1 et 2 sont affectées au conteneur 1 ($x_{11} = 1, x_{12} = 1$) et que les boîtes 3, 4 et 5 sont affectées au conteneur 2 ($x_{23} = 1, x_{24} = 1, x_{25} = 1$).

Essayons de déterminer si la permutation des conteneurs identiques C1 et C2 exerce un effet sur les variables de décision.

Tableau 3.2 - Permutation de variables de décision pour BPP-2

Conteneurs	Affectation de boîtes	Valeurs de variables de décision
C2	1, 2	$x_{21} = 1, x_{22} = 1$
C1	3, 4, 5	$x_{13} = 1, x_{14} = 1, x_{15} = 1$

Le tableau 3.2 permet de constater que la permutation des conteneurs identiques génère des solutions alternatives. Par exemple, avant la permutation, la boîte 1 était allouée au conteneur 1 ($x_{11} = 1$). Or, après la permutation, la boîte 1 est allouée au conteneur 2 ($x_{21} = 1$). Donc, des valeurs équivalentes existent pour l'affectation de la boîte 1.

Analysons maintenant l'application de la technique ARF sur BPP-2, sous l'hypothèse que les boîtes 1 et 2 sont affectées au conteneur C1 et les boîtes 3, 4 et 5 sont affectées au conteneur C2. Le tableau 3.3 présente les valeurs des variables de décision pour cette affectation.

Tableau 3.3 - Variables de décision pour la reformulation ARF pour BPP-2

Conteneurs	Affectation de boîtes	Variabes de décision pour ARF	Identification de groupes
C1	1, 2	$v_{11} = 1, v_{21} = 1$	1
C2	3, 4, 5	$v_{33} = 1, v_{43} = 1, v_{53} = 1$	3

Sous l'imposition d'ARF la variable $v_{ih} = 1$ si la boîte i est dans le même conteneur que la boîte h et que cette dernière est la boîte de plus petit indice dans le groupe, sinon la variable sera égal à zéro. Le tableau 3.3 montre que les groupes

sont identifiés par l'indice de la boîte de plus petit indice contenue dans le groupe. Ainsi, le premier groupe contient la boîte 1 ($v_{11} = 1$), en conséquence ce groupe est identifié par l'indice 1. De même, le deuxième groupe contient la boîte 3 ($v_{33} = 1$) alors, ce groupe est identifié par l'indice 3.

Ensuite, essayons de permuter la position des groupes. Cela va nous permettre de vérifier si la symétrie est supprimée par ARF. Les résultats de la permutation sont présentés dans le tableau 3.4.

Tableau 3.4 - Permutation de variables de décision pour ARF pour BPP-2

Conteneurs	Affectation de boîtes	Variables de décision pour ARF	Identification de groupes
C2	1, 2	$v_{11} = 1, v_{21} = 1$	1
C1	3, 4, 5	$v_{33} = 1, v_{43} = 1, v_{53} = 1$	3

Le tableau 3.4 nous permet de constater que la permutation de la position des conteneurs ne produit plus des solutions alternatives pour ARF. Nous pouvons observer que les variables de décision possèdent les mêmes valeurs dans le tableau 3.3 que dans le tableau 3.4 ($v_{11} = 1, v_{21} = 1, v_{33} = 1, v_{43} = 1, v_{53} = 1$). Ceci s'explique par le fait que dans ARF, les indices servant à identifier les groupes sont calculés en fonction de la boîte de plus petit indice et parce qu'il n'y a pas d'affectation explicite aux conteneurs. Ainsi, après la permutation de conteneurs le premier groupe sera identifié par l'indice 1, car la boîte 1 possède le plus petit indice dans ce groupe. De même, le deuxième groupe sera identifié par l'indice 3, car il contient la boîte 3 et ce dernier représente le plus petit indice dans ce groupe.

3.4.2 L'ajout de contraintes de bris de symétrie

L'ajout de contraintes est décrit par Ghoniem et Sherali (2011), Gent et al. (2006) et Sherali et Smith (2001) comme étant sans doute une des méthodes de bris de symétrie la plus utilisée depuis des années.

Dans cette section, nous allons explorer le fonctionnement des contraintes les plus souvent utilisées dans la littérature, c'est-à-dire : (i) les contraintes hiérarchiques, (ii) les contraintes lexicographiques, (iii) les contraintes de réduction de variable et (iv) la perturbation de la fonction objectif.

3.4.2.1 Les contraintes hiérarchiques

Sherali et Smith (2001) considèrent qu'en augmentant une formulation symétrique avec des contraintes hiérarchiques, la structure de la formulation peut s'améliorer considérablement car les solutions équivalentes seront supprimées.

Ces chercheurs précisent que ces types de contraintes cherchent à établir un ordonnancement hiérarchique entre les éléments identiques afin d'empêcher la création de solutions alternatives. Dans la littérature les contraintes hiérarchiques sont généralement représentées de la façon suivante :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{i+1,j} \quad 1 \leq i \leq m - 1 \quad (3.6)$$

Dans la contrainte (3.6) la variable x_{ij} représente la décision d'allouer ou non, un objet j vers un groupe d'objets identiques i . La présence de ces objets identiques génère des solutions alternatives pour une même valeur de la fonction objectif. Toutefois, l'imposition de la contrainte (3.6) va assurer que la somme pondérée des variables d'affectation sur l'objet i doit être plus petite ou égale à la somme pondérée des variables d'affectation sur l'objet $i + 1$. Ce calcul pondéré qui est produit en utilisant un coefficient α_j pour chaque objet qui doit être alloué, va permettre l'assignation d'un attribut distinctif aux objets identiques.

Illustrons le fonctionnement de cette contrainte à l'aide de l'affectation proposée dans le tableau 3.1 ($x_{11} = 1, x_{12} = 1, x_{23} = 1, x_{24} = 1, x_{25} = 1$) pour le problème BPP-2 de la section 3.4.1 où α_j va prendre la valeur 1.

Pour cette application, la contrainte (3.6) deviendra :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \quad (3.7)$$

Cette nouvelle contrainte va exiger que le nombre de boîtes allouées au conteneur 1 soit plus petite ou égale au nombre de boîtes allouées au conteneur 2. Ainsi, pour l'affectation du tableau 3.1, la contrainte (3.7) sera : $2 \leq 3$. Ensuite, si nous permutons la position de conteneurs identiques, la contrainte (3.7) devra s'écrire : $3 \leq 2$, ce qui n'est pas admissible. C'est-à-dire que la permutation de la position des conteneurs n'est plus envisageable en raison de l'inclusion de la contrainte (3.7) qui exclut certaines solutions alternatives.

Nous observons dans la littérature qu'il existe plusieurs possibilités pour créer des contraintes hiérarchiques. Notamment, nous soulignons que des nouvelles contraintes peuvent être créées en calculant différentes valeurs pour les coefficients des variables de décision (α_j). Il semble que ces coefficients définissent en grande partie l'assignation des attributs distinctifs aux éléments identiques d'un problème symétrique.

3.4.2.2 Les contraintes lexicographiques

Une deuxième technique pour contrer la symétrie consiste en l'ajout de contraintes d'ordonnement lexicographique. Jans (2009) explique que ces types de contraintes imposent une hiérarchie entre les éléments identiques basés sur des critères lexicographiques.

Nous présentons en (3.8) une forme générale de la contrainte lexicographique, proposée par Jans (2009) et Jans et Desrosiers (2013).

$$\sum_{j=1}^n 2^{n-j} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n 2^{n-j} x_{i+1,j} \quad 1 \leq i \leq m - 1 \quad (3.8)$$

Afin d'illustrer le fonctionnement de ces types de contraintes, reprenons l'exemple BPP-2 où 5 boîtes ($n = 5$) seront allouées à 2 conteneurs identiques de capacité égale à 3.

Pour cet exemple, la contrainte lexicographique (3.9) s'écrira :

$$2^4x_{11} + 2^3x_{12} + 2^2x_{13} + 2^1x_{14} + 2^0x_{15} \leq 2^4x_{21} + 2^3x_{22} + 2^2x_{23} + 2^1x_{24} + 2^0x_{25} \quad (3.9)$$

Dans le tableau 3.5 nous proposons une affectation spécifique pour BPP-2 qui sera soumise à la contrainte (3.9).

Tableau 3.5 - Solution admissible de BPP-2 avec la contrainte lexicographique (3.9)

	1	2	3	4	5	Attributs pour les conteneurs
C1	$0(2^{5-1}) = 0$	$1(2^{5-2}) = 8$	$1(2^{5-3}) = 4$	$1(2^{5-4}) = 2$	$1(2^{5-5}) = 1$	$0+8+4+2+1 = 15$
C2	$1(2^{5-1}) = 16$	$0(2^{5-2}) = 0$	$0(2^{5-3}) = 0$	$0(2^{5-4}) = 0$	$0(2^{5-5}) = 0$	$16+0+0 = 16$

L'affectation proposée dans le tableau 3.5 impose que la boîte 1 soit allouée au conteneur 2 ($x_{21} = 1$). Nous devons indiquer que cette affectation va assurer que le côté droit de la contrainte soit plus grand ou égal au côté gauche (création de la hiérarchie). En effet, le coefficient de la variable x_{21} est 16, donc, nous pouvons souligner que même si toutes les autres boîtes sont allouées au conteneur 1, la somme des coefficients de cette affectation, ne va pas dépasser la valeur de 16 ($15 < 16$).

Il est important de souligner que dans les contraintes lexicographiques nous allons toujours observer qu'un coefficient ayant une plus grande valeur sera impérativement plus grand que la somme de tous les autres coefficients de plus petite valeur.

Cette règle générale est une caractéristique des contraintes lexicographiques permettant de calculer un attribut unique pour chaque objet identique (réglé lexicographique).

3.4.2.3 La réduction de variables

Jans et Desrosiers (2010) proposent d'ajouter une nouvelle contrainte permettant de réduire le nombre des solutions alternatives d'une formulation en nombres entiers, sans pour autant perdre une solution optimale.

Selon Jans et Desrosiers (2013) dans la réduction de variables (*Variable Reduction*) : «*l'idée principale est d'assigner un premier objet à un premier groupe, [...] on imposera au deuxième objet d'appartenir soit au premier ou au deuxième groupe. On imposera au troisième objet d'appartenir à l'un des trios premiers groupes, et ainsi de suite*» (librement traduit et adapté de Jans et Desrosiers, 2013).

En (3.10) nous présentons la formulation générale de Réduction de Variables de Jans et Desrosiers (2010) qui doit remplacer à la contrainte (2.3) dans le problème BPP.

$$\sum_{i=1}^{\min(j,m)} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (3.10)$$

En (3.10) la variable x_{ij} représente la décision d'affecter un objet j à un groupe i pour lequel des éléments identiques existent (par exemple, des conteneurs identiques). Cette contrainte calcule d'abord la valeur minimale entre l'indice j et le nombre m qui représente le nombre de conteneurs identiques. Ensuite, elle impose à l'indice i de prendre des valeurs allant jusqu'à cette valeur minimale. Ainsi, l'objet j sera affecté à un groupe i pour $i \leq j$.

Illustrons le fonctionnement de la technique de réduction de variables à l'aide de l'exemple BPP-3 qui est une autre application du BPP de la section 2.2. En BPP-3 nous cherchons à allouer un groupe de 4 boîtes ($n = 4$) vers 3 conteneurs identiques ($m = 3$).

La contrainte (3.10) pour cet exemple s'écrira :

Pour la boîte 1 ($j = 1$) :

$$\sum_{i=1}^{\min(1,3)} x_{i1} = 1 \quad (3.11)$$

D'abord, la contrainte (3.11) va déterminer le minimum entre 1 et 3, c'est-à-dire 1. Ensuite, l'indice i prendra la valeur 1. En conséquence, $x_{11} = 1$ et les variables x_{21} et x_{31} sont éliminées. Il faut remarquer que cette imposition va empêcher la génération des solutions alternatives. Par exemple, si nous essayons de permuter la position du conteneur 1 avec le conteneur 2, la variable $x_{11} = 1$, deviendrait $x_{21} = 1$, ce qui n'est pas admissible en raison de (3.11) et en raison du fait qu'une boîte ne peut être allouée qu'à un seul conteneur (contrainte (2.3) du BPP). C'est-à-dire que la permutation du conteneur 1 n'est plus permise.

Pour la boîte 2 ($j = 2$) :

$$\sum_{i=1}^{\min(2,3)} x_{i2} = 1 \quad (3.12)$$

La contrainte (3.12) va déterminer la valeur minimale entre 2 et 3. C'est-à-dire, 2. Ensuite, l'indice i va prendre les valeurs 1 et 2 ($i = 1, 2$). Donc, cette contrainte deviendra : $x_{12} + x_{22} = 1$ et la variable x_{32} est éliminée. C'est-à-dire que la boîte 2 sera allouée soit au wagon 1 ou au wagon 2. Cette situation permet aussi de réduire le nombre de permutations possibles.

Pour la boîte 3 ($j = 3$) :

$$\sum_{i=1}^{\min(3,3)} x_{i3} = 1 \quad (3.13)$$

La contrainte (3.13) indique que l'indice i va prendre les valeurs 1, 2 et 3 ($i = 1, 2, 3$). Donc, cette contrainte sera, $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$. Puis, la boîte 3 sera allouée soit au wagon 1, au wagon 2 ou au wagon 3. Cela équivaut à la totalité des wagons disponibles. Donc, aucune variable ne sera éliminée a priori.

Dans ce cas, il existe encore des possibilités de générer des solutions alternatives. Supposons que la boîte 2 ait été allouée au même conteneur que la boîte 1, c'est-à-dire au premier conteneur ($x_{11} = 1$ et $x_{12} = 1$). Ensuite, supposons que la boîte 3 soit allouée soit au conteneur 2 ($x_{23} = 1$) ou au conteneur 3 ($x_{33} = 1$). Pour ces deux possibles affectations, une permutation de la position entre les conteneurs 2 et 3 est acceptée par la contrainte (3.13). Donc des solutions alternatives peuvent encore être générées.

Par contre, nous pouvons observer que si la boîte 2 est affectée au conteneur 2 ($x_{22} = 1$), et puisque la boîte 1 est déjà imposée au conteneur 1 ($x_{11} = 1$), une permutation de la position de conteneurs ne sera plus acceptée, peu importe où la boîte 3 sera affectée.

Pour la boîte 4 ($j = 4$) :

$$\sum_{i=1}^{\min(4,3)} x_{i4} = 1 \quad (3.14)$$

Nous observons en (3.14) que pour la boîte 4, l'indice i va continuer à prendre les valeurs 1, 2 et 3 (comme pour la boîte 3), car le minimum entre 4 et 3 sera toujours 3. On aura donc : $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$. C'est-à-dire que la boîte 4 peut être allouée soit au conteneur 1, au conteneur 2 ou au conteneur 3. Donc, aucune variable ne sera éliminée a priori.

Encore une fois, des solutions alternatives peuvent encore exister. Par exemple, si les boîtes 1, 2 et 3 sont allouées au conteneur 1 ($x_{11} = 1$, $x_{12} = 1$, $x_{13} = 1$) et que la boîte 4 est allouée soit au conteneur 2 ou au conteneur 3, une permutation entre ces deux conteneurs identiques est admissible.

Jans et Desrosiers (2013) ont testé la performance de la réduction de variables sur le problème JGP et les résultats n'ont pas été prometteurs pour cette application. Toutefois, il serait intéressant d'observer sa performance sur des nouvelles applications.

3.4.2.4 La perturbation de la fonction objectif

Ghoniem et Sherali (2011) expliquent que dans l'application de cette technique : «*la fonction objectif originale est perturbée par l'utilisation d'une somme pondérée des expressions venants de la contrainte hiérarchique de bris de symétrie*» (librement traduit et adapté de Ghoniem et Sherali, 2011). C'est-à-dire que dans un premier temps la fonction objectif originale est augmentée d'une expression contenant les termes qui sont présents dans la contrainte hiérarchique. Ensuite, tous les termes de cette contrainte sont multipliés par certains coefficients afin de créer une pondération.

La forme générale de la fonction objectif perturbée, proposée par Ghoniem et Sherali (2011) est présentée en (3.15).

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m (y_i) \mu_0 + \sum_{j=1}^n \left(\mu_j \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) \quad (3.15)$$

La formulation perturbée (3.15) possède deux objectifs, «*Ceci peut être interprété comme étant une formulation multi-objectif de priorité préemptive (preemptive priority multiobjective program)*» (librement traduit et adapté de Ghoniem et Sherali, 2011). Ainsi, selon ces chercheurs la fonction objectif originale (premier terme de (3.15)) possède la plus haute priorité de résolution (*preemptive higher priority resolution*) (Ghoniem et Sherali, 2011). Cela va permettre de préserver le calcul des solutions admissibles pour la fonction objectif originale, même après la perturbation. En pratique, l'utilisation de très grandes valeurs pour μ_0 va permettre à la fonction objectif originale de garder la priorité de résolution.

En ce qui concerne la résolution du deuxième terme (fonction objectif secondaire), Ghoniem et Sherali (2011) remarquent que le coefficient μ_j vise aussi à assigner une priorité de résolution en fonction de l'ordre imposé par la contrainte hiérarchique (croissant ou décroissant). Par exemple, pour la fonction objectif (3.15), si la contrainte hiérarchique est de type \leq et puisque l'on cherche à minimiser, les coefficients doivent suivre un ordre décroissant de la forme :

$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > \mu_j$ afin d'assurer que le premier terme sera d'abord minimisé, puis le deuxième terme, puis le troisième terme et ainsi de suite.

Ghoniem et Sherali (2011) précisent qu'une pondération permettant de garder l'ordre imposé par la contrainte hiérarchique va créer une «compatibilité» entre la logique de la fonction objectif secondaire et la logique des contraintes hiérarchiques. Cette idée est définie par Ghoniem et Sherali (2011) comme étant le concept de compatibilité (*symmetry-compatible formulation*).

Ghoniem et Sherali (2011) démontrent, dans leurs expérimentations que la compatibilité permet de réduire de façon importante le temps de résolution d'une formulation. Jans et Desrosiers (2013) corroborent cette observation en concluant que : «*les formulations compatibles mènent toujours à des meilleurs temps de calcul que les formulations non-compatibles*» (librement traduit et adaptée de Jans et Desrosiers, 2013).

Enfin, nous remarquons qu'il n'existe pas de règle générale pour la création des coefficients μ_0 et μ_j . En ce sens, Ghoniem et Sherali (2011) affirment que pour le choix spécifique de ces coefficients, nous pouvons faire appel à l'intuition, l'expérience ou aux observations empiriques (Ghoniem et Sherali, 2011). Or, ces chercheurs insistent sur le fait que l'inclusion de ces coefficients doit absolument permettre au moins de garder une solution optimale.

Les techniques de bris de symétrie présentées dans cette section seront mises en œuvre dans le chapitre suivant. Le but est de briser la symétrie entre les boîtes et les wagons identiques du problème de balancement de la charge des wagons.

Chapitre 4 - Modélisation du Problème de Balancement de la Charge de Wagons

Dans cette section, nous allons proposer une série de formulations de bris de symétrie issues des approches de reformulation et de l'ajout de contraintes. Ces propositions visent à supprimer ou réduire la symétrie venant de boîtes et de wagons identiques dans le problème de balancement de la charge de wagons. Le but est de permettre la résolution de ce problème dans des délais raisonnables.

4.1 Contexte du problème

Le problème de balancement ou équilibrage de la charge de wagons est un problème opérationnel fréquemment rencontré par plusieurs entreprises lors des opérations de transport et livraison des marchandises. Que ce soit la charge des camions, des wagons ferroviaires, des avions-cargos, des conteneurs maritimes de charge internationale ou tout autre moyen de transport de marchandises, les compagnies ont tout intérêt à accomplir cette tâche d'une façon efficace afin de minimiser les coûts reliés à cette opération.

Un bref survol de la littérature nous permet de constater que plusieurs extensions existent pour les problèmes de remplissage et de charge de produits dans des conteneurs. Par exemple, Christofides et al. (1979) proposent un modèle en nombres entiers mixte pour résoudre un problème de remplissage de différents types de pétrole dans des wagons-citernes. La particularité de ce problème se

trouve dans le fait que les différents types de pétrole ne peuvent pas être mélangés entre eux. Ensuite, nous pouvons aussi citer les travaux de Yumir (2006) et Yüccer et Ozakça (2010) qui s'intéressent à l'affectation de plusieurs types de produits (problème multi-produit) dans des véhicules possédant des compartiments spécifiques pour chaque type de produit. Enfin, nous pouvons aussi évoquer les recherches de Morabito et al. (2000) qui proposent des heuristiques pour résoudre un problème d'affectation de palettes de produits finis pour l'industrie brésilienne de distribution alimentaire.

En général, les problèmes d'affectation de produits dans des conteneurs possèdent une structure similaire au problème général de remplissage de conteneurs (*Bin Packing Problem* ou BPP). C'est-à-dire qu'ils demandent l'affectation de certains éléments dans un ensemble de conteneurs. Toutefois, le problème de balancement de la charge de wagons traité dans ce mémoire représente un cas particulier des problèmes d'affectation de charges (*Load Problem*), car il demande l'affectation d'une certaine charge (poids de produits) dans des wagons ayant une capacité limitée.

4.2 Description du problème

Ghoniem et Sherali (2011) expliquent que dans le problème de balancement de la charge de wagons, on cherche à affecter un nombre n de boîtes de poids w_j vers un nombre m de wagons. De plus, le nombre de boîtes $j \in J = \{1, \dots, n\}$ que chaque wagon $i \in I = \{1, \dots, m\}$ peut loger, est un multiple du nombre de wagons disponibles. Plus précisément, chaque wagon reçoit exactement une quantité égale à n/m boîtes. L'objectif poursuivi est de trouver une affectation optimale de toutes les boîtes qui minimise la somme des valeurs absolues de la différence entre le poids chargé dans chaque wagon et le poids moyen par wagon.

La particularité de ce problème se trouve dans la double présence de la symétrie dans sa structure. Premièrement, tous les wagons possèdent une même capacité, en conséquence, la permutation de ces wagons permet l'obtention de $m!$ solutions

alternatives pour les variables de décision (dans ce cas, tous les wagons sont utilisés). Ensuite, certaines boîtes ont des poids identiques. En effet, Ghoniem et Sherali (2011) ont généré un certain nombre de boîtes pour chacun des poids suivants : {17, 27, 30, 35}. La permutation de la position des boîtes ayant les mêmes poids permet la génération d'un grand nombre des solutions alternatives, toujours pour une même valeur de la fonction objectif.

Nous concluons donc, en toute évidence, qu'il s'agit d'un problème hautement symétrique.

4.3 Modélisation du problème

Ghoniem et Sherali (2011) proposent une formulation en nombres entiers avec des variables binaires pour résoudre le problème de balancement de la charge de wagons. Toutefois, cette formulation ne tient pas compte de la symétrie. Nous appelons cette formulation **BCW** :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n x_{ij} w_j - \bar{w} \right| \quad (4.1)$$

Sujet à :

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = n/m \quad \forall i \in I \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, \forall i \in I \quad (4.4)$$

Variable de décision :

$x_{ij} = 1$ si la boîte j est allouée au wagon i , 0 sinon,

Paramètres :

n = nombre de boîtes,

m = nombre de wagons,

w_j = poids de la boîte j ,

Ensembles :

J = Ensemble de boîtes,

I = Ensemble de wagons,

Calcul du poids moyen par wagon :

$$\bar{w} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n w_j.$$

Dans la formulation BCW de Ghoniem et Sherali (2011) nous observons que la fonction objectif (4.1) minimise la somme des valeurs absolues de la différence entre le poids affecté à chaque wagon et le poids moyen par wagon. Ensuite, la contrainte (4.2) force l'assignation de chaque boîte à un seul wagon. De plus, la contrainte (4.3) assure que chaque wagon sera chargé d'exactly n/m boîtes. Enfin, la contrainte (4.4) indique la nature binaire de la variable de décision.

Nous remarquons que la fonction objectif de la formulation BCW proposée par Ghoniem et Sherali (2011) n'est pas linéaire. En conséquence, il est nécessaire de modifier cette formulation afin de la rendre entièrement linéaire.

Nous appelons **BCWL** la formulation linéaire de ce problème et elle présentée comme suit :

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m y_i \quad (4.5)$$

Sujet à :

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (4.6)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = n/m \quad \forall i \in I \quad (4.7)$$

$$y_i \geq \sum_{j=1}^n x_{ij} w_j - \bar{w} \quad \forall i \in I \quad (4.8)$$

$$y_i \geq \bar{w} - \sum_{j=1}^n x_{ij} w_j \quad \forall i \in I \quad (4.9)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, \forall i \in I \quad (4.10)$$

Dans la fonction objectif (4.5) la variable y_i représente la valeur absolue de la différence entre le poids total du wagon i et le poids moyen par wagon. Les contraintes (4.8) et (4.9) imposent à la variable y_i de prendre une valeur plus grande ou égale à la différence absolue du poids chargé dans le wagon, moins le poids moyen par wagon. Les autres contraintes sont les mêmes que pour BCW.

Nous soulignons que la formulation BCWL ne contient pas de critères pour interdire la génération des solutions alternatives. Nous pouvons donc déduire que la résolution exacte de cette formulation peut s'avérer difficile (en termes des temps de calcul).

Dans les lignes qui suivent, nous présentons une série de propositions visant à contrer la symétrie dans la formulation BCWL.

4.4 Contraintes hiérarchiques concernant les boîtes identiques

Ghoniem et Serali (2011) proposent une contrainte hiérarchique servant à imposer un ordre spécifique dans l'allocation de boîtes de poids identiques. Cette contrainte, dénommée *hiérarchique 1* est présentée comme suit :

$$\sum_{i=1}^m ix_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m ix_{ij_2} \quad \forall j_1, j_2 \in J : j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2} \quad (4.11)$$

La contrainte (4.11) évalue d'abord si deux boîtes j_1 et j_2 possèdent les mêmes poids ($w_{j_1} = w_{j_2}$). Ensuite, si $j_1 < j_2$ cette contrainte impose que la boîte j_1 soit allouée à un wagon identifié par un indice i plus petit ou égal à l'indice du wagon auquel la boîte j_2 sera allouée.

En général, cette contrainte cherche à créer une hiérarchie croissante entre les boîtes de poids identiques afin d'éviter la génération de solutions alternatives résultant d'une permutation entre les boîtes identiques.

Analysons le fonctionnement de la contrainte (4.11) pour briser la symétrie entre les boîtes identiques dans la formulation BCWL. Pour ce faire, nous allons utiliser l'instance de plus petite taille que le problème BCWL doit traiter, où 40 boîtes ($n = 40$) seront affectées à 4 wagons ($m = 40$) (4;40). La contrainte hiérarchique 1 (4.11) appliquée sur les deux premières boîtes j_1 et j_2 de poids identiques pour cette instance, sera :

$$1x_{1j_1} + 2x_{2j_1} + 3x_{3j_1} + 4x_{4j_1} \leq 1x_{1j_2} + 2x_{2j_2} + 3x_{3j_2} + 4x_{4j_2} \quad (4.12)$$

Supposons que la boîte j_1 est affectée au wagon 1 ($x_{1j_1} = 1, x_{2j_1} = 0, x_{3j_1} = 0, x_{4j_1} = 0$). La contrainte (4.12) deviendra donc :

$$1 \leq 1x_{1j_2} + 2x_{2j_2} + 3x_{3j_2} + 4x_{4j_2} \quad (4.13)$$

Ensuite, si $j_1 < j_2$, la boîte j_2 peut être affectée soit au wagon 1, 2, 3 ou 4. Supposons qu'elle est affectée au wagon 2 ($x_{2j_2} = 1$). Dans ce cas, la contrainte (4.13) sera : $1 \leq 2$.

Regardons maintenant l'effet produit par la permutation de la position de ces deux boîtes. Si la boîte j_1 est allouées au wagon 2 ($x_{2j_1} = 1$) et la boîte j_2 est allouée au wagon 1 ($x_{1j_2} = 1$), la contrainte (4.13) serait : $2 \leq 1$, ce qui n'est pas admissible.

En conclusion, notre exemple permet de constater qu'en raison de la hiérarchie imposée par la contrainte (4.11), nous ne pouvons plus créer de solutions alternatives en échangeant les positions de deux boîtes de poids identiques.

Dans nos expérimentations, la contrainte (4.11) est ajoutée à la formulation BCWL. Nous appelons cette proposition : **BCWL-hiérarchique 1**.

Ensuite, en nous inspirant de Sherali et Smith (2001), nous proposons l'utilisation d'une autre contrainte hiérarchique qui calcule un coefficient égal au carré de l'indice de l'objet pour lequel les sommations sont effectuées, c'est-à-dire, i^2 . Cette contrainte, dénommée **hiérarchique 1.1** (4.14), possède le même fonctionnement que la contrainte hiérarchique 1 (4.11).

$$\sum_{i=1}^m i^2 x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m i^2 x_{ij_2} \quad \forall j_1, j_2 \in J : j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2} \quad (4.14)$$

L'ajoute de la contrainte (4.14) dans la formulation BCWL sera identifiée comme la proposition **BCWL-hiérarchique 1.1**.

D'autres contraintes hiérarchiques peuvent aussi être modélisées pour traiter la symétrie entre les boîtes. Essentiellement, ces nouvelles contraintes se distinguent par la façon dont les coefficients des variables sont calculés. En (4.15) nous présentons la contrainte **hiérarchique 1.2**.

$$\sum_{i=1}^m (n-i)^2 x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m (n-i)^2 x_{ij_2} \quad \forall j_1, j_2 \in J : j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2} \quad (4.15)$$

Le coefficient de la formulation (4.15) est formé par la puissance deux de l'écart existant entre le nombre n de boîtes à affecter (nombre fixe) et l'indice i (indice variable) qui représente la position des wagons.

Afin d'illustrer l'effet que la contrainte (4.15) aura sur le problème BCWL, reprenons l'exemple précédemment utilisé, où 40 boîtes doivent être affectées à 4 wagons (4;40). Ainsi, pour deux boîtes j_1 et j_2 de poids identiques, la contrainte (4.15) s'écrira :

$$\begin{aligned} (40 - 1)^2 x_{1j_1} + (40 - 2)^2 x_{2j_1} + (40 - 3)^2 x_{3j_1} + (40 - 4)^2 x_{4j_1} \leq \\ (40 - 1)^2 x_{1j_2} + (40 - 2)^2 x_{2j_2} + (40 - 3)^2 x_{3j_2} + (40 - 4)^2 x_{4j_2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ou :

$$\begin{aligned} 39^2 x_{1j_1} + 38^2 x_{2j_1} + 37^2 x_{3j_1} + 36^2 x_{4j_1} \leq \\ 39^2 x_{1j_2} + 38^2 x_{2j_2} + 37^2 x_{3j_2} + 36^2 x_{4j_2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nous remarquons que les coefficients de la contrainte (4.17) forment une série décroissante permettant de donner des attributs uniques aux boîtes identiques. Par exemple, si la boîte j_1 est affectée au wagon 2 ($x_{2j_1} = 1$) et, la boîte j_2 est affectée wagon 1 ($x_{1j_2} = 1$), la contrainte (4.17) sera : $38^2 \leq 39^2$. Puis, une permutation de la position des boîtes j_1 et j_2 sera interdite car ceci donnerait une solution non admissible ($39^2 \leq 38^2$). En conséquence, la symétrie est contrée par (4.17).

Nous appelons **BCWL-hiérarchique 1.2** la proposition formée par l'ajout de la contrainte (4.15) dans la formulation BCWL.

Nous proposons deux autres contraintes hiérarchiques pour contrer la symétrie entre les boîtes. Nous appelons ces nouvelles contraintes, **hiérarchique 1.3** (4.18) et **hiérarchique 1.4** (4.19).

$$\sum_{i=1}^m \left(\binom{n}{m} - i \right)^2 x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m \left(\binom{n}{m} - i \right)^2 x_{ij_2} \quad \forall j_1, j_2 \in J : j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2} \quad (4.18)$$

$$\sum_{i=1}^m (m - i)^2 x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m (m - i)^2 x_{ij_2} \quad \forall j_1, j_2 \in J : j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2} \quad (4.19)$$

La contrainte (4.18) utilise un coefficient calculé par le carré du nombre des boîtes que chaque wagon peut recevoir (n/m) , moins les indices d'identification des wagons (i) .

Observons le comportement de cette contrainte pour l'instance de 40 boîtes et 4 wagons. ($n = 40$ et $m = 4$). La contrainte (4.18) pour traiter les boîtes de poids identiques j_1 et j_2 s'écrira :

$$(10 - 1)^{(2)}x_{1j_1} + (10 - 2)^{(2)}x_{2j_1} + (10 - 3)^{(2)}x_{3j_1} + (10 - 4)^{(2)}x_{4j_1} \leq \\ (10 - 1)^{(2)}x_{1j_2} + (10 - 2)^{(2)}x_{2j_2} + (10 - 3)^{(2)}x_{3j_2} + (10 - 4)^{(2)}x_{4j_2} \quad (4.20)$$

Ou :

$$9^2x_{1j_1} + 8^2x_{2j_1} + 7^2x_{3j_1} + 6^2x_{4j_1} \leq \\ 9^2x_{1j_2} + 8^2x_{2j_2} + 7^2x_{3j_2} + 6^2x_{4j_2} \quad (4.21)$$

À l'instar de la contrainte (4.15), cette formulation calcule une série décroissante des coefficients pour interdire la génération de solutions alternatives. Par exemple, si la boîte j_1 est affectée au wagon 2 ($x_{2j_1} = 1$) et la boîte j_2 est affectée au wagon 1 ($x_{1j_2} = 1$), la contrainte (4.21) deviendra : $8^2 \leq 9^2$. La permutation de ces boîtes ne sera plus admissible car, dans un tel cas, la contrainte (4.21) serait : $9^2 \leq 8^2$.

Nous allons tester la performance de cette contrainte dans la formulation BCWL, cette proposition sera appelée, **BCWL-hiérarchique 1.3**.

Analysons maintenant le comportement de la contrainte hiérarchique 1.4 présentée en (4.19). Dans cette contrainte, nous proposons l'utilisation d'un coefficient calculé par la puissance deux de l'écart du nombre des wagons (n), moins les coefficients d'identification des wagons i . La contrainte (4.19) appliquée sur (4;40) sera :

$$(4 - 1)^{(2)}x_{1j_1} + (4 - 2)^{(2)}x_{2j_1} + (4 - 3)^{(2)}x_{3j_1} + (4 - 4)^{(2)}x_{4j_1} \leq \\ (4 - 1)^{(2)}x_{1j_2} + (4 - 2)^{(2)}x_{2j_2} + (4 - 3)^{(2)}x_{3j_2} + (4 - 4)^{(2)}x_{4j_2} \quad (4.22)$$

Ou :

$$3^2x_{1j_1} + 2^2x_{2j_1} + 1^2x_{3j_1} + 0^2x_{4j_1} \leq 3^2x_{1j_2} + 2^2x_{2j_2} + 1^2x_{3j_2} + 0^2x_{4j_2} \quad (4.23)$$

La contrainte (4.23) confirme que l'utilisation du coefficient $(m - i)^2$ calcule des coefficients décroissants pouvant attribuer une identification unique aux boîtes identiques. Ceci va permettre de supprimer la symétrie de la même façon que les contraintes (4.15) et (4.18).

L'ajout de la contrainte (4.19) à la formulation BCWL donne lieu à la formulation **BCWL-hiérarchique 1.4**.

4.5 Contraintes hiérarchiques concernant les wagons identiques

Pour briser la symétrie entre les wagons identiques, Ghoniem et Sherali (2011) proposent une contrainte créant une hiérarchie basée sur les poids des boîtes. Nous appelons cette contrainte **hiérarchique 2** (4.24).

$$\sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n w_j x_{i+1,j} \quad \forall i = 1, \dots, m - 1 \quad (4.24)$$

La formulation (4.24) impose d'allouer au wagon i un poids total plus petit ou égal que le poids total alloué au wagon $i+1$, en conséquence, les wagons identiques seront identifiés de façon unique.

Par exemple, pour 4 boîtes ($n = 4$) de poids : $w_1 = 30, w_2 = 35, w_3 = 27, w_4 = 17$ (poids des boîtes à utiliser pour nos expérimentations) qui seront affectées à 2 wagons identiques (w_1 et w_2), la contrainte hiérarchique 2 s'écrira :

$$30x_{11} + 35x_{12} + 27x_{13} + 17x_{14} \leq 30x_{21} + 35x_{22} + 27x_{23} + 17x_{24} \quad (4.25)$$

Afin de déterminer si la contrainte (4.25) peut permettre l'existence de certaines solutions alternatives, nous allons évaluer si pour chaque affectation admissible

que cette contrainte peut calculer, des permutations des wagons identiques sont acceptées.

Ainsi, le tableau 4.1 présente toutes les affectations admissibles et détermine si pour ces affectations une permutation de wagons identiques est admissible ou non.

Tableau 4.1- Ensemble de solutions alternatives pour 4 boîtes et 2 wagons identiques avec la contrainte (4.25)

35	30	27	17	Résultat	Permutation admissible
W1	W2	W2	W1	$52 \leq 57$	Non
W2	W1	W2	W1	$47 \leq 62$	Non
W2	W2	W1	W1	$44 \leq 65$	Non
W1	W2	W2	W2	$35 \leq 74$	Non
W2	W1	W2	W2	$30 \leq 79$	Non
W2	W2	W1	W2	$27 \leq 82$	Non
W2	W2	W2	W1	$17 \leq 92$	Non

Le tableau 4.1 met en évidence que l'imposition de (4.25) en utilisant comme coefficients les poids de boîtes : 35, 30, 27, 17 ne permet pas la génération de solutions alternatives car la permutation de wagons identiques n'est plus permise. Par exemple, la première affectation indique que les boîtes 1 et 4 sont affectées au wagon 1. Ensuite, les boîtes 2 et 3 sont affectées au wagon 2. Pour cette affectation la contrainte 4.25 va calculer : $52 \leq 57$. Il est évident qu'une permutation des wagons n'est pas admissible ($57 \leq 52$). En conséquence, nous concluons que la symétrie est brisée.

La contrainte (4.24) sera ajoutée à la formulation BCWL. Cette proposition sera dénommée **BCWL-hiérarchique 2**.

Ghoniem et Sherali (2011) expliquent qu'il est possible de construire d'autres contraintes hiérarchiques ayant la même logique de fonctionnement que la contrainte (4.24). Ces chercheurs préconisent l'utilisation de coefficients formés

soit par l'indice de boîtes j , (séries croissantes de coefficients) soit par la multiplication de cet indice avec les poids des boîtes (jw_j).

Néanmoins, nous soulignons que l'utilisation de ce dernier coefficient (jw_j) peut créer de solutions alternatives. Par exemple, pour l'instance de (4;40), l'affectation de la boîte 17 ($j=17$) de poids 30 ($w_j=30$) dans un premier wagon va calculer un coefficient égal à 510. Ce calcul sera égal à l'affectation de la boîte de position 30 ($j=30$) avec un poids de 17 dans un deuxième wagon (510). Dans un tel cas, la permutation de wagons identiques sera acceptée.

Nous allons tester la performance des contraintes utilisant ces coefficients. Ainsi, en (4.26) et (4.27) nous présentons ces deux contraintes.

$$\sum_{j=1}^n jx_{ij} \leq \sum_{j=1}^n jx_{i+1j} \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.26)$$

$$\sum_{j=1}^n jw_j x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n jw_j x_{i+1j} \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.27)$$

Nous désignons **hiérarchique 2.1** la contrainte (4.26) et **hiérarchique 2.2** la contrainte (4.27). L'ajout séparé de ces deux contraintes à la formulation BCWL sera dénommé **BCWL-hiérarchique 2.1** et **BCWL-hiérarchique 2.2** respectivement.

Ensuite, nous proposons en (4.28) la contrainte **hiérarchique 2.3**.

$$\sum_{j=1}^n (m-j)^2 x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n (m-j)^2 x_{i+1,j} \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.28)$$

Essayons de déterminer l'effet de cette contrainte lorsqu'elle est appliquée à l'instance de 40 boîtes et 4 wagons ($n = 40$ et $m = 4$). Pour cette instance, la contrainte (4.28) s'écrit :

$$(4-1)^{(2)}x_{11} + (4-2)^{(2)}x_{12} + (4-3)^{(2)}x_{13} \dots + (4-40)^{(2)}x_{140} \leq \\ (4-1)^{(2)}x_{21} + (4-2)^{(2)}x_{22} + (4-3)^{(2)}x_{23} \dots + (4-40)^{(2)}x_{240} \quad (4.29)$$

Ou :

$$3^2x_{11} + 2^2x_{12} + 1^2x_{13} \dots + (-3)^2x_{17} \dots + (-36)^2x_{140} \leq 3^2x_{21} + 2^2x_{22} + 1^2x_{23} \dots + (-3)^2x_{27} \dots + (-36)^2x_{240} \quad (4.30)$$

Cette contrainte calcule une série croissante de coefficients, toutefois certains de ces coefficients sont identiques. Plus précisément, pour l'instance (4;40) la contrainte (4.28) crée des coefficients identiques seulement pour 3 paires de boîtes, tel que montrée dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2 - Coefficients identiques pour l'instance de (4;40) avec la contrainte (4.30)

Boîtes	Calcul du coefficient	
1 et 7	$(4-1)^2 = (4-7)^2 =$	9
2 et 6	$(4-2)^2 = (4-6)^2 =$	4
3 et 5	$(4-3)^2 = (4-5)^2 =$	1

D'après le tableau 4.2 nous pouvons déterminer par exemple que les coefficients des variables concernant les boîtes 1 et 7 auront le même coefficient. Par conséquent, si nous affectons la boîte 1 ($x_{11} = 1$) et la boîte 7 au wagon 2 ($x_{27} = 1$), pour cette affectation, une permutation des wagons identiques sera permise ($9 \leq 9$).

Une autre contrainte pour les wagons identiques est proposée en (4.31), il s'agit de la contrainte *hiérarchique 2.4*.

$$\sum_{j=1}^n 2^{(m-j)}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n 2^{(m-j)}x_{i+1j} \quad \forall i = 1, \dots, m - 1 \quad (4.31)$$

Analysons le comportement de cette contrainte en l'appliquant sur l'instance ayant 40 boîtes ($n = 40$) et quatre wagons identiques ($m = 4$).

$$(2)^{(4-1)}x_{11} + (2)^{(4-2)}x_{12} + (2)^{(4-3)}x_{13} \dots + (2)^{(4-40)}x_{140} \leq \\ (2)^{(4-1)}x_{21} + (2)^{(4-2)}x_{22} + (2)^{(4-3)}x_{23} \dots + (2)^{(4-40)}x_{240} \quad (4.32)$$

Ou :

$$(2)^{(3)}x_{11} + (2)^{(2)}x_{12} + (2)^{(1)}x_{13} \dots + (2)^{(-16)}x_{120} \dots + (2)^{(-36)}x_{140} \leq \\ (2)^{(3)}x_{21} + (2)^{(2)}x_{22} + (2)^{(1)}x_{23} \dots + (2)^{(-16)}x_{220} \dots + (2)^{(-36)}x_{240} \quad (4.33)$$

Nous pouvons observer que les coefficients de la contrainte (4.33) forment la série décroissante :

$$\{8, 4, 2, 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125, \dots, 0.00000000001455\}.$$

La particularité de cette série se trouve dans le fait que pour un chiffre quelconque, la somme de tous les chiffres se trouvant à droite donne ce même chiffre (somme cumulative des décimaux décroissants). En effet, la somme de tous les chiffres se trouvant à droite de 8 va donner 8, la somme de tous les chiffres se trouvant à droite de 4 va donner 4 et ainsi de suite. Cette caractéristique nous fait conclure que (4.33) peut permettre la création de certaines solutions alternatives pour une même valeur de la fonction objectif.

Par exemple, supposons que la boîte 4, ayant un coefficient égal à 1, est affectée au wagon 1 ($x_{14} = 1$) et que les boîtes allant de 5 jusqu'à 40 sont affectées au wagon 2 ($x_{25} = 1, x_{26} = 1, \dots, x_{240} = 1$). Dans ce cas, la contrainte (4.33) va s'écrire: $1 \leq 1$, car la somme cumulative des coefficients des boîtes affectées au wagon 2 va donner 1. Évidemment, il sera possible de permuter la position des wagons 1 et 2 donnant lieu à une solution alternative.

Par contre, pour d'autres affectations cette contrainte permet de briser la symétrie. Par exemple, si la boîte 2 est affectée au wagon 1 ($x_{12} = 1$), et la boîte 1 est affectée au wagon 2, la contrainte (4.34) sera $4 \leq 8$, puis cette affectation ne permet pas de permuter la position des wagons.

L'inclusion de (4.31) dans la formulation BCWL sera appelée, **BCWL-hiérarchique 2.4**.

Enfin, une dernière contrainte hiérarchique pour les wagons est proposée en (4.34).

$$\sum_{j=1}^n (n-j)^2 x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n (n-j)^2 x_{i+1j} \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.34)$$

Cette contrainte, appelé **hiérarchique 2.5**, calcule une série décroissante des coefficients différents de la forme : $(40-1)^2$, $(40-2)^2$, $(40-3)^2, \dots$, $(40-40)^2$ permettant d'attribuer des attributs uniques aux wagons identiques.

Notons que les contraintes hiérarchique 2.3 et hiérarchique 2.5 seront testées uniquement en combinaison avec des contraintes pour briser la symétrie entre les boîtes identiques (section 4.8).

4.6 Contrainte lexicographique concernant les boîtes identiques

Les contraintes d'ordonnement lexicographique cherchent à créer une hiérarchie entre les éléments identiques afin d'attribuer à ces éléments des attributs uniques.

Nous proposons en (4.35) la contrainte **lexicographique 1.2** pour briser la symétrie entre les boîtes identiques (inspirée de Jans et Desrosiers, 2013).

$$\sum_{i=1}^m 2^{(m-i)} x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m 2^{(m-i)} x_{ij_2} \quad \forall j_1, j_2 \in J : j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2} \quad (4.35)$$

Cette contrainte calcule des coefficients égaux à 2 élevé à une puissance formée par l'écart entre le nombre fixe de wagons (m) et l'indice pour lequel les sommations sont effectuées ($i = 1, \dots, m$). Ce calcul assure l'obtention d'un coefficient différent pour chaque variable de décision.

En effet, en appliquant cette contrainte sur l'instance de (4;40) ($n = 4$, $m = 40$). L'affectation de deux boîtes j_1 et j_2 de poids identiques s'écrira :

$$\begin{aligned} (2)^{(40-1)}x_{1j_1} + (2)^{(40-2)}x_{2j_1} + (2)^{(40-3)}x_{3j_1} + (2)^{(40-4)}x_{4j_1} \leq \\ (2)^{(40-1)}x_{1j_2} + (2)^{(40-2)}x_{2j_2} + (2)^{(40-3)}x_{3j_2} + (2)^{(40-4)}x_{4j_2} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ou :

$$\begin{aligned} (2)^{(39)}x_{1j_1} + (2)^{(38)}x_{2j_1} + (2)^{(37)}x_{3j_1} + (2)^{(36)}x_{4j_1} \leq \\ (2)^{(39)}x_{1j_2} + (2)^{(38)}x_{2j_2} + (2)^{(37)}x_{3j_2} + (2)^{(36)}x_{4j_2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nous observons en (4.37) qu'il n'existe pas des coefficients identiques pour les variables de décision. De plus, nous constatons que (4.37) suit la règle d'ordonnement lexicographique qui indique que la valeur d'un coefficient sera plus grande que la somme des coefficients de plus petits valeurs.

$$(2)^{(38)} + (2)^{(37)} + (2)^{(36)} < (2)^{(39)}$$

Ou :

$$481\ 036\ 337\ 152 < 549\ 755\ 813\ 888$$

Ceci assure la suppression des solutions alternatives. Par exemple, supposons que la boîte j_2 sera allouée au premier wagon ($x_{1j_2} = 1$), dans ce cas, le côté droit de la contrainte prendra la valeur $(2)^{(39)}$. Par la suite, si la boîte j_1 est allouée au wagon 2, on aura que $x_{2j_1} = 1$ et les autres variables de cette contrainte prendront la valeur zéro. C'est-à-dire que la contrainte (4.37) sera : $(2)^{(38)} \leq (2)^{(39)}$. Ainsi, la permutation des wagons identiques sera interdite en raison de (4.37).

L'inclusion de la contrainte (4.35) dans la formulation BCWL donne lieu à la formulation *BCWL-lexico 1.2*.

4.7 Contrainte lexicographique concernant les wagons identiques

La symétrie existante entre les wagons identiques peut aussi être contrée par l'imposition d'une contrainte d'ordonnement lexicographique. Ces types de contraintes (4.38) vont assigner des attributs distinctifs aux wagons identiques dans le problème BCWL.

$$\sum_{j=1}^n 2^{(n-j)}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n 2^{(n-j)}x_{i+1j} \quad \forall i = 1, \dots, m - 1 \quad (4.38)$$

Analysons le comportement de la contrainte (4.38) sur l'instance de 40 boîtes ($n = 40$) et quatre wagons identiques ($m = 4$). Pour cet exemple la contrainte (4.38) s'écrit :

$$(2)^{(40-1)}x_{11} + (2)^{(40-2)}x_{12} + (2)^{(40-3)}x_{13} \dots + (2)^{(40-40)}x_{140} \leq \\ (2)^{(40-1)}x_{21} + (2)^{(40-2)}x_{22} + (2)^{(40-3)}x_{23} \dots + (2)^{(40-40)}x_{240} \quad (4.39)$$

Ou :

$$(2)^{(39)}x_{11} + (2)^{(38)}x_{12} + (2)^{(37)}x_{13} \dots + (2)^{(0)}x_{140} \leq \\ (2)^{(39)}x_{21} + (2)^{(38)}x_{22} + (2)^{(37)}x_{23} \dots + (2)^{(0)}x_{240} \quad (4.40)$$

Nous pouvons souligner que la contrainte (4.40) va permettre d'assigner un attribut distinctif aux wagons identiques, car elle calcule des coefficients qui seront toujours plus grands que la somme de tous les coefficients de plus petite taille (règle lexicographique).

Par exemple, pour la boîte 36, le coefficient calculé par (4.40) sera : $(2)^{(4)} = 16$. Ensuite, les coefficients pour les boîtes 37, 38, 39 et 40 (coefficients plus petits que le coefficient de la boîte 36) seront : $\{(2)^{(3)}, (2)^{(2)}, (2)^{(1)}, (2)^{(0)}\}$ ou, $8 + 4 + 2 + 1 = 15$. Donc, nous constatons que $15 < 16$.

Nous devons remarquer que cette même règle va s'appliquer pour tous les coefficients de (4.38) (tel qu'expliqué en 3.4.2.2). En conséquence, cette contrainte ne permet plus la création de solutions alternatives.

Nous appelons *lexicographique 2.2* la contrainte (4.38). Il faut indiquer que dans nos expérimentations nous utilisons cette contrainte seulement en combinaison avec d'autres contraintes pour le bris de la symétrie entre les boîtes identiques (section 4.8).

4.8 Bris simultané de la symétrie entre les boîtes et les wagons identiques

Le but de cette section est de proposer l'utilisation combinée de certaines contraintes hiérarchiques et lexicographiques afin de briser simultanément la symétrie existant entre les boîtes et les wagons identiques.

Dans un premier temps, nous proposons l'inclusion simultanée, dans la formulation symétrique BCWL, de la contrainte hiérarchique 1 (4.11) pour briser la symétrie entre les boîtes et de la contrainte hiérarchique 2 (4.24) pour les wagons identiques. Cette combinaison donne lieu à la proposition : ***BCWL-hiérarchique-BW 1***.

Il nous semble aussi intéressant de comparer la performance de cette dernière proposition avec une formulation formée par la combinaison de la contrainte hiérarchique 1.1 (4.14) et de la contrainte hiérarchique 2 (4.24). Cette proposition sera identifiée comme : ***BCWL-hiérarchique-BW 1.1***. Enfin, la combinaison de la contrainte hiérarchique 1.4 (4.19) avec la contrainte hiérarchique 2.4 (4.31) résulte en la proposition ***BCWL-hiérarchique-BW 5***.

De plus, nous proposons de tester la performance d'une formulation combinant la contrainte lexicographique 1.2 (4.35) pour contrer la symétrie entre les boîtes identiques avec la contrainte hiérarchique 2 (4.24) qui brise la symétrie entre les wagons identiques. Nous dénommons cette combinaison : ***BCWL-lexico-BW 1***. Nous pouvons aussi mesurer la performance de la contrainte lexicographique 1.2 (4.35) en combinaison avec la contrainte hiérarchique 2.4 (4.31). Cette proposition sera appelée ***BCWL-lexico-BW 2***. Enfin, nous proposons aussi de combiner la contrainte lexicographique 1.2 (4.35) avec la contrainte hiérarchique 2.5 (4.34) donnant lieu à la formulation ***BCWL-lexico-BW 3***.

En ce qui concerne la contrainte lexicographique 2.2 (4.38), nous proposons de la combiner avec la contrainte lexicographique 1.2 (4.35). Toutefois, nous allons fixer le nombre de boîtes à traiter par cette contrainte en 40 ($n = 40$). Cette

combinaison donne lieu à la proposition, **BCWL-lexico-BW 2.2-40**. Il faut remarquer que le nombre de boîtes est fixé en 40 uniquement pour la contrainte (4.38), c'est-à-dire que les autres contraintes vont continuer à traiter un nombre de boîtes égal à n .

4.9 La réduction de variables

Nous pouvons réduire le nombre de variables de la formulation symétrique BCWL en utilisant la contrainte **réduction 1** présentée en (4.41).

$$\sum_{i=1}^{\min(j,m)} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (4.41)$$

Tel qu'expliqué dans la section 3.4.2.3 cette contrainte vise seulement la réduction de la symétrie entre les wagons identiques. Nous avons démontré que ce type de contrainte peut permettre la génération de certaines solutions alternatives.

Dans nos expérimentations, la contrainte réduction 1 (4.41) va remplacer la contrainte (4.6) de la formulation symétrique BCWL. Nous appelons cette dernière proposition, **BCWL-RV 1**.

4.10 Améliorations apportées à la réduction de variables

Nous proposons des améliorations pour la proposition BCWL-RV 1 présentée précédemment. L'objectif est de déterminer si l'utilisation combinée de la formulation de réduction de variables avec des contraintes traitant les boîtes identiques peut aider à réduire le temps de calcul optimal.

D'abord, nous allons ajouter la contrainte lexicographique 1.2 (4.35) dans la proposition BCWL-RV 1. Ceci sera appelé **BCWL-RV 2**.

Ensuite, nous voulons tester la performance de la contrainte hiérarchique 1.1 (4.14) dans la proposition BCWL-RV 1. Nous appelons cette combinaison, **BCWL-RV 4**.

Enfin, la formulation de réduction de variables BCWL-RV 1 sera augmentée avec la contrainte hiérarchique 1 (4.11). Nous identifions cette combinaison, comme étant la proposition : **BCWL-RV 5**.

4.11 La reformulation

Nous pouvons reformuler le problème symétrique BCWL en remplaçant la variable binaire x_{ij} par une autre variable entière qui ne sera pas nécessairement binaire.

Cette nouvelle variable va imposer l'affectation d'un certain nombre de boîtes regroupées par leur poids, plutôt que l'affectation de boîtes individuelles où certaines sont identiques. Pour ce faire, nous allons créer 4 types différents de groupes de boîtes. Notons que ces groupes seront identifiés par des chiffres différents (poids de boîtes : 17, 27, 30 et 35), ce qui permet de briser la symétrie entre les boîtes.

La variable de décision à utiliser pour la reformulation est définie comme suit :

$$v_{il} = \text{nombre de boîtes de type } l \text{ allouées au wagon } i$$

Cette nouvelle variable demande de reformuler BCWL, nous appelons cette reformulation comme **RBCWL**.

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m y_i \quad (4.42)$$

Sujet à :

$$\sum_{i=1}^m v_{il} = Q_l \quad \forall l \in L \quad (4.43)$$

$$\sum_{l=1}^t v_{il} = n/m \quad \forall i \in I \quad (4.44)$$

$$y_i \geq \sum_{l=1}^t v_{il} w_l - \bar{w} \quad \forall i \in I \quad (4.45)$$

$$y_i \geq \bar{w} - \sum_{l=1}^t v_{il} w_l \quad \forall i \in I \quad (4.46)$$

$$v_{il} \geq 0 \text{ et entier} \quad \forall l \in L, \forall i \in I \quad (4.47)$$

Variable de décision :

v_{il} = nombre de boîtes de type l allouées au wagon i ,

Paramètres :

t = nombre de types de boîtes,

w_l = poids de la boîte de type l ,

Q_l = nombre demandé de boîtes de type l ,

Ensembles :

L = ensemble de types de boîtes,

I = ensemble de wagons,

Calcul du poids moyen par wagon :

$$\bar{w} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^t w_l Q_l$$

La fonction objectif (4.42) cherche à minimiser la somme des valeurs absolues de l'écart entre le poids alloué aux wagons et le poids moyen par wagon. La contrainte (4.43) assure que tous les groupes de boîtes seront affectés dans les wagons disponibles. Ensuite, la contrainte (4.44) cherche à affecter une quantité n/m de boîtes à chaque wagon. De plus, les contraintes (4.45) et (4.46) imposent à la variable y_i de prendre une valeur positive. Enfin, la contrainte (4.47) impose à la variable v_{il} de prendre uniquement de valeurs entières positives.

La formulation RBCWL vise à supprimer la symétrie entre les boîtes identiques. Il sera intéressant d'évaluer la performance de cette reformulation avec l'inclusion de nouvelles contraintes pour briser la symétrie entre les wagons identiques.

4.12 Des améliorations apportées à la reformulation

Afin de traiter la symétrie venant des wagons identiques dans RBCWL, nous avons modélisé une série de contraintes hiérarchiques et lexicographiques qui seront ajoutées à cette reformulation.

D'abord, en (4.48) nous présentons la contrainte *hiérarchique-ref* qui impose un ordonnancement basé sur les poids des boîtes (w_j). Le fonctionnement de cette contrainte est exactement le même que pour la contrainte hiérarchique 2 (4.24) présentée dans la section 4.5.

$$\sum_{l=1}^t w_l v_{il} \leq \sum_{l=1}^t w_l v_{i+1,l} \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.48)$$

Nous appelons l'inclusion de cette contrainte dans RBCWL : **RBCWL 2**.

De plus, la contrainte *hiérarchique-ref 1* présentée en (4.49) représente une autre façon de créer une hiérarchie entre les wagons identiques.

$$\sum_{l=1}^t l^2 v_{il} \leq \sum_{l=1}^t l^2 v_{i+1,l} \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.49)$$

L'ajout de (4.49) dans RBCWL sera appelé : **RBCWL 2.1**.

De surcroît, une autre contrainte peut être construite en utilisant des critères lexicographiques. C'est le cas de la contrainte *lexico-ref 1* (4.50).

$$\sum_{l=1}^t 2^{(m-l)} v_{il} \leq \sum_{l=1}^t 2^{(m-l)} v_{i+1,l} \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.50)$$

Cette dernière possède la même logique de bris de symétrie que la contrainte lexicographique 2.2 (4.38) présentée dans la section 4.7. Nous appelons l'inclusion de cette contrainte dans RBCWL : **RBCWL 3**.

Nous proposons aussi en (4.51) la contrainte **hiérarchique-ref 2**.

$$\sum_{l=1}^t (t-l)^2 v_{il} \leq \sum_{l=1}^t (t-l)^2 v_{i+1,l} \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.51)$$

L'ajout de cette contrainte dans la formulation RBCWL permet aussi de calculer des coefficients différents pour les variables de décision. Nous dénommons cette proposition : **RBCWL 4**.

En (4.52) nous proposons la contrainte **lexico-ref 3**.

$$\sum_{l=1}^t (n/m)^{t-l} v_{il} \leq \sum_{l=1}^t (n/m)^{t-l} v_{i+1,l} \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.52)$$

La proposition RBCWL augmentée de (4.52) sera appelée : **RBCWL 5**.

Enfin, nous modifions les coefficients de la contrainte (4.52) dans le but de créer des plus grands chiffres pour ces coefficients. Ainsi, en (4.53) nous proposons la contrainte **lexico-ref 4** qui sera ajoutée au RBCWL pour donner la proposition **RBCWL-lexico-ref 4**.

$$\sum_{l=1}^t (10m)^{t-l} v_{il} \leq \sum_{l=1}^t (10m)^{t-l} v_{i+1,l} \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.53)$$

4.13 La formulation des représentants asymétriques (ARF)

Nous considérons intéressant d'observer la performance de la reformulation ARF sur le problème de balancement de la charge de wagons que nous traitons dans ce mémoire.

L'application de cette approche sur le problème BCWL va chercher à supprimer la symétrie entre les wagons identiques. Ceci est possible, car l'ARF vise à créer des groupes de boîtes qui seront identifiés par le plus petit indice des boîtes affectées au groupe. Il est important de noter que cette approche ne vise pas l'affectation des boîtes aux wagons identiques. Les boîtes sont affectées dans des groupes non-identiques, puis ces groupes peuvent être assignés aux wagons. Or, cette dernière assignation ne fait pas partie du processus de résolution optimal.

L'application d'ARF demande d'abord, de définir la variable de décision suivante :

$z_{jh} = 1$ si la boîte j est dans le même groupe que la boîte h et que cette dernière est la boîte de plus petit indice dans le groupe, 0 sinon.

Ensuite, en utilisant cette nouvelle variable la reformulation **ARF** pour résoudre le problème de balancement de la charge de wagons sera :

$$\text{Min } \sum_{h=1}^n y_h \quad (4.54)$$

Sujet à :

$$\sum_{h=1}^j z_{jh} = 1 \quad \forall j \in J \quad (4.55)$$

$$\sum_{j=h}^n z_{jh} = \frac{n}{m} z_{hh} \quad \forall h \in H \quad (4.56)$$

$$\sum_{j=1}^n z_{jh} = m \quad \forall h \in H \quad (4.57)$$

$$y_h \geq \sum_{j=h}^n z_{jh} w_j - \bar{w} z_{hh} \quad \forall h \in H \quad (4.58)$$

$$y_h \geq \bar{w} z_{hh} - \sum_{j=h}^n z_{jh} w_j \quad \forall h \in H \quad (4.59)$$

$$z_{jh} \leq z_{hh} \quad \forall j \in J, \forall h \in H | j \geq h \quad (4.60)$$

$$z_{jh} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, \forall h \in H | j \geq h \quad (4.61)$$

Paramètres :

n = nombre de boîtes,

w_j = poids de la boîte j ,

Ensembles :

J = Ensemble de boîtes = $\{1, \dots, n\}$,

H = Ensemble de boîtes = $\{1, \dots, n\}$,

Calcul du poids moyen par wagon :

$$\bar{w} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n w_j.$$

La fonction objectif (4.54) minimise la valeur absolue totale de l'écart entre le poids total par wagon et le poids moyen par wagon. Ce calcul sera toujours positif en raison de l'imposition des contraintes (4.58) et (4.59). Par la contrainte (4.55) nous nous assurons que toutes les boîtes seront allouées à exactement 1 groupe. De plus, dans la contrainte (4.56) nous imposons que chaque groupe disponible soit affecté d'exactly n/m boîtes. La contrainte (4.57) impose la création d'un nombre m de groupes. En (4.60) nous imposons l'affectation d'une boîte à un groupe uniquement si le groupe est utilisé. Enfin, la contrainte (4.61) assure la nature binaire de la variable de décision.

4.14 La perturbation de la fonction objectif

D'après Ghoniem et Sherali (2011) la perturbation de la fonction objectif permet d'améliorer le processus de résolution d'une formulation en nombres entiers symétrique. Dans le but de confirmer l'efficacité de cette approche, nous allons modéliser une série de propositions issues de cette technique.

D'abord, rappelons que cette technique s'applique pour les formulations qui contiennent déjà une contrainte de bris de symétrie. Les termes de cette contrainte doivent être ajoutés à la fonction objectif afin de générer l'effet de perturbation.

Pour nos expérimentations nous allons utiliser certaines des propositions présentées dans les sections précédentes de ce chapitre.

Un autre aspect important de l'application de cette technique représente le choix des coefficients qui vont modifier la fonction objectif. Ces coefficients vont multiplier tant la fonction objectif originale que la fonction hiérarchique qui sera incluse dans la fonction objectif.

Nous avons repris les propos de Jans et Desrosiers (2013) pour la création de coefficients nécessaires à la perturbation. Ces chercheurs proposent de les créer en utilisant certains éléments venant du problème traité. Ainsi, le premier coefficient μ_0 qui va modifier la fonction objectif originale, sera égal au nombre de boîtes n . Notons que cette dernière représente la plus grande chiffre entre les éléments du problème BCWL, en conséquence, son utilisation va permettre d'attribuer la plus haute priorité à la fonction objectif originale lors du processus de résolution.

Ensuite, le coefficient μ_j sera calculé par la division de 1 par la somme des indices de boîtes j plus 1. Ceci correspond à une série décroissante qui va permettre de garder la compatibilité entre la hiérarchie imposée par la contrainte (\leq) et les termes de la contrainte hiérarchique ajoutés dans la fonction objectif.

Nous appelons, cette paire de coefficients : **CI**, et ils sont présentés en (4.62).

$$\mu_0 = n \quad \text{et} \quad \mu_j = \left(\frac{1}{(j+1)} \right) \quad (4.62)$$

De même, Jans et Desrosiers (2013) proposent aussi de modifier légèrement ces coefficients afin de générer de nouveaux coefficients pouvant être utilisés pour perturber la fonction objectif. Ainsi, nous avons divisé par 2 le nombre de wagons n , puis nous avons élevé au carré le dénominateur du coefficient μ_j . Ceci correspond à un calcul de coefficients plus petits que les coefficients de C1.

Nous appelons ces coefficients : **C2** et ils sont présentés en (4.63).

$$\mu_0 = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mu_j = \left(\frac{1}{(j+1)^2} \right) \quad (4.63)$$

Il nous semble aussi intéressant d'effectuer des expérimentations pour les cas où les coefficients ne sont pas compatibles avec les contraintes de bris de symétrie (Ghoniem et Serali, 2011). Pour ce faire, nous proposons l'utilisation d'une série croissante de coefficients. Ces coefficients, appelés *NC1* et *NC2*, sont présentés en (4.64) et (4.65) respectivement.

$$\mu_0 = n \quad \text{et} \quad \mu_j = \left(\frac{1}{(n-j+1)} \right) \quad (4.64)$$

$$\mu_0 = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mu_j = \left(\frac{1}{(n-j+1)^2} \right) \quad (4.65)$$

Dans les lignes suivantes, nous présentons les propositions qui seront testées sous la technique de perturbation de la fonction objectif.

4.14.1 La perturbation avec des contraintes hiérarchiques

En premier, nous proposons de perturber la proposition BCWL-hiérarchique 1.1 (section 4.4) avec la contrainte hiérarchique 1.1 (4.14). Cette proposition utilisée avec les coefficients C1 et C2 sera appelée : *perturbation-hiérarchique 1.1-C1* et *perturbation-hiérarchique 1.1-C2* respectivement. De plus, pour les cas de non-compatibilité (NC1 et NC2), ces formulations seront appelées : *perturbation-hiérarchique 1.1-NC1* et *perturbation-hiérarchique 1.1-NC2* respectivement.

La fonction objectif perturbée pour ces propositions sera :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m (y_i) \mu_0 + \sum_{j=1}^n \left(\mu_j \sum_{i=1}^m i^2 x_{ij} \right) \quad (4.66)$$

Ensuite, la contrainte hiérarchique 1.4 (4.19) sera utilisée pour perturber la fonction objectif de la formulation BCWL-hiérarchique 1.4. Dans nos expérimentations, nous identifions cette formulation perturbée par, *perturbation-hiérarchique 1.4-C1* et *perturbation-hiérarchique 1.4-C2* pour les coefficients C1 et C2, respectivement. Puis, pour les coefficients non compatibles les propositions

seront appelées : *perturbation-hiérarchique 1.4-NC1* et *perturbation-hiérarchique 1.4-NC2* respectivement.

La fonction objectif perturbée pour ces formulations est présentée en (4.67)

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m (y_i) \mu_0 + \sum_{j=1}^n \left(\mu_j \sum_{i=1}^m (m-i)^2 x_{ij} \right) \quad (4.67)$$

4.14.2 La perturbation avec la contrainte lexicographique

Nous proposons aussi d'appliquer la perturbation de la fonction objectif pour des formulations contenant la contrainte lexicographique 1.2. Ainsi, d'abord nous proposons de tester la performance de la formulation BCWL-lexico 1.2 (section 4.4).

Voici la fonction objectif perturbée pour cette proposition :

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m (y_i) \mu_0 + \sum_{j=1}^n \left(\mu_j \sum_{i=1}^m 2^{(m-i)} x_{ij} \right) \quad (4.68)$$

L'utilisation des coefficients C1 et C2 pour perturber (4.68) donne lieu respectivement aux formulations : *Perturbation-lexico 1.2-C1*, et *Perturbation-lexico 1.2-C2*. De plus, l'utilisation des coefficients NC1 et NC2 va créer les formulations, *Perturbation-lexico 1.2-NC1*, et *Perturbation-lexico 1.2-NC2*.

Nous pouvons aussi évaluer la performance de cette technique pour des propositions de bris simultané de la symétrie. Toutefois, il est important de remarquer que pour nos tests, seulement la contrainte lexicographique 1.2 sera ajoutée dans la fonction objectif.

Nous proposons de perturber la fonction objectif de la formulation BCWL-lexico-BW 2 en utilisant la contrainte lexicographique 1.2 (4.35). Nous appelons cette dernière combinaison : *Perturbation-BCWL-lexico-BW 2-C1* et *Perturbation-BCWL-lexico-BW 2-C2* pour les coefficients C1 et C2 respectivement. Ensuite,

les propositions *Perturbation-BCWL-lexico-BW 2-NC1* et *Perturbation-BCWL-lexico-BW 2-NC2* correspondent aux formulations perturbées non-compatibles. La fonction objectif perturbée pour ces formulations est identique à la fonction objectif proposée en (4.68).

4.14.3 La perturbation pour la réduction de variables

Les propositions de réduction de variables peuvent aussi être testées sur la technique de perturbation de la fonction objectif. Ainsi, nous proposons de perturber la fonction objectif de la proposition BCWL-RV 4 avec la contrainte hiérarchique 1.1 (4.14).

La fonction objectif perturbée pour cette proposition sera identique à (4.66). De plus, les propositions de perturbation *BCWL-RV 4-C1* et *Perturbation-BCWL-RV 4-C2* utilisent les coefficients C1 et C2 respectivement. Puis, les propositions *Perturbation-BCWL-RV 4-NC1* et *Perturbation-BCWL-RV 4-NC2* respectivement utilisent les coefficients NC1 et NC2.

4.14.4 La perturbation de la reformulation

Nous allons aussi tester la performance de la perturbation de la fonction objectif pour les reformulations proposées dans les sections 4.11 et 4.12. Les coefficients décroissants *C3* et *C4* présentés en (4.69) et (4.70) seront utilisés pour cet effet afin de garder la compatibilité.

$$\mu_0 = 100m \quad \text{et} \quad \mu_j = \left(\frac{1}{(i+1)} \right) \quad (4.69)$$

$$\mu_0 = 100 \frac{m}{2} \quad \text{et} \quad \mu_j = \left(\frac{1}{(i+1)^2} \right) \quad (4.70)$$

Ensuite, les coefficients *NC3* (4.71) et *NC4* (4.72) vont nous permettre de vérifier la performance de la perturbation lorsqu'il n'existe pas de compatibilité.

$$\mu_0 = 100m \quad \text{et} \quad \mu_j = \left(\frac{1}{(m-i+1)} \right) \quad (4.71)$$

$$\mu_0 = 100 \frac{m}{2} \quad \text{et} \quad \mu_j = \left(\frac{1}{(m-i+1)^2} \right) \quad (4.72)$$

Une première proposition consiste en perturber la fonction objectif de la formulation RBCWL 2 en utilisant la contrainte hiérarchique-ref (4.48). La fonction objectif perturbée pour cette formulation sera :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m (y_i) \mu_0 + \sum_{i=1}^m \left(\mu_i \sum_{l=1}^t w_l v_{il} \right) \quad (4.73)$$

L'utilisation des coefficients C3 et C4 pour ce formulation sera identifiée comme, ***Perturbation-RBCWL 2-C3*** et ***Perturbation-RBCWL 2-C4*** respectivement. Puis, l'utilisation des coefficients NC3 et NC4 va créer respectivement les formulations, ***Perturbation-RBCWL 2-NC3*** et ***Perturbation-RBCWL 2-NC4***.

Finalement, nous proposons de perturber la fonction objectif de la proposition RBCWL 5 avec la contrainte lexico-ref 3 (4.52). Cela va créer les propositions ***Perturbation-RBCWL 5-C3*** et ***Perturbation-RBCWL 5-C4*** pour les coefficients compatibles C3 et C4 respectivement. Les formulations non-compatibles seront appelés, ***Perturbation-RBCWL 5-NC3*** et ***Perturbation-RBCWL 5-NC4***.

La fonction objectif perturbée pour ces dernières propositions sera :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m (y_i) \mu_0 + \sum_{i=1}^m \left(\mu_i \sum_{l=1}^t (n/m)^{t-l} v_{il} \right) \quad (4.74)$$

4.15 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons modélisé une série de formulations de bris de symétrie pour le problème BCWL issues des approches de reformulation et d'ajout de nouvelles contraintes. Le but est de réduire le temps de calcul de la solution optimale. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les résultats obtenus de l'application de ces formulations.

Nous concluons ce chapitre en présentant dans le tableau 4.3 un répertoire de toutes les formulations proposées. Ensuite, le tableau 4.4 décrit la composition des propositions de bris de symétrie développées dans ce chapitre.

Tableau 4.3 - Sommaire des formulations

Nom de la formulation	Formulation	Identification
BCW	$\text{Min} \sum_{i=1}^m \left \sum_{j=1}^n x_{ij} w_j - \bar{w} \right \quad (4.1)$	
	Sujet à :	
	$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (4.2)$	
	$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \frac{n}{m} \quad \forall i \in I \quad (4.3)$	
	$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, \forall i \in I \quad (4.4)$	
BCWL	$\text{Min} \sum_{i=1}^m y_i \quad (4.5)$	
	Sujet à :	
	$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (4.6)$	
	$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \frac{n}{m} \quad \forall i \in I \quad (4.7)$	
	$y_i \geq \sum_{j=1}^n x_{ij} w_j - \bar{w} \quad \forall i \in I \quad (4.8)$	
	$y_i \geq \bar{w} - \sum_{j=1}^n x_{ij} w_j \quad \forall i \in I \quad (4.9)$	
	$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, \forall i \in I \quad (4.10)$	
Hiéarchique 1	$\sum_{i=1}^m i x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m i x_{ij_2}, \forall j (j_1, j_2): j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2} \quad (4.11)$	
Hiéarchique 1.1	$\sum_{i=1}^m i^2 x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m i^2 x_{ij_2}, \forall j (j_1, j_2): j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2} \quad (4.14)$	
Hiéarchique 1.2	$\sum_{i=1}^m (n-i)^2 x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m (n-i)^2 x_{ij_2}, \forall j (j_1, j_2): j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2} \quad (4.15)$	
Hiéarchique 1.3	$\sum_{i=1}^m \left(\binom{n}{m} - i \right)^2 x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m \left(\binom{n}{m} - i \right)^2 x_{ij_2}, \forall j (j_1, j_2): j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2} \quad (4.18)$	

Nom de la formulation	Formulation	Identification
Hiérarchique 1.4	$\sum_{i=1}^m (m-i)^2 x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m (m-i)^2 x_{ij_2} \quad \forall j (j_1, j_2) :$ $j_1 < j_2 \text{ et } w_{j_1} = w_{j_2}$	(4.19)
Hiérarchique 2	$\sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n w_j x_{i+1,j} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1$	(4.24)
Hiérarchique 2.1	$\sum_{j=1}^n j x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n j x_{i+1,j} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1$	(4.26)
Hiérarchique 2.2	$\sum_{j=1}^n j w_j x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n j w_j x_{i+1,j} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1$	(4.27)
Hiérarchique 2.3	$\sum_{j=1}^n (m-j)^2 x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n (m-j)^2 x_{i+1,j} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1$	(4.28)
Hiérarchique 2.4	$\sum_{j=1}^n 2^{(m-j)} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n 2^{(m-j)} x_{i+1,j} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1$	(4.31)
Hiérarchique 2.5	$\sum_{j=1}^n (n-j)^{(2)} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n (n-j)^{(2)} x_{i+1,j} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1$	(4.34)
Lexicographique 1.2	$\sum_{i=1}^m 2^{(m-i)} x_{ij_1} \leq \sum_{i=1}^m 2^{(m-i)} x_{ij_2} \quad , \quad \forall j (j_1, j_2) : j_1 < j_2 \text{ et}$ $w_{j_1} = w_{j_2}$	(4.35)
Lexicographique 2.2	$\sum_{j=1}^n 2^{(n-j)} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n 2^{(n-j)} x_{i+1,j} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1$	(4.38)
Réduction 1	$\sum_{i=1}^{\min(j,m)} x_{ij} = 1 \quad , \quad \forall j \in J$	(4.41)

Nom de la formulation	Formulation	Identification
RBCWL	$\text{Min } \sum_{i=1}^m y_i \quad (4.42)$	(4.42)
	Sujet à :	
	$\sum_{l=1}^m v_{il} = Q_l \quad \forall l \in L \quad (4.43)$	(4.43)
	$\sum_{l=1}^t v_{il} = n/m \quad \forall i \in I \quad (4.44)$	(4.44)
	$y_i \geq \sum_{l=1}^t v_{il} w_l - \bar{w} \quad \forall i \in I \quad (4.45)$	(4.45)
	$y_i \geq \bar{w} - \sum_{l=1}^t v_{il} w_l \quad \forall i \in I \quad (4.46)$	(4.46)
	$x_{il} \geq 0 \text{ et entier } \quad \forall l \in L, \forall i \in I \quad (4.47)$	(4.47)
Hiéarchique-ref	$\sum_{l=1}^t w_l v_{il} \leq \sum_{l=1}^t w_l v_{i+1,l} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.48)$	(4.48)
Hiéarchique-ref 1	$\sum_{l=1}^t l^2 v_{il} \leq \sum_{l=1}^t l^2 v_{i+1,l} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.49)$	(4.49)
Lexico-ref 1	$\sum_{l=1}^t 2^{(m-l)} v_{il} \leq \sum_{l=1}^t 2^{(m-l)} v_{i+1,l} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.50)$	(4.50)
Hiéarchique-ref 2	$\sum_{l=1}^t (t-l)^2 v_{il} \leq \sum_{l=1}^t (t-l)^2 v_{i+1,l} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.51)$	(4.51)
Lexico-ref 3	$\sum_{l=1}^t (n/m)^{t-l} v_{il} \leq \sum_{l=1}^t (n/m)^{t-l} v_{i+1,l} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.52)$	(4.52)
Lexico-ref 4	$\sum_{l=1}^t (10m)^{t-l} v_{il} \leq \sum_{l=1}^t (10m)^{t-l} v_{i+1,l} \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \quad (4.53)$	(4.53)

Nom de la formulation	Formulation	Identification	
ARF	$\text{Min } \sum_{h=1}^n y_h$	(4.54)	
	Sujet à :		
	$\sum_{h=1}^j z_{jh} = 1 \quad \forall j \in J$	(4.55)	
	$\sum_{j=1}^n z_{jh} = \left(\frac{n}{m}\right) z_{hh} \quad \forall h \in H$	(4.56)	
	$\sum_{j=1}^n z_{hh} = m \quad \forall h \in H$	(4.57)	
	$y_h \geq \sum_{j=h}^n z_{jh} w_j - \bar{w} z_{hh} \quad \forall h \in H$	(4.58)	
	$y_h \geq \bar{w} z_{hh} - \sum_{j=1}^n z_{jh} w_j \quad \forall h \in H$	(4.59)	
	$z_{jh} \leq z_{hh} \quad \forall j \in J, \forall h \in H \mid j \geq h$	(4.60)	
	$z_{jh} \geq 0 \text{ et entier } \forall j \in J, \forall h \in H \mid j \geq h$	(4.61)	

Tableau 4.4 - Sommaire des combinaisons de formulations de bris de symétrie

Nom de la proposition de bris de symétrie	Composition de la Formulation	Identification
BCWL-hiérarchique 1	BCWL Hiérarchique 1	(4.5) à (4.10) (4.11)
BCWL-hiérarchique 1.1	BCWL Hiérarchique 1.1	(4.5) à (4.10) (4.14)
BCWL- hiérarchique 1.2	BCWL hiérarchique 1.2	(4.5) à (4.10) (4.15)
BCWL- hiérarchique 1.3	BCWL Hiérarchique 1.3	(4.5) à (4.10) (4.18)
BCWL- hiérarchique 1.4	BCWL Hiérarchique 1.4	(4.5) à (4.10) (4.19)
BCWL-hiérarchique 2	BCWL Hiérarchique 2	(4.5) à (4.10) (4.24)
BCWL-hiérarchique 2.1	BCWL Hiérarchique 2.1	(4.5) à (4.10) (4.26)
BCWL-hiérarchique 2.2	BCWL Hiérarchique 2.2	(4.5) à (4.10) (4.27)
BCWL- lexico1.2	BCWL Lexicographique 1.2	(4.5) à (4.10) (4.35)
BCWL-hiérarchique- BW 1	BCWL Hiérarchique 1 Hiérarchique 2	(4.5) à (4.10) (4.11) (4.24)
BCWL-hiérarchique- BW 1.1	BCWL Hiérarchique 1.1 Hiérarchique 2	(4.5) à (4.10) (4.14) (4.24)
BCWL-hiérarchique- BW5	BCWL Hiérarchique 1.4 Hiérarchique 2.4	(4.5) à (4.10) (4.19) (4.31)
BCWL-lexico-BW 1	BCWL Lexicographique 1.2 Hiérarchique 2	(4.5) à (4.10) (4.35) (4.24)
BCWL-lexico-BW 2	BCWL Lexicographique 1.2 Hiérarchique 2.4	(4.5) à (4.10) (4.35) (4.31)
BCWL-lexico-BW 3	BCWL Lexicographique 1.2 Hiérarchique 2.5	(4.5) à (4.10) (4.35) (4.34)
BCWL-lexico- BW 2.2- 40	BCWL Lexicographique 1.2 Lexicographique 2.2 (n = 40)	(4.5) à (4.10) (4.35) (4.38)
BCWL-RV 1	BCWL sans (4.6) réduction 1	(4.5) / (4.7) à (4.10) (4.41)
BCWL-RV 2	BCWL sans (4.6) réduction 1 lexicographique 1.2	(4.5) / (4.7) à (4.10) (4.41) (4.35)

Nom de la proposition de bris de symétrie	Composition de la Formulation	Identification
BCWL-RV 4	BCWL sans (4.6) réduction 1 hiérarchique 1.1	(4.5) / (4.7) à (4.10) (4.41) (4.14)
BCWL-RV 5	BCWL sans (4.6) réduction 1 hiérarchique 1	(4.5) / (4.7) à (4.10) (4.41) (4.11)
RBCWL	Reformulation de BCWL	(4.42) à (4.47)
RBCWL 2	RBCWL hiérarchique-ref	(4.42) à (4.47) (4.48)
RBCWL 2.1	RBCWL hiérarchique-ref 1	(4.42) à (4.47) (4.49)
RBCWL 3	RBCWL lexico-ref 1	(4.42) à (4.47) (4.50)
RBCWL 4	RBCWL hiérarchique-ref 2	(4.42) à (4.47) (4.51)
RBCWL 5	RBCWL lexico-ref 3	(4.42) à (4.47) (4.52)
RBCWL 6	RBCWL lexico-ref 4	(4.42) à (4.47) (4.53)
ARF	La formulation des représentants asymétriques	(4.54) à (4.61)
Perturbation- hiérarchique 1.1 (C1, C2, NC1, NC2)	BCWL-hiérarchique 1.1 perturbée avec hiérarchique 1.1	(4.66)
Perturbation- hiérarchique 1.4 (C1, C2, NC1, NC2)	BCWL- hiérarchique 1.4 perturbée avec hiérarchique 1.4	(4.67)
Perturbation- lexico 1.2 (C1, C2, NC1, NC2)	BCWL- lexico 1.2 perturbée avec lexicographique 1.2	(4.68)
Perturbation-BCWL- lexico-BW 2 (C1, C2, NC1, NC2)	BCWL-lexico-BW 2 perturbée avec lexicographique 1.2	(4.68)
Perturbation-BCWL-RV 4 (C1, C2, NC1, NC2)	BCWL-RV 4 perturbée avec hiérarchique 1.1	(4.66)
Perturbation-RBCWL 2 (C3, C4, NC3, NC4)	RBCWL 2 : F.O. perturbée avec hiérarchique-ref	(4.73)
Perturbation-RBCWL 5 (C3, C4, NC3, NC4)	RBCWL 2 : F.O. perturbée avec hiérarchique-ref 3	(4.74)

Chapitre 5 - Présentation des résultats

Ce chapitre expose les résultats obtenus de la résolution du problème de balancement de la charge de wagons. Dans un premier temps, nous allons comparer les performances des formulations de bris de symétrie développées dans le chapitre précédent. Ensuite, nous allons présenter les résultats des expérimentations visant à déterminer si l'ordonnancement des données exerce un impact sur les valeurs relaxées et sur le temps de calcul optimal.

Au total 67 différentes formulations ont été testées sur 120 instances de données divisées en 6 groupes formées de la façon suivante :

Tableau 5.1 - Composition de groupes de données à tester

Groupe de données	(Nombre de wagons; Nombre de boîtes)
1-20	(4;40)
21-40	(5;50)
41-60	(5;60)
61-80	(6;60)
81-100	(5;80)
100-120	(4;100)

Le tableau 5.1 indique que pour chacune des 20 premières instances 40 boîtes doivent être allouées dans 4 wagons. Ensuite, pour les instances du deuxième groupe (21-40) 50 boîtes seront allouées dans 5 wagons, pour le troisième groupe (41-60) 60 boîtes seront affectées dans 5 wagons, et ainsi de suite jusqu'au dernier groupe (81-100) qui demande de traiter 100 boîtes et 4 wagons.

De plus, les boîtes à traiter possèdent des poids générés aléatoirement à partir de chiffres : 15, 27, 30 et 35. Ainsi, dans chaque instance, il existe un certain nombre de boîtes pour chaque poids. Il faut rappeler que ces données ont été générées et rendues publiques par Ghoniem et Sherali (2011).

Le logiciel d'optimisation CPLEX 12.6 avec le paramètre de bris de symétrie de -1 (prédéterminé par le logiciel) est utilisé pour nos expérimentations. De plus, nous imposons un temps maximal de résolution de 1800 secondes par instance. Toutefois, les résultats seront présentés en millisecondes (1 seconde équivaut à 1000 millisecondes). Enfin, nous utilisons un serveur Intel Xeon X5667 de 3.07 GHz et 12 GB de RAM pour nos calculs.

5.1 Résolution du problème de balancement de la charge de wagon (BCWL)

Le but de cette section est de déterminer dans quelle mesure les propositions de bris de symétrie développées dans le chapitre précédent parviennent à réduire le temps de calcul optimal ainsi que le nombre de nœuds de l'algorithme SÉP.

5.1.1 Résultats de la formulation symétrique

D'abord, nous soulignons que les 120 instances ont été résolues à l'optimum pour la formulation symétrique BCWL. Nous présentons les résultats obtenus dans le tableau 5.2.

Tableau 5.2 - Résultats de la formulation symétrique

BCWL	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP
1-20 (4;40)	1 147	18 552	0,70	2,13
21-40 (5;50)	4 439	101 236	0,10	2,54
41-60 (5;60)	15 171	392 210	0,00	2,26
61-80 (6;60)	16 820	396 687	0,00	2,53
81-100 (5;80)	111 122	2 625 151	0,00	2,12
101-120 (4;100)	166 386	3 953 540	0,00	1,53
	52 514	1 247 896	0,13	2,18

Le tableau 5.2 permet d'abord d'observer qu'en moyenne chaque instance est résolue en 52 514 millisecondes ou presque 52.5 secondes. De plus, le nombre moyen de nœuds explorés par l'algorithme SÉP est de 1 247 896 pour une instance. Nous observons aussi que les valeurs moyennes de la relaxation linéaire sont plutôt faibles pour presque toutes les instances.

Ensuite, nous pouvons remarquer que le temps de calcul et le nombre de nœuds s'accroissent énormément en fonction de l'augmentation du nombre de boîtes à traiter. En effet, si nous comparons les instances (21-40) ayant 50 boîtes et 5 wagons avec les instances du groupe (81-100) ayant 80 boîtes et le même nombre de wagons, nous pouvons constater qu'une augmentation de 60% dans le nombre de boîtes (de 50 à 80 boîtes) fait passer en moyenne le temps de calcul de 4 439 à 111 122 millisecondes. C'est-à-dire, une augmentation de presque 2 403%.

La même tendance est observée pour le nombre de nœuds. Par exemple, si nous comparons les instances (1-20) avec les instances (101-120), nous constatons que lorsque le nombre de boîtes augmente de 150% (de 40 à 100 boîtes), le nombre de nœuds passe en moyen de 18 552 à 3 953 540. C'est-à-dire que les nœuds ont augmenté de presque 21 211%.

Toutefois, nous observons qu'une augmentation du nombre de wagons identiques produit des augmentations moins élevées que celles pour les boîtes identiques. Par exemple, pour les groupes d'instances (41-60) et (61-80) où 60 boîtes seront allouées, l'augmentation de 20% du nombre de wagons (pour passer de 5 à 6), produit une augmentation moyenne du temps de calcul et du nombre de nœuds de 11% et 1% respectivement.

Ces observations nous permettent de vérifier que des accroissements relativement petits dans la taille des données produisent des énormes accroissements du temps de résolution et du nombre de nœuds pour BCWL. Cet effet s'explique en grande partie par le fait que plusieurs boîtes ont des poids identiques. Ces boîtes identiques génèrent des nœuds dupliqués ou équivalents au niveau de

l'arborescence du SÉP. L'exploration de ces nœuds dupliqués augmente le temps de calcul de la solution optimale.

En outre, rappelons que pour nos calculs nous utilisons le paramètre de bris de symétrie -1 de CPLEX qui indique qu'un niveau de bris de symétrie sera appliqué automatiquement par le logiciel, selon l'estimation de celui-ci (la méthode de bris de symétrie utilisée par le logiciel CPLEX n'est pas connue). C'est-à-dire que les calculs du tableau 5.2 ont été soumis à un certain critère de bris de symétrie. Nous proposons d'observer dans le tableau 5.3 la résolution du problème BCWL avec le paramètre 0 de bris de symétrie (calculs effectués sur CPLEX 12.5). Dans ce cas, le logiciel n'utilise pas des méthodes de bris de symétrie.

Tableau 5.3 - Résultats de la formulation symétrique avec le paramètre de bris de symétrie égal à zéro

BCWL	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP
1-20 (4;40)	1 800 035	61 101 706	0,70	2,13
21-40 (5;50)	1 803 221	43 596 991	0,10	2,54
41-60 (5;60)	1 800 056	39 976 535	0,00	2,26
61-80 (6;60)	1 800 208	36 326 691	0,00	2,53
81-100 (5;80)	1 800 292	29 419 431	0,00	2,12
101-120 (4;100)	1 620 201	31 378 486	0,00	1,53
	1 770 669	40 299 973	0,13	2,18

Nous remarquons que la résolution de BCWL avec le paramètre 0 de CPLEX utilise presque tout le temps maximal imposé de 1 800 secondes pour chaque instance. Si nous comparons ces résultats avec ceux du tableau 5.2 qui indiquent qu'une instance est résolue en seulement 52 514 millisecondes, nous pouvons constater les bénéfices que le logiciel CPLEX offre pour la résolution des problèmes symétriques.

Toutefois dans ce mémoire nous avons développé une série de formulations de bris de symétrie visant à améliorer les résultats du tableau 5.2. Ainsi, dans les lignes qui suivent nous présentons les résultats de nos expérimentations qui seront comparés avec les résultats du tableau 5.2 pour déterminer les pourcentages de

variation du temps moyen de calcul et du nombre moyen de nœuds pour chaque groupe d'instances ainsi que pour toutes les instances.

5.1.2 Résultats des contraintes hiérarchiques concernant les boîtes identiques

Nous avons modélisé 5 contraintes hiérarchiques pour contrer la symétrie entre les boîtes identiques. Ces contraintes ont été ajoutées dans la formulation symétrique BCWL, le tableau 5.4 montre les résultats obtenus.

Tableau 5.4 - Résultats des contraintes hiérarchiques concernant les boîtes identiques

BCWL-hiérarchique 1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	1 241	8 373	0,70	2,13	8%	-55%
21-40 (5;50)	7 088	33 002	0,10	2,54	60%	-67%
41-60 (5;60)	19 139	77 162	0,00	2,26	26%	-80%
61-80 (6;60)	45 044	138 824	0,00	2,53	168%	-65%
81-100 (5;80)	152 658	422 050	0,00	2,12	37%	-84%
101-120 (4;100)	111 105	311 716	0,00	1,53	-33%	-92%
	56 046	165 188	0,13	2,18	7%	-87%
BCWL-hiérarchique						
1.1						
1-20 (4;40)	886	6 890	0,70	2,13	-23%	-63%
21-40 (5;50)	6 673	31 810	0,10	2,54	50%	-69%
41-60 (5;60)	15 379	65 273	0,00	2,26	1%	-83%
61-80 (6;60)	35 032	108 950	0,00	2,53	108%	-73%
81-100 (5;80)	73 759	222 414	0,00	2,12	-34%	-92%
101-120 (4;100)	88 887	269 138	0,00	1,53	-47%	-93%
	36 769	117 413	0,13	2,18	-30%	-91%
BCWL-hiérarchique						
1.2						
1-20 (4;40)	938	6 272	0,70	2,13	-18%	-66%
21-40 (5;50)	4 342	19 079	0,10	2,54	-2%	-81%
41-60 (5;60)	10 254	42 885	0,00	2,26	-32%	-89%
61-80 (6;60)	26 265	83 149	0,00	2,53	56%	-79%
81-100 (5;80)	67 435	209 443	0,00	2,12	-39%	-92%
101-120 (4;100)	55 012	159 056	0,00	1,53	-67%	-96%
	27 374	86 647	0,13	2,18	-48%	-93%

BCWL-hiérarchique

1.3

1-20 (4;40)	864	5 946	0,70	2,13	-25%	-68%
21-40 (5;50)	4 542	17 733	0,10	2,54	2%	-82%
41-60 (5;60)	10 203	39 823	0,00	2,26	-33%	-90%
61-80 (6;60)	24 384	79 613	0,00	2,53	45%	-80%
81-100 (5;80)	38 456	117 514	0,00	2,12	-65%	-96%
101-120 (4;100)	58 578	165 320	0,00	1,53	-65%	-96%
	22 838	70 991	0,13	2,18	-57%	-94%

BCWL-hiérarchique

1.4

1-20 (4;40)	800	6 055	0,70	2,13	-30%	-67%
21-40 (5;50)	3 888	18 471	0,10	2,54	-12%	-82%
41-60 (5;60)	8 161	32 624	0,00	2,26	-46%	-92%
61-80 (6;60)	17 609	59 678	0,00	2,53	5%	-85%
81-100 (5;80)	39 057	127 124	0,00	2,12	-65%	-95%
101-120 (4;100)	47 710	147 433	0,00	1,53	-71%	-96%
	19 537	65 231	0,13	2,18	-63%	-95%

Le tableau 5.4 démontre que la plupart des contraintes hiérarchiques parviennent à réduire le temps de calcul de la formulation symétrique BCWL. En effet, nous constatons d'abord que seulement la contrainte hiérarchique 1 (proposition BCWL-hiérarchique 1) accroît le temps de calcul moyen de 7% même si le nombre de nœuds se réduit de façon significative (87% en moyenne).

Ensuite, nous constatons que l'inclusion de la contrainte hiérarchique 1.1 dans la formulation BCWL (proposition BCWL-hiérarchique 1.1) permet d'améliorer en moyenne de 30% le temps de calcul par rapport à la formulation BCWL. Rappelons que cette contrainte fonctionne sous la même logique de bris de symétrie que la contrainte hiérarchique 1, la seule différence correspond au calcul du coefficient. La contrainte hiérarchique 1 utilise le coefficient i , tandis que la contrainte hiérarchique 1.1 utilise le coefficient i^2 . Ce changement qui semble être un peu artificiel produit une amélioration de la performance de BCWL de l'ordre de plus de 30% pour nos expérimentations.

En ce qui concerne les propositions BCWL-hiérarchique 1.2 et BCWL-hiérarchique 1.3, elles réduisent le temps moyen de calcul de 48% et de 57% respectivement. Nous observons aussi que ces deux contraintes réduisent

considérablement le nombre moyen de nœuds à explorer par l'algorithme SÉP (93% et 94% respectivement).

De plus, le tableau 5.4 confirme que la proposition BCWL-hiérarchique 1.4 possède la plus haute performance en réduisant les valeurs moyennes du temps de calcul et du nombre de nœuds de 63% et 95% respectivement.

Quant aux valeurs relaxées, nous observons que les 5 propositions hiérarchiques calculent les mêmes valeurs moyennes pour chaque instance. De plus, ces valeurs relaxées sont les mêmes que celles calculées dans le tableau 5.2.

Il est important de noter que les contraintes possédant les plus hautes performances possèdent des séries décroissantes de coefficients (BCWL-hiérarchique 1.2 et BCWL- hiérarchique 1.3 et BCWL- hiérarchique 1.4), tandis que les contraintes moins performantes possèdent des séries croissantes pour leurs coefficients. Cette tendance pourrait avoir un lien avec le concept de compatibilité de Ghoniem et Sherali (2011). Ce concept, appliqué sous la technique de perturbation de la fonction objectif, indique que l'imposition d'une pondération croissante aux termes d'une contrainte de bris de symétrie de type \leq (le cas de BCWL), peut permettre des améliorations dans le temps de calcul optimal.

Plus tard dans ce chapitre nous allons appliquer la technique de perturbation de la fonction objectif au problème BCWL afin de confirmer les bénéfices du concept de compatibilité.

5.1.3 Résultats des contraintes hiérarchiques concernant les wagons identiques

Quatre contraintes hiérarchiques visant à supprimer la symétrie existant entre les wagons identiques ont été testées. Le tableau 5.5 montre les résultats obtenus.

Tableau 5.5 - Résultats des contraintes hiérarchiques concernant les wagons identiques

BCWL-hiérarchique 2	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	1 568	17 249	0,70	2,13	37%	-7%
21-40 (5;50)	7 193	97 140	0,10	2,54	62%	-4%
41-60 (5;60)	25 618	324 577	0,00	2,26	69%	-17%
61-80 (6;60)	29 759	335 031	0,00	2,53	77%	-16%
81-100 (5;80)	137 678	1 285 157	0,00	2,12	24%	-51%
101-120 (4;100)	240 832	1 808 664	0,00	1,53	45%	-54%
	73 775	644 636	0,13	2,18	40%	-48%
BCWL-hiérarchique 2.1						
1-20 (4;40)	1 800 084	50 212 708	0,70	2,13	156 804%	270 564%
21-40 (5;50)	1 800 407	34 465 527	0,10	2,54	40 460%	33 945%
41-60 (5;60)	1 800 302	32 011 412	0,00	2,26	11 767%	8 062%
61-80 (6;60)	1 800 424	29 818 516	0,00	2,53	10 604%	7 417%
81-100 (5;80)	1 800 341	26 332 136	0,00	2,12	1 520%	903%
101-120 (4;100)	1 620 334	24 754 162	0,00	1,53	874%	526%
	1 770 316	32 932 410	0,13	2,18	3 271%	2 539%
BCWL-hiérarchique 2.2						
1-20 (4;40)	1 800 116	55 473 029	0,70	2,13	156 807%	298 919%
21-40 (5;50)	1 800 267	36 941 860	0,10	2,54	40 457%	36 391%
41-60 (5;60)	1 800 209	34 929 679	0,00	2,26	11 766%	8 806%
61-80 (6;60)	1 800 348	30 997 499	0,00	2,53	10 604%	7 714%
81-100 (5;80)	1 800 367	27 991 333	0,00	2,12	1 520%	966%
101-120 (4;100)	1 620 264	27 809 289	0,00	1,53	874%	603%
	1 770 262	35 690 448	0,13	2,18	3 271%	2 760%
BCWL-hiérarchique 2.4						
1-20 (4;40)	1 800 072	58 144 433	0,70	2,13	156 803%	313 319%
21-40 (5;50)	1 800 387	43 184 579	0,10	2,54	40 459%	42 557%
41-60 (5;60)	1 800 223	39 560 994	0,00	2,26	11 766%	9 987%
61-80 (6;60)	1 800 205	37 660 350	0,00	2,53	10 603%	9 394%
81-100 (5;80)	1 800 277	34 496 364	0,00	2,12	1 520%	1 214%
101-120 (4;100)	1 620 211	33 241 857	0,00	1,53	874%	741%
	1 770 262	35 690 448	0,13	2,18	3 271%	3 189%

Nous observons dans le tableau 5.5 que toutes les contraintes hiérarchiques concernant les wagons identiques que nous avons testées ne parviennent pas à améliorer la performance de la formulation symétrique. Au contraire, ces formulations produisent un ralentissement dans le processus de calcul de la solution optimale pour toutes les instances.

Cette difficulté de résolution a été déjà observée par Ghoniem et Sherali (2011) qui précisent que l'inclusion des contraintes hiérarchique 2, hiérarchique 2.1 et hiérarchique 2.2 dans la formulation BCWL, ne permet pas d'améliorer le temps de résolution.

De plus, nous constatons un énorme écart entre le temps de calcul demandé par hiérarchique 2 (BCWL-hiérarchique 2) et les trois autres contraintes. En effet, cette contrainte augmente de presque 40% le temps de calcul. Par contre, les contraintes hiérarchique 2.1 (BCWL-hiérarchique 2.1), hiérarchique 2.2 (BCWL-hiérarchique 2.2) et hiérarchique 2.4 (BCWL-hiérarchique 2.4), font accroître le temps de calcul de presque 3 271%.

En somme, nous constatons que l'inclusion des contraintes hiérarchiques pour briser uniquement la symétrie entre les wagons alourdit extrêmement le processus de calcul de la solution optimale. Une explication possible à cette difficulté pourrait être le haut niveau de symétrie existant encore dans le problème en raison des boîtes identiques.

5.1.4 Résultats de la contrainte lexicographique concernant les boîtes identiques

Le tableau 5.6 montre les résultats obtenus de l'inclusion de la contrainte lexicographique 1.2 dans la formulation BCWL pour contrer la symétrie entre les boîtes identiques.

Tableau 5.6 - Résultats de la contrainte lexicographique concernant les boîtes identiques

BCWL-lexico 1.2	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	702	5 965	0,70	2,13	-39%	-68%
21-40 (5;50)	3 975	17 286	0,10	2,54	-10%	-83%
41-60 (5;60)	7 798	32 571	0,00	2,26	-49%	-92%
61-80 (6;60)	16 571	58 318	0,00	2,53	-1%	-85%
81-100 (5;80)	32 953	108 964	0,00	2,12	-70%	-96%
101-120 (4;100)	42 800	134 467	0,00	1,53	-74%	-97%
	17 466	59 595	0,13	2,18	-67%	-95%

La contrainte lexicographique 1.2 (BCWL-lexico 1.2) permet une réduction moyenne de 67% du temps de calcul. Nous pouvons remarquer que cette réduction représente la plus élevée parmi les contraintes visant à réduire la symétrie entre les boîtes identiques.

Cette contrainte calcule une série décroissante de coefficients qui suivent une règle lexicographique (section 4.6). Ceci assure d'assigner des attributs uniques aux boîtes identiques. Encore une fois, nous observons les bénéfices de l'utilisation de coefficients décroissants pour réduire le temps de calcul de BCWL.

Enfin, notons que les valeurs relaxées n'ont pas suivi des variations après l'inclusion de la contrainte lexicographique 1.2.

5.1.5 Résultats du bris simultané de la symétrie entre les boîtes et les wagons identiques

Dans cette sous-section, nous allons présenter d'abord les résultats obtenus de la combinaison de deux contraintes hiérarchiques pour les boîtes et les wagons identiques. Ensuite, nous exposons les résultats de la combinaison de la contrainte lexicographique 1.2 avec des contraintes pour les wagons identiques.

Le tableau 5.7 présente les résultats des premières combinaisons.

Tableau 5.7 - Résultats des combinaisons de deux contraintes hiérarchiques pour les boîtes et les wagons identiques

BCWL-hiérarchique- BW 1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	1 193	4 760	0,70	2,13	4%	-74%
21-40 (5;50)	5 957	14 337	0,10	2,54	34%	-86%
41-60 (5;60)	10 700	21 280	0,00	2,26	-29%	-95%
61-80 (6;60)	32 393	46 334	0,00	2,53	93%	-88%
81-100 (5;80)	84 796	101 922	0,00	2,12	-24%	-96%
101-120 (4;100)	60 067	80 636	0,00	1,53	-64%	-98%
	32 518	44 878	0,13	2,18	-38%	-96%
BCWL-hiérarchique- BW 1.1						
1-20 (4;40)	1 134	4 515	0,700	2,125	-1%	-76%
21-40 (5;50)	5 381	12 386	0,100	2,540	21%	-88%
41-60 (5;60)	8 893	18 091	0,000	2,260	-41%	-95%
61-80 (6;60)	18 081	23 598	0,000	2,533	7%	-94%
81-100 (5;80)	39 711	53 119	0,000	2,120	-64%	-98%
101-120 (4;100)	72 349	105 786	0,000	1,525	-57%	-97%
	24 258	36 249	0,13	2,18	-54%	-97%
BCWL-hiérarchique- BW 5						
1-20 (4;40)	591	4 568	0,70	2,13	-48%	-75%
21-40 (5;50)	3 815	14 616	0,10	2,54	-14%	-86%
41-60 (5;60)	7 396	24 590	0,00	2,26	-51%	-94%
61-80 (6;60)	17 683	43 694	0,00	2,53	5%	-89%
81-100 (5;80)	40 572	115 170	0,00	2,12	-63%	-96%
101-120 (4;100)	35 464	101 066	0,00	1,53	-79%	-97%
	17 587	50 617	0,13	2,18	-67%	-96%

Le tableau 5.7 démontre que l'utilisation combinée de deux contraintes hiérarchiques peut réduire le temps de calcul de presque 67%. En effet, la proposition BCWL-hiérarchique-BW 5 où les contraintes hiérarchique 1.4 et hiérarchique 2.4 ont été ajoutées dans BCWL fait passer le temps moyen de calcul de 52 514 millisecondes à 17 587 millisecondes. Ces résultats sont supérieurs aux résultats obtenus dans le tableau 5.4 pour l'utilisation de seulement une contrainte hiérarchique pour les boîtes identiques (maximum 63% de réduction moyenne).

De plus, nous pouvons souligner que les formulations ayant des coefficients croissants, soit BCWL-hiérarchique-BW 1 (hiérarchique 1) et BCWL-

hiérarchique-BW 1.1 (hiérarchique 1.1) possèdent les plus basses performances (38% et 54% respectivement).

En revanche, la formulation BCWL-hiérarchique-BW 5 parvenant à réduire de 67% le temps de calcul, contient deux contraintes ayant des coefficients décroissants. Encore une fois nous observons que pour la résolution du problème BCWL, l'inclusion des contraintes de bris de symétrie avec des coefficients décroissants semblent être le meilleur choix.

Ensuite, dans le tableau 5.8 nous présentons les performances des propositions contenant la contrainte lexicographique 1.2 avec des contraintes pour les wagons identiques.

Tableau 5.8 - Résultats de la combinaison de la contrainte lexicographique pour les boîtes identiques avec des contraintes pour les wagons identiques

BCWL-lexico-BW 1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	701	3 525	0,70	2,13	-39%	-81%
21-40 (5;50)	3 452	7 360	0,10	2,54	-22%	-93%
41-60 (5;60)	6 111	12 376	0,00	2,26	-60%	-97%
61-80 (6;60)	8 648	13 186	0,00	2,53	-49%	-97%
81-100 (5;80)	19 652	30 892	0,00	2,12	-82%	-99%
101-120 (4;100)	20 027	32 355	0,00	1,53	-88%	-99%
	9 765	16 616	0,13	2,18	-81%	-99%

BCWL-lexico-BW 2	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	576	4 427	0,70	2,13	-50%	-76%
21-40 (5;50)	3 605	14 423	0,10	2,54	-19%	-86%
41-60 (5;60)	7 802	29 624	0,00	2,26	-49%	-92%
61-80 (6;60)	13 496	38 861	0,00	2,53	-20%	-90%
81-100 (5;80)	36 195	105 231	0,00	2,12	-67%	-96%
101-120 (4;100)	42 965	129 732	0,00	1,53	-74%	-97%
	17 440	53 716	0,13	2,18	-67%	-96%

BCWL-lexico-BW 3	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	799	5 594	0,70	2,13	-30%	-70%
21-40 (5;50)	4 842	16 523	0,10	2,54	9%	-84%
41-60 (5;60)	7 401	22 799	0,00	2,26	-51%	-94%
61-80 (6;60)	24 808	69 326	0,00	2,53	47%	-83%
81-100 (5;80)	40 526	106 366	0,00	2,12	-64%	-96%
101-120 (4;100)	61 697	175 183	0,00	1,53	-63%	-96%
	23 345	65 965	0,13	2,18	-56%	-95%

BCWL-lexico-BW 2.2-40							
1-20 (4;40)	635	4 807	0,70	2,13	-45%	-74%	
21-40 (5;50)	3 687	15 163	0,10	2,54	-17%	-85%	
41-60 (5;60)	8 015	29 152	0,00	2,26	-47%	-93%	
61-80 (6;60)	12 767	35 924	0,00	2,53	-24%	-91%	
81-100 (5;80)	32 500	88 749	0,00	2,12	-71%	-97%	
101-120 (4;100)	39 318	106 070	0,00	1,53	-76%	-97%	
	16 154	46 644	0,13	2,18	-69%	-96%	

Le tableau 5.8 confirme la supériorité de la performance de la contrainte lexicographique 1.2 lorsqu'elle est utilisée avec la contrainte hiérarchique 2. En effet, la proposition BCWL-lexico-BW 1 combinant ces deux contraintes, parvient à réduire le temps moyen de calcul de 81%. Ce pourcentage représente la plus grande amélioration obtenue jusqu'à présent.

Nous pouvons aussi observer que les formulations BCWL-lexico-BW 2 et BCWL-lexico-BW 3 réduisent le temps de calcul de 67% et 56% respectivement. Toutefois, notons que ces réductions ne sont pas supérieures au 67% de réduction obtenue dans le tableau 5.6 pour la proposition BCWL-lexico 1.2 où seulement la contrainte lexicographique 1.2 est ajoutée dans la formulation BCWL.

C'est-à-dire que la combinaison de la contrainte lexicographique 1.2 avec la contrainte hiérarchique 2.4 (BCWL-lexico-BW 2) ou avec la contrainte hiérarchique 2.6 (BCWL-lexico-BW 3) ne constitue pas une vraie amélioration.

Nous avons aussi testé la performance de la combinaison de la contrainte lexicographique 1.2 avec la contrainte lexicographique 2.2 en fixant, pour cette contrainte, le nombre de boîtes à traiter par cette dernière en 40 ($n = 40$). Le tableau 5.8 démontre que cette combinaison permet en moyenne de réduire le temps de calcul de 69%. Cette réduction est légèrement plus grande que le 67% de réduction réussit par la contrainte lexicographique 1.2 ajoutée dans BCWL toute seule (tableau 5.6).

Les résultats obtenus dans les tableaux 5.8 mettent en évidence qu'uniquement la formulation BCWL-hiérarchique-BW 1 permet une amélioration considérable

dans le temps de calcul (en moyenne de 81%). Par contre, nous observons que l'utilisation de la contrainte lexicographique 1.2 avec d'autres contraintes pour les wagons identiques ne permet pas une vraie amélioration du temps de calcul.

5.1.6 Résultats des formulations de réduction de variables

Le principe de réduction de variables a aussi été testé pour les 120 instances du problème BCWL. Le tableau 5.9 montre les résultats obtenus.

Tableau 5.9 - Résultats de la réduction de variables

BCWL-RV 1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	1 870	34 782	0,70	2,13	63%	87%
21-40 (5;50)	13 074	386 579	0,10	2,54	195%	282%
41-60 (5;60)	45 989	1 313	0,00	2,26	203%	235%
61-80 (6;60)	155 159	4 089	0,00	2,53	822%	931%
81-100 (5;80)	465 384	11 792	0,00	2,12	319%	349%
101-120 (4;100)	313 345	8 118	0,00	1,53	88%	105%
	165 803	4 289	0,13	2,18	216%	244%

L'imposition du critère de réduction de variable BCWL-RV1 ne parvient pas à améliorer la performance de la formulation symétrique de base. Le tableau 5.9 indique que le temps de calcul s'accroît de 216 % et que le nombre de nœuds augmente de 244%.

Tel qu'indiqué dans la section 4.10, cette proposition était sensée d'alléger la résolution du problème en réduisant la symétrie entre les wagons identiques. Toutefois, nous constatons que son application au problème BCWL produit un effet inverse sur le temps de calcul de la solution optimale.

À ce niveau de notre analyse, nous pouvons remarquer le fait que les propositions visant uniquement à réduire la symétrie entre les wagons identiques semblent plutôt ralentir le processus de résolution de BCWL. Par exemple, nous avons observé dans le tableau 5.6 que les contraintes hiérarchiques 2.1, hiérarchiques 2.2 et hiérarchique 2.4 utilisent presque tout le temps maximal.

Cependant, dans nos expérimentations, nous avons aussi constaté que lorsque les contraintes pour briser la symétrie entre les wagons sont utilisées conjointement avec des contraintes pour traiter la symétrie entre les boîtes, la performance peut s’améliorer considérablement.

Dans les lignes suivantes, nous allons observer si cette tendance est aussi valable pour le critère de réduction de variables.

5.1.7 Résultats des améliorations apportées à la réduction de variables

Afin d’apporter des améliorations à la performance de la formulation BCWL-RV 1 nous avons proposé l’inclusion de certaines contraintes pour briser la symétrie entre les boîtes identiques.

Dans le tableau 5.10 nous présentons les résultats obtenus.

Tableau 5.10 - Résultats des améliorations apportées à la réduction de variables

BCWL-RV 2	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	1 878	34 782	0,70	2,13	64%	-100%
21-40 (5;50)	13 310	386 579	0,10	2,54	200%	-100%
41-60 (5;60)	46 065	1 313	0,00	2,26	204%	-100%
61-80 (6;60)	154 646	4 089	0,00	2,53	819%	-100%
81-100 (5;80)	463 382	11 706	0,00	2,12	317%	-100%
101-120 (4;100)	308 533	8 118	0,00	1,53	85%	-100%
	164 636	4 274	0,13	2,18	214%	-100%

BCWL-RV 4	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	695	5 777	0,70	2,13	-39%	-69%
21-40 (5;50)	5 325	25 547	0,10	2,54	20%	-75%
41-60 (5;60)	14 468	66 161	0,00	2,26	-5%	-83%
61-80 (6;60)	25 075	72 886	0,00	2,53	49%	-82%
81-100 (5;80)	67 398	199 517	0,00	2,12	-39%	-92%
101-120 (4;100)	92 192	284 735	0,00	1,53	-45%	-93%
	34 192	109 104	0,13	2,18	-35%	-91%

BCWL-RV 5

1-20 (4;40)	733	5 681	0,70	2,13	-36%	-69%
21-40 (5;50)	5 844	29 094	0,10	2,54	32%	-71%
41-60 (5;60)	14 152	55 351	0,00	2,26	-7%	-86%
61-80 (6;60)	28 408	93 357	0,00	2,53	69%	-76%
81-100 (5;80)	98 412	269 496	0,00	2,12	-11%	-90%
101-120 (4;100)	85 334	241 311	0,00	1,53	-49%	-94%
	38 814	115 715	0,13	2,18	-26%	-91%

Nous constatons dans le tableau 5.10 que l'ajout de certaines contraintes hiérarchiques de bris de symétrie entre les boîtes permet d'améliorer la performance de la proposition de réduction de variables BCWL-RV 1. En effet, nous observons que la formulation BCWL-RV 4 qui contient la contrainte hiérarchique 1.1 et la formulation BCWL-RV 5 contenant la contrainte hiérarchique 1.1 parviennent à réduire le temps de calcul optimal de presque 35% et 26% respectivement. Toutefois, si bien les performances de la formulation de réduction de variable s'améliorent après l'ajout de ces contraintes, en général, ces améliorations sont faibles en comparaison par exemple avec la formulation BCWL-lexico-BW 1 (81%).

La situation est plus compliquée lorsque la contrainte lexicographique 2.1 est ajoutée dans la formulation de réduction de variables (BCWL-RV 2). En effet, cette proposition accroît le temps de calcul de presque 214%. Il est surprenant de voir que ces résultats sont équivalents à ceux obtenus pour la formulation BCWL-RV 1. C'est-à-dire que l'inclusion de la contrainte lexicographique 1.2 alourdit la résolution de la formulation de réduction de variables.

5.1.8 Résultats de la reformulation

Dans le tableau 5.11 nous présentons les résultats obtenus pour la proposition de reformulation RBCWL.

Tableau 5.11 - Résultats de la reformulation (RBCWL)

RBCWL	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	65	489	0,60	2,13	-94,4%	-97,4%
21-40 (5;50)	83	1 190	0,12	2,54	-98,1%	-98,8%
41-60 (5;60)	116	2 929	0,00	2,26	-99,2%	-99,3%
61-80 (6;60)	120	3 619	0,00	2,53	-99,3%	-99,1%
81-100 (5;80)	228	8 432	0,08	2,12	-99,8%	-99,7%
101-120 (4;100)	344	9 208	0,10	1,53	-99,8%	-99,8%
	159	4 311	0,15	2,18	-99,7%	-99,7%

Le tableau 5.11 démontre que la proposition RBCWL réduit de façon importante le temps de calcul de la solution optimale. En effet, en moyenne le temps de calcul d'une instance passe de 52 514 millisecondes à 159 millisecondes, c'est-à-dire que la reformulation résout toutes les instances avec une vitesse moyenne de 320 fois plus grande que la formulation symétrique de base (tableau 5.2).

Le même effet est constaté pour le nombre de nœuds explorés par l'algorithme de résolution. Ceci passe en moyen de 1 247 896 pour la formulation symétrique BCWL à seulement 4 311 pour la reformulation. Cela représente une réduction approximative de 1 243 585 nœuds.

Enfin, quant aux valeurs de la relaxation linéaire, nous pouvons constater certaines améliorations. En effet, le premier groupe de données (1-20) a en moyenne une valeur relaxée plus faible que la formulation symétrique (0.6 contre 0.7), les instances (5;50), (5;80) et (4;100) démontrent une légère amélioration des valeurs relaxées pour RBCWL. Plus précisément, la valeur moyenne des valeurs relaxées passe de 0.13 à 0.15 pour la reformulation.

5.1.9 Résultats des améliorations apportées à la reformulation

Nous avons ajouté six différentes contraintes de bris de symétrie entre les wagons à la reformulation RBCWL. Le tableau 5.12 démontre les résultats obtenus.

Tableau 5.12 - Résultats de RBCWL augmenté avec des contraintes pour les wagons identiques

RBCWL 2	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	58	497	0,60	2,13	-94,9%	-97,3%
21-40 (5;50)	90	1 175	0,12	2,54	-98,0%	-98,8%
41-60 (5;60)	84	2 087	0,00	2,26	-99,4%	-99,5%
61-80 (6;60)	97	2 117	0,00	2,53	-99,4%	-99,5%
81-100 (5;80)	140	4 462	0,08	2,12	-99,9%	-99,8%
101-120 (4;100)	72	1 328	0,10	1,53	-100,0%	-100,0%
	90	1 944	0,15	2,18	-99,8%	-99,8%

RBCWL 2.1

1-20 (4;40)	66	392	0,60	2,13	-94,3%	-97,9%
21-40 (5;50)	69	812	0,12	2,54	-98,4%	-99,2%
41-60 (5;60)	95	1 202	0,00	2,26	-99,4%	-99,7%
61-80 (6;60)	100	1 863	0,00	2,53	-99,4%	-99,5%
81-100 (5;80)	100	2 860	0,08	2,12	-99,9%	-99,9%
101-120 (4;100)	146	3 976	0,10	1,53	-99,9%	-99,9%
	96	1 851	0,15	2,18	-99,8%	-99,9%

RBCWL 3

1-20 (4;40)	89	361	0,60	2,13	-92,3%	-98,1%
21-40 (5;50)	71	729	0,12	2,54	-98,4%	-99,3%
41-60 (5;60)	66	1 133	0,00	2,26	-99,6%	-99,7%
61-80 (6;60)	91	1 191	0,00	2,53	-99,5%	-99,7%
81-100 (5;80)	117	2 610	0,08	2,12	-99,9%	-99,9%
101-120 (4;100)	161	3 782	0,10	1,53	-99,9%	-99,9%
	99	1 634	0,15	2,18	-99,8%	-99,9%

RBCWL 4

1-20 (4;40)	66	355	0,60	2,13	-94,2%	-98,1%
21-40 (5;50)	75	838	0,12	2,54	-98,3%	-99,2%
41-60 (5;60)	80	1 268	0,00	2,26	-99,5%	-99,7%
61-80 (6;60)	91	1 705	0,00	2,53	-99,5%	-99,6%
81-100 (5;80)	120	2 831	0,08	2,12	-99,9%	-99,9%
101-120 (4;100)	123	3 840	0,10	1,53	-99,9%	-99,9%
	93	1 806	0,15	2,18	-99,8%	-99,9%

RBCWL 5

1-20 (4;40)	64	193	0,60	2,13	-94,4%	-99,0%
21-40 (5;50)	68	516	0,12	2,54	-98,5%	-99,5%
41-60 (5;60)	91	706	0,00	2,26	-99,4%	-99,8%
61-80 (6;60)	67	907	0,00	2,53	-99,6%	-99,8%
81-100 (5;80)	82	1 497	0,08	2,12	-99,9%	-99,9%
101-120 (4;100)	94	2 995	0,10	1,53	-99,9%	-99,9%
	78	1 136	0,15	2,18	-99,9%	-99,9%

RBCWL 6

1-20 (4;40)	70	232	0,60	2,13	-93,9%	-98,7%
21-40 (5;50)	61	409	0,12	2,54	-98,6%	-99,6%
41-60 (5;60)	84	665	0,00	2,26	-99,4%	-99,8%
61-80 (6;60)	67	678	0,00	2,53	-99,6%	-99,8%
81-100 (5;80)	73	1513	0,08	2,12	-99,9%	-99,9%
101-120 (4;100)	87	2521	0,10	1,53	-99,9%	-99,9%
	74	1003	0,15	2,18	-99,9%	-99,9%

Nous constatons dans le tableau 5.12 que l'inclusion de contraintes pour contrer la symétrie entre les wagons permet d'améliorer encore plus la performance de la reformulation RBCWL.

En effet, la proposition RBCWL 2 permet de résoudre une instance du problème en approximativement 90 millisecondes. De même, la proposition RBCWL 2.1 prend 96 millisecondes en moyenne pour résoudre une instance du RBCWL. De son côté, la proposition RBCWL 4 prend 93 millisecondes en moyenne pour la résolution du même problème.

Concernant ces deux dernières formulations, nous pouvons remarquer que la proposition RBCWL 2.1 possède une contrainte hiérarchique ayant des coefficients croissants (hiérarchique-ref 1), tandis que RBCWL 4 possède une contrainte hiérarchique formée par une série décroissante des coefficients (hiérarchique-ref 2). Encore une fois, nous constatons qu'une contrainte hiérarchique avec une série croissante de coefficients est moins performante qu'une contrainte avec des séries décroissantes, dans nos expérimentations.

En ce qui concerne les propositions RBCWL 3 et RBCWL 5 qui contiennent des contraintes d'ordonnement lexicographique, elles parviennent aussi à réduire considérablement le temps de calcul de la reformulation RBCWL.

Toutefois, nous devons remarquer que la formulation RBCWL 6 possède la plus haute performance dans toutes nos expérimentations. Cette proposition permet de résoudre une instance en 74 millisecondes en moyenne. Ceci représente une rapidité de presque 665 fois de plus que la formulation symétrique de base.

5.1.10 Résultats de la formulation de représentation asymétrique (ARF)

L'approche ARF vise à créer des groupes de boîtes qui seront identifiés par le plus petit indice de la boîte contenue dans le groupe. Le but est de briser la symétrie entre les wagons identiques.

Nous avons testé la performance de la reformulation ARF sur le problème BCWL, les résultats sont exposés dans le tableau 5.13.

Tableau 5.13 - Résultats de la formulation ARF

ARF	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	1 801 045	5 591 256	0,70	2,13	156 888%	30 039%
21-40 (5;50)	1 801 102	2 834 779	0,00	2,54	40 475%	2 700%
41-60 (5;60)	1 800 972	1 841 706	0,00	2,26	11 771%	370%
61-80 (6;60)	1 801 285	1 698 174	0,00	2,53	10 609%	328%
81-100 (5;80)	1 801 761	594 291	0,00	2,12	1 521%	-77%
101-120 (4;100)	1 621 390	494 078	0,00	1,53	874%	-88%
	1 771 259	2 175 714	0,12	2,18	3 273%	74%

L'application de l'approche ARF sur le problème BCWL ne permet pas d'améliorer le temps de calcul. Nous observons dans que cette proposition dépasse le temps maximal de 1800 secondes pour presque toutes les instances.

Rappelons que ce même effet est observé dans presque toutes les propositions visant uniquement de supprimer la symétrie entre les wagons identiques. Les résultats obtenus pour ARF confirment cette même tendance.

Il faut aussi remarquer que nous observons une variation dans la valeur de la relaxation linéaire. Nous pouvons constater que l'ARF possède une valeur relaxée approximative de 0.12, c'est-à-dire que cette formulation calcule une borne moins bonne que la formulation BCWL (0.13 en moyenne).

5.1.11 Résultats de la perturbation de la fonction objectif

Ghoniem et Sherali (2011) expliquent que l'approche de perturbation de la fonction objectif cherche à supprimer certains nœuds superflus dans l'arborescence de l'algorithme SÉP afin d'alléger le processus de résolution. Dans les lignes qui suivent, nous présentons les résultats obtenus pour les formulations perturbées que nous avons développés dans le chapitre précédent.

L'ordre dans lequel les résultats seront présentés est le suivant : (i) les résultats des formulations perturbées avec une contrainte hiérarchique, (ii) les résultats des formulations perturbées avec la contrainte lexicographique 2.1 (iii) les résultats des formulations perturbées pour les bris simultanés de la symétrie, (iv) les résultats des formulations perturbées pour la réduction de variables, (v) les résultats des formulations perturbées pour les reformulations.

De plus, nous avons testé nos formulations de perturbation en utilisant quatre paires de coefficients. D'abord, nous avons utilisé les coefficients compatibles 1 (C1) et les coefficients compatibles 2 (C2). Par la suite, nous avons utilisé les coefficients non-compatibles 1 (NC1) et les coefficients non-compatibles 2 (NC2).

En particulier, dans cette sous-section nous cherchons d'abord à comparer le temps de calcul et le nombre de nœuds des formulations perturbées avec ceux de la formulation symétrique BCWL (% variation temps de calcul-1 et % variation nb de nœuds-1). Ensuite nous cherchons à déterminer si les formulations perturbées parviennent à améliorer la performance des formulations non-perturbées qui contiennent la même contrainte de bris de symétrie (% variation temps de calcul-2 et % variation nb de nœuds-2).

5.1.11.1 Résultats des formulations perturbées avec une contrainte hiérarchique

Dans le tableau 5.14 nous présentons les résultats obtenus pour les formulations perturbées avec des contraintes hiérarchiques pour les boîtes identiques. Les coefficients C1 et C2 ont été utilisés pour ces calculs.

Tableau 5.14 - Résultats de la perturbation en utilisant une contrainte hiérarchique et les coefficients C1 et C2

Perturbation- hiérarchique 1.1-C1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	Valeur variable Y	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
1-20 (4;40)	746	5 335	2,13	-34%	-71%	-16%	-23%
21-40 (5;50)	3 118	17 510	2,54	-29%	-83%	-53%	-45%
41-60 (5;60)	8 226	40 098	2,26	-45%	-90%	-47%	-39%
61-80 (6;60)	28 151	121 443	2,53	67%	-69%	-20%	11%
81-100 (5;80)	56 348	216 099	2,12	-49%	-92%	-24%	-3%
101-120	23 430	90 187	1,53	-85%	-98%	-74%	-66%
	20 003	81 779	2,18	-62%	-93%	-46%	-30%
Perturbation- hiérarchique 1.1-C2							
1-20 (4;40)	721	5 449	2,13	-37%	-71%	-19%	-21%
21-40 (5;50)	3 863	23 082	2,54	-13%	-77%	-42%	-27%
41-60 (5;60)	10 493	54 519	2,26	-31%	-86%	-32%	-16%
61-80 (6;60)	27 814	118 673	2,53	65%	-70%	-21%	9%
81-100 (5;80)	67 428	270 730	2,12	-39%	-90%	-9%	22%
101-120	34 496	136 885	1,53	-79%	-97%	-61%	-49%
	24 136	101 556	2,18	-54%	-92%	-34%	-14%
Perturbation- hiérarchique 1.4-C1							
1-20 (4;40)	655	5 241	2,13	-43%	-72%	-18%	-13%
21-40 (5;50)	2 525	14 045	2,54	-43%	-86%	-35%	-24%
41-60 (5;60)	5 748	31 709	2,26	-62%	-92%	-30%	-3%
61-80 (6;60)	18 623	84 963	2,53	11%	-79%	6%	42%
81-100 (5;80)	29 174	133 080	2,12	-74%	-95%	-25%	5%
101-120	20 256	81 326	1,53	-88%	-98%	-58%	-45%
	12 830	58 394	2,18	-76%	-95%	-34%	-10%
Perturbation- hiérarchique 1.4-C2							
1-20 (4;40)	725	5 650	2,13	-37%	-70%	-9%	-7%
21-40 (5;50)	2 946	16 084	2,54	-34%	-84%	-24%	-13%
41-60 (5;60)	5 838	34 424	2,26	-62%	-91%	-28%	6%
61-80 (6;60)	18 814	85 178	2,53	12%	-79%	7%	43%
81-100 (5;80)	35 499	163 190	2,12	-68%	-94%	-9%	28%
101-120	23 930	100 708	1,53	-86%	-97%	-50%	-32%
	14 625	67 539	2,18	-72%	-95%	-25%	4%

Les résultats du tableau 5.14 mettent en évidence que les formulations perturbées permettent d'améliorer le temps de calcul des formulations non-perturbées. En effet, dans la septième colonne de ce tableau nous observons que la formulation

perturbation hiérarchique 1.1-C1, réduit le temps moyen de calcul de 46%. Nous soulignons que ces mêmes constats ont été observés par Ghoniem et Sherali (2011). De plus, nous observons aussi dans le tableau 5.14 que la formulation perturbation hiérarchique 1.4-C1 arrive à une réduction du temps de presque 34% par rapport à sa formulation sans effet de perturbation.

Notons que ces réductions sont supérieures à celles obtenues pour ces mêmes formulations en utilisant les coefficients C2. Rappelons que les coefficients C1 possèdent des plus grandes valeurs que les coefficients C2. Il semble qu'en ayant des plus grands coefficients, les priorités de résolution seront mieux attribuées aux éléments hiérarchiques de la fonction objectif et par conséquent les temps de calcul de BCWL se réduisent considérablement.

Regardons maintenant dans le tableau 5.15 les résultats obtenus par ces mêmes propositions en utilisant les coefficients non-compatibles NC1 et NC2.

Tableau 5.15 - Résultats de la perturbation en utilisant une contrainte hiérarchique et les coefficients NC1 et NC2

Perturbation- hiérarchique 1.1-NC1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	Valeur variable Y	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
1-20 (4;40)	1 377	5 687	2,13	20%	-69%	55%	-17%
21-40 (5;50)	5 175	10 392	2,54	17%	-90%	-22%	-67%
41-60 (5;60)	11 692	25 541	2,26	-23%	-93%	-24%	-61%
61-80 (6;60)	39 668	86 744	2,53	136%	-78%	13%	-20%
81-100 (5;80)	56 792	101	2,12	-49%	-96%	-23%	-54%
101-120	60 578	103	1,53	-64%	-97%	-32%	-61%
	29 214	55 616	2,18	-44%	-96%	-21%	-53%
Perturbation- hiérarchique 1.1-NC2							
1-20 (4;40)	1 293	5 349	2,13	13%	-71%	46%	-22%
21-40 (5;50)	5 912	15 165	2,54	33%	-85%	-11%	-52%
41-60 (5;60)	13 266	31 198	2,26	-13%	-92%	-14%	-52%
61-80 (6;60)	28 522	47 869	2,53	70%	-88%	-19%	-56%
81-100 (5;80)	61 271	114	2,12	-45%	-96%	-17%	-48%
101-120	90 188	171	1,53	-46%	-96%	1%	-36%
	33 408	64 337	2,18	-36%	-95%	-9%	-45%

Perturbation- hiérarchique 1.4-NC1							
1-20 (4;40)	1 240	5 515	2,13	8%	-70%	55%	-9%
21-40 (5;50)	4 627	9 596	2,54	4%	-91%	19%	-48%
41-60 (5;60)	10 640	23 460	2,26	-30%	-94%	30%	-28%
61-80 (6;60)	21 711	40 406	2,53	29%	-90%	23%	-32%
81-100 (5;80)	41 666	84 918	2,12	-63%	-97%	7%	-33%
101-120	42 946	75 006	1,53	-74%	-98%	-10%	-49%
	20 472	39 817	2,18	-61%	-97%	5%	-39%
Perturbation- hiérarchique 1.4-NC2							
1-20 (4;40)	1 186	5 301	2,13	3%	-71%	48%	-12%
21-40 (5;50)	4 767	9 689	2,54	7%	-90%	23%	-48%
41-60 (5;60)	8 963	17 657	2,26	-41%	-95%	10%	-46%
61-80 (6;60)	22 531	39 228	2,53	34%	-90%	28%	-34%
81-100 (5;80)	41 399	81 289	2,12	-63%	-97%	6%	-36%
101-120	56 698	118	1,53	-66%	-97%	19%	-20%
	22 591	45 298	2,18	-57%	-96%	16%	-31%

Nous observons que l'utilisation des coefficients NC1 et NC2 ne donne pas des bons résultats. En effet, la formulation perturbation hiérarchique 1.4-NC1 et NC-2 augmente de 5% et de 16% le temps de calcul de la formulation non-perturbée. De plus, si bien les formulations perturbation hiérarchique 1.1-NC1 et NC-2 arrivent à réduire le temps de calcul de la formulation non-perturbée de 21% et 9% respectivement, ces réductions sont moins importantes que celles obtenues par l'utilisation des coefficients C1 et C2.

En somme, il semble que l'utilisation des coefficients croissants (NC1 et NC2) pour un problème de minimisation avec des contraintes hiérarchiques de type \leq , n'apporte pas des bénéfices au processus de résolution. Ceci permet de vérifier la validité de l'application de la perturbation de la fonction objectif, ainsi que du concept de compatibilité de Ghoniem et Sherali (2011) pour réduire le temps de calcul optimal.

Toutefois, jusqu'à présent, pour nos expérimentations, nous pouvons remarquer que la reformulation RBCWL (section 5.1.9) possède les plus hauts niveaux d'amélioration du temps de calcul de ce problème (presque 100%).

5.1.11.2 Résultats des formulations perturbées avec la contrainte lexicographique 2.1

Nous avons créé l'effet de perturbation de la fonction objectif de BCWL en utilisant la contrainte lexicographique 1.2. Le tableau 5.16 présente les résultats obtenus.

Tableau 5.16 - Résultats de la perturbation en utilisant la contrainte lexicographique 2.1 et les coefficients C1 et C2

Perturbation-lexicographique 1.2-C1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	Valeur variable Y	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
1-20 (4;40)	702	4 948	2,13	-39%	-73%	0%	-17%
21-40 (5;50)	2 851	15 990	2,54	-36%	-84%	-28%	-7%
41-60 (5;60)	5 705	29 289	2,26	-62%	-93%	-27%	-10%
61-80 (6;60)	15 154	74 538	2,53	-10%	-81%	-9%	28%
81-100 (5;80)	27 361	129 119	2,12	-75%	-95%	-17%	18%
101-120 (4;100)	24 095	93 332	1,53	-86%	-98%	-44%	-31%
	12 645	57 870	2,18	-76%	-95%	-28%	-3%
Perturbation-lexicographique 1.2-C2							
1-20 (4;40)	708	5 215	2,13	-38%	-72%	1%	-13%
21-40 (5;50)	2578	15 499	2,54	-42%	-85%	-35%	-10%
41-60 (5;60)	7422	42 666	2,26	-51%	-89%	-5%	31%
61-80 (6;60)	15429	71 502	2,53	-8%	-82%	-7%	23%
81-100 (5;80)	30000	144 110	2,12	-73%	-95%	-9%	32%
101-120 (4;100)	21113	88 418	1,53	-87%	-98%	-51%	-34%
	12 875	61 235	2,18	-75%	-95%	-26%	3%

Le tableau 5.16 confirme que le temps de calcul se réduit en moyenne de 28% et de 26% (pour C1 et C2 respectivement) en comparaison avec la formulation non-perturbée. Toutefois, ces améliorations sont moins importantes que celles obtenues pour la perturbation avec la contrainte hiérarchique 1.1 dans le tableau 5.15 qui était de 46% et 34% pour C1 et C2 respectivement.

Regardons ensuite les résultats de l'utilisation des coefficients NC1 et NC2 pour cette même formulation. Ces résultats sont exposés dans le tableau 5.17.

Tableau 5.17 - Résultats de la perturbation en utilisant la contrainte lexicographique 2.1 et les coefficients NC1 et NC2

Perturbation-lexicographique 1.2-NC1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	Valeur variable Y	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
1-20 (4;40)	1 007	4 569	2,13	-12%	-75%	43%	-23%
21-40 (5;50)	4 584	9 468	2,54	3%	-91%	15%	-45%
41-60 (5;60)	9 056	19 378	2,26	-40%	-95%	16%	-41%
61-80 (6;60)	16 399	27 312	2,53	-3%	-93%	-1%	-53%
81-100 (5;80)	35 683	71 623	2,12	-68%	-97%	8%	-34%
101-120 (4;100)	43 408	77 533	1,53	-74%	-98%	1%	-42%
	18 356	34 980	2,18	-65%	-97%	5%	-41%
Perturbation-lexicographique 1.2-NC2							
1-20 (4;40)	1 001	4 732	2,13	-13%	-74%	43%	-21%
21-40 (5;50)	5 786	15 574	2,54	30%	-85%	46%	-10%
41-60 (5;60)	10 460	21 701	2,26	-31%	-94%	34%	-33%
61-80 (6;60)	19 016	32 501	2,53	13%	-92%	15%	-44%
81-100 (5;80)	43 752	84 319	2,12	-61%	-97%	33%	-23%
101-120 (4;100)	42 971	77 459	1,53	-74%	-98%	0%	-42%
	20 498	39 381	2,18	-61%	-97%	17%	-34%

Les résultats présentés dans le tableau 5.17 confirment encore une fois qu'en utilisant les coefficients non compatibles (NC1 et NC2) le processus de résolution se ralentit.

5.1.11.3 Résultats des formulations perturbées pour les propositions de bris simultané de la symétrie

Nous avons perturbé la fonction objectif de trois formulations visant le bris simultané de la symétrie. Pour ce faire, nous avons utilisé uniquement des contraintes de bris de symétrie entre les boîtes.

Le tableau 5.18 présente les résultats de ces applications pour les coefficients compatibles (C1 et C2).

Tableau 5.18 - Résultats de la perturbation pour les propositions de bris simultané de la symétrie avec C1 et C2

Perturbation-lexico-BW 1-C1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	Valeur variable Y	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
1-20 (4;40)	794	3 658	2,13	-31%	-80%	13%	4%
21-40 (5;50)	2 296	6 501	2,54	-48%	-94%	-33%	-12%
41-60 (5;60)	3 524	9 218	2,26	-77%	-98%	-42%	-26%
61-80 (6;60)	5 485	12 677	2,53	-67%	-97%	-37%	-4%
81-100 (5;80)	9 320	21 742	2,12	-92%	-99%	-53%	-30%
101-120 (4;100)	25 761	38 728	1,53	-85%	-99%	29%	20%
	7 863	15 420	2,18	-85%	-99%	-19%	-7%

Perturbation-lexico-BW 1-C2

1-20 (4;40)	765	4 230	2,13	-33%	-77%	9%	20%
21-40 (5;50)	2 205	6 785	2,54	-50%	-93%	-36%	-8%
41-60 (5;60)	4 632	13 721	2,26	-69%	-97%	-24%	11%
61-80 (6;60)	6 146	16 522	2,53	-63%	-96%	-29%	25%
81-100 (5;80)	13 922	28 661	2,12	-87%	-99%	-29%	-7%
101-120 (4;100)	16 761	38 536	1,53	-90%	-99%	-16%	19%
	7 405	18 076	2,18	-86%	-99%	-24%	9%

Perturbation-lexico-BW 2-C1

1-20 (4;40)	654	4 629	2,13	-43%	-75%	14%	5%
21-40 (5;50)	2 827	14 279	2,54	-36%	-86%	-22%	-1%
41-60 (5;60)	5 943	32 139	2,26	-61%	-92%	-24%	8%
61-80 (6;60)	11 944	53 760	2,53	-29%	-86%	-11%	38%
81-100 (5;80)	24 887	104	2,12	-78%	-96%	-31%	-1%
101-120 (4;100)	22 913	90 758	1,53	-86%	-98%	-47%	-30%
	11 528	49 999	2,18	-78%	-96%	-34%	-7%

Perturbation-lexico-BW 2-C2

1-20 (4;40)	590	4 568	2,13	-49%	-75%	2%	3%
21-40 (5;50)	2 540	13 815	2,54	-43%	-86%	-30%	-4%
41-60 (5;60)	5 880	30 497	2,26	-61%	-92%	-25%	3%
61-80 (6;60)	10 520	47 740	2,53	-37%	-88%	-22%	23%
81-100 (5;80)	18 303	78 405	2,12	-84%	-97%	-49%	-25%
101-120 (4;100)	18 152	74 797	1,53	-89%	-98%	-58%	-42%
	9 331	41 637	2,18	-82%	-97%	-46%	-22%

Dans le tableau 5.18 nous observons pour la première fois dans nos expérimentations que l'utilisation des coefficients C2 supère la performance des coefficients C1 (perturbation lexico -BW 1-C2 et perturbation lexico -BW 2-C2).

De plus, nous constatons que la formulation perturbation lexico-BW 1-C2 parvient à réduire le temps de calcul de 86%, cette amélioration supère la performance de cette même formulation sans l'effet de perturbation de 81% (BCWL-lexico-BW 1) et constitue la plus grande amélioration après les reformulations (RBCWL).

Dans le tableau 5.19 nous présentons les résultats de ces mêmes formulations avec les coefficients non-compatibles NC1 et NC2.

Tableau 5.19 - Résultats de la perturbation pour les propositions de bris simultané de la symétrie avec NC1 et NC2

Perturbation-lexico-BW1-NC1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	Valeur variable Y	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
1-20 (4;40)	1 032	3 595	2,13	-10%	-81%	47%	2%
21-40 (5;50)	4 412	5 439	2,54	-1%	-95%	28%	-26%
41-60 (5;60)	9 560	12 799	2,26	-37%	-97%	56%	3%
61-80 (6;60)	12 612	10 127	2,53	-25%	-97%	46%	-23%
81-100 (5;80)	16 284	12 752	2,12	-85%	-100%	-17%	-59%
101-120 (4;100)	22 567	21 084	1,53	-86%	-99%	13%	-35%
	11 078	10 966	2,18	-79%	-99%	13%	-34%
Perturbation-lexico-BW1.2-NC1							
1-20 (4;40)	1 087	4 005	2,13	-5%	-78%	55%	14%
21-40 (5;50)	4 982	6 876	2,54	12%	-93%	44%	-7%
41-60 (5;60)	9 049	11 406	2,26	-40%	-97%	48%	-8%
61-80 (6;60)	13 916	12 180	2,53	-17%	-97%	61%	-8%
81-100 (5;80)	19 772	17 259	2,12	-82%	-99%	1%	-44%
101-120 (4;100)	23 985	22 511	1,53	-86%	-99%	20%	-30%
	12 132	12 373	2,18	-77%	-99%	24%	-26%
Perturbation-lexico-BW2-NC1							
1-20 (4;40)	917	4 313	2,13	-20%	-77%	59%	-3%
21-40 (5;50)	4 561	8 402	2,54	3%	-92%	26%	-42%
41-60 (5;60)	9 569	20 867	2,26	-37%	-95%	23%	-30%
61-80 ()	16 582	23 991	2,53	-1%	-94%	23%	-38%
81-100 (5;80)	33 163	64 910	2,12	-70%	-98%	-8%	-38%
101-120 (4;100)	34 869	65 455	1,53	-79%	-98%	-19%	-50%
	16 610	31 323	2,18	-68%	-97%	-5%	-42%

Perturbation-lexico-BW2-NC2							
1-20 (4;40)	786	3 950	2,13	-31%	-79%	37%	-11%
21-40 (5;50)	4 622	8 943	2,54	4%	-91%	28%	-38%
41-60 (5;60)	11 204	23 730	2,26	-26%	-94%	44%	-20%
61-80 (6;60)	22 246	43 056	2,53	32%	-89%	65%	11%
81-100 (5;80)	53 287	104 680	2,12	-52%	-96%	47%	-1%
101-120 (4;100)	42 876	80 624	1,53	-74%	-98%	0%	-38%
	22 504	44 164	2,18	-57%	-96%	29%	-18%

Le tableau 5.19 confirme que l'effet de non-compatibilité produit un ralentissement dans le processus de résolution optimal. En effet, nous pouvons remarquer que pour presque toutes les formulations présentées dans ce tableau, le temps de calcul optimal s'accroît même si le nombre de nœuds se réduit.

Enfin, nous observons qu'une seule des propositions perturbées du tableau 5.19 parvient à améliorer la performance de sa formulation non-perturbée, il s'agit de la formulation perturbation lexico-BW 2.1 avec un modeste 5% de réduction du temps de calcul.

5.1.11.4 Résultats des formulations perturbées pour la réduction de variables

Regardons maintenant la performance de la perturbation de la fonction objectif appliquée sur les propositions de réduction de variables. Le tableau 5.20 montre les résultats obtenus de ces expérimentations.

Tableau 5.20 - Résultats de la perturbation pour la réduction des variables avec C1 et C2

Perturbation- RV 4-C1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	Valeur variable Y	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
1-20 (4;40)	1 370	5 336	2,13	19%	-71%	97%	-8%
21-40 (5;50)	5 507	8 611	2,54	24%	-91%	3%	-66%
41-60 (5;60)	11 703	17 000	2,26	-23%	-96%	-19%	-74%
61-80 (6;60)	21 629	25 650	2,53	29%	-94%	-14%	-65%
81-100 (5;80)	44 373	63 646	2,12	-60%	-98%	-34%	-68%
101-120 (4;100)	58 222	96 595	1,53	-65%	-98%	-37%	-66%
	23 801	36 140	2,18	-55%	-97%	-30%	-67%

**Perturbation-
RV 4-C2**

1-20 (4;40)	625	4 696	2,13	-46%	-75%	-10%	-19%
21-40 (5;50)	3 034	14 244	2,54	-32%	-86%	-43%	-44%
41-60 (5;60)	8 382	36 353	2,26	-45%	-91%	-42%	-45%
61-80 (6;60)	28 348	97 734	2,53	69%	-75%	13%	34%
81-100 (5;80)	53 034	171 563	2,12	-52%	-93%	-21%	-14%
101-120 (4;100)	30 584	109 582	1,53	-82%	-97%	-67%	-62%
	20 668	72 362	2,18	-61%	-94%	-40%	-34%

Les formulations de réduction de variables bénéficient aussi de l'effet de perturbation. Une réduction allant jusqu'à 40% peut s'atteindre par l'utilisation des coefficients C2. Encore une fois nous observons que ces coefficients permettent de résoudre le problème plus rapidement que les coefficients C1, même comme pour les formulations BCWL-lexico-BW 1 et BCWL-lexico BW 2 (tableau 5.8).

Dans le tableau suivant, nous présentons les résultats de l'utilisation des coefficients non-compatibles pour la réduction de variables.

Tableau 5.21 - Résultats de la perturbation pour la réduction des variables avec NC1 et NC2

Perturbation- RV 4-NC1	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	Valeur variable Y	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
1-20 (4;40)	1 270	5 336	2,13	11%	-71%	83%	-8%
21-40 (5;50)	5 300	8 611	2,54	19%	-91%	0%	-66%
41-60 (5;60)	11 456	17 000	2,26	-24%	-96%	-21%	-74%
61-80 (6;60)	21 587	25 650	2,53	28%	-94%	-14%	-65%
81-100 (5;80)	44 152	63 646	2,12	-60%	-98%	-34%	-68%
101-120 (4;100)	58 378	96 595	1,53	-65%	-98%	-37%	-66%
	23 690	36 140	2,18	-55%	-97%	-31%	-67%
Perturbation- RV 4-NC2							
1-20 (4;40)	1 133	4 754	2,13	-1%	-74%	63%	-18%
21-40 (5;50)	5 404	9 035	2,54	22%	-91%	1%	-65%
41-60 (5;60)	13 168	23 644	2,26	-13%	-94%	-9%	-64%
61-80 (6;60)	21 144	25 062	2,53	26%	-94%	-16%	-66%
81-100 (5;80)	52 652	81 462	2,12	-53%	-97%	-22%	-59%
101-120 (4;100)	64 897	109	1,53	-61%	-97%	-30%	-61%
	26 400	42 319	2,18	-50%	-97%	-23%	-61%

Les résultats exposés dans le tableau 5.21 confirment que même l'utilisation des coefficients NC1 et NC2 permet de réduire le temps moyen de calcul pour les formulations de réduction de variables. En effet, nous observons des réductions de presque 31% et de 23% du temps de calcul et de presque 67% et 61% pour le nombre de nœuds lorsque les formulations perturbées sont comparées à la formulation non-perturbée (BCWL-RV 4).

C'est-à-dire qu'il semble que la compatibilité est présente dans les formulations de réduction des variables, peu importe l'ordre des coefficients utilisés pour perturber la nouvelle fonction objectif (croissante ou décroissante). Toutefois, nous soulignons que cet effet semble ne pas être valable pour les autres propositions de bris de symétrie dans nos expérimentations.

5.1.11.5 Résultats de la perturbation de la reformulation

Enfin, nous avons aussi mené des tests pour certaines propositions de reformulation de BCWL. Il faut remarquer que dans ce cas les fonctions objectif seront perturbées à l'aide des contraintes pour le bris de symétrie entre les wagons. Nos exposons les premiers résultats dans le tableau 5.22.

Tableau 5.22 - Résultats de la perturbation pour les reformulations avec C3 et C4

Perturbation-reformulation	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	Valeur variable Y	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
2-C3							
1-20 (4;40)	63	677	2,13	-94,5%	-96,3%	8%	36%
21-40 (5;50)	78	1 623	2,54	-98,2%	-98,4%	-14%	38%
41-60 (5;60)	89	2 386	2,26	-99,4%	-99,4%	6%	14%
61-80 (6;60)	96	2 480	2,53	-99,4%	-99,4%	-1%	17%
81-100 (5;80)	179	4 811	2,12	-99,8%	-99,8%	28%	8%
101-120 (4;100)	107	3 307	1,53	-99,9%	-99,9%	49%	149%
	102	2 547	2,18	-99,8%	-99,8%	13%	31%
Perturbation-reformulation 2-C4							
1-20 (4;40)	61	540	2,13	-94,7%	-97,1%	4%	9%
21-40 (5;50)	80	1 452	2,54	-98,2%	-98,6%	-12%	24%
41-60 (5;60)	80	2 009	2,26	-99,5%	-99,5%	-5%	-4%
61-80 (6;60)	124	3 045	2,53	-99,3%	-99,2%	28%	44%
81-100 (5;80)	129	4 456	2,12	-99,9%	-99,8%	-8%	0%
101-120 (4;100)	103	2 786	1,53	-99,9%	-99,9%	43%	110%
	96	2 381	2,18	-99,8%	-99,8%	7%	22%
Perturbation-reformulation 5-C3							
1-20 (4;40)	55	192	2,13	-95,2%	-99,0%	-14%	0%
21-40 (5;50)	77	397	2,54	-98,3%	-99,6%	14%	-23%
41-60 (5;60)	70	723	2,26	-99,5%	-99,8%	-23%	2%
61-80 (6;60)	71	822	2,53	-99,6%	-99,8%	6%	-9%
81-100 (5;80)	83	1824	2,12	-99,9%	-99,9%	1%	22%
101-120 (4;100)	98	2515	1,53	-99,9%	-99,9%	5%	-16%
	76	1 079	2,18	-99,9%	-99,9%	-2%	-5%

Perturbation-reformulation 5-C4							
1-20 (4;40)	58	212	2,13	-94,9%	-98,9%	-9%	10%
21-40 (5;50)	62	422	2,54	-98,6%	-99,6%	-8%	-18%
41-60 (5;60)	87	756	2,26	-99,4%	-99,8%	-5%	7%
61-80 (6;60)	75	829	2,53	-99,6%	-99,8%	12%	-9%
81-100 (5;80)	89	1 874	2,12	-99,9%	-99,9%	9%	25%
101-120 (4;100)	92	2 331	1,53	-99,9%	-99,9%	-1%	-22%
	77	1 071	2,18	-99,9%	-99,9%	0%	-6%

L'application de la perturbation de la fonction objectif semble ralentir le processus de résolution des reformulations. Selon les résultats obtenus dans le tableau 5.23 nous observons que les formulations perturbation-reformulation 2-C3 et C4 sont résolues en moyenne en 102 et 96 millisecondes respectivement. Or, la formulation RBCWL 2 (non-perturbée) est résolue en seulement 90 millisecondes en moyenne.

Par contre, nous pouvons observer aussi que les formulations perturbation-reformulation 5-C3 et perturbation-reformulation 5-C4 sont résolues en moyenne en 76 et 77 millisecondes respectivement. Ce qui représente une légère diminution du temps de calcul par rapport à la formulation non-perturbée RBCWL 5 qui résout une instance en 78 millisecondes en moyenne.

Dans le tableau 5.23 nous présentons les résultats de l'utilisation de coefficients non-compatibles NC3 et NC4.

Tableau 5.23 - Résultats de la perturbation pour les reformulations avec NC3 et NC4

Perturbation-reformulation 2-NC3	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	Valeur variable Y	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
1-20 (4;40)	66	777	2,13	-94,3%	-95,8%	12%	56%
21-40 (5;50)	93	1 870	2,54	-97,9%	-98,2%	3%	59%
41-60 (5;60)	105	2 855	2,26	-99,3%	-99,3%	24%	37%
61-80 (6;60)	136	3 617	2,53	-99,2%	-99,1%	40%	71%
81-100 (5;80)	173	4 307	2,12	-99,8%	-99,8%	24%	-3%
101-120 (4;100)	114	3 170	1,53	-99,9%	-99,9%	58%	139%
	114	2 766	2,18	-99,8%	-99,8%	27%	42%

Perturbation-reformulation 2-NC4							
1-20 (4;40)	61	777	2,13	-94,7%	-95,8%	4%	56%
21-40 (5;50)	136	1 834	2,54	-96,9%	-98,2%	50%	56%
41-60 (5;60)	94	3 033	2,26	-99,4%	-99,2%	11%	45%
61-80 (6;60)	123	3 541	2,53	-99,3%	-99,1%	27%	67%
81-100 (5;80)	184	4 351	2,12	-99,8%	-99,8%	31%	-2%
101-120 (4;100)	161	3 738	1,53	-99,9%	-99,9%	124%	182%
	126	2 879	2,18	-99,8%	-99,8%	40%	48%
Perturbation-reformulation 5-NC3							
1-20 (4;40)	62	159	2,13	-94,6%	-99,1%	-4%	-17%
21-40 (5;50)	74	562	2,54	-98,3%	-99,4%	9%	9%
41-60 (5;60)	90	769	2,26	-99,4%	-99,8%	-2%	9%
61-80 (6;60)	88	877	2,53	-99,5%	-99,8%	31%	-3%
81-100 (5;80)	87	1706	2,12	-99,9%	-99,9%	7%	14%
101-120 (4;100)	104	2927	1,53	-99,9%	-99,9%	11%	-2%
	84	1 166	2,18	-99,8%	-99,9%	8%	3%
Perturbation-reformulation 5-NC4							
1-20 (4;40)	55	301	2,13	-95,2%	-98,4%	-15%	56%
21-40 (5;50)	67	598	2,54	-98,5%	-99,4%	-1%	16%
41-60 (5;60)	73	906	2,26	-99,5%	-99,8%	-20%	28%
61-80 (6;60)	71	1 015	2,53	-99,6%	-99,7%	6%	12%
81-100 (5;80)	92	1 889	2,12	-99,9%	-99,9%	12%	26%
101-120 (4;100)	123	3 157	1,53	-99,9%	-99,9%	31%	5%
	80	1 311	2,18	-99,8%	-99,9%	3%	15%

Le tableau 5.23 confirme que l'utilisation des coefficients non-compatibles NC3 et NC4 génèrent un effet négatif quant à l'amélioration de la performance d'une formulation en nombres entiers (Ghoniem et Sherali, 2011).

Nous pouvons observer qu'en général les reformulations deviennent plus lentes lorsqu'elles sont soumises à la perturbation de la fonction objectif et cet effet est plus remarquable pour les coefficients non-compatibles NC3 et NC4.

5.1.12 Conclusions

Dans un premier temps, nos expérimentations démontrent qu'une reformulation judicieuse du problème BCWL permet de réduire énormément le temps de calcul

de la solution optimale. De plus, nous avons démontré que la combinaison de contraintes pour les boîtes et les wagons permet une amélioration de plus de 80%.

Une remarque intéressante correspond au fait qu'en général nous avons observé que les contraintes ayant une série décroissante des coefficients semblent être plus performantes pour résoudre le problème BCWL que les contraintes avec des séries croissantes de coefficients.

Le tableau 5.24 présente un classement des résultats de nos tests.

Tableau 5.24 - Classement de la performance des propositions de bris de symétrie

Formulation	Temps de Calcul moyen	Nb moyen de Nœuds	% Variation Temps de Calcul	%Variation Nb de Nœuds
BCWL	52 514	1 247 896		
RBCWL 6	74	1 003	-99,9%	-99,9%
RBCWL 5	78	1 136	-99,9%	-99,9%
RBCWL 2	90	1 944	-99,8%	-99,8%
RBCWL 4	93	1 806	-99,8%	-99,9%
RBCWL 2.1	96	1 851	-99,8%	-99,9%
RBCWL 3	99	1 634	-99,8%	-99,9%
RBCWL	159	4 311	-99,7%	-99,7%
BCWL-lexico-BW 1	9 765	16 616	-81%	-99%
BCWL-lexico-BW 1.1-40	16 154	46 644	-69%	-96%
BCWL-lexico-BW 2	17 440	53 716	-67%	-96%
BCWL-lexico 1.2	17 466	59 595	-67%	-95%
BCWL-hiérarchique-BW 5	17 587	50 617	-67%	-96%
BCWL- hiérarchique 1.4	19 537	65 231	-63%	-95%
BCWL- hiérarchique 1.3	22 838	70 991	-57%	-94%
BCWL-lexico-BW 3	23 345	65 965	-56%	-95%
BCWL-hiérarchique-BW 1.1	24 258	36 249	-54%	-97%
BCWL-hiérarchique 1.2	27 374	86 647	-48%	-93%
BCWL-RV 3	31 891	84 766	-39%	-93%
BCWL-hiérarchique-BW 1	32 518	44 878	-38%	-96%
BCWL-RV 4	34 192	109 104	-35%	-91%
BCWL-hiérarchique 1.1	36 769	117 413	-30%	-91%
BCWL-hiérarchique 1	56 046	165 188	7%	-87%
BCWL-hiérarchique 2	73 775	644 636	40%	-48%
BCWL-RV 2	164 636	4 274 797	214%	-100%
BCWL-RV 1	165 803	4 289 210	216%	244%
BCWL-hiérarchique 2.1	1 770 316	32 932 410	3 271%	2 539%
BCWL-hiérarchique 2.2	1 770 262	35 690 448	3 271%	2 760%
ARF	1 771 259	2 175 714	3 273%	74%

Le tableau 5.24 permet de confirmer la suprématie de l'approche de reformulation pour briser la symétrie et réduire le temps de calcul optimal. Nous pouvons observer que les 7 propositions de reformulation que nous avons proposée possèdent les plus hautes performances. Ensuite, nous pouvons souligner que les propositions contenant des contraintes lexicographiques de bris de symétrie arrivent généralement à réduire le temps de calcul de plus de 50% en moyenne.

Quant à l'utilisation des contraintes hiérarchiques, le tableau 5.24 met en évidence que l'utilisation de ces types de contraintes permet au plus une amélioration moyenne de 54% (voir BCWL-hiérarchique 1.1). De plus, nous observons que certaines des propositions contenant des contraintes hiérarchiques ralentissent le processus de résolution (exemple, BCWL-hiérarchique 1).

Ensuite, les propositions de réduction de variables, même si augmentées avec des contraintes pour réduire le nombre de solutions alternatives entre les boîtes, elles arrivent au maximum à une réduction moyenne de 48%.

Enfin, nous observons que les formulations visant uniquement le bris de la symétrie entre les wagons utilisent presque toujours le temps maximal de 1800 secondes.

Dans un deuxième temps, nos expérimentations démontrent que la perturbation de la fonction objectif, permet d'améliorer le processus de résolution de la plus part des formulations. Dans le tableau 5.25, nous présentons un bilan de meilleures performances de l'application de cette technique.

Tableau 5.25 - Bilan de la performance des propositions de perturbation de la fonction objectif

Propositions	% Variation Temps de Calcul-1	% Variation Nb de Nœuds-1	% Variation Temps de Calcul-2	% Variation Nb de Nœuds-2
Perturbation-lexico -BW 2-C2	-82%	-97%	-46%	-22%
Perturbation-hiérarchique 1.1-C1	-62%	-93%	-46%	-30%
Perturbation- RV 4-C2	-61%	-94%	-40%	-34%
Perturbation-hiérarchique 1.4-C1	-76%	-95%	-34%	-10%
Perturbation-lexico 1.2-C1	-76%	-95%	-28%	-3%
Perturbation-lexico -BW 1-C2	-86%	-99%	-24%	9%
Perturbation-reformulation 5-C3	-99,9%	-99,9%	-2%	-5%
Perturbation-reformulation 2-C4	-99,8%	-99,8%	7%	22%

L'application de la perturbation de la fonction objectif a permis de trouver une solution qui réduit de 86% le temps moyen de calcul (Perturbation-lexico BW 1-C2). Ceci représente la plus grande amélioration après les propositions de reformulations (section 5.1.10). Par contre, nous observons justement que les reformulations ne se sont pas améliorées par la perturbation de leurs fonctions objectifs.

5.2 Analyse de la variation de l'ordonnement des données

Cette section vise à déterminer l'impact de la variation de l'ordre des données sur le temps de calcul et sur la valeur de la relaxation linéaire. Pour ce faire, nous utilisons les poids de boîtes $w_j = \{17, 27, 30, 35\}$ comme étant les données à faire varier.

Rappelons que tous les tests menés jusqu'à présent comportent un ordonnancement aléatoire des données (A). Dans les lignes suivantes, nous présentons les résultats de la résolution de certaines des propositions de la section 5.1 avec les données ordonnées de façon croissante (C) et décroissante (D).

5.2.1 Résultats de l'ordonnancement de données pour BCWL

Nos premiers tests correspondent à la formulation symétrique. Nous cherchons à déterminer si un simple ordonnancement des données peut améliorer le temps de calcul de la solution optimale. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.26.

Tableau 5.26 - Résultats obtenus de l'ordonnancement des données pour BCWL

BCWL	LP- A	LP- C	LP- D	Temps moyen A	Temps moyen C	Temps moyen D	% Variation Temps moyen C	% Variation Temps moyen D
1-20 (4;40)	0,70	0,70	0,70	1147	1019	1116	-11%	-3%
21-40 (5;50)	0,10	0,10	0,10	4439	3491	3960	-21%	-11%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	15171	13976	16580	-8%	9%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	16820	15692	19439	-7%	16%
81-100 (5;80)	0,00	0,00	0,00	111122	71894	112373	-35%	1%
101-120 (4;100)	0,00	0,00	0,00	166386	102502	77460	-38%	-53%
				52514	34762	38488	-34%	-27%

En effet, le tableau 5.26 met en évidence que le temps de résolution de la formulation BCWL se réduit de 34% lorsque les données sont ordonnées de façon croissante. De même, une amélioration de 27% est obtenue lorsque les données sont ordonnées de façon décroissante. Toutefois, nous observons que les valeurs relaxées ne présentent pas des variations.

5.2.2 Résultats de l'ordonnancement des données pour les contraintes hiérarchiques et lexicographiques

Les propositions contenant des contraintes hiérarchiques et lexicographiques ont été soumises à l'ordonnancement de données. Les résultats se trouvent dans le tableau 5.27.

Tableau 5.27 - Résultats obtenus de l'ordonnancement des données pour les propositions hiérarchiques et lexicographiques

BCWL – lexico 1.2	LP- A	LP- C	LP- D	Temps moyen A	Temps moyen C	Temps moyen D	% Variation Temps moyen C	% Variation Temps moyen D
1-20 (4;40)	0,70	0,70	0,70	702	768	724	9%	3%
21-40 (5;50)	0,10	0,10	0,10	3975	3496	3632	-12%	-9%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	7798	7077	7330	-9%	-6%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	16571	14265	18374	-14%	11%
81-100 (5;80)	0,00	0,00	0,00	32953	31577	39350	-4%	19%
101-120 (4;100)	0,00	0,00	0,00	42800	38789	47416	-9%	11%
				17466	15995	19471	-8%	11%
BCWL– hiérarchique 1.4								
1-20 (4;40)	0,70	0,70	0,70	800	753	788	-6%	-1%
21-40 (5;50)	0,10	0,10	0,10	3888	3910	4007	1%	3%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	8161	7419	9978	-9%	22%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	17609	19172	18707	9%	6%
81-100 (5;80)	0,00	0,00	0,00	39057	27408	29260	-30%	-25%
101-120 (4;100)	0,00	0,00	0,00	47710	43792	54343	-8%	14%
				19537	17076	19514	-13%	0%

Encore une fois nous soulignons que l'ordonnancement croissant privilégie de meilleurs temps de calcul pour les formulations contenant des contraintes lexicographiques et hiérarchiques, d'après les résultats exposés dans le tableau 5.27. Ceci confirme les bénéfices de ce type d'ordonnancement.

5.2.3 Résultats de l'ordonnancement des données pour les contraintes de bris simultané de la symétrie

Le tableau suivant montre les tests effectués sur les propositions contenant des contraintes de bris de la symétrie pour les boîtes et les wagons identiques.

Tableau 5.28 - Résultats obtenus de l'ordonnancement des données pour les propositions de bris simultané de la symétrie

BCWL– lexico-BW 1	LP- A	LP- C	LP- D	Temps moyen A	Temps moyen C	Temps moyen D	% Variation Temps moyen C	% Variation Temps moyen D
1-20 (4;40)	0,70	0,70	0,70	701	759	759	8%	8%
21-40 (5;50)	0,10	0,10	0,10	3452	3528	3259	2%	-6%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	6111	5479	5483	-10%	-10%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	8648	10192	8867	18%	3%
81-100 (5;80)	0,00	0,00	0,00	19652	12789	12530	-35%	-36%
101-120 (4;100)	0,00	0,00	0,00	20027	15182	18024	-24%	-10%
				9765	7988	8154	-18%	-17%
BCWL– hiérarchique- BW 2.1								
1-20 (4;40)	0,70	0,70	0,70	931	503	1007	-56%	-12%
21-40 (5;50)	0,10	0,10	0,10	6 367	5328	5165	20%	16%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	19 858	10225	13185	-33%	-13%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	39 469	22194	21680	32%	29%
81-100 (5;80)	0,00	0,00	0,00	95 725	53139	59413	-52%	-47%
101-120 (4;100)	0,00	0,00	0,00	87 465	46897	91254	-72%	-45%
				41 636	23 048	31 951	-56%	-39%
BCWL– lexico-BW 2								
1-20 (4;40)	0,70	0,70	0,70	576	565	517	-2%	-10%
21-40 (5;50)	0,10	0,10	0,10	3605	3345	3175	-7%	-12%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	7802	7021	6312	-10%	-19%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	13496	12774	13710	-5%	2%
81-100 (5;80)	0,00	0,00	0,00	36195	27866	28529	-23%	-21%
101-120 (4;100)	0,00	0,00	0,00	42965	55886	43518	30%	1%
				17440	17909	15960	3%	-8%
BCWL– hiérarchique- BW 5								
1-20 (4;40)	0,70	0,70	0,70	591	597	516	1%	-13%
21-40 (5;50)	0,10	0,10	0,10	3815	3481	3286	-9%	-14%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	7396	7308	5629	-1%	-24%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	17683	13053	14719	-26%	-17%
81-100 (5;80)	0,00	0,00	0,00	40572	30605	25985	-25%	-36%
101-120 (4;100)	0,00	0,00	0,00	35464	45998	37790	30%	7%
				17587	16840	14654	-4%	-17%

L'analyse des formulations ayant deux contraintes de bris de symétrie permet d'observer dans un premier temps que la formulation BCWL-lexico-BW 1 contenant une contrainte avec des coefficients décroissants (lexicographique 1.2) et une contrainte avec une série aléatoire de coefficients (w_j pour hiérarchique 2)

démontre une performance similaire pour les données croissantes que pour les données décroissantes. Ensuite, la formulation BCWL-lexico-BW 2.1 possédant des séries croissantes de coefficients pour leurs deux contraintes (hiérarchique 1.1 et hiérarchique 2.3) profite d'une meilleure performance de l'ordonnement croissant des données.

Par contre, les propositions BCWL-lexico-BW 2 (lexicographique 1.2 et hiérarchique 2.1) et BCWL-hiérarchique-BW 5 (hiérarchique 1.4 et hiérarchique 2.1) possédant des contraintes avec des séries décroissantes arrivent à résoudre le problème plus rapidement lorsque les données sont ordonnées de façon décroissante.

Il semble que dans les formulations ayant deux contraintes de bris de symétrie, le fait d'avoir des coefficients croissant et décroissant peut déterminer une amélioration du temps de calcul si les données à traiter sont dans le même ordre que les coefficients.

5.2.4 Résultats de l'ordonnement des données pour les réductions de variables

Les résultats obtenus pour les propositions de réduction de variables sont présentés dans le tableau 5.29.

Tableau 5.29 - Résultats obtenus de l'ordonnancement des données pour les réductions de variables

BCWL – RV 1	LP- A	LP- C	LP- D	Temps moyen A	Temps moyen C	Temps moyen D	% Variation Temps moyen C	% Variation Temps moyen D
1-20 (4;40)	0,70	0,70	0,70	1870	1597	2234	-15%	19%
21-40 (5;50)	0,10	0,10	0,10	13074	9770	21708	-25%	66%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	45989	40555	107913	-12%	135%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	155159	108003	270375	-30%	74%
81-100 (5;80)	0,00	0,00	0,00	465384	222400	731146	-52%	57%
101-120 (4;100)	0,00	0,00	0,00	313345	116302	516220	-63%	65%
				165803	83104	274933	-50%	66%

BCWL – RV 4

1-20 (4;40)	0,70	0,70	0,70	799	517	942	-35%	18%
21-40 (5;50)	0,10	0,10	0,10	5568	4781	5301	-14%	-5%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	12959	11466	12528	-12%	-3%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	33287	19158	24327	-42%	-27%
81-100 (5;80)	0,00	0,00	0,00	105111	43340	72216	-59%	-31%
101-120 (4;100)	0,00	0,00	0,00	80854	48779	76052	-40%	-6%
				39763	21340	31894	-46%	-20%

Nous pouvons observer que les propositions BCWL-RV 1 et BCWL-RV 4 bénéficient respectivement d'une réduction moyenne de 50% et de 46% du temps de calcul pour les données croissantes. Par contre, pour BCWL-RV 1 le temps de calcul s'accroît considérablement pour les données décroissantes (66%), tandis que pour BCWL-RV 4 avec les données croissantes la réduction est seulement de 20%.

Finalement, nous observons que les valeurs relaxées ne sont pas affectées par les variations de l'ordre des données pour les propositions de réduction de variables analysées dans le tableau 5.29.

5.2.5 Résultats de l'ordonnancement des données pour les reformulations

Le tableau 5.30 présente les résultats obtenus de la variation de l'ordre des données sur certaines des propositions de reformulations analysées dans la section 5.1.8.

Tableau 5.30 - Résultats obtenus de l'ordonnancement des données pour les reformulations

RBCWL 2.1	LP-A	LP-C	LP-D	Temps moyen A	Temps moyen C	Temps moyen D	% Variation Temps moyen C	% Variation Temps moyen D
1-20 (4;40)	0,60	0,60	0,60	66	61	88	-7%	35%
21-40 (5;50)	0,12	0,12	0,12	69	67	71	-3%	2%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	95	72	80	-25%	-16%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	100	82	112	-18%	12%
81-100 (5;80)	0,08	0,08	0,08	100	87	109	-14%	8%
101-120 (4;100)	0,10	0,10	0,10	146	106	117	-27%	-20%
				96	79	96	-18%	0%

RBCWL 3

1-20 (4;40)	0,60	0,60	0,60	89	62	56	-31%	-37%
21-40 (5;50)	0,12	0,12	0,12	71	86	66	21%	-8%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	66	109	64	65%	-3%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	91	104	82	14%	-11%
81-100 (5;80)	0,08	0,08	0,08	117	136	82	16%	-30%
101-120 (4;100)	0,10	0,10	0,10	161	119	96	-26%	-41%
				99	103	74	3%	-25%

RBCWL 5

1-20 (4;40)	0,60	0,60	0,60	64	60	56	-6%	-12%
21-40 (5;50)	0,12	0,12	0,12	68	69	63	1%	-7%
41-60 (5;60)	0,00	0,00	0,00	91	87	61	-4%	-33%
61-80 (6;60)	0,00	0,00	0,00	67	77	97	15%	44%
81-100 (5;80)	0,08	0,08	0,08	82	73	87	-11%	7%
101-120 (4;100)	0,10	0,10	0,10	94	83	83	-11%	-11%
				78	75	75	-3%	-4%

Le tableau 5.30 met en évidence qu'un ordonnancement croissant peut réduire le temps de calcul de RBCWL 2.1. De plus, ce même effet n'apparaît pas pour la formulation RBCWL 3. Notons que la formulation RBCWL 2.1 utilise une contrainte de bris de symétrie qui calcule des coefficients croissants (l^2), encore une fois nous observons que lorsque les coefficients des contraintes sont croissants un ordonnancement croissant des données va produire des meilleurs résultats.

De plus, les contraintes des formulations RBCWL 3 et RBCWL 5 possèdent des coefficients décroissants, nous observons que pour ces types de coefficients des

ordonnements décroissants des données permettent des réductions du temps de calcul plus grandes.

5.2.6 Conclusions

Nos expérimentations démontrent que l'ordonnement des données exerce un impact sur le temps de calcul de la résolution optimale. Nonobstant, les valeurs relaxées ne présentent pas des changements dans nos expérimentations.

Dans le tableau 5.31, nous présentons un bilan des résultats obtenus dans cette section.

Tableau 5.31 – Bilan des résultats de l'ordonnement des données

Formulation	Temps moyen A	Temps moyen C	Temps moyen D	% Variation Temps de Calcul – C	% Variation Temps de Calcul – D
BCWL–hiérarchique-BW 2.1	41 636	23 048	31 951	-56%	-39%
BCWL–RV 1	165803	83104	274933	-50%	66%
BCWL–RV 4	39763	21340	31894	-46%	-20%
BCWL	52514	34762	38488	-34%	-27%
RBCWL 2.1	96	79	96	-18%	0%
BCWL–lexico-BW 1	9765	7988	8154	-18%	-17%
BCWL–lexico 1.4	19537	17076	19514	-13%	0%
BCWL–lexico 1.2	17466	15995	19471	-8%	11%
BCWL–hiérarchique-BW 5	17587	16840	14654	-4%	-17%
RBCWL 5	78	75	75	-3%	-4%
RBCWL 3	99	103	74	3%	-25%
BCWL–lexico-BW 2	17440	17909	15960	3%	-8%

Le tableau 5.31 nous montre que dans la plupart des cas, l'ordonnement croissant réduit dans une plus grande proportion le temps de résolution optimale. Ceci est observé pour la formulation BCWL-hiérarchique-BW 2.1, les formulations de réduction de variables et la formulation symétrique BCWL. Il est important de souligner que Jans et Desrosiers (2013) et Laporte et Coelho (2013) ont aussi observé un impact considérable sur le temps de calcul lorsque les données sont ordonnées soit de façon croissante ou décroissante.

Cependant, nous avons aussi remarqué que certaines formulations possédant des séries décroissantes de coefficients semblent mieux profiter de l'ordonnement décroissant de données. Tel est le cas des formulations RBCWL 3, RBCWL 5, BCWL-lexico-BW 2 et BCWL-lexico-BW 5.

D'après nos expérimentations, il semble exister un lien entre l'ordre des coefficients de contraintes de bris de symétrie et l'ordre des données à traiter. Ainsi, lorsque l'ordre des coefficients coïncide avec l'ordre des données, pour certaines formulations, le temps de résolution serait plus court.

Chapitre 6 – Conclusions

De façon générale, nous avons observé que le problème de symétrie dans les formulations en nombres entiers peut être contré a priori par l'application des techniques issues des approches de reformulation et d'ajout de contraintes. Plus précisément, dans ce mémoire nous avons constaté que ces approches peuvent se concrétiser par la modélisation de contraintes hiérarchiques, de contraintes lexicographiques, de contraintes de réduction de variables, par la perturbation de la fonction objectif et par la reformulation ARF.

Les expérimentations menées dans ce mémoire ont permis de comparer la performance de plusieurs formulations de bris de symétrie que nous avons modélisées pour résoudre le problème de balancement de la charge de wagons. Nous avons observé qu'une reformulation judicieuse de ce problème augmentée d'une contrainte lexicographique pour les wagons identiques (RBCWL 6) permet de résoudre ce problème 665 fois plus vite que la formulation symétrique BCWL.

De plus, nous avons aussi observé que la combinaison d'une contrainte lexicographique avec une contrainte hiérarchique (BCWL-lexico-BW 1) pour briser simultanément la symétrie entre les boîtes et les wagons identiques permet de réduire le temps de calcul de 81%. De surcroît, nous avons constaté que la perturbation de la fonction objectif appliquée sur cette dernière formulation peut permettre de réduire le temps de calcul du problème BCWL de 86%. Ceci est obtenu lorsque des coefficients compatibles (C2) ont été utilisés pour créer l'effet de perturbation.

Dans un premier temps, ce mémoire contribue à l'étude du bris de symétrie en démontrant l'efficacité de la reformulation ainsi que de la combinaison de certaines contraintes de bris de symétrie pour améliorer le processus de résolution d'un problème hautement symétrique. Nous avons aussi démontré l'efficacité de la perturbation de la fonction objectif et surtout la validité du concept de compatibilité qui permet de réduire le temps de calcul de façon importante.

Nos expérimentations permettent aussi de constater que l'ordonnement croissant de données permet généralement de réduire le temps de calcul dans une plus grande proportion. Par exemple, le temps de résolution de la formulation symétrique BCWL se réduit de 34% lorsque les données sont croissantes.

Toutefois, une autre contribution de ce mémoire consiste en l'observation que pour certaines formulations, il semble y avoir un lien entre l'ordre des coefficients des variables et l'ordre de données à traiter. C'est le cas des formulations BCWL-lexico-2 et BCWL-hiérarchique-BW 5 qui possèdent deux contraintes avec des coefficients décroissants. Pour ces formulations, le temps de calcul se réduit dans une plus grande proportion lorsque les données sont décroissantes. L'effet inverse est observé pour la formulation BCWL-hiérarchique-BW 2.1 qui possède deux contraintes avec des coefficients croissant. Pour cette formulation, le temps de calcul se réduit de façon plus importante pour les données croissantes.

Nous devons souligner que notre étude se concentre uniquement sur des techniques agissant au niveau de la formulation. Nous n'avons pas exploré l'approche dynamique de bris de symétrie. Il serait intéressant pour des recherches futures, d'effectuer des analyses comparées des performances des approches a priori versus des approches dynamiques afin de déterminer les bénéfices de ces approches.

Finalement, nous pouvons évoquer que dans ce mémoire nous avons limité l'étude de la symétrie à une seule application pratique. Puisque il existe plusieurs situations où la symétrie est présente, d'autres applications pratiques peuvent aussi être traitées afin de continuer à contribuer à la recherche dans le domaine.

Bibliographie

Alemanly, J., Magnano, F., Moitre, D., Pinto, H. (2014). Symmetry issues in mixed integer programming based unit commitment. *Electrical Power and Energy Systems*, 54, p. 86-90.

Bosch, R., Trick, M.A. (2005). *Integer Programming. Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques*. Chapter 3, E.K. Burke and G. Kendall (eds.), Springer, p. 69-95.

Coelho, L.C., Laporte, G. (2013). Improved Solution for inventory-routing problems through valid inequalities and input ordering. *International Journal of Production Economics*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.11.019>

Cohen, D., Jeavons, P., Jefferson, C., Smith, J.C., Petrie, K.E. (2006). Symmetry definitions for constraint satisfaction problems. *Lecture Notes in Computer Science, Springer*, 3709, p. 17-31.

Crama, Y., Oerlemans, A.G. (1992). A column generation approach to job grouping for flexible manufacturing systems. *European Journal of Operational Research*, 78, p. 58-80.

Campêlo, M., Campos, V.A., Corrêa, R. (2008). On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring polytope. *Discrete Applied Mathematics*, 156, p. 1097–1111.

Eppen, G.D., Gould, F.J., Schmidt C.P., Moore, J.H., Weatherford, L.R. (1998). *Introductory Management Science: Decision Modeling with Spreadsheets*. Prentice-Hall International (UK) Limited, London, 702 p.

Fanti, M.P., Stecco, G., Ukovich, W. (2011). Solving scheduling problems in distribution centers using symmetry breaking constraints. *Conference on Automation Science and Engineering (CASE), IEEE*, p. 58-65.

Fulkerson, D.R., Nemhauser, G.L., Trotter, L.E. (1974). Two computationally difficult set covering problems that arise in computing the 1-width of incidence matrices of Steiner triple system. *Mathematical Programming Study*, 2, p. 72-81.

Gent, I.P., Petrie, K.E., Puget, J-F. (2006). *Symmetry in Constraint Programming*. Handbook of Constraint Programming, Chapter 10, Rossi, F., Van Beek, P., Walshc, T. (eds), Elsevier, Amsterdam, p. 329-376.

Ghoniem, A., et Sherali, H. D. (2011). Defeating symmetry in combinatorial optimization via objective perturbations and hierarchical constraints. *IEE Transactions*, 43, p. 575-588.

Ghoniem, A. (2007). *Enhanced Formulations for Minimax and Discrete Optimisation Problems with Applications to Scheduling and Routing*, Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, 204 p.

Jans, R., Desrosiers, J. (2013). Efficient symmetry-breaking formulations for the job grouping problem. *Computers and Operations Research*, 40, p. 1132-1142.

Jans, R., Desrosiers, J. (2010). Binary clustering problems: symmetric, asymmetric and decomposition formulation. *Les Cahiers du GERAD, G-2010-44*, 15 p.

Jans, R. (2009). Solving lot-sizing problems on parallel identical machines using symmetry-breaking constraints. *INFORMS Journal on Computing*, 21(1), p. 123-136.

Jans, R., Degraeve, Z. (2008). A note on a symmetrical set covering problem: The lottery problem. *European Journal of Operation Research*, 186, p. 104-110.

Margot, F. (2010). Symmetry in integer linear programming. In: *Junger M, et al., editors. 50 Years of Integer Programming 1958–2008: From the Early Years to The State-of-the-Art*, Springer, p. 647–686.

Martello, S., Toth, P. (1990). *Knapsack Problem Algorithms and Computer Implementation*. Chapter 8, John Wiley and sons Ltd, p. 221-245.

Nemhauser, G.L., Wolsey, A. (1988). *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley and sons, New York, 784 p.

Ostrowski, J., Anjo, M.F., Vannelli, S.A. (2010). Symmetry in scheduling problems. *Les Cahiers du GERAD, G–2010–69*, 15 p.

Ostrowski, J. (2008). *Symmetry in Integer Programming*. Thèse de doctorat. Lehigh University, 123 p.

Plastria, F. (2002). Formulating logical implications in combinatorial optimisation. *European Journal of Operational Research, 140*, p 338–353.

Proll, L., Smith, B. (1998). Integer linear programming and constraint programming approaches to a template design problem. *INFORMS Journal on Computing, 10(3)*, p. 265-275.

Sarker, R.A., Newton, C.S. (2007). *Optimisation Modeling: A Practical Approach*. CRC, Press, Taylor and Francis Group, 504 p.

Sherali, H.D., Smith, J.C. (2001). Improving discrete model representations via symmetry considerations. *Management Science, 47(10)*, p. 1396–1407.

Sherali, H.D., Fraticelli, B.M.P., Meller, R.D. (2003). Enhanced model formulations for optimal facility layout. *Operations Research, 51(4)*, p. 629–644.

Williams, H. P. (2013). *Model Building in Mathematical Programming*. 5th Edition, Wiley, New York, 432 p.

Wolsey, L.A. (1998). *Integer programming*. John Wiley and sons, New York, 264 p.

ANNEXE

Tests additionnelles

Tableau 7.1 – Tests formules additionnelles

BCWL-hiérarchique- BW 2	Temps moyen de Calcul	Nb moyen de Nœuds	LP	IP	% Variation Temps de Calcul	% Variation Nb de Nœuds
1-20 (4;40)	1 334	7 006	0,70	2,13	16%	-62%
21-40 (5;50)	7 003	25 495	0,10	2,54	58%	-75%
41-60 (5;60)	18 545	56 914	0,00	2,26	22%	-85%
61-80 (6;60)	47 779	102 556	0,00	2,53	184%	-74%
81-100 (5;80)	85 653	184 772	0,00	2,12	-23%	-93%
101-120 (4;100)	98 788	243 335	0,00	1,53	-41%	-94%
	43 184	103 346	0,13	2,18	-18%	-92%
BCWL-hiérarchique- BW 2.1						
1-20 (4;40)	931	6 219	0,700	2,125	-19%	-66%
21-40 (5;50)	6 367	24 819	0,100	2,540	43%	-75%
41-60 (5;60)	19 858	67 549	0,000	2,260	31%	-83%
61-80 (6;60)	39 469	81 448	0,000	2,533	135%	-79%
81-100 (5;80)	95 725	229 941	0,000	2,120	-14%	-91%
101-120 (4;100)	87 465	239 640	0,000	1,525	-47%	-94%
	41 636	108 270	0,13	2,18	-21%	-91%
BCWL- hiérarchique- BW 3						
1-20 (4;40)	788	5 315	0,70	2,13	-31%	-71%
21-40 (5;50)	3 922	13 944	0,10	2,54	-12%	-86%
41-60 (5;60)	8 334	27 638	0,00	2,26	-45%	-93%
61-80 (6;60)	22 922	65 541	0,00	2,53	36%	-83%
81-100 (5;80)	56 745	148 823	0,00	2,12	-49%	-94%
101-120 (4;100)	59 615	171 208	0,00	1,53	-64%	-96%
	25 387	72 078	0,13	2,18	-52%	-94%
BCWL- hiérarchique- BW 4						
1-20 (4;40)	859	5 372	0,70	2,13	-25%	-71%
21-40 (5;50)	4 117	14 057	0,10	2,54	-7%	-86%
41-60 (5;60)	8 124	26 803	0,00	2,26	-46%	-93%
61-80 (6;60)	17 474	46 499	0,00	2,53	4%	-88%
81-100 (5;80)	37 788	99 395	0,00	2,12	-66%	-96%
101-120 (4;100)	49 823	138 083	0,00	1,53	-70%	-97%
	19 698	55 035	0,13	2,18	-62%	-96%
BCWL-lexico-BW 2.2- 20						
1-20 (4;40)	468	5 260	0,70	2,13	-59%	-72%
21-40 (5;50)	3 267	13 177	0,10	2,54	-26%	-87%
41-60 (5;60)	6 987	25 723	0,00	2,26	-54%	-93%
61-80 (6;60)	15 988	52 540	0,00	2,53	-5%	-87%
81-100 (5;80)	29 610	85 196	0,00	2,12	-73%	-97%
101-120 (4;100)	45 473	130 977	0,00	1,53	-73%	-97%
	16 966	52 145	0,13	2,18	-68%	-96%

Tableau 7.2 – Composition formules additionnelles

BCWL-hiérarchique- BW 2	<ul style="list-style-type: none"> • BCWL • Hiérarchique 1 • Hiérarchique 2.3 	(4.5) à (4.10) (4.11) (4.28)
BCWL-hiérarchique- BW 2.1	<ul style="list-style-type: none"> • BCWL • Hiérarchique 1.1 • Hiérarchique 2.3 	(4.5) à (4.10) (4.14) (4.28)
BCWL-hiérarchique- BW3	<ul style="list-style-type: none"> • BCWL • Hiérarchique 1.2 • hiérarchique 2.4 	(4.5) à (4.10) (4.15) (4.31)
BCWL-hiérarchique- BW4	<ul style="list-style-type: none"> • BCWL • Hiérarchique 1.3 • hiérarchique 2.4 	(4.5) à (4.10) (4.18) (4.31)
BCWL-lexico- BW 2.2- 20	<ul style="list-style-type: none"> • BCWL • Lexicographique 1.2 • Lexicographique 2.2 (n = 20) 	(4.5) à (4.10) (4.35) (4.38)

Retrait d'une ou des pages pouvant contenir des renseignements personnels