

HEC MONTRÉAL

Étude des écarts Porc/Boeuf et Blé/Soja, dans un contexte de substitutions et d'interrelations économiques

par
Romain Bui

Département Science de la gestion (Ingénierie Financière)

Mémoire présenté
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

Février, 2014

© Romain Bui, 2014.

HEC MONTRÉAL
MSC. Ingénierie financière

Ce mémoire intitulé:

Étude des écarts Porc/Boeuf et Blé/Soja, dans un contexte de substitutions et d'interrelations économiques

présenté par:

Romain Bui

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Prénom	Président	Nom	Président,	président-rapporteur
Nicolas		Papageorgiou,		directeur de recherche
Bruno		Remillard,		codirecteur

Mémoire accepté le:

RÉSUMÉ

Les écarts entre instruments financiers ont été l'objet de nombreuses recherches aux cours de ces dernières années. Il est à noter cependant l'emphase de la recherche sur certains instruments, au détriment d'autres. Ainsi les commodités aurifères, pétrolières et obligataires représentent une grande partie de la littérature, et on dénote peu de recherches portants sur les commodités agricoles.

L'objectif de ce mémoire consiste en la transposition et l'amélioration des modèles connus sur l'or et le pétrole sur les commodités agricoles. Plus particulièrement il s'agit d'appliquer un modèle de type 'double Ornstein Uhlenbeck' sur l'écart Porc/Boeuf. Ce modèle fût précédemment utilisé dans la littérature sur l'écart Or/Argent (Dempster *et al.* (2008)). Ce même modèle sera appliqué sur l'écart Blé/Maïs. L'amélioration consistera à lier ces deux écarts via une matrice de covariance. Les hypothèses de stationnarité des écarts seront testées via un test développé par Rémillard (2012) utilisant la statistique de Smirnov Kolmogorov.

Ce premier modèle montrera des difficultés numériques importantes, dont la résolution dépasse le champ de notre mémoire. La deuxième partie de notre recherche consistera alors à utiliser un modèle plus simple. Cette nouvelle approche consistera en une modélisation à un facteur, c'est à dire que nous n'assumerons plus une moyenne stochastique. Nous appliquerons ce modèle aux différents ratios, et démontrerons que la transposition d'un modèle auparavant utilisé sur les commodités précieuse donne de bons résultats sur les commodités agricoles. Dans un second temps il s'agira d'améliorer cette approche à un facteur en offrant une modélisation un facteur de deux écarts liés par une matrice de covariance statique. Les résultats démontrent une diminution de la variance des estimateurs en comparaison avec un modèle à un ratio. Ils démontrent l'apport important de l'utilisation de l'information contenu dans le prix des grains pour expliquer celui des viandes et vice versa ouvrant ainsi le champ à de nouvelles recherches.

Mots clés: Écart, Blé, Maïs, Soja, Porc, Boeuf.

REMERCIEMENTS

Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'aide précieuse, et le support de nombreuses personnes, je tenais à souligner leur participation en préambule de ce mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement mon Directeur de mémoire M. Papageorgiou qui a su se montrer compréhensif et disponible lors des moments les plus critiques. M. Rémillard, qui en tant que Co-Directeur a apporté une contribution déterminante dans la résolution des modèles.

J'adresse également ma gratitude tout particulière à M. Belghazi et M. Leung, qui en tant qu'amis et élèves d'HEC Montréal ont su m'apporter un soutien inconditionnel dans la recherche de solutions, et l'implantation numérique.

Enfin, je n'oublie ma famille et ma conjointe sans lesquels je n'aurai certainement pas eu la détermination qui me permis de mener à bien ce projet de longue haleine.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
REMERCIEMENTS	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES TABLEAUX	viii
LISTE DES FIGURES	ix
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 : ASPECTS FONDAMENTAUX	3
2.1 Les Grains	3
2.2 Les Viandes	7
2.3 Structures à termes et Séries Temporelles	10
2.4 Justification du sous-jacent de l'étude	13
2.5 Les Contrats	14
CHAPITRE 3 : REVUE DE LITTÉRATURE	16
3.1 Modélisation des prix des commodités	16
3.2 Modélisation des écarts (ou ratio)	20
3.3 Résumé et conclusion sur la modélisation	23
CHAPITRE 4 : BASE DE DONNÉES	25
CHAPITRE 5 : ANALYSE DE DONNÉES	27
5.1 Statistiques Descriptives, et Normalité	27
5.2 Test de Cointégration	30
5.3 Test de Stationnarité	32

CHAPITRE 6 : MODÉLISATION	35
6.1 Discussion sur le modèle de Dempster <i>et al.</i> (2008)	35
6.2 Modèle 1	36
6.2.1 Dérivation	37
6.2.2 Discussion sur les défis numériques	46
CHAPITRE 7 : MODÉLISATION ALTERNATIVE	48
7.1 Réflexion	48
7.2 Modélisation à un facteur sans composante de moyenne stochastique . .	48
7.2.1 Modèle	48
7.2.2 Dérivation	48
7.2.3 Estimation	49
7.2.4 Résultat - Porc / Boeuf	50
7.2.5 Résultat - Blé / Soja	50
7.2.6 Discussion des résultats	51
CHAPITRE 8 : MODÉLISATION À DEUX ÉCARTS	52
8.1 Réflexion	52
8.2 Modélisation à un facteur avec deux écarts sans composante de moyenne stochastique	52
8.2.1 Modèle	52
8.2.2 Dérivation	52
8.2.3 Estimation	53
8.2.4 Résultats	54
8.2.5 Discussion des résultats	56
CONCLUSION	58
BIBLIOGRAPHIE	59
ANNEXE A : INTÉRÊTS COUVERTS	62

ANNEXE B :	MÉTHODE DE BOOTSTRAP DANS LE CADRE DU TEST DE STATIONNARITÉ	66
ANNEXE C :	ÉQUATIONS DU FILTRE DE KALMAN	67

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Tableau récapitulatif de la littérature concernant la modélisation d'une commodité	23
3.2	Tableau récapitulatif de la littérature concernant la modélisation d'un écart sur commodités	23
5.1	Statistiques Descriptives pour la Maturité 6 mois	27
5.2	Statistiques Descriptives pour la Maturité 12 mois	28
5.3	Statistiques Descriptives pour la Maturité 18 mois	28
5.4	Statistiques Descriptives pour la Maturité 24 mois	28
5.5	Résultats du test de cointégration Porc/Boeuf	30
5.6	Résultats du test de cointégration Blé/Soja	30
5.7	Résultats du test de stationnarité Porc/Boeuf	33
5.8	Résultats du test de stationnarité Blé/Soja	33
7.1	Résultat modèle à un écart : Porc/Boeuf	50
7.2	Résultat modèle à un écart : Blé/Soja	50
8.1	Modèle à deux écarts, partie 1 : Porc/Boeuf	54
8.2	Modèle à deux écarts, partie 2 : Blé/Soja	55
8.3	Résultat modèle à deux écarts, partie 3 : la relation de dépendance entre les deux écarts	55
8.4	Résumé des résultats du modèle à deux écarts - Variance des estimateurs	57

LISTE DES FIGURES

2.1	Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Maïs, acheteur et vendeur	6
2.2	Intérêts ouverts (en milliers) des Spéculateurs sur Maïs, acheteur et vendeur	6
2.3	Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Maïs, acheteur et vendeur	9
2.4	Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Maïs, acheteur et vendeur	9
2.5	Structure à terme du prix du Maïs au 13 février 2014	11
2.6	Structure à terme du prix du Porc au 13 février 2014	11
2.7	Séries Temporelles du Contrat à Terme sur Maïs à maturité la plus courte	12
2.8	Séries Temporelles du Contrat à Terme sur Porc à maturité la plus courte	13
5.1	Écart, Porc/Boeuf (18 mois)	34
5.2	Écart, Ble/Soja (18 mois)	34
A.1	Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Blé, acheteur et vendeur	62
A.2	Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Blé, acheteur et vendeur	63
A.3	Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Soja, acheteur et vendeur	63
A.4	Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Soja, acheteur et vendeur	64
A.5	Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Boeuf, acheteur et vendeur	64

A.6 Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur
Boeuf, acheteur et vendeur 65

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Le marché des commodités est décomposé en quatre grandes catégories : les énergies, les métaux, les viandes, et les produits agricoles. Les énergies et les métaux dont les principaux composants sont : l'or, l'argent, le pétrole et le gaz naturel ont fait l'objet de nombreuses recherches. La majorité de ces dernières étudient les écarts *spread* entre deux commodités dont l'effet de substitution est connu. Par exemple l'écart or/argent, l'écart pétrole/gaz naturel, ou encore entre le pétrole américain (WTI) et le pétrole mondial (Brent). La relation d'arbitrage ou de pseudo arbitrage permet d'établir les modèles, qui sont souvent de fait de type retour à la moyenne.

L'effet de substitution entre les viandes porcs et bœuf est évident d'un point de vue de consommation, pourtant peu de recherches ont tenté de réaliser une étude sur cet écart. Nous proposons donc dans un premier temps de transposer les modèles de la littérature sur l'écart porc/boeuf.

Évidemment l'effet de substitution n'est pas parfait. Entre autre, la production de ces deux viandes fait appel à des besoins en grains différents. Plus particulièrement l'alimentation du porc peut-être constituée de blé ou de maïs, tandis que l'alimentation des vaches demande une grande quantité de maïs. Dans un second temps nous proposons donc d'améliorer les modèles en considérant non pas un écart mais deux écarts.

L'objectif de notre recherche est donc en deux parties, la première consistera à prouver qu'un modèle utilisé sur les marchés des énergies ou des métaux peut être appliqué à des commodités de type viande ou grain. La seconde partie, consistera à prouver que la combinaison du modèle sur les viandes et de celui sur les grains constitue une amélioration par rapport aux modèles individuels. En d'autre terme, que les écarts sur les grains permettent d'expliquer les écarts sur les viandes.

Plus spécifiquement, il s'agira dans un premier temps de transposer l'approche à deux facteurs proposée par Dempster (2008) sur un écart de grain et un écart de viande séparément. Le modèle de Dempster consiste en un processus de retour à une moyenne

de type stochastique. Dempster applique son modèle sur des écarts de pétrole ou d'or/argent. Tel que précisé précédemment, il s'agira alors dans un second temps, de lier les deux modèles sur les grains et les viandes, afin de déterminer l'apport de l'information combinée sur la modélisation. Il s'agira alors de re-dériver le modèle mathématique pour y inclure les deux composantes et de déterminer une méthode d'estimation adéquate en fonction des nouvelles hypothèses. Il s'avèrera cependant que l'implémentation de ce modèle se heurtera à des problèmes numériques dont la solution dépasse le champ de notre recherche.

Ainsi, nous choisissons de relâcher l'hypothèse de moyenne stochastique, mais conservons la relation de dépendance entre les deux écarts. Nous transposerons ainsi tout d'abord le modèle dit à 'un facteur' sur l'écart de viandes puis sur l'écart de grain. Nous prouverons ainsi qu'une transposition de modèle initialement utilisé sur les commodités de type énergétique peut être faite sur des commodités de type viande ou grain, et ce, malgré les différences de dynamiques de marché. Par la suite nous lierons les deux modèles à un facteur en un seul et unique modèle afin de démontrer l'apport d'une approche combinatoire dans le cadre des grains et des viandes.

Les résultats démontrent que l'approche combinatoire ajoute de la valeur à une approche classique en diminuant la variance de la plupart des estimateurs. Nous ouvrons de fait la voie à de nouvelles recherches impliquant la transposition d'autres modèles de la littérature sur commodités dures et la résolution numérique de problème de haute dimension du à la vectorisation de ces derniers.

CHAPITRE 2

ASPECTS FONDAMENTAUX

Avant d'élaborer un modèle inspiré de la littérature, il s'agit de comprendre les aspects fondamentaux inhérents aux commodités étudiées. Nous étudierons les deux grandes familles de commodités considérées : les grains et les viandes. Nous en expliquerons les différents aspects et en quoi leur choix est pertinent dans le cadre de notre étude.

2.1 Les Grains

Le marché des grains est l'un des marchés les plus vieux en finance. C'est en 1848 que le CBOT (Chicago Board of Trade), la zone d'échange standardisée de Chicago a offert le premier contrat à terme de gré à gré. Il s'agissait alors d'un contrat de 3000 boisseaux sur le maïs. Les premiers contrats à terme offraient de l'exposition sur les grains les plus utilisés à cette époque soit le maïs, le blé, et l'avoine. Ce n'est qu'en 1936 que l'on voit l'apparition des premiers contrats sur le soja, puis en 1950 les contrats sur la farine de soja, et l'huile de soja. Ces derniers deviendront par la suite les contrats majeurs. L'augmentation récente de la demande pour les instruments financiers sur commodités vient, entre autres, de l'automatisation électronique des marchés. Cette avancée se fait dès les années 1980 au CME (Chicago Market Exchange) avec l'implantation de la plateforme CME Globex.

Nous nous intéressons particulièrement aux contrats sur le blé, le maïs, et le soja. Actuellement, ces contrats sur les grains sont standardisés par le CME (Chicago Market Exchange) et se transigent majoritairement électroniquement. La fermeture de l'ensemble des contrats se fait par transactions monétaires et suit ainsi la méthodologie employée par les contrats à terme sur les matières premières dites dures (Or, Argent, Pétrole). Le marché électronique est ouvert entre 7 :00pm et 7 :45am CT du dimanche au vendredi, et entre 8 :30am et 1 :15pm CT du lundi au vendredi.

Pour les différents grains ils existent deux contrats à terme dits de taille standard ou de mini taille. Les mini contrats à terme sont d'une taille de 1 000 boisseaux tandis que les contrats de taille standard ont un sous-jacent de taille cinq fois plus grande. Notre étude portera sur les contrats de taille standard, ces derniers étant l'instrument privilégié des opérateurs en couvertures (*hedger*). Ils sont de fait plus sensibles à des aspects fondamentaux comme ceux présentés dans notre étude. Les contrats (de pleine taille) sur lesquels porte notre étude seront présentés de manière plus exhaustive par la suite.

Le CME offre également la possibilité de transiger des options européennes sur les contrats à terme des différents grains. On dénote trois types d'options. La première, l'option standard (*standard option*) est exerçable le dernier vendredi précédent deux jours avant la maturité du contrat. La seconde, l'option de communication série (*serial option*) est une option exerçable un mois avant l'option standard. Enfin, l'option hebdomadaire (*weekly option*) possède comme différentes maturités les autres vendredis ne correspondant pas aux maturités des deux options précédentes ou au dernier jour de transaction.

Si les commodités dites dures ont une proportion importante de spéculateurs, les commodités souples et plus particulièrement les grains possèdent deux acteurs principaux de marché : les opérateurs de couvertures, et les spéculateurs que l'on dénomme également parfois commerçants (*commercial*) et non-commerçants (*non commercial*). Les spéculateurs constituent effectuent des transactions généralement court terme et tentent d'anticiper des visions sur le marché. Les opérateurs de couverture sont, au contraire des spéculateurs, des agents économiques qui recherchent une couverture car ils sont exposés au prix des grains de par leurs activités. On trouve :

- Les **fermiers**, qui ont besoin de protection contre le déclin des prix, afin d'assurer un profit lors de la vente de la récolte
- Les **marchands**, ou quelconques intermédiaires qui souhaitent une protection entre le moment où ils achètent les grains et le moment où ils les revendent
- Les **sociétés de transformation agricole** (*food processor*) qui ont besoin de protection contre la montée des prix des grains qui servent de base pour leur produc-

tion

- Les **exportateurs**, qui ont besoin de protection contre des prix plus hauts pour des grains promis à la vente mais pas encore achetés
- Les **importateurs** qui souhaitent prendre avantage de prix bas pour des grains promis à l'achat mais pas encore vendus.

Les spéculateurs constituent les autres opérateurs du marché des grains. Ils effectuent des transactions généralement court terme et tentent d'anticiper des visions sur le marché.

La façon la plus aisée d'obtenir une vision de la répartition des acteurs de marchés consiste à utiliser le COT (*Commitments of trader*). Il s'agit d'un rapport publié tous les mardis, qui rapportent les intérêts couverts (*open interest*) entre les opérateurs de couverture et les spéculateurs. On rappelle que les intérêts couverts constituent le nombre de contrats actuellement ouverts est un bon indicateur de volume, ne prenant en effet pas en considération les multiples opérations sur un même contrat (comme le ferait le volume). Les intérêts couverts représentent ainsi une bonne mesure pour comparer les activités des spéculateurs et des agents de couverture, car elle ne sera pas biaisée par les multiples opérations des spéculateurs. Nous présentons les graphiques pour le maïs, les autres sont présents en annexe. Il est à noter que les conclusions sont identiques quelque soient les grains.

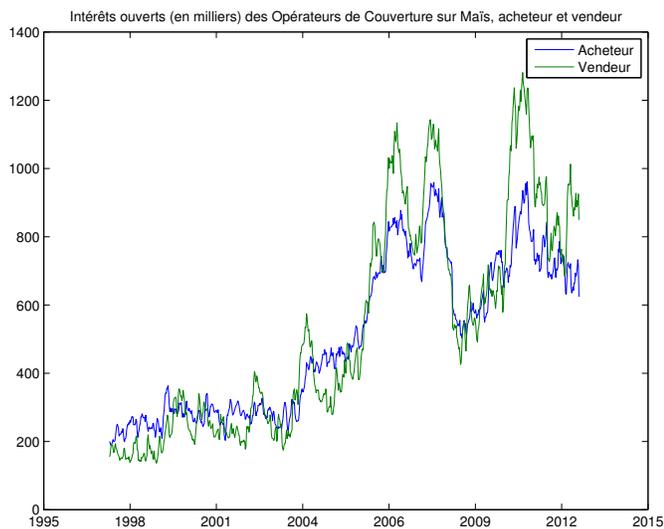


Figure 2.1 – Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Maïs, acheteur et vendeur

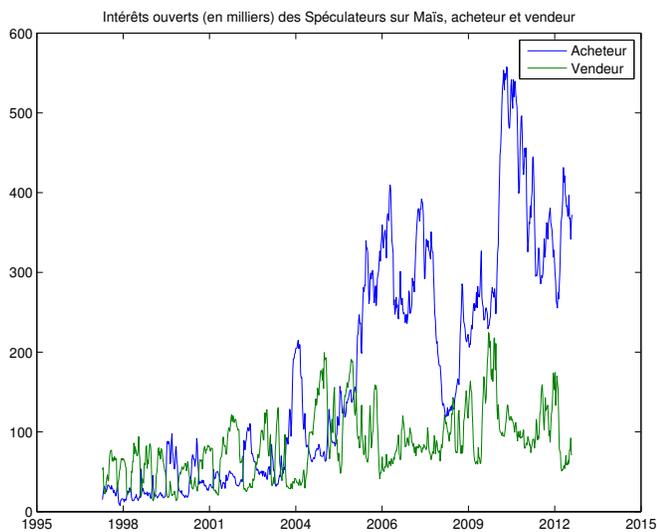


Figure 2.2 – Intérêts ouverts (en milliers) des Spéculateurs sur Maïs, acheteur et vendeur

On remarque qu'en moyenne le volume est plus de deux fois plus important chez les agents de couverture (autour de 800 000 contrats) que chez les agents spéculateurs (300 000 contrats). Le marché des grains offre donc des dynamiques d'offre et de demande différentes que les marchés quasi purement spéculatifs des commodités dures. En outre, il est à remarquer que les positions d'achats et de ventes ont un comportement similaire dans le cadre des opérateurs de couverture, tandis qu'aucune tendance commune ne se dessine entre les achats et les ventes en ce qui concerne les spéculateurs. Les raisons économiques sont simples. Les opérateurs de couvertures se couvrent à la hausse ou la baisse dépendamment de leur position dans la chaîne de production, à l'équilibre donc il y a donc autant de personnes acheteuses que vendeuses, en admettant qu'ils se couvrent tous environ dans les mêmes proportions, on comprend aisément pourquoi les intérêts ouverts acheteurs et vendeurs sont similaires. Les positions spéculatrices ne sont quant à elles que le simple produit des visions individuelles des agents, aucune raison donc pour lesquelles on devrait observer des liens entre positions acheteuses et vendeuses.

2.2 Les Viandes

Les viandes : Porc (*lean hogs*) et Bœuf (*live cattle*) se transigent sur le même marché que les grains (CME). Tout comme les contrats sur les grains, les contrats sur les viandes sont standardisés par l'organisme régulateur. Ce dernier assure, la quantité et la qualité, la maturité, et le point de livraison. Ainsi seul le prix est négociable. La majorité des contrats se transigent sur le CME Globex, la plateforme électronique du CME. En revanche les heures d'activités de ces contrats sont différentes de celles pour les grains. Ainsi, les transactions peuvent se faire en continu entre Lundi 9 :05am et vendredi 1 :55pm CT, avec pause quotidienne entre 4 :00pm et 5 :00pm CT. Il est à noter que l'existence d'un même organisme de centralisation des prix pour les grains et les viandes permet une cohérence entre les données.

Les contrats sur le porc et le bœuf sont de même taille : 40 000 livres. Il s'agit des contrats à terme standard sur lesquels notre étude portera. Nous présenterons de manières plus exhaustives leurs spécificités dans la section suivante.

Le CME offre la possibilité de transiger des options européennes sur les contrats, les échéances sont standardisées au dixième jour de chacune des maturités possibles du sous-jacent (Février, April, May, Juin, Juillet, Août, Octobre, et Décembre)

Tel qu'expliqué dans la section précédente, les commodités souples possèdent une dynamique plus fondamentale. On observe deux catégories d'acteurs principaux : les opérateurs de couverture, et les spéculateurs. Dans le cadre des opérateurs de couverture, on trouve :

- Les **éleveurs d'animaux** qui souhaitent se protéger contre le déclin des prix pour assurer leurs ventes
- Les **teneurs de parcs d'engraissement** (*feedlots*), qui sont chargés de poursuivre l'élevage des animaux à partir d'un certain âge (généralement 12 – 18 mois), et souhaitent donc se couvrir contre un déclin des prix
- Les **restaurants** ou autres revendeurs souhaitant se couvrir contre une hausse des prix
- Les **exportateurs et les importateurs**, l'un souhaitant se couvrir contre une baisse, l'autre contre une hausse

La dimension fondamentale de notre approche implique l'utilisation d'instruments à dynamique fondamentale. Tout comme dans le cadre des grains nous observerons les intérêts couverts entre les spéculateurs et les non-spéculateurs. On déduira alors le meilleur instrument pour notre étude.

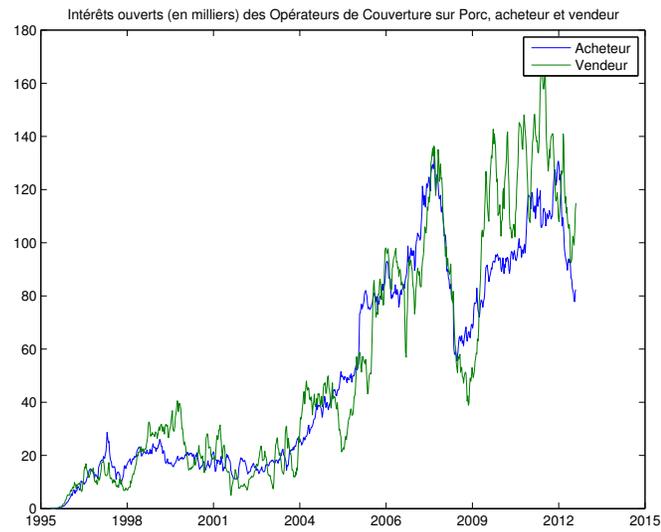


Figure 2.3 – Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Maïs, acheteur et vendeur

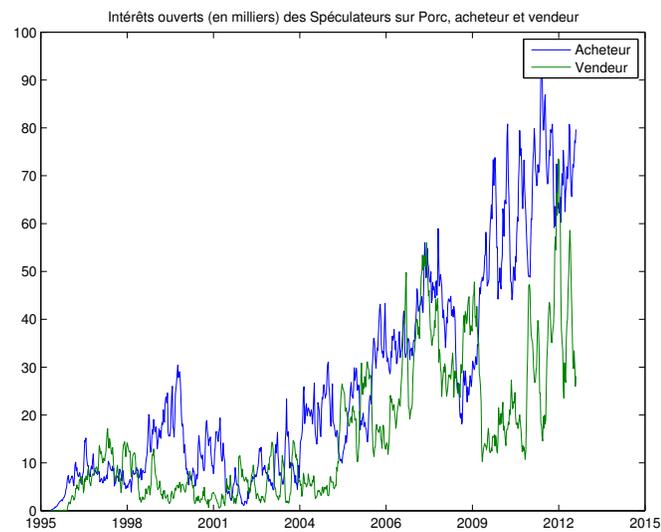


Figure 2.4 – Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Maïs, acheteur et vendeur

Nous présentons ici seulement les graphiques relatifs au Porc afin de ne pas surcharger le lecteur. Il est à noter cependant que la conclusion est la même en ce qui concerne le Bœuf. Les dynamiques sont similaires à celle des grains, soit des comportements équivalents entre positions acheteuses et vendeuses pour les acteurs commerciaux, et des comportements non corrélés (de visu) entre positions acheteuses et vendeuses pour les acteurs non commerciaux (spéculateurs). Ceci est dû aux mêmes raisons économiques que celles énoncées pour les grains soit un équilibre de marché impliquant des acteurs fondamentaux souhaitant se couvrir dans chacun des sens. Les comportements spéculatifs ont moins de tendances entre achat et vente, car ils ne sont que des reflets des visions individuelles des agents, ces dernières différant selon les analyses.

2.3 Structures à termes et Séries Temporelles

Nous présentons dans cette brève section une description de la structure à terme généralement observée sur les différents contrats à terme. La dynamique de la structure à terme ainsi que des prix est la même entre les différents grains, et entre les différentes viandes. Ainsi avec la même approche que dans les sections précédentes nous ne présenterons des analyses que sur le maïs et le porc. Comme dans beaucoup de marchés, la structure à terme des commodités souples est de type normale (contango), la majorité de ces marchés étant pour fin de couverture. La détention de l'actif n'intéresse pas l'investisseur, de fait la prime pour la détention de l'actif augmente engendrant une hausse des prix des contrats à terme avec la maturité. Il est à noter que la baisse des prix pour des maturités élevées est due à une baisse de volume importante, déséquilibrant l'offre et la demande. La même logique s'applique au cas des viandes. Nous présentons ci-bas les graphiques de la structure à terme.

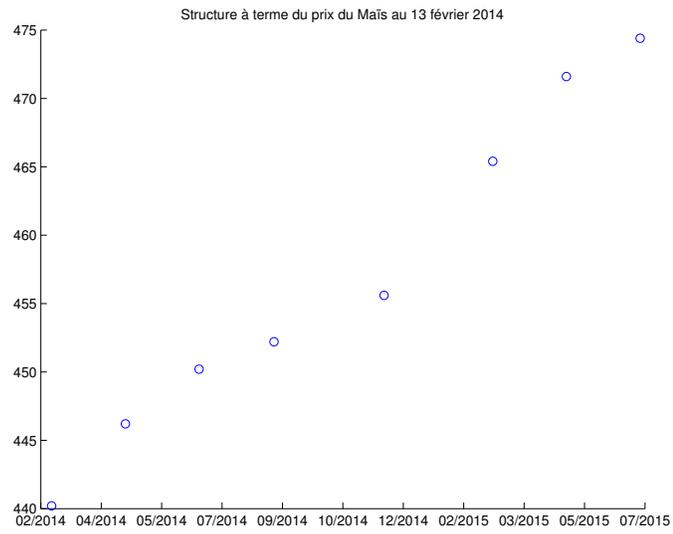


Figure 2.5 – Structure à terme du prix du Maïs au 13 février 2014

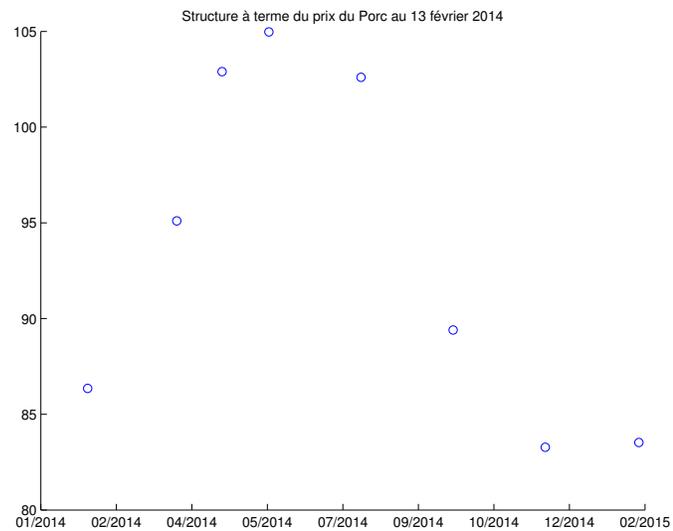


Figure 2.6 – Structure à terme du prix du Porc au 13 février 2014

Pour des fins de visualisation, ci-bas les graphiques des prix du contrat à terme à maturité la plus courte (*front month*) du porc et du maïs. Les augmentations importantes du prix des commodités en 2002 et 2008 comme nous l'explique De Gortem (2008), sont majoritairement dus à des aspects macroéconomiques tels le déclin de la valeur du dollar, la croissance du prix du pétrole, des changements fondamentaux dans l'offre et la demande avec l'augmentation de la demande asiatique, de mauvaises conditions temporelles, et une incapacité à réformer le système de production.

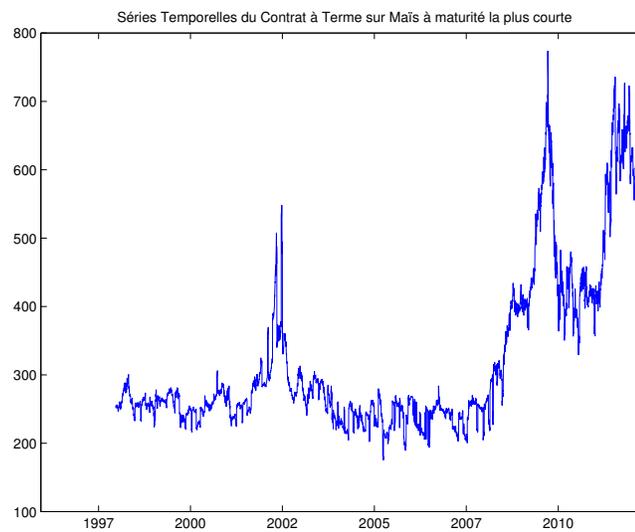


Figure 2.7 – Séries Temporelles du Contrat à Terme sur Maïs à maturité la plus courte

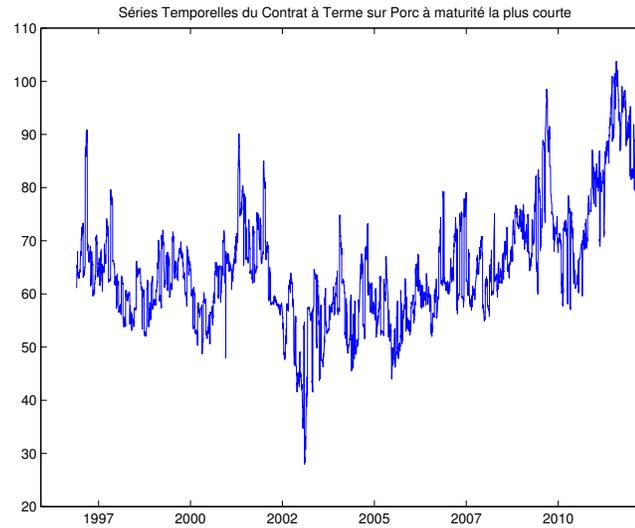


Figure 2.8 – Série Temporelle du Contrat à Terme sur Porc à maturité la plus courte

2.4 Justification du sous-jacent de l'étude

Notre modèle implique l'utilisation de dynamiques fondamentales entre les grains et les viandes, il est donc évident au regard de cette description que l'utilisation des contrats à terme standards est pertinente. En effet ces contrats sont les objets privilégiés par les acteurs de type couverture, et devraient donc de fait capturer mieux les aspects d'interrelations économiques. De plus, la standardisation de ces contrats par un même organisme régulateur assure la consistance de nos données. Nous avons donc établi le type de sous-jacent à utiliser. Il s'agit à présent de déterminer quels écarts seraient les plus appropriés. En d'autres termes, nous savons que l'écart des viandes sera constitué du porc et du boeuf, afin d'expliquer ce dernier nous avons à notre disposition trois grains : blé, maïs, et soja. Afin de déterminer quel ratio serait le plus optimal, nous étudierons dans la prochaine section les spécificités des contrats à terme de chacune des commodités.

2.5 Les Contrats

LC. Le contrat sur le bœuf (*Live Cattle*) est standardisé par l'organisme boursier de Chicago CME (*Chicago Market Exchange*). Il implique la livraison de 40 000 livres de bœuf vivant, d'une qualité standardisée par l'organisme de régulation. La livraison doit se faire dans une zone de 200 milles autour de l'abattoir. Il est important de noter que l'animal doit être né et élevé aux États-Unis. Le prix de la transaction est donné en centimes par livre. La maturité des contrats à terme est Février, Avril, Juin, Août, Octobre et Décembre.

LH. Le contrat sur le porc (*Lean Hogs*) est également standardisé par le CME (*Chicago Market Exchange*). Il implique la livraison de 40 000 livres de porcs sous forme de carcasses. La qualité est standardisée par l'organisme de régulation. La fermeture du contrat à terme se fait par transaction monétaire et non pas par livraison physique de la marchandise. Le prix du contrat est donné en centimes par livre. Les maturités des contrats à terme sont identiques à celles de ceux sur le bœuf.

C. Le contrat sur le maïs (*Corn*) est standardisé par le CME (*Chicago Market Exchange*). Il implique la livraison de 5 000 boisseaux de maïs dans des points de livraison déterminés par l'organisme régulateur. Les produits doivent être un mélange de trois qualités de maïs. Le maïs constitue la nourriture de base pour nourrir les porcs. Il permet d'atteindre les standards du contrat à terme sur cette viande, notamment en terme de taux de protéine. Le maïs est également la nourriture de base pour l'élevage de vaches.

W. Le contrat sur le blé (*Wheat*) est standardisé par le CME (*Chicago Market Exchange*). Il implique la livraison de 5000 boisseaux de blé dans des points de livraison déterminés par l'organisme régulateur. Les produits doivent être un mélange de trois qualités de blé. Le blé peut éventuellement constituer un substitut pour l'alimentation des porcs. Néanmoins, son taux en protéine élevé ne permet pas d'être un substitut complet au maïs, au risque de ne pas atteindre les standards du CME. Tout comme pour le porc le blé représente un complément souvent utilisé pour l'alimentation des vaches. Cependant, les spécifications sur les contrats à terme ne permettent pas non plus de nourrir les animaux exclusivement avec ce type de grain.

SB. Le contrat sur le soja (*Soybean*) est standardisé par le CME (*Chicago Market Exchange*). Il implique la livraison de 5 000 boisseaux de soja dans des points de livraison déterminés par l'organisme régulateur. Les produits doivent être un mélange de trois qualités de soja. Le soja possède un taux de protéine similaire à celui du blé. Il peut ainsi constituer un substitut à ce dernier dans le cadre d'une diète maïs-blé pour l'élevage du porc. En revanche en ce qui a trait à la diète des vaches, les graines de soja ne peuvent être utilisées comme substitut au blé dans le cadre d'une diète maïs-blé, les vaches tolérant mal l'alimentation à base de soja.

Il apparaît que l'écart blé/soja serait le plus approprié pour expliquer les variations de l'écart porc/boeuf. En effet dans un scénario de baisse des prix du soja par rapport au blé, les producteurs de porcs pourraient ajuster la diète de leurs animaux en augmentant la proportion de soja dans le mélange de grain, tandis que les producteurs de vache pourraient difficilement en faire autant. Il est évident que le différentiel de prix entre ces deux grains est un élément déterminant pour expliquer la différence de prix entre la viande bovine et porcine.

Le sous-jacent de notre étude sera donc : les contrats à termes standards pour différentes maturités portant sur le Porc, le Boeuf, le Blé, et le Soja. Nous étudierons les écarts Porc/Boeuf, et Blé/Soja. Dans le chapitre suivant, nous présenterons les différents approches que la littérature nous offre. Dans le chapitre relatif à la collecte de données nous présenterons la procédure relative à la collecte de donnée et en quoi cette approche permet d'ajuster pour les biais de marché.

CHAPITRE 3

REVUE DE LITTÉRATURE

La littérature concernant les commodités peut traiter du prix actuel ou du prix des contrats à terme. Elle se divise en deux grandes sections majeures : la première concerne l'étude d'une seule commodité tandis que la seconde concerne l'étude des écarts entre deux commodités.

Nous présenterons d'abord les modélisations relatives au prix d'une seule commodité puis celles relatives aux écarts. Cette vue d'ensemble nous permettra d'extraire les facteurs majeurs à inclure dans notre modèle.

3.1 Modélisation des prix des commodités

La modélisation des prix des commodités est divisée en trois grandes sous-sections. La première section traite le prix comme une conséquence des niveaux d'inventaires, il s'agit alors d'une vision fondamentale. La deuxième section utilise des processus stochastiques pour la modélisation et utilise entre autre le rendement d'opportunité (*convenience yield*) et les taux d'intérêt comme données explicatives. Enfin la troisième section concerne les développement plus récent plus particulièrement l'étude de l'impact de la spéculation ou des aspects fondamentaux sur les prix réel des commodités.

Une première approche sur les relations fondamentales est tout d'abord effectuée par Scheinkman et Schechtman (1983). Les auteurs démontrent l'importance du niveau d'inventaire sur le prix des matières premières. La relation fondamentale entre les prix actuels, ceux des contrats à termes, le rendement d'opportunité et les inventaires est ensuite démontrée par Brennan (1991). Ce dernier indique : que des niveaux d'inventaires bas engendreront un prix actuel élevé, de fait la valeur du rendement d'opportunité le sera également, puisque la valeur des contrats à terme n'augmentera pas autant que le

prix actuel (et vice versa).

Nous présenterons dans ce paragraphe les modélisations d'ordre mathématique par ordre chronologique.

Gibson et Schwartz (1990) posent les premiers jalons de la modélisation en proposant un modèle à deux facteurs. Le premier facteur étant le prix actuel (*spot*), le second étant la valeur du rendement d'opportunité (*convenience yield*). Les deux processus suivront des dynamiques de retour à la moyenne (Uhlenbeck et Ornstein (1930)), une modélisation privilégiée dans la littérature. Cette caractéristique de retour à la moyenne sera par ailleurs démontrée par Bessembinder *et al.* (1995). Dans son article, Swchartz (1990), l'auteur étudie en particulier le pétrole et conclut sur l'importance du facteur explicatif du rendement d'opportunité et sur les bons résultats d'un modèle de type Ornstein Uhlenbeck. Il précise notamment que l'utilisation d'un ajustement par une prime de risque de marché permet l'estimation de prix d'instruments dérivés court terme.

Miltersena et Schwartz (1998) améliorent le premier modèle de Gibson et Schwartz (1990) en introduisant un troisième facteur : la valeur du taux d'intérêt. Il ajoute également une différenciation entre les contrats à terme standardisés (*futures*) et les contrats à terme hors cote (*forward*). L'auteur démontre alors un apport supplémentaire grâce à une modélisation de la structure des taux inspirée entre autre du modèle de Merton (1973). Il parvient à obtenir une forme fermée pour la relation entre les prix à terme des commodités et les prix à terme des rendements d'opportunité. Enfin, Hilliard et Reis (1998) introduit une composante supplémentaire au modèle à trois facteurs de Schwartz en y ajoutant une composante de saut.

La littérature récente s'attarde beaucoup sur la composante spéculative et sur son influence sur les prix. La plupart des études s'attardent notamment au prix du pétrole qui a démontré des comportements variables au cours des années, par exemple une relation négative entre le volume des inventaires et le prix avant la crise de 1973, mais une relation positive ensuite. Frankel (2014) s'intéresse à l'impact des variables économiques

fondamentales sur le prix réel, plus particulièrement l'activité économique mesurée par le PNB, la politique monétaire mesurée par les taux d'intérêts. L'auteur ajoute la variable "spéculation" en utilisant les prévisions du marché. L'étude porte sur la stratégie *carry trade* autrement dit la différence entre le coût de possession physique (entreposage, entretien etc) et la prime du contrat à terme. L'auteur conclue que les variables suivantes sont les plus pertinentes : taux d'intérêt réel, coût d'entreposage, le rendement d'opportunité et la prime de risque du contrat à terme. En d'autres termes la spéculation est incluse dans la prime de risque. Frankel (2014) démontre donc qu'il existe bel et bien un impact de type spéculatif. Notre modèle est évidemment basé sur des relations fondamentales et ne considère donc de fait pas de tels impacts.

Kilian et Lee (2014) s'intéressent de plus près à l'importance de l'impact des mouvements de types spéculatifs sur le prix réel des commodités. Les auteurs analysent de multiples commodités mais plus particulièrement le pétrole. L'étude se concentre une méthode économétrique vectorielle de type autoregressif, autrement dit une version discrète d'un processus de type OU ; il s'agit d'observer l'influence des chocs spéculatifs sur le prix réel. Les auteurs concluent que la spéculation ne constitue pas un élément déterminant dans les changements du prix réel, selon eux les changements de la demande sont réellement les catalyses du prix.

Toujours dans le domaine de l'analyse fondamentale, Dvir et Rogoff (2014) étudient l'impact de catalyses fondamentaux spécifiques sur le prix du pétrole afin d'en expliquer les variations. Les variables d'analyses sont : l'inventaire, la production et les revenus, soit une étude dans la veine classique de l'offre et de la demande. Les auteurs parviennent à obtenir un vecteur cointégré liant ces variables à la valeur du prix réel du pétrole. Ils ajustent en revanche pour les régimes de l'offre. Ils concluent donc sur l'importance des facteurs fondamentaux mais également sur l'existence de régimes. Nous rappelons que notre modèle est dynamique mais ne prend pas en considération différents régimes spécifiques. L'importance des sous-jacents économiques, devrait entrainer des co-mouvements entre les commodités certains sous-jacents comme par exemple le GDP étant communs. West et Wong (2014) proposent d'analyser ces co-mouvements via une étude basé sur un modèle statique de "facteur". Il s'agit donc d'une analyse en com-

posante principale de différentes commodités. Les résultats sont probants et démontrent en effet l'existence de co-mouvements lorsque les régimes sont traités adéquatement. De surcroît les auteurs indiquent que les co-mouvements sont particulièrement significatifs pour les commodités de type métal mais le sont moins pour les commodités de type agricoles. La plupart de ces études se font, tout comme beaucoup d'études historiques, majoritairement sur le pétrole. Cette littérature récente tend à démontrer l'importance des facteurs fondamentaux au détriment des facteurs spéculatifs et l'existence de régime dans les comportements des commodités. Notre étude part d'une relation de substitution et analyse de fait les composantes fondamentales. En revanche, notre modèle n'en est pas un s'ajustant pour les régimes, il faudra considérer ceci dans de futures recherches.

3.2 Modélisation des écarts (ou ratio)

Il existe de nombreux modèles sur tous types d'écarts (*spread*) qui se divisent en deux catégories. Certains modèles traitent de la même commodité (*inter-spread*), comme l'écart entre le pétrole brut et le pétrole raffiné (*crack spread*). D'autres traitent de deux commodités différentes comme l'écart entre l'or et l'argent. Les commodités sous-jacentes sont souvent l'or, l'argent, le pétrole, les obligations gouvernementales, les obligations municipales ou encore les grains. Les viandes porcines et bovines sont peu présentes dans la littérature. Nous présenterons dans un premier temps les articles importants de la littérature concernant les écarts sur les matières premières (or, argent, pétrole, etc.). Dans un second temps, nous présenterons la littérature sur les matières agricoles (grains).

La littérature sur les matières premières (*hard commodities*) est la plus importante d'entre toutes, nous en présenterons les articles par ordre chronologique. Wahab *et al.* (1994) présente un modèle simple de prédiction du fameux ratio or-argent. Le modèle consiste à tester une relation linéaire entre le prix actuel et le prix futur, une relation qui devrait tenir dans un marché efficient, c'est-à-dire sans opportunités d'arbitrage. La régression impliquera un équilibre long terme fixe défini. La relation de non-arbitrage tient selon les résultats. Il reste impossible cependant de faire un profit sur les prédictions après les coûts de transactions. Les auteurs soulignent également l'importance de la mesure de l'écart. Selon eux la mesure optimale reste un ratio de type logarithmique.

Girma et Paulson (1998), s'intéressent à l'écart intra-commodité du pétrole. Les auteurs analysent l'écart entre le pétrole brut et le pétrole raffiné (*crack spread*), et en extraient la saisonnalité. À travers une analyse de variance ils extraient la saisonnalité de l'écart à la fois sur un plan hebdomadaire et mensuel. Ils proposent ensuite une méthode de positions systématiques sur certains mois pour profiter de cette saisonnalité. La stratégie s'avère profitable et démontre l'importance de la saisonnalité pour le pétrole. La force de ce modèle réside dans l'ajout de la composante saisonnière déterminante dans ces marchés.

Poitras (1998) offre une forme fermée du modèle de Bachelier, et propose d'utiliser

l'écart comme une variable et non une différence de deux. Cette dernière suivra un mouvement brownien géométrique simple. L'auteur montre ainsi une avancée importante dans la littérature en traitant l'écart comme une variable aléatoire unique.

Dempster *et al.* (2008) modélisent suivant la méthode de Poitras (1998) les différents écarts du pétrole : celui entre l'Europe et les États-Unis (*location spread*), et celui entre le pétrole brut et le pétrole raffiné (*crack spread*). Ils proposent deux modèles qui ne seront pas, comme le modèle initial, de simple mouvement brownien géométrique. Le premier consiste à modéliser l'écart via un processus de type Ornstein-Uhlenbeck, soit un processus stochastique avec retour à la moyenne. Le deuxième modèle contient deux facteurs. Les auteurs proposent d'utiliser deux processus Ornstein-Uhlenbeck modélisant l'écart et sa moyenne long terme. Un effet de saisonnalité est aussi dans le processus modélisant l'écart. Les auteurs concluent l'importance du second processus (la moyenne long terme) pour expliquer les deux types d'écarts. L'avantage de ce modèle réside dans la possibilité de mouvements dans la moyenne long terme de l'écart, ainsi les auteurs offrent la flexibilité d'un équilibre long terme oscillant autour d'une valeur. Les modèles précédents gardaient l'équilibre long terme fixe.

La littérature sur les écarts relatifs aux commodités agricoles est beaucoup moins importante. Johnson *et al.* (1991) proposent une analyse d'efficience sur le soja. L'efficience du marché est définie comme étant la réaction du marché face à des changements dans le processus de production. L'écart étudié concerne le soja pur, l'huile de soja, et les brisures de soja (*crush spread*). Les auteurs démontrent par une stratégie d'investissement que le marché de ce grain n'est pas efficace selon leur terminologie. Ils démontrent également l'importance du retour à la moyenne dans ce marché.

Barrett et Kolb (1995) s'intéressent à tous les écarts sur les grains (maïs, blé, soja) et concluent qu'il est difficile de faire des profits long terme sur ces commodités. Cet article n'amènera pas de recherche subséquente étant donné l'absence de profit potentiel dans le marché tel que démontré par les auteurs.

La littérature offre ainsi des modèles élaborés sur les marchés les plus populaires comme l'or et le pétrole. Les marchés agricoles ont été démontrés peu attractifs en terme de profit. Peu d'auteurs se sont alors lancés dans cette recherche. Nous proposons de

transférer les modèles les plus attractifs et de les appliquer aux marchés agricoles en les perfectionnant dans un deuxième temps.

3.3 Résumé et conclusion sur la modélisation

Voici un tableau récapitulatif des différents modèles présentés.

Tableau 3.1 – Tableau récapitulatif de la littérature concernant la modélisation d'une commodité

Auteur	Modèle
Brennan (1991)	Modèle fondamental sur prix actuel, contrat à terme, niveau d'inventaire et rendement d'opportunité
Gibson et Schwartz (1990)	Modèle à deux facteurs (prix actuel et rendement d'opportunité) avec composante de retour à la moyenne
Miltersena et Schwartz (1998)	Ajout du taux d'intérêt
Hilliard et Reis (1998)	Ajout d'une composante de saut
Frankel (2014)	Il existe un impact de type spéculatif
Kilian et Lee (2014)	L'impact spéculatif existe mais reste négligeable face aux changements de demande
Dvir et Rogoff (2014)	Les facteurs fondamentaux sont déterminants et l'offre possède des régimes
West et Wong (2014)	Il existe des co-mouvements entre les différentes commodités

Tableau 3.2 – Tableau récapitulatif de la littérature concernant la modélisation d'un écart sur commodités

Auteur	Modèle
Wahab <i>et al.</i> (1994)	Relation linéaire
Girma et Paulson (1998)	Analyse de variance pour extraire la saisonnalité
Postras (1998)	Utilisation de l'écart comme une variable unique et non deux
Dempster <i>et al.</i> (2008)	Modèle à deux facteurs, le prix actuel et sa moyenne. Les deux suivent un processus Ornstein Uhlenbeck décorrélé.

Au regard de ces écrits, il est certain que nous ne pourrions déroger à une modélisation impliquant un retour à la moyenne qui permettra de traiter également l'aspect saisonnier.

Nous expliquerons dans les chapitres subséquents en quoi notre modèle répond à ces critères.

CHAPITRE 4

BASE DE DONNÉES

L'ensemble des données ont été récupérées via Bloomberg, la récolte brute consiste à récolter l'ensemble des prix des contrats à terme depuis 1990 pour les commodités du blé, du soja, des carcasses de porc, et de bœuf, et ce pour toute les maturités disponibles. Les prix sont ceux offert par le marché de Chicago (CME)

Dans un second temps il s'agit de construire la base de données qui nous servira à estimer le modèle, soit pour chaque journée depuis 1990 il s'agit de trouver les prix des contrats à terme sur les contrats énoncés précédemment avec des maturités constantes soit : 6 mois, 12 mois, 18 mois, et enfin 24 mois. Évidement il existera rarement un contrat dont l'expiration sera exactement à la date souhaitée, on prendra alors celui dont la maturité est la plus proche de celle souhaitée. Nous obtenons une base de donnée constituée de 3874 observations, commençant le 2 janvier 1990 et finissant le 6 mars 2012.

Enfin les données sur les quatre commodités sont regroupées afin de ne conserver seulement les dates pour lesquelles les expirations des contrats à termes sont identiques. L'objectif est d'éviter tout biais dus à des contrats de spécificités différentes. Il est à remarquer également que nous ne considérons pas la valeur des contrats à termes lorsque leurs expirations sont proches (2 semaines de l'expirations), nous évitons ainsi les biais inhérents aux pressions lorsqu'il s'agit de contrats à livraisons physiques.

En suivant le choix proposé par Wahab, Cohn et Lashgari (1994) conforté par Schwartz (1997), nous proposons l'utilisation d'un ratio de type logarithmique, nous construisons ainsi deux écarts. Le premier, le ratio Porc/Boeuf : $\log\left(\frac{Prix_{porc}}{Prix_{boeuf}}\right)$, le second le ratio blé/soja : $\log\left(\frac{Prix_{ble}}{Prix_{soja}}\right)$. Les prix étant les prix pour les différentes maturités des contrats à terme.

La méthodologie proposée ainsi que l'univers de donnée considéré permet les avantages suivants :

- Pas de biais relatifs au type de fermeture de contrat, en ne considérant que les

contrats dont la maturité est supérieure à deux semaines

- Pas de biais relatifs à la maturité en ne prenant que des contrats dont les maturités sont identiques
- Pas de biais relatifs aux différentes heures de transaction en ne considérant que les prix à la fin de la journée
- Pas de biais fondamentaux géographique étant donné que toutes les commodités doivent provenir du sol américain
- Homogénéisation des données grâce à un seul et même organisme régulateur supervisant les différentes commodités

CHAPITRE 5

ANALYSE DE DONNÉES

Dans ce chapitre, nous présenterons les statistique descriptives relatives aux deux ratios précédemment énoncés, nous en étudierons entre autre la stationnarité et la cointégration.

5.1 Statistiques Descriptives, et Normalité

Nous avons vu dans les sections précédentes une description des différents contrats, et conclu sur le choix des instruments et des sous-jacents. Soit des contrats à terme standard sur le blé, le soja, le porc et le boeuf. Nous avons par la suite choisi la mesure de l'écart comme un ratio logarithmique. Nous présenterons dans un premier temps les statistiques descriptives afin de faire un choix approprié d'estimation, dans un second temps nous présenterons la cointégration et son importance ainsi que la stationnarité.

Voici les tableaux des statistiques descriptives pour les ratios logarithmiques et ce pour les différentes maturités

Tableau 5.1 – Statistiques Descriptives pour la Maturité 6 mois

	Porc/Boeuf	Blé/Soja
Moyenne	0.7797	0.7341
Écart-type	0.0802	0.1059
Aplatissement	5.1528	12.4365
Asymétrie	-0.3705	-1.6348
Min	0.0145	0.0025
Max	0.9876	0.9806
Nombre d'observations	3874	3874

Tableau 5.2 – Statistiques Descriptives pour la Maturité 12 mois

	Porc/Boeuf	Blé/Soja
Moyenne	0.8324	0.7306
Écart-type	0.0751	0.1100
Kurtosis	6.1468	10.2107
Skewness	-0.4130	-1.5627
Min	0.0156	0.0449
Max	0.9999	0.9926
Nombre d'observations	3874	3874

Tableau 5.3 – Statistiques Descriptives pour la Maturité 18 mois

	Porc/Boeuf	Blé/Soja
Moyenne	0.8490	0.7446
Écart-type	0.0718	0.0995
Kurtosis	3.5111	7.1990
Skewness	-0.4839	-0.8075
Min	0.5268	0.0341
Max	0.9998	0.9982
Nombre d'observations	3874	3874

Tableau 5.4 – Statistiques Descriptives pour la Maturité 24 mois

	Porc/Boeuf	Blé/Soja
Moyenne	0.8224	0.7448
Écart-type	0.1114	0.0878
Kurtosis	27.0018	2.8853
Skewness	-3.7471	0.1071
Min	0.0064	0.4939
Max	0.9999	1.0000
Nombre d'observations	3874	3874

La majorité des tests et des estimations se font dans un univers de type normale. Or il est aisé de remarquer que les séries observées ne sont pas exactement de type normales, les coefficients d'aplatissement ne sont en effet que rarement proches de 3, et ceux d'asymétrie sont différents de zéro. Ainsi il nous faut considérer des approches non-paramétriques. La méthode de filtration de Kalman même si meilleure dans un monde

gaussien reste valable dans le cadre d'autres distributions. Nous suivons ainsi la méthodologie privilégiée par Schwartz et Dempster. Quant au test de stationnarité il s'agira d'utiliser un test non-paramétrique comme celui de Kolmogorov-Smirnov.

5.2 Test de Cointégration

La cointégration entre les commodités est le point initial de notre étude, puisqu'elle permet de démontrer l'existence d'un équilibre long terme. En d'autres termes que les relations fondamentales entraîneraient le dit écart vers un point d'équilibre. Ceci viendrait confirmer une approche de type retour à la moyenne cette dernière étant le dit écart long terme.

Afin de tester la cointégration nous suivons la même procédure que Dempster *et al.* (2008), à savoir le test de Engle Granger à deux étapes. Il s'agit dans un premier temps d'estimer les résidus d'une régression linéaire entre deux séries temporelles, puis d'identifier que ces derniers sont intégrés d'ordre zéro, via un test de Dickey Fuller.

$$X_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t \quad (5.1)$$

$$H_0 = \varepsilon_t \text{ est pas intégré d'ordre } 0 \quad (5.2)$$

Avec X_t et Y_t les séries temporelles à tester, α et β des paramètres à estimer par moindres carrés ordinaires. Les résultats du test sont comme suit :

Tableau 5.5 – Résultats du test de cointégration Porc/Boeuf

	Porc/Boeuf			
Maturité	6mois	12mois	18mois	24mois
statistique T	-7.75	-7.46	-26.85	-23.62
P-Valeur	1e-03	1e-03	1e-03	1e-03

Tableau 5.6 – Résultats du test de cointégration Blé/Soja

	Blé/Soja			
Maturité	6mois	12mois	18mois	24mois
statistique T	-8.49	-12.33	-10.72	-8.62
P-Valeur	1e-03	1e-03	1e-03	1e-03

Il est à noter que la valeur 1e-03 est tout le temps la même car la valeur du t-test est inférieur aux tables internes de Matlab. La conclusion reste que pour toutes les maturités

et pour les deux ratios considérés les prix des contrats à terme sont cointégrés. Ceci vient confirmer une approche de type fondamentale et l'existence d'un équilibre long terme. En d'autres termes ces premiers résultats viennent justifier une approche de type retour à la moyenne.

5.3 Test de Stationnarité

Tel que précisé dans la section relative à la revue de littérature, une composante de retour à la moyenne (ou saisonnière) est primordiale dans le cadre de la modélisation des dynamiques des commodités.

Il s'agit donc de tester la stationnarité de manière strict des différentes données. Pour ce faire nous emploierons la méthodologie par Rémillard (2012). Dans son article "Non-parametric change point problems using multipliers" l'auteur nous présente une procédure pour détecter les changements dans les séries à partir de la statistique de Kolmogorov-Smirnov. Cette dernière pouvant être utilisée pour déterminer la distance entre deux séries de données. En l'occurrence il s'agira d'utiliser cette mesure pour comparer nos séries à un équivalent stationnaire. L'auteur propose d'utiliser le processus de somme cumulative :

$$\mathbb{A}_n(s, x) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{\lfloor ns \rfloor} [\mathbb{I}(X_i < x) - K_n(x)], (s, x) \in [0, 1] \times T \quad (5.3)$$

Avec :

$$K_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^{\lfloor ns \rfloor} \mathbb{I}(X_i \leq x) \quad (5.4)$$

L'auteur propose alors l'utilisation de la statistique de Kolmogorov-Smirnov

$$\tau_n = \sup_s \sup_x |\mathbb{A}_n(s, x)| \quad (5.5)$$

Il s'agit ensuite d'utiliser une méthode de *bootstrapping* pour créer une série de pseudo-observations stationnaires qui serviront de base à la comparaison. L'hypothèse nulle est l'absence de changements structurels dans la série, et de fait l'hypothèse alternative est la présence de changements structurels dans la série. Pour plus de détails sur la méthode et plus particulièrement sur l'approche de *bootstrapping*, nous invitons le lecteur à consulter l'article original de Rémillard (2012) et les annexes pour plus de détails.

En utilisant le script développé par Rémillard (2013) inclus avec son livre, nous obtenons les p-valeurs suivantes pour les maturités 6, 12, 18 et 24 mois, avec 100 échantillons

pour le bootstrap :

Tableau 5.7 – Résultats du test de stationnarité Porc/Boeuf

	Porc/Boeuf			
Maturité	6mois	12mois	18mois	24mois
P-Valeur	0%	0%	0%	0%

Tableau 5.8 – Résultats du test de stationnarité Blé/Soja

	Blé/Soja			
Maturité	6mois	12mois	18mois	24mois
P-Valeur	0%	0%	0%	0%

Nous rejetons l'hypothèse nulle de changement structurel, et prouvons de fait que les séries ne peuvent pas être considérées comme stationnaires. Cependant, tout comme Dempster *et al.* (2008) nous prouvons que les séries sont cointégrées toutefois nous faisons l'addition du test de changement structurel. Il faudra considérer la non-stationnarité du modèle dans ses limites. Il est fort probable que le test de stationnarité échoue de par l'existence des régimes dans les marchés des commodités présentés dans la revue de la littérature. Dans son article Arezki *et al.* (2014) démontrent en effet la stationnarité locale sur les commodités après ajustements pour les régimes.

Afin de ne pas surcharger le lecteur avec des graphiques répétitifs, nous proposons le graphique suivant comme un exemple d'écart. Les graphiques sont tous de la même forme, et démontre visuellement l'existence de régimes notamment aux alentours de 2007-2008.

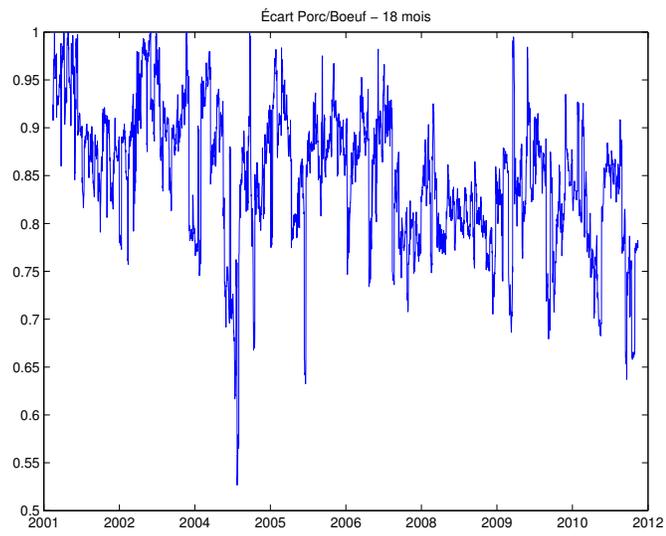


Figure 5.1 – Écart, Porc/Boeuf (18 mois)

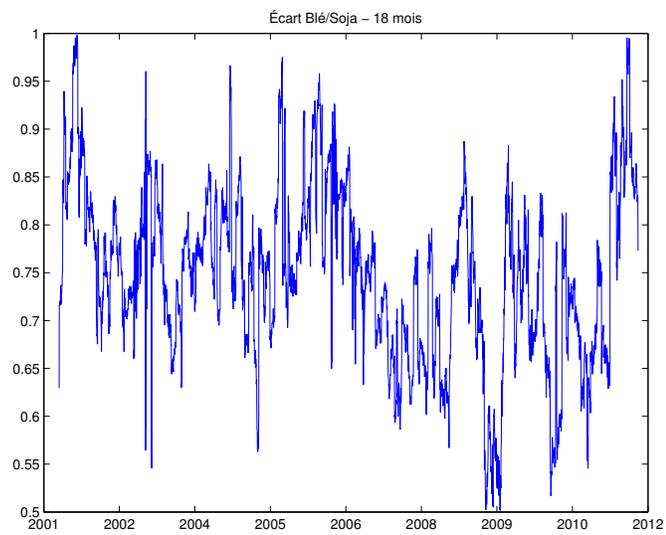


Figure 5.2 – Écart, Ble/Soja (18 mois)

CHAPITRE 6

MODÉLISATION

6.1 Discussion sur le modèle de Dempster *et al.* (2008)

Dans ce chapitre nous discuterons du modèle de Dempster *et al.* (2008) qui représente la base majeure du modèle implanté. Nous expliquerons en quoi nous modifions ce dernier, et quelles en sont les conséquences sur l'estimation. La modélisation implique dans un premier temps de définir l'objet de l'étude : l'écart. L'écart entre les prix est défini comme le ratio logarithmique tel que suit : $dS = \log(S_1/S_2)$, soit un écart en log différence dollar ou cents. Le défi consiste à obtenir les prix actuels qui ne sont pas observables puisque l'on observe seulement les prix des contrats à terme constituant la structure à terme. On sait qu'en absence d'arbitrage on a : $E(X_T|X_t) = F(t, T, X_t)$ sous une mesure risque neutre. Il est ainsi possible d'extraire la valeur des prix actuels en utilisant un taux sans risque, notre modèle assumera un taux sans risque constant dans le temps.

Dempster *et al.* (2008), dans son modèle à deux facteurs, propose une modélisation via un processus Ornstein Uhlenbeck de la forme :

$$dS_{1,t} = [\kappa_1(\theta_1 + \mu_{1,t} - S_{1,t}) + \lambda_1]dt + \sigma_1 dW_{1,t} \quad (6.1)$$

$$d\mu_{1,t} = (-\kappa_1^\mu \mu_{1,t} + \lambda_1^\mu)dt + \sigma_1^\mu dW_{2,t} \quad (6.2)$$

Les auteurs définissent ainsi l'écart S_t comme une seule variable suivant de fait la méthodologie de Poitras (1998). L'écart suit un processus de retour à la moyenne, l'auteur utilise une dynamique de type Ornstein Uhlenbeck (OU), privilégiée dans la littérature notamment par Miltersena et Schwartz (1998). L'avantage de cette méthodologie réside dans les formes fermées connues de ce processus stochastique, simplifiant grandement l'estimation. L'utilisation d'une mesure sans risque est un artifice de calcul, mais la calibration du modèle doit se faire dans une mesure de risque réelle, d'où l'incorporation

de la prime de risque λ . Cet ajout d'une prime de marché constante a été utilisé dans de précédentes recherches notamment Schwartz (1997). Les autres variables sont les composantes habituelles d'un processus OU avec κ la vitesse de retour, θ la composante fixe, μ la moyenne long terme, et enfin σ la volatilité du processus. Le modèle à deux facteurs définit la moyenne long terme comme étant elle-même stochastique et suivant un processus de retour à la moyenne de valeur zéro.

Dans son article, l'auteur propose une estimation via la méthode de maximum de vraisemblance, une méthode privilégiée dans les estimations statistiques dans des cadres gaussiens. L'hypothèse d'indépendance entre les deux processus simplifie l'estimation.

Tel qu'expliqué précédemment, notre modèle consiste en l'utilisation de l'information contenu dans un écart (Blé / Soja) pour en expliquer un second (Porc / Boeuf). Notre modèle consiste ainsi en une vectorisation de celui présenté ci-haut, nous définirons deux écarts qui suivront tous deux le modèle de Dempster *et al.* (2008) à deux facteurs, l'hypothèse d'indépendance ne sera néanmoins pas retenue puisque, tel que précisé précédemment, nous choisissons de modéliser à la fois les variations court termes et long termes.

6.2 Modèle 1

Notre premier modèle consiste ainsi à vectoriser le modèle de Dempster *et al.* (2008), tout en en supprimant l'hypothèse d'indépendance, le modèle sera ainsi de la forme :

$$dS_{1,t} = [\kappa_1(\theta_1 + \mu_{1,t} - S_{1,t}) + \lambda_1]dt + \sigma_1 dW_{1,t} \quad (6.3)$$

$$d\mu_{1,t} = (-\kappa_1^\mu \mu_{1,t} + \lambda_1^\mu)dt + \sigma_1^\mu dW_{2,t} \quad (6.4)$$

$$dS_{2,t} = [\kappa_2(\theta_2 + \mu_{2,t} - S_{2,t}) + \lambda_2]dt + \sigma_2 dW_{3,t} \quad (6.5)$$

$$d\mu_{2,t} = (-\kappa_2^\mu \mu_{2,t} + \lambda_2^\mu)dt + \sigma_2^\mu dW_{4,t} \quad (6.6)$$

$$dW_{i,t}dW_{j,t} = \rho_{i,j}dt \quad (6.7)$$

L'estimation par maximum de vraisemblance est plus compliquée lorsque l'hypothèse d'indépendance est rejetée, puisque la forme fermée du modèle n'est plus évi-

dente. La dérivation du modèle va nous permettre de trouver une méthode d'estimation appropriée.

6.2.1 Dérivation

Nous rappelons que le modèle s'écrit

$$dS_{i,t} = [\kappa_i(\theta_i + \mu_{i,t} - S_{i,t}) + \lambda_i]dt + \sigma_i dW_{k,t} \quad (6.8)$$

$$d\mu_{i,t} = (-\kappa_i^\mu \mu_{i,t} + \lambda_i^\mu)dt + \sigma_i^\mu dW_{j,t} \quad (6.9)$$

$$dW_{i,t}dW_{j,t} = \rho_{i,j}dt \quad (6.10)$$

Avec (i,j,k) = (1,2,1) ou (2,4,3) Les sections suivantes dériveront la forme fermée du modèle, il s'agit tout d'abord de trouver la forme fermée de la moyenne long terme μ puis d'en déduire la forme fermée de S_t , l'outil principal sera le même que celui utilisé pour dériver la forme fermée d'un modèle Ornstein Uhlenbeck classique, soit l'utilisation de la transformation : $f(x) = e^x$ puis l'application du lemme d'Itô.

6.2.1.1 Dérivation de la forme fermée pour μ

On développe dans un premier temps la forme fermée de μ .

$$d\mu_{i,t} = (-\kappa_i^\mu + \lambda_i^\mu)dt + \sigma_i^\mu dW_{j,t} \quad (6.11)$$

Tel que dans la méthode habituelle, on applique le lemme d'Itô (Ito (1944)) sur la transformation : $f(\mu_{i,t}, t) = \mu_{i,t} e^{\kappa_i^\mu(t)}$

On obtient :

$$df = \frac{df}{dt}dt + \frac{df}{d\mu}d\mu + 0.5 * \frac{d^2f}{d^2\mu} < d\mu > \quad (6.12)$$

$$df = \kappa_i^\mu(\mu_{i,t})e^{\kappa_i^\mu(t)}dt + e^{\kappa_i^\mu(t)}d\mu_{i,t} \quad (6.13)$$

$$df = dt[\kappa_i^\mu e^{\kappa_i^\mu} + e^{\kappa_i^\mu}(\lambda_i^\mu - \kappa_i^\mu \mu_{i,t})] + \sigma_i^\mu e^{\kappa_i^\mu} dW_{j,t} \quad (6.14)$$

En intégrant entre 0 et t :

$$\mu_{i,t} e^{\kappa_i^\mu(t)} = \mu_{i,0} + \int_0^t e^{\kappa_i^\mu(s)} (\lambda_i^\mu) ds + \int_0^t \sigma_i^\mu e^{\kappa_i^\mu} \quad (6.15)$$

$$\Leftrightarrow \mu_{i,t} = \mu_{i,0} e^{-\kappa_i^\mu(t)} + \frac{\lambda_i^\mu}{\kappa_i^\mu} (1 - e^{-\kappa_i^\mu(t)}) + \int_0^t \sigma_i^\mu e^{\kappa_i^\mu(s-t)} dW_{j,s} \quad (6.16)$$

On reconnaît la formule fermée (connue) d'un processus de type OU, aux ajustements prêts nécessaires pour l'ajout de la prime de risque de marché λ . Cette forme fermée nous permet de dériver la forme fermée pour la valeur du prix actuel (*Spot*).

6.2.1.2 Dérivation de la forme fermée pour S

En utilisant une procédure similaire à celle utilisée dans la section précédente. En utilisant cette fois la fonction de transformation : $f(S_{i,t}, \mu_{i,t}, t) = S_{i,t} e^{\kappa_i(t)}$.

On obtient aisément :

$$\begin{aligned} S_{i,t} &= S_{i,0} e^{-\kappa_i(t)} + \theta_i (1 - e^{-\kappa_i(t)}) + \frac{\lambda_i}{\kappa_i} (1 - e^{-\kappa_i(t)}) \\ &+ e^{-\kappa_i(t)} \int_0^t \sigma_i e^{\kappa_i(s)} dW_{k,s} + e^{-\kappa_i(t)} \int_0^t \kappa_i \cdot e^{\kappa_i(s)} \mu_{i,s} ds \end{aligned} \quad (6.17)$$

Afin de résoudre la forme fermée complètement il s'agit ensuite de résoudre l'intégrale non stochastique : $\int_0^t \kappa_i e^{\kappa_i(s)} \mu_{i,s} ds$

Par les méthodes classiques de résolution d'intégrale on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t \kappa_i e^{\kappa_i(s)} \mu_{i,s} ds &= \int_0^t \kappa_i e^{\kappa_i(s)} \left[\mu_{i,0} e^{\kappa_i^\mu(s)} + \frac{\lambda_i^\mu}{\kappa_i^\mu} \right. \\ &\left. (1 - e^{-\kappa_i^\mu(s)}) + \int_0^s \sigma_i^\mu e^{\kappa_i^\mu(s-t)} dW_{j,s} \right] ds \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\text{Avec, } \int_0^t \kappa_i e^{\kappa_i(s)} \mu_{i,0} e^{-\kappa_i^\mu(s)} ds = \frac{\kappa_i \mu_{i,0}}{\kappa_i - \kappa_i^\mu} (e^{(\kappa_i - \kappa_i^\mu)t} - 1) \quad (6.19)$$

$$\text{et } \int_0^t \kappa_i e^{\kappa_i(s)} \frac{\lambda_i^\mu}{\kappa_i^\mu} ds = \frac{\lambda_i^\mu}{\kappa_i^\mu} (e^{\kappa_i t} - 1) \quad (6.20)$$

En utilisant les résultats précédents on obtient la forme fermée :

$$\begin{aligned} S_{i,t} = & S_{i,0} e^{-\kappa_i t} + \left(\theta_i + \frac{\lambda_i}{\kappa_i} (1 - e^{-\kappa_i t}) \right) \\ & + \frac{\mu_{i,0} \kappa_i}{\kappa_i - \kappa_i^\mu} (e^{-\kappa_i^\mu t} - e^{-\kappa_i t}) \\ & + \frac{\lambda_i^\mu}{\kappa_i^\mu} (1 - e^{-\kappa_i t}) \\ & - \frac{\lambda_i^\mu \kappa_i}{\kappa_i^\mu} (\kappa_i - \kappa_i^\mu) (e^{-\kappa_i^\mu t} - e^{-\kappa_i t}) \\ & + \frac{\kappa_i \sigma_i^\mu}{\kappa_i - \kappa_i^\mu} \int_0^t (e^{-\kappa_i^\mu(s)} - e^{-\kappa_i(s)}) dW_{j,s} \\ & + \int_0^t e^{-\kappa_i(s)} \sigma_i dW_{k,s} \end{aligned} \quad (6.21)$$

On retrouve le résultat de Dempster *et al.* (2008) aux différences près dues aux modifications du modèle initial.

6.2.1.3 Dynamique des contrats à terme

Évidemment les prix actuels (*Spot*) ne sont pas observables dans le marché. Pour estimer notre modèle il faudra donc utiliser l'information présente dans la structure des différents contrats à terme. Sous les conditions d'arbitrage il est connu que : $F(t, T, S_t) = E[S_t | F_t]$ On applique l'opérateur d'espérance sur la forme fermée de S_t pour obtenir la dynamique des contrats à terme : (NB. $\tau = T - t$)

$$F(t, T, S_t) = S_{i,t} e^{-\kappa_i \tau} + \theta_i (1 - e^{-\kappa_i \tau}) + \frac{\mu_{i,t} \kappa_i}{\kappa_i - \kappa_i^\mu} (e^{-\kappa_i^\mu \tau} - e^{-\kappa_i \tau}) + \frac{\lambda_i}{\kappa_i} (1 - e^{-\kappa_i \tau}) \quad (6.22)$$

Nous obtenons la dynamique des contrats à terme. Afin d'extraire de la structure à terme les prix actuel nous proposons l'utilisation d'un filtre de Kalman, une méthodologie connue pour être efficace dans un modèle gaussien, et utilisée dans la littérature Miltersen et Schwartz (1998). Dans la section suivante nous dériverons les équations nécessaires à la mise en place du filtre de Kalman.

6.2.1.4 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un algorithme consistant à utiliser une série de mesures ("observations") pour déterminer une autre mesure ("signal"). Il sera de fait plus précis qu'un algorithme prenant en considération seulement une mesure simple. L'esprit de l'algorithme consiste à utiliser les erreurs précédentes pour ajuster la prédiction. Pour plus de précision, considérez l'article original (Kalman (1960)). Afin de faciliter la lecture nous proposons de dériver dans un premier temps le filtre de Kalman avec comme observations seulement une maturité, nous référons le lecteur aux annexes pour les équations du filtre et l'initialisation. Nous étendrons ensuite le modèle à quatre maturités, ce pour éviter la confusion dans les matrices.

Les équations du modèle sont définies comme suit :

$$X_t = \mu_t + F_t X_{t-1} + w, \quad (6.23)$$

$$Y_t = dt + H_t X_t + \varepsilon_t, \quad (6.24)$$

avec :

$X_t = [S_{1,t} \mu_{1,t} S_{2,t} \mu_{2,t}]$ (le signal contient l'écart des prix actuels)

$Y_t = [F_1(t, T) F_2(t, T)]$ (les observations d'une seule maturité T)

1 : Ratio Porc/Boeuf,

2 : Ratio Blé/Soja

Les formes fermées obtenues dans les sections précédentes permettent de déduire les valeurs des différentes matrices.

Tout d'abord la matrice de transition :

$$F_t = \begin{bmatrix} e^{-\kappa_1 \delta t} & \frac{\kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_1^\mu} (e^{-\kappa_1^\mu \delta t} - e^{-\kappa_1 \delta t}) & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_1^\mu \delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\kappa_2 \delta t} & \frac{\kappa_2}{\kappa_2 - \kappa_2^\mu} (e^{-\kappa_2^\mu \delta t} - e^{-\kappa_2 \delta t}) \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\kappa_2^\mu \delta t} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

La matrice d'entrée de commande :

$$\mu_{t,T} = \begin{bmatrix} \left(\theta_1 + \frac{\lambda_1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 \tau}) + \frac{\lambda_1^\mu}{\kappa_1^\mu} (1 - e^{-\kappa_1^\mu \tau}) - \frac{\lambda_1^\mu \kappa_1}{\kappa_1^\mu (\kappa_1 - \kappa_1^\mu)} (e^{-\kappa_1^\mu \tau} - e^{-\kappa_1 \tau}) \right) \\ \frac{\lambda_1^\mu}{\kappa_1^\mu} (1 - e^{-\kappa_1^\mu \tau}) \\ \theta_2 + \frac{\lambda_2}{\kappa_2} (1 - e^{-\kappa_2 \tau}) + \frac{\lambda_2^\mu}{\kappa_2^\mu} (1 - e^{-\kappa_2^\mu \tau}) - \frac{\lambda_2^\mu \kappa_2}{\kappa_2^\mu (\kappa_2 - \kappa_2^\mu)} (e^{-\kappa_2^\mu \tau} - e^{-\kappa_2 \tau}) \\ \frac{\lambda_2^\mu}{\kappa_2^\mu} (1 - e^{-\kappa_2^\mu \tau}) \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

La seconde matrice de transition :

$$H_{t,T} = \begin{bmatrix} e^{-\kappa_1 \tau} & \frac{\kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_1^\mu} (e^{-\kappa_1^\mu \tau} - e^{-\kappa_1 \tau}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\kappa_2 \tau} & \frac{\kappa_2}{\kappa_2 - \kappa_2^\mu} (e^{-\kappa_2^\mu \tau} - e^{-\kappa_2 \tau}) \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

La composante fixe des observations

$$d_t = \begin{bmatrix} \theta_1 (1 - e^{-\kappa_1 \tau}) + \frac{\lambda_1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 \tau}) \\ \theta_2 (1 - e^{-\kappa_2 \tau}) + \frac{\lambda_2}{\kappa_2} (1 - e^{-\kappa_2 \tau}) \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

La matrice de covariance :

$$Q_t = \begin{bmatrix} V_{S_1 S_1} & V_{S_1 \mu_1} & V_{S_1 S_2} & V_{S_1 \mu_2} \\ V_{\mu_1 S_1} & V_{\mu_1 \mu_1} & V_{\mu_1 S_2} & V_{\mu_1 \mu_2} \\ V_{S_2 S_1} & V_{S_2 \mu_1} & V_{S_2 S_2} & V_{S_2 \mu_2} \\ V_{\mu_2 S_1} & V_{\mu_2 \mu_1} & V_{\mu_2 S_2} & V_{\mu_2 \mu_2} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Les calculs des différents éléments de la matrice sont présentés succinctement ci-bas.

$$\begin{aligned} V_{S_1 S_2} &= E[(S_1 - E(S_1))(S_2 - E(S_2))] \\ &= \rho_{2,4} \frac{\kappa_1 \sigma_1^\mu}{\kappa_1 - \kappa_1^\mu} \frac{\kappa_2 \sigma_2^\mu}{\kappa_2 - \kappa_2^\mu} \int_0^t (e^{-\kappa_1^\mu s} - e^{-\kappa_1 s})(e^{-\kappa_2^\mu s} - e^{-\kappa_2 s}) ds \\ &\quad + \rho_{2,3} \sigma_2 \frac{\kappa_1 \sigma_1^\mu}{\kappa_1 - \kappa_1^\mu} \int_0^t (e^{-\kappa_1^\mu s} - e^{-\kappa_1 s})(e^{-\kappa_2 s}) ds \\ &\quad + \rho_{1,4} \sigma_1 \frac{\kappa_2 \sigma_2^\mu}{\kappa_2 - \kappa_2^\mu} \int_0^t (e^{-\kappa_1 s}(e^{-\kappa_2^\mu s} - e^{-\kappa_2 s})) ds \\ &\quad + \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_2 \int_0^t (e^{-\kappa_1 s} e^{-\kappa_2 s}) ds \end{aligned} \quad (6.30)$$

On développe les intégrales :

$$\begin{aligned}
& \int_0^t [e^{-(\kappa_1^\mu + \kappa_2^\mu)(s)} - e^{-(\kappa_1^\mu + \kappa_2)(s)} - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2^\mu)(s)} + e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)(s)}] ds \\
&= \left[\frac{1}{-(\kappa_1^\mu + \kappa_2^\mu)} e^{-(\kappa_1^\mu + \kappa_2^\mu)(t)} + \frac{1}{(\kappa_1^\mu + \kappa_2)} e^{-(\kappa_1^\mu + \kappa_2)(t)} \right. \\
&+ \frac{1}{(\kappa_1 + \kappa_2^\mu)} e^{-(\kappa_1 + \kappa_2^\mu)(t)} \\
&\left. - \frac{1}{(\kappa_1 + \kappa_2)} e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)(t)} \right]_0^t
\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\kappa_1^\mu + \kappa_2^\mu} (1 - e^{-(\kappa_1^\mu + \kappa_2^\mu)t}) \\
&+ \frac{1}{\kappa_1^\mu + \kappa_2} (e^{-(\kappa_1^\mu + \kappa_2)t} - 1) \\
&+ \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2^\mu} (e^{-(\kappa_1 + \kappa_2^\mu)t} - 1) \\
&+ \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} (1 - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)t})
\end{aligned}$$

$$\int_0^t e^{-(\kappa_1^\mu + \kappa_2)(s)} - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)(s)} ds = \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} (1 - e^{-(\kappa_1^\mu + \kappa_2)t}) + \frac{1}{\kappa_1 \kappa_2} (e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)t} - 1) \tag{6.32}$$

$$\int_0^t e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)s} ds = \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} (1 - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)t}) \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}
V_{S_1 S_1} &= E[(S_1 - E(S_1))^2] \\
&= E\left[\left(\frac{\kappa_1 \sigma_1^\mu}{\kappa_1 - \kappa_1^\mu}\right)^2 \int_0^t (e^{-\kappa_1^\mu s} - e^{-\kappa_1 s})^2 + \sigma_1^2 \int_0^t e^{-2\kappa_1 s} ds \right. \\
&\quad \left. + 2\rho_{1,2} \sigma_1 \frac{\kappa_1 \sigma_1^\mu}{\kappa_1 - \kappa_1^\mu} \int_0^t e^{-(\kappa_1 + \kappa_1^\mu)s} - e^{-2\kappa_1 s} ds\right] \\
&= \frac{\kappa_1 \sigma_1^\mu}{\kappa_1 - \kappa_1^\mu} \left[\frac{1}{2\kappa_1^\mu} (1 - e^{-2\kappa_1^\mu t}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\kappa_1} (1 - e^{-2\kappa_1 t}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\kappa_1 + \kappa_1^\mu} (e^{-(\kappa_1 + \kappa_1^\mu)t} - 1) \right] \\
&\quad + \frac{\sigma_1^2}{2\kappa_1} (1 - e^{-2\kappa_1 t}) \\
&\quad + 2\rho_{1,2} \sigma_1 \frac{\kappa_1 \sigma_1^\mu}{\kappa_1 - \kappa_1^\mu} \left[\frac{1}{\kappa_1^\mu + \kappa_1} (1 - e^{-(\kappa_1 + \kappa_1^\mu)t}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\kappa_1} (e^{-\kappa_1 t} - 1) \right]
\end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}
V_{S_2 S_2} &= \left(\frac{\kappa_2 \sigma_2^\mu}{\kappa_2 - \kappa_2^\mu}\right)^2 \left[\frac{1}{2\kappa_2^\mu} (1 - e^{-2\kappa_2^\mu t}) + \frac{1}{2\kappa_2} (1 - e^{-2\kappa_2 t}) + \frac{2}{\kappa_2 + \kappa_2^\mu} (e^{-(\kappa_2 + \kappa_2^\mu)t} - 1) \right] \\
&\quad + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa_2} (1 - e^{-2\kappa_2 t}) \\
&\quad + 2\rho_{3,4} \sigma_2 \frac{\kappa_2 \sigma_2^\mu}{\kappa_2 - \kappa_2^\mu} \left[\frac{1}{\kappa_2^\mu + \kappa_2} (1 - e^{-(\kappa_2^\mu + \kappa_2)t}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\kappa_2} (e^{-2\kappa_2 t} - 1) \right]
\end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}
V_{S_1\mu_1} &= E\left[\left[\frac{\kappa_1\sigma_1^\mu}{\kappa_1\kappa_1^\mu}\int_0^t(e^{-\kappa_1^\mu s}-e^{-\kappa_1 s})dW_{2,s}+\sigma_1\int_0^te^{-\kappa_1 s}dW_{1,s}\right]*\sigma_1^\mu\int_0^te^{-\kappa_1^\mu s}dW_{2,s}\right]\right] \\
&= \frac{\kappa_1(\sigma_1^\mu)^2}{\kappa_1-\kappa_1^\mu}\int_0^te^{-\kappa_1^\mu s}-e^{-\kappa_1 s}ds+\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_1^\mu\int_0^te^{\kappa_1^\mu-\kappa_1 s}ds \\
&= \frac{\kappa_1(\sigma_1^\mu)^2}{\kappa_1-\kappa_1^\mu}\left(\frac{1}{\kappa_1^\mu}*(1-e^{-\kappa_1^\mu t})-\frac{1}{\kappa_1}(1-e^{-\kappa_1 t})+\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_1^\mu\frac{1}{\kappa_1^\mu-\kappa_1}\right)(e^{\kappa_1^\mu-\kappa_1 t}-1)
\end{aligned} \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}
V_{S_2\mu_2} &= \frac{\kappa_2(\sigma_2^\mu)^2}{\kappa_2-\kappa_2^\mu}\left(\frac{1}{\kappa_2^\mu}*(1-e^{-\kappa_2^\mu t})-\frac{1}{\kappa_2}(1-e^{-\kappa_2 t})+\rho_{3,4}\sigma_2\sigma_2^\mu\frac{1}{\kappa_2^\mu-\kappa_2}\right)(e^{\kappa_2^\mu-\kappa_2 t}-1)
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}
V_{S_2\mu_2} &= \sigma_2^\mu\frac{\kappa_1\sigma_1^\mu}{\kappa_1-\kappa_1^\mu}\left[\frac{1}{\kappa_1^\mu}(1-e^{-\kappa_1^\mu t})-\frac{1}{\kappa_1}(1-e^{-\kappa_1 t})+\sigma_1\sigma_2^\mu\rho_{1,4}\frac{1}{\kappa_2^\mu-\kappa_1}(e^{(\kappa_2^\mu-\kappa_1)t}-1)\right]
\end{aligned} \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned}
V_{\mu_1 S_2} &= \sigma_1^\mu\frac{\kappa_2\sigma_2^\mu}{\kappa_2-\kappa_2^\mu}\rho_{2,4}\sigma_1^\mu\sigma_2^\mu\frac{1}{\kappa_1^\mu+\kappa_2^\mu}[e^{\kappa_1^\mu+\kappa_2^\mu t}-1]\sigma_1^\mu\frac{1}{\kappa_1^\mu}(e^{\kappa_1^\mu t}-1)
\end{aligned} \tag{6.39}$$

6.2.1.5 Extension du modèle à une structure à terme de quatre maturités

Tel que précisé précédemment, les calculs présentés dans la section précédente reviennent à une estimation à partir d'une seule maturité (afin de simplifier la lecture). Nous présentons dans cette section la transposition du modèle vers un modèle à quatre maturités. Nous utiliserons la notation suivantes :

$Y_{t,1}$: Les observations utilisés dans le modèle à une maturité $T=1$

Y' : Les observations dans le modèle à quatre maturités.

On utilisera la même convention pour les variables : X_t , μ_t , F_t , H_t et d_t .

$0_{(i,j)}$ représente une matrice nulle de i ligne, j colonne.

Les matrices du filtre pour une structure à terme de quatre maturités sont alors :

$$X'_t = [X_{t,1} \ X_{t,2} \ X_{t,3} \ X_{t,4}] \quad (6.40)$$

$$Y'_t = [Y_{t,1} \ Y_{t,2} \ Y_{t,3} \ Y_{t,4}]^T \quad (6.41)$$

$$\mu'_t = [\mu_{t,1} \ \mu_{t,2} \ \mu_{t,3} \ \mu_{t,4}]^T \quad (6.42)$$

$$d'_t = [d_{t,1} \ d_{t,2} \ d_{t,3} \ d_{t,4}]^T \quad (6.43)$$

$$F'_t = \begin{bmatrix} F_t & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} \\ 0_{(4,4)} & F_t & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} \\ 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & F_t & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} \\ 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & F_t & 0_{(4,4)} \\ 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & F_t \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

$$Q'_t = \begin{bmatrix} Q_t & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} \\ 0_{(4,4)} & Q_t & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} \\ 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & Q_t & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} \\ 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & Q_t & 0_{(4,4)} \\ 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & 0_{(4,4)} & Q_t \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

6.2.2 Discussion sur les défis numériques

L'implémentation de ce modèle ambitieux a été tenté sans pouvoir donner de résultats. L'estimation du modèle se faisait difficilement étant donnée la taille importante des différentes matrices. Les inversions, entre autre du hessien dont la taille dépassait 30x30 ne pouvait se faire. Malgré les nombreuses conditions imposées, l'inversibilité du hessien n'était pas possible. Plusieurs changement d'algorithmes ont été implémenté sans meilleurs résultats. Outre le défis numérique que pose le système étant donné sa haute

dimensionnalité, le défis computationnel est également très présent avec une itération dans le filtre prenant plusieurs minutes. Ces différents problèmes dépassent le champs de notre recherche et devront être considérés dans les prochaines. Étant donné cette impasse numérique, nous choisissons de relaxer certaines hypothèses afin de mettre en place un modèle plus simple mais offrant des résultats. Le prochain chapitre discutera de l'approche envisagée.

CHAPITRE 7

MODÉLISATION ALTERNATIVE

7.1 Réflexion

La modélisation précédente offre des défis numériques difficilement surmontables, nous proposons une modélisation alternative plus facile à mettre en place. Nous choisissons de conserver la relation de dépendance entre les différents browniens, en revanche nous choisissons de supprimer la composante de moyenne stochastique. Il s'agit ainsi d'utiliser le modèle à un facteur de Dempster *et al.* (2008) en utilisant non pas un mais deux écarts de prix dépendants. Dans les sections suivantes nous ferons dans un premier temps l'estimation d'un modèle à un facteur sans composante de moyenne stochastique, un modèle similaire à celui de Dempster *et al.* (2008). Dans une seconde section nous ajouterons lierons les deux écarts par une matrice de covariance (i.e nous ne conserverons pas l'hypothèse d'indépendance) afin d'améliorer le modèle.

7.2 Modélisation à un facteur sans composante de moyenne stochastique

7.2.1 Modèle

Le modèle s'écrit comme un processus Ornstein Uhlenbeck simple suivant :

$$dS_t = [\kappa(\mu - S_t) + \lambda]dt + \sigma dW_t \quad (7.1)$$

7.2.2 Dérivation

La forme fermée d'un modèle Ornstein Uhlenbeck est connue et s'obtient par le changement de variable $f(S_t, t) = S_t e^{\kappa t}$. Dans une mesure de risque de marché l'écart de pris suit de fait :

$$S_t = S_0 e^{-\kappa t} + \left(\mu + \frac{\lambda}{\kappa}\right)(1 - e^{-\kappa t}) + \int_0^t \sigma e^{\kappa(s-t)} dW_s \quad (7.2)$$

Comme dans le modèle précédent on déduit la dynamique du prix du contrat à terme :

$$F(t, T, S_t) = E(S_t | F_t) = S_t e^{-\kappa \tau} + \left(\mu + \frac{\lambda}{\kappa}\right)(1 - e^{-\kappa t}) \quad (7.3)$$

7.2.3 Estimation

L'estimation du modèle se fait, tout comme dans le chapitre précédent, par l'utilisation d'un maximum de vraisemblance d'un filtre de Kalman dans la mesure de risque de marché. Il s'agit d'utiliser le filtre pour permettre l'estimation de la dynamique des prix actuels (non observables a.k.a le signal) en utilisant les observations des prix des contrats à terme. On définit de la manière suivante les paramètres du modèle.

$X_t = S_t$ (le prix actuel de l'écart au temps t)

$Y_t = [F_{T=1} F_{T=2} F_{T=3} F_{T=4}]$ (la structure des prix à terme)

$X_t = \mu_t + F_t X_{t-1} + w$

$\mu_t = \mu + \frac{\lambda}{\kappa}(1 - e^{-\kappa \delta_t})$

$F_t = e^{-\kappa \delta_t}$

$Y_t = dt + H X_t + \varepsilon_t$

$dt = [(\mu + \frac{\lambda}{\kappa}(1 - e^{-\kappa \tau_1}))(\mu + \frac{\lambda}{\kappa}(1 - e^{-\kappa \tau_2})) \dots]^T$

$H = [e^{-\kappa \tau_1} e^{-\kappa \tau_2} e^{-\kappa \tau_3} e^{-\kappa \tau_4}]^T$

$Q = \sigma$

L'estimation se par maximum de vraisemblance se fait en utilisant :

$$\text{Min}_{(\mu \kappa \lambda \sigma)} L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln(\det V_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^T V_i^{-1} e_i + \frac{nr}{2} \ln(2\pi) \quad (7.4)$$

Sous les contraintes :

$$\mu, \kappa, \sigma > 0$$

On effectue un test statistique de type Student, suivant la méthodologie de Dempster (2008). On utilise les propriétés du Hessien dans un cadre de maximum de vraisemblance :

$$\text{var}(\theta) = [-E(H(\theta))]^{-1}$$

avec θ un parametre

(7.5)

Le test statistique s'écrit alors :

$$T - \text{test}(\theta) = \frac{\hat{\theta}}{\hat{\sigma}(\theta)/\sqrt{(n)}}$$
(7.6)

7.2.4 Résultat - Porc / Boeuf

En ce qui concerne l'estimation de l'écart de prix entre le Porc et le Boeuf nous obtenons les résultats suivants :

Tableau 7.1 – Résultat modèle à un écart : Porc/Boeuf

	κ	μ	λ	σ
valeur	0.0339	1.0897	0.0173	2.3626
écart type	0.0097	0.2951	0.0138	0.5832
statistique T	3.4940	3.6926	5.1661	9.5708
p-valeur	2.45e-4	1.12e-4	1.25e-7	0

Le résultat de notre estimation rejette toutes les hypothèses nulles, prouvant de fait les coefficients comme étant significativement différents de zéro c'est à dire statistiquement significatif à un seuil de 5%.

7.2.5 Résultat - Blé / Soja

En ce qui concerne l'estimation de l'écart de prix entre le Maïs et le Blé nous obtenons les résultats suivants :

Tableau 7.2 – Résultat modèle à un écart : Blé/Soja

	κ	μ	λ	σ
valeur	0.3673	0.84	-0.00777	1.44
écart type	0.0358	0.1336	0.0582	0.2624
statistique T	10.2717	6.2974	-0.1317	7.9598
p-valeur	0	1.67e-10	0.55	1.11e-15

Le résultat de notre estimation rejette toutes les hypothèses nulles, prouvant les coefficients comme étant significativement différents de zéro à un seuil de 5% sauf la prime de risque de marché.

7.2.6 Discussion des résultats

La transposition du modèle de Dempster démontre des résultats similaires à ce dernier. L'auteur avait en effet trouver dans son évaluation du *crack spread* des variables significatives sauf pour la prime de risque du marché, ce qui est le cas pour l'estimation de l'écart Maïs / Blé. Hamilton et Wu (2014) nous permet d'apporter des éléments quant à la non-significativité de la prime de risque dans notre cas. Nous rappelons que le t-test évalue l'hypothèse nulle d'égalité à 0 du coefficient, ce test serait non-significatif dans le cas où la prime de risque serait nulle. Hamilton et Wu (2014) démontre que la prime de risque sur le pétrole est liée à la relation contrepartiste entre les agents spéculateurs et les agents cherchant une couverture. Ainsi donc cette prime est variable, et est également fonction de la répartition de ces agents dans le volume total. Une possible explication de la non-significativité de la prime de risque serait donc que la structure entre les spéculateurs et les agents couvertures entraîne dans ce cas-ci une prime de zéro. Rappelons que nous sommes dans le cas d'une prime de risque sur un ratio et non pas sur une commodité unique. Dans le cas d'un écart il s'agirait donc d'analyser les agents spéculateurs et de couverture pour les deux commodités combinées, la relation de substitution fondamentale existante pourrait potentiellement renforcer cet équilibre contrepartiste et faire tendre la prime de risque à zéro.

Évidemment, le prix actuel (*prix spot*) n'est pas observable il n'est donc pas possible de tester la robustesse du modèle face au marché réel. Néanmoins la comparaison du modèle à un facteur avec celui à deux facteurs nous permettra d'estimer l'apport de l'information contenue dans l'écart Maïs/Blé pour expliquer l'écart Porc/Boeuf, ouvrant de fait la porte à de futures recherches.

CHAPITRE 8

MODÉLISATION À DEUX ÉCARTS

8.1 Réflexion

Notre contribution consiste à vectoriser le modèle Dempster *et al.* (2008) à un facteur. L'information de l'écart entre Maïs/Blé devant servir à expliquer l'écart de prix entre le porc et le boeuf, tel qu'expliqué dans le chapitre précédent. Il s'agira alors de comparer les résultats entre le modèle à un écart et celui à deux écarts afin de démontrer l'apport de notre modélisation.

8.2 Modélisation à un facteur avec deux écarts sans composante de moyenne stochastique

8.2.1 Modèle

Le modèle s'écrit comme un processus Ornstein Uhlenbeck simple suivant :

$$\begin{aligned} dS_{i,t} &= [\kappa_i(\mu_i - S_t) + \lambda_i]dt + \sigma_i dW_{i,t} \\ &\text{pour } i = 1; 2 \\ &\text{avec : } dS_1 dS_2 = \rho dt \end{aligned} \tag{8.1}$$

Nous choisissons une modélisation statique de la structure de dépendance entre les deux écarts. Dans la littérature, notamment Schwartz 1997, on observe généralement entre les différents composantes d'un écart (écart, moyenne, taux d'intérêt etc.) une dynamique statique modéliser par une corrélation. Nous choisissons de conserver ce choix et de l'appliquer entre deux écarts et non pas entre les composantes d'un même écart.

8.2.2 Dérivation

La forme fermée d'un modèle OU est connue et s'obtient par le changement de variable $f(S_t, t) = S_t e^{\kappa t}$. Dans une mesure de risque de marché l'écart de pris suit de

fait :

$$S_t = S_0 e^{-\kappa t} + (\mu + \lambda/\kappa)(1 - e^{-\kappa t}) + \int_0^t \sigma e^{\kappa(s-t)} dW_s. \quad (8.2)$$

Le prix du contrat à terme suit alors :

$$F(t, T, S_t) = E(S_t | F_t) = S_t e^{-\kappa \tau} + (\mu + \lambda/\kappa)(1 - e^{-\kappa \tau}) \quad (8.3)$$

avec $\tau = T - t$.

8.2.3 Estimation

L'estimation du modèle se fait, tout comme dans le chapitre précédent, par l'utilisation d'un maximum de vraisemblance d'un filtre de Kalman dans la mesure de risque de marché. Il s'agit d'utiliser le filtre pour permettre l'estimation de la dynamique des prix actuels (non observables a.k.a le signal) en utilisant les observations des prix des contrats à terme. On définit de la manière suivante les paramètres du modèle.

$X_t = [S_{1,t}, S_{2,t}]$ (le prix actuel de l'écart au temps t)

$Y_t = [F_{1,T=1}, F_{1,T=2}, F_{1,T=3}, F_{1,T=4}, F_{2,T=1}, F_{2,T=2}, F_{2,T=3}, F_{2,T=4}]$ (la structure des prix à terme)

$X_t = \mu_t + F_t X_{t-1} + w$

Les composantes du modèles s'obtiennent via les formes fermées présentées précédemment :

$$\mu_t = [\mu_1 + \frac{\lambda_1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1 \delta t}); \mu_2 + \frac{\lambda_2}{\kappa_2}(1 - e^{-\kappa_2 \delta t})] \quad (8.4)$$

$$F_t = \begin{bmatrix} e^{-\kappa_1 \delta t} & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_2 \delta t} \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

$$Y_t = d_t + H X_t + \varepsilon_t \quad (8.6)$$

$$d_t = [(\mu_1 + \frac{\lambda_1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1 \tau_1}); (\mu_1 + \frac{\lambda_1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1 \tau_2}) \dots (\mu_2 + \frac{\lambda_2}{\kappa_2}(1 - e^{-\kappa_2 \tau_1}); (\mu_2 + \frac{\lambda_2}{\kappa_2}(1 - e^{-\kappa_2 \tau_2})))]^T \quad (8.7)$$

$$H_t = \begin{bmatrix} e^{-\kappa_1 \tau_1} & 0 \\ e^{-\kappa_1 \tau_2} & 0 \\ e^{-\kappa_1 \tau_3} & 0 \\ e^{-\kappa_1 \tau_4} & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_2 \tau_1} \\ 0 & e^{-\kappa_2 \tau_2} \\ 0 & e^{-\kappa_2 \tau_3} \\ 0 & e^{-\kappa_2 \tau_4} \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

$$Q = \begin{bmatrix} e^{-\sigma_1^2} & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & e^{-\sigma_2^2} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Tout comme dans la section précédente, l'estimation se fait maximum de vraisemblance en utilisant :

$$\text{Min}_{(\mu, \kappa, \lambda, \sigma)} L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln(\det V_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^T V_i^{-1} e_i + \frac{nr}{2} \ln(2\pi) \quad (8.10)$$

Sous les contraintes :

$$\mu, \kappa, \sigma > 0$$

8.2.4 Résultats

Nous obtenons les résultats suivants :

Pour l'écart Porc, Boeuf

Tableau 8.1 – Modèle à deux écarts, partie 1 : Porc/Boeuf

	κ_1	μ_1	λ_1	σ_1
valeur	0.0075	0.4647	0.0825	17.69
écart type	0.0086	0.0579	0.0048	6.9587
statistique T	0.8681	8.0202	17.3563	2.5431
p-valeur	0.1927	6.6e-16	0	5.5e-3

Pour l'écart Blé Soja

Tableau 8.2 – Modèle à deux écarts, partie 2 : Blé/Soja

	κ	μ	λ	σ
valeur	0.5671	1.1636	-0.2223	18.1568
écart type	0.0508	0.0574	0.0297	15.1264
statistique T	11.1686	20.2634	-7.4719	1.2003
p-valeur	0	0	4.88e-14	0.1150

Pour la relation de dépendance :

Tableau 8.3 – Résultat modèle à deux écarts, partie 3 : la relation de dépendance entre les deux écarts

	ρ
valeur	0.2143
écart type	0.3201
statistique T	0.3201
p-valeur	0.37

8.2.5 Discussion des résultats

Les résultats démontrent la significativité de toutes les variables à l'exception de la volatilité sur le ratio Blé/Soja, et la vitesse de convergence sur le ratio Porc/Boeuf. La non-significativité de la prime de risque avait déjà été observée dans le modèle à un facteur. La relation de dépendance entre les deux écarts actuel, modélisée par une corrélation statique n'est également pas significative. Il est probable qu'une mesure statique ne soit pas suffisante plus particulièrement dans un marché possédants des régimes, tout comme l'indiquent Dvir et Rogoff (2014). De futures recherches pourraient considérés l'utilisant d'une relation plus dynamiques permettant de capter ces derniers.

La comparaison entre le modèle à un écart et celui à deux écarts, démontre une amélioration de la variance de l'estimateur de la moyenne long terme(μ), et ce pour l'écart Blé/Soja et l'écart Porc/Boeuf. La variance asymptotique passe ainsi de 0.2951 à 0.0579 pour le ratio Porc/Boeuf et de 0.1336 à 0.0574 pour le ratio Blé/Soja. Il est certain que l'estimation de la moyenne reste l'objectif majeur de la modélisation. En divisant par deux et trois les variances asymptotique de la moyenne respectivement pour l'écart Porc/Boeuf et l'écart Blé/Soja, le modèle démontre l'apport important d'une estimation conjointe des deux écarts. Les aspects économiques et fondamentaux ont dorés et déjà été discutés précédemment et explique cet apport.

Outre l'estimation de la moyenne long terme, le modèle à deux ratios diminue également grandement la variance asymptotique de la prime de risque. La variance passe ainsi de 0.0138 à 0.0048 pour l'écart Porc/Boeuf, et de 0.0582 à 0.0297 pour l'écart Blé/Soja. La prime de risque devient en outre significative.

Le modèle à deux facteurs ne permet pas la diminution de la variance de l'estimateur variance, il augmente cette dernière de 0.5852 à 6.958 pour l'écart Porc/Boeuf et de 0.2624 à 15.1264 pour l'écart Blé/Soja. Aucune raison fondamentale n'a été trouvée relativement à cette augmentation.

Nous proposons le tableau de variance des variable récapitulatif suivant, les * indiquant lorsque le modèle à deux facteurs ajoute de la valeur :

Tableau 8.4 – Résumé des résultats du modèle à deux écarts - Variance des estimateurs

	Modèle à un ratio				Modèle à deux ratios			
	κ	μ	λ	σ	κ	μ	λ	σ
Porc/Boeuf	0.0097	0.2951	0.0138	0.5832	0.0086*	0.0579*	0.0048*	6.9587
Blé/Soja	0.0358	0.1336	0.0582	0.2624	0.0508	0.0574*	0.0297*	15.1264

Notre recherche ne permet que de démontrer qu'il existe un apport dans la transposition des modèles existant en y incorporant deux écarts au lieu d'un. En effet la diminution de la variance asymptotique démontre une estimation plus précise des estimateurs, notamment de celui de la moyenn. Pour effectuer des tests de robustesse du modèle il faut modéliser des actifs transigés sur les marchés. Cette approche dépasse le champs de notre recherche mais fût dores et déjà considérée dans la littérature des modèle à un écart, notamment Dempster(2008) dans ses modèles à un et deux facteurs. Le CME offre, tel que discuté précédemment, des options sur les différents contrats à termes, et ce pour toutes les maturités. L'estimation du prix de ces produits dérivés à partir des dynamiques proposées dans notre recherche pourrait éventuellement constituer une nouvelle recherche.

CONCLUSION

La première partie de notre recherche consistait en l'estimation d'un modèle ambiteux pour analyser non pas un, mais deux écarts simultanément, en tenant en compte d'un effet saisonnier individuel (i.e une moyenne de type retour à la moyenne), ainsi que des relations inter et intra écarts considérées comme non nulles mais statiques. Il s'agissait donc de vectoriser un modèle de type 'double Ornstein Uhlenbeck' . Il s'est avéré que le problème se heurte à des difficultés numériques dépassants le champ de notre recherche.

Nous proposons alors de transposer un modèle simple à un facteur sur des écarts non étudiés dans la littérature (soit celui du Blé/Maïs ainsi que celui du Porc/Boeuf). L'implémentation du modèle de type Ornstein Uhlenbeck simple démontre des résultats concluants et prouve la possibilité de transposition des modèles utilisés sur les commodités dures vers les commodités souples. On peut ainsi inférer que les commodités dites 'soft' ont un comportement similaire aux commodités dites 'hard'. On ouvre de fait des voies de recherche pour la transposition de modèles à un facteur (i.e écart) utilisés dans les commodités 'hard' vers des sous-jacents de types grains ou viandes.

Dans un second temps, nous proposons d'innover en modélisant deux écarts simultanément. Il s'agit alors de démontrer l'importance d'un écart pour en expliquer un autre. Évidemment, les bases fondamentales discutées dans les premiers chapitres encouragent la mise en place d'une telle modélisation. Il s'agit donc de vectoriser le modèle à un écart, nous choisissons d'utiliser une matrice de covariance pour caractériser la relation entre les deux écarts. Nous supposons donc un lien statique entre les deux écarts. Les résultats prouvent une importante diminution de la variances asymptotiques de nombreux paramètres, prouvant ainsi un apport dans la précision de l'estimation grâce à l'ajout des grains. Nous ouvrons de fait la voie à de futures recherches incluant la transposition d'autres modèles vers les commodités souples, l'exploitation de la relation entre les commodités et l'estimation de prix de produits dérivés. Les futures recherches devront entre autre considérer l'existence de régimes et la relation dynamique entre les matières premières.

BIBLIOGRAPHIE

- AREZKI, R., LOUNGANI, P., van der PLOEG, R. et VENABLES, A. J. (2014). Understanding international commodity price fluctuations. *Journal of International Money and Finance*, 42(0):1 – 8.
- BARRETT, W. B. et KOLB, R. W. (1995). Analysis of spreads in agricultural futures. *Journal of Futures Markets*, 15:29–86.
- BESSEMBINDER, H., COUGHENOUR, J., SEGUIN, P. et SMOLLER, M. (1995). Mean reversion in equilibrium asset prices : Evidence from the futures term structure. *The journal of Finance*, pages 361–375.
- BRENNAN, M. (1991). "The Price of Convenience and the Valuation of Commodity Contingent Claims" in *Stochastic Models and Option Value*. Elsevier Science Publishers, B. V., North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.
- DE GORTERM, H. (2008). Explaining agricultural commodity prices increases : The role of biofuel politics. *Department of Applied Economics and Management Cornell University*.
- DEMPSTER, M., MEDOVA, E. et TANG, K. (2008). Long term spread option valuation and hedging. *Journal of Banking & Finance*, 32:2530–2540.
- DVIR, E. et ROGOFF, K. (2014). Demand effects and speculation in oil markets : Theory and evidence. *Journal of International Money and Finance*, 42:113 – 128.
- FRANKEL, J. A. (2014). Effects of speculation and interest rates in a carry trade, a model of commodity prices. *Journal of International Money and Finance*, 42:88 – 112.
- GIBSON, R. et SCHWARTZ, E. S. (1990). Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The journal of Finance*, 45:959–976.

- GIRMA, P. et PAULSON, A. S. (1998). Seasonality in petroleum futures spreads. *Journal of Futures Markets*, 18:581–598.
- HAMILTON, J. D. et WU, J. C. (2014). Risk premia in crude oil futures prices. *Journal of International Money and Finance*, 42. Understanding International Commodity Price Fluctuations.
- HILLIARD, J. et REIS, J. (1998). Valuation of commodity futures and options under stochastic convenience yields, interest rates and jump-diffusions in the spot. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33:61–86.
- ITO, K. (1944). Stochastic integral. *Proc. Imperial Acad. Tokyo*, pages 519–524.
- JOHNSON, R., ZULAUF, C., IRWIN, C. et GERLOW, M. (1991). The soybean complex spread : An examination of market efficiency from the viewpoint of a production process. *Journal of Futures Markets*, 11:25–37.
- KALMAN, R. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82:35–45.
- KILIAN, L. et LEE, T. K. (2014). Quantifying the speculative component in the real price of oil : The role of global oil inventories. *Journal of International Money and Finance*, 42:71 – 87.
- MERTON, R. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4:141–183.
- MILTERSENA, K. R. et SCHWARTZ, E. S. (1998). Pricing of options on commodity futures with stochastic term structures of convenience yields and interest rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33:33–59.
- POITRAS, G. (1998). Spread options, exchange options, and arithmetic brownian motion. *Journal of Futures Markets*, 18:487–517.
- RÉMILLARD, B. (2012). Non-parametric change point problems using multipliers. <http://ssrn.com/abstract=2043632>.

- RÉMILLARD, B. (2013). *Statistical Methods for Financial Engineering*. Chapman & Hall/CRC.
- SCHEINKMAN, J. A. et SCHECHTMAN, J. (1983). A simple competitive model with production and storage. *Review of Economic Studies*, 50:427–441.
- UHLENBECK, G. et ORNSTEIN, L. (1930). On the theory of brownian motion. *Phys. Rev.*, 36:823–841.
- WAHAB, M., COHN, R. et LASHGARI, M. (1994). The gold-silver spread : Integration, cointegration, predictability, and ex-ante arbitrage. *Journal of Futures Markets*, 14: 709–756.
- WEST, K. D. et WONG, K.-F. (2014). A factor model for co-movements of commodity prices. *Journal of International Money and Finance*, 42(0):289 – 309.

ANNEXE A

INTÉRÊTS COUVERTS

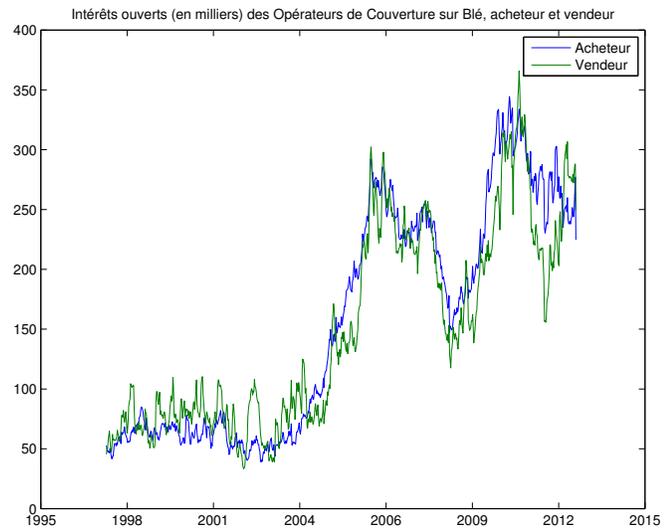


Figure A.1 – Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Blé, acheteur et vendeur

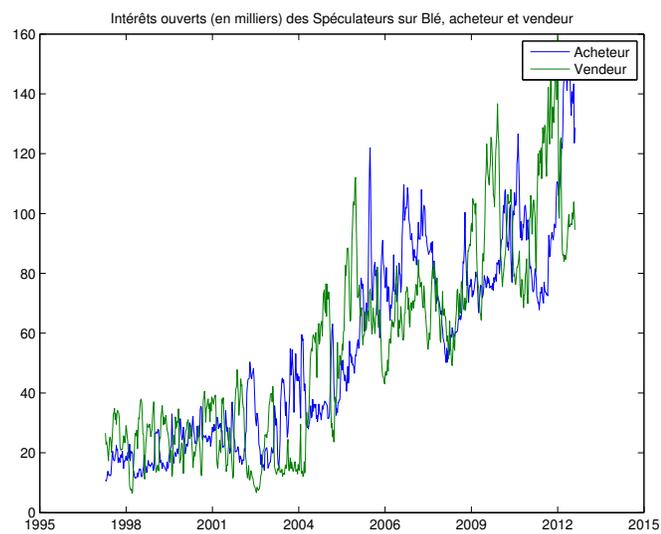


Figure A.2 – Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Blé, acheteur et vendeur

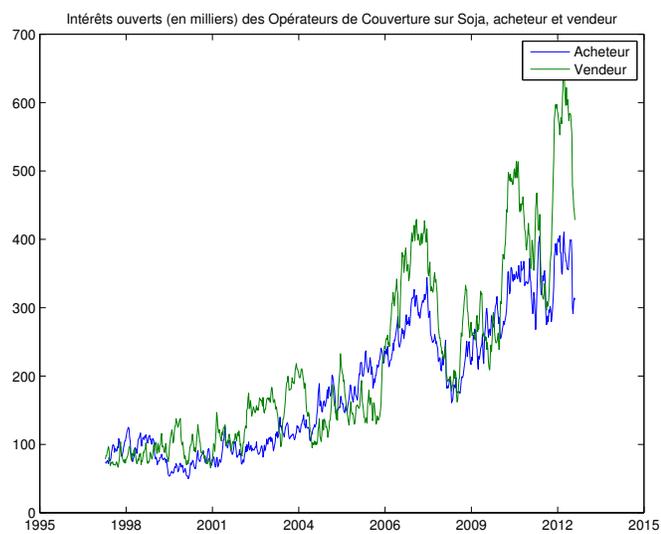


Figure A.3 – Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Soja, acheteur et vendeur

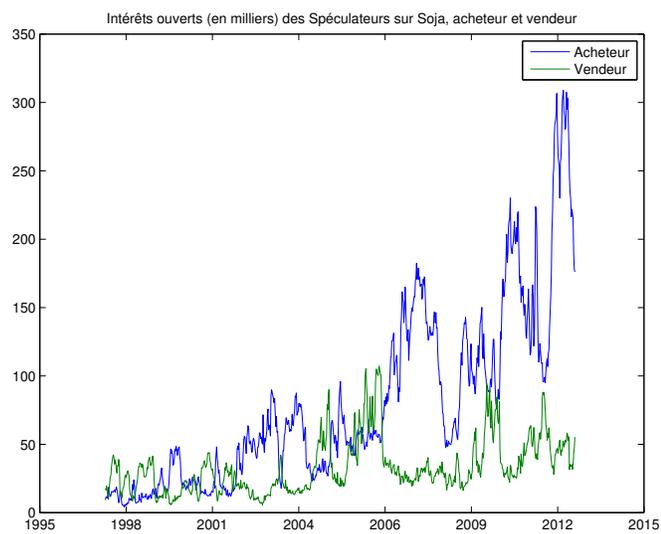


Figure A.4 – Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Soja, acheteur et vendeur

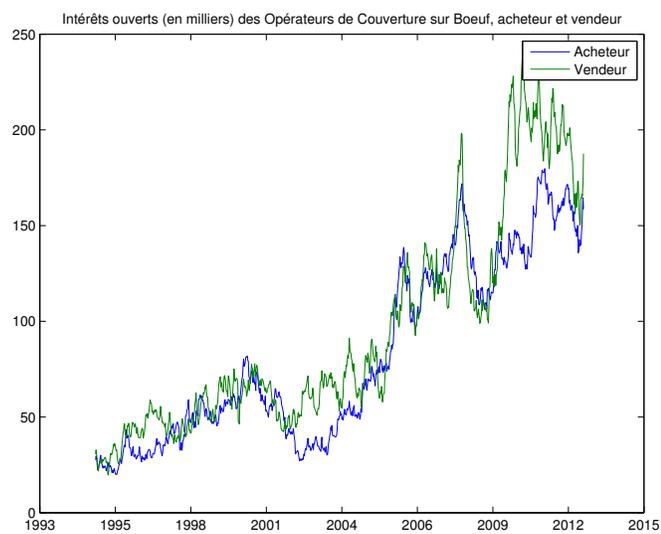


Figure A.5 – Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Boeuf, acheteur et vendeur

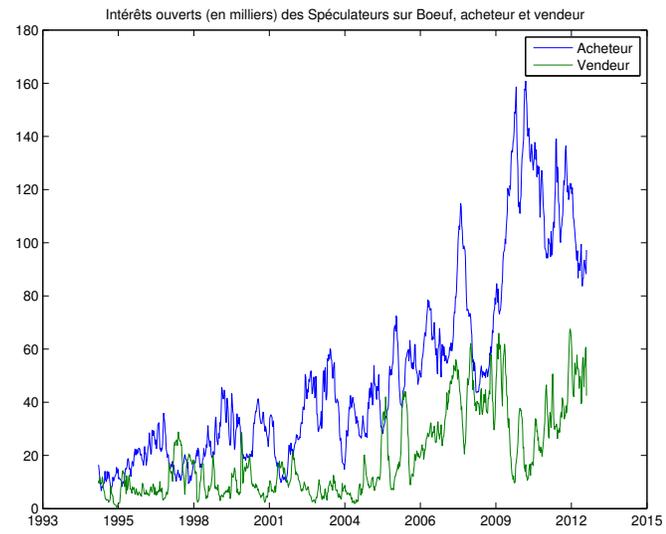


Figure A.6 – Intérêts ouverts (en milliers) des Opérateurs de Couverture sur Boeuf, acheteur et vendeur

ANNEXE B

MÉTHODE DE BOOTSTRAP DANS LE CADRE DU TEST DE STATIONNARITÉ

Pour N échantillons bootstrap, la procédures est comme suit :

1. Calculer $\tau_n = \sup_s \sup_x |\mathbb{A}_n(s, x)|$
2. Pour chaque échantillon :
 - (a) Générer une série aléatoire : $\xi_i^{(k)} \approx N(0, 1)$
 - (b) Pour tout $(s, u) \in [0, 1]^2$ définir $\tilde{\alpha}_n^{(k)}(s, u) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor ns \rfloor} \xi_i^{(k)} \{ \mathbb{I}(y_{n,i} \leq u) - C_n(u) \}$
et $\tilde{\mathbb{A}}_n^{(k)}(s, u) = \alpha_n^{(k)}(s, u) - \frac{\lfloor ns \rfloor}{n} \alpha_n^{(k)}(1, u)$
 - (c) Évaluer $\tau_n^{(k)} = \max_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{\mathbb{A}}_n^{(k)}(j/n, y_{n,i})|$

On obtient la p valeur avec : $p - \text{valeur} = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbb{I}(\tau_n^{(k)} > \tau_n)}{N}$

ANNEXE C

ÉQUATIONS DU FILTRE DE KALMAN

Les équations du filtre de Kalman sont comme suit :

$$Z_{i|i-1} = \mu_i + F_i Z_{i-1|i-1} \quad (\text{C.1})$$

$$Y_{i|i-1} = d_i + H_i Z_{i|i-1} \quad (\text{C.2})$$

$$e_i = Y_i - Y_{i|i-1} \quad (\text{C.3})$$

$$P_{i|i-1} = F_i P_{i-1|i-1} F_i^T + G_i Q_i G_i^T \quad (\text{C.4})$$

$$V_i = H_i P_{i|i-1} H_i^T + R_i \quad (\text{C.5})$$

$$Z_{i|i} = Z_{i|i-1} + P_{i|i-1} H_i^T V_i^{-1} e_i \quad (\text{C.6})$$

$$P_{i|i} = P_{i|i-1} - P_{i|i-1} H_i^T V_i^{-1} P_{i|i-1} \quad (\text{C.7})$$

L'initialisation du filtre sont comme suit (suivant la méthodologie conseillé par Rémillard (2013)) $Z_{0|0} = 0$ $P_{0|0} = 100I_2$