

HEC MONTRÉAL

Stratégies d'allocation d'actifs basées sur les
changements de régime

Carl Dussault

Sciences de la gestion
(Finance)

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
maîtrise ès sciences
(M.Sc.)

Septembre 2013

© Carl Dussault

Résumé

Dans ce mémoire, nous proposons une méthode d'allocation d'actif qui est conditionnelle à la probabilité d'être dans un régime que l'investisseur veut éviter. Les différents régimes sont identifiés par des modèles de Markov cachés. Nous utilisons les probabilités produites par ces modèles lors du processus d'allocation d'actif. La méthodologie développée peut s'appliquer à plusieurs combinaisons d'actifs. Dans notre cas, nous nous sommes concentrés entre l'allocation à un actif risqué qui est le marché boursier des États-Unis et l'actif sans risque du même pays. Notre approche qui a le plus de succès utilise des facteurs reliés aux marchés boursiers et elle n'utilise pas directement les rendements observés.

Mots-clés : allocation d'actif, stratégie d'investissement, régimes, modèle Markov caché

Table des matières

Table des matières.....	3
Liste des tableaux, graphiques et figures	4
1. Introduction	5
2. Revue de Littérature	7
Efficience des marchés et la valeur économique de la synchronisation de la volatilité.	7
Modèles de Markov cachés	8
Les marchés financiers et les modèles de Markov cachés	10
Les stratégies d'investissements	13
3. Modèle de Markov Caché	14
Chaîne de Markov.....	14
Introduction aux modèles multivariés.....	18
Estimation des paramètres.....	21
Calcul des erreurs standards.....	23
Choix du nombre de régimes.....	24
4. Méthodologie	26
Données	26
Développement du principe de base de nos stratégies d'investissements.....	27
Prévoir la prochaine probabilité avec la matrice de transition	29
Une analyse préliminaire des paramètres d'une fenêtre d'estimation	30
Processus multivarié	37
Une approche différente	38
Approche différente et multivariée	40
Performance obtenue avec les diverses fenêtres	50
Robustesse des régimes.....	53
Application au SP500	58
Application d'un levier dynamique.....	59
5. Autres modèles expérimentés.....	65
6. Conclusion.....	67
Bibliographie	71

Liste des tableaux, graphiques et figures

Figure 3.1 : Illustration d'une chaîne de Markov avec 2 régimes	16
Figure 3.2 – Mélange de densités gaussiennes	16
Figure 3.3 – Concept de régime non observable.....	17
Tableau 4.1.0 – Détails des données	28
Tableau 4.1.2 – Paramètres du modèle 4.1 pour la période 1970 à 1979	31
Tableau 4.1.2 – Mesures de performance du modèle 4.1	32
Tableau 4.1.3 – Mesures de performance du modèle 4.4	33
Tableau 4.1.4 - Mesures de performance du modèle 4.6.....	34
Tableau 4.1.5 - Mesures de performance du modèle 4.8.....	36
Tableau 4.1.6 - Mesures de performance du modèle 4.10.....	38
Tableau 4.1.7 - Mesures de performance du modèle 4.13.....	40
Tableau 4.1.8 – Statistiques de robustesse pour la période d'estimation (1970-1979) du modèle 4.14 avec 2 régimes.....	42
Tableau 4.1.11 - Mesures de performance du modèle 4.14.....	46
Graphique 4.1.1- Probabilité de régime du modèle 4.14 avec fenêtre grandissante	47
Graphique 4.1.2- Probabilité de régime du modèle 4.14 avec fenêtre fixe	48
Graphique 4.1.3- Probabilité de régime du modèle 4.14 avec fenêtre roulante	49
Tableau 4.1.12 - Mesure de performance du modèle 4.14.....	51
Tableau 4.1.13 – Statistiques de robustesse pour la période entière (1970-2011) du modèle 4.14 avec 2 régimes.....	54
Graphique 4.1.4 – Évolution du facteur HML (1970-2011).....	55
Graphique 4.1.5 – Évolution du facteur MOM (1970-2011).....	57
Graphique 4.1.6 – Différence de la performance année sur année	58
Tableau 4.1.14 – Mesures performance du modèle 4.14 avec le S&P 500	59
Tableau - 4.1.15 – Mesures performance du modèle 4.14 avec l'indice 1/N et levier....	61
Graphique 4.1.7 – Rendements cumulés – Indice 1/N - Modèle 4.14 – MOM & HML..	62
Tableau - 4.1.16 – Mesures performance du modèle 4.14 avec le S&P 500 et levier ...	63
Graphique 4.1.8 – Rendements cumulés – S&P 500 - Modèle 4.14 – MOM & HML....	64

1. Introduction

Les changements de régime sur les rendements boursiers sont des concepts qui nous permettent d'éclaircir certains éléments qui nous échappent encore. Un de ceux-ci est le fait que la volatilité est collante, qui a été mis de l'avant par Mandelbrot (1963). Ce dernier tentait d'expliquer la non-normalité des fluctuations dans le prix du coton aux États-Unis. Pour ce faire, il expérimenta d'autres lois de distributions, cependant il stipula qu'une manière classique d'expliquer le phénomène des queues épaisses était d'utiliser les mélanges de densités, ou plus communément appelé le concept de régimes.

Partant de cette notion, nous voulons nous attaquer à une problématique qui sera toujours d'actualité dans le milieu de la gestion de portefeuille : la recherche de rendements supérieurs par rapport à des contraintes de risques.

Dans ce mémoire, nous mettrons l'accent sur le développement d'une stratégie d'investissement qui se base sur le principe de mélange de densités. C'est dans cette optique que nous voulons proposer une stratégie d'investissement qui se base sur le concept de changements de régime que peuvent démontrés les rendements boursiers.

L'objectif premier de ce mémoire est la recherche de rendements supérieurs, et ce, en protégeant efficacement la richesse de l'investisseur comparativement aux indices de références. Pour ce faire, nous utiliserons un modèle de changement de régime markovien.

Au préalable, nous vous présenterons la structure de cet exercice. Le second chapitre est composé d'une revue de littérature couvrant les modèles de Markov cachés, les marchés financiers et les modèles de Markov cachés en finance, ainsi que les stratégies d'investissement en gestion de portefeuille. Par la suite, le troisième chapitre définit mathématiquement le modèle de

changement de régime de Markov que nous utiliserons et le quatrième chapitre développe le concept entourant la stratégie d'investissement qui sera utilisée et présente les résultats que nous avons obtenus seront discutés par rapport à leur valeur ajoutée et à leur valeur économique. Subséquemment, le chapitre 5 contient une partie sur des tests effectués lors des travaux de ce mémoire, qui ne sont pas discutés en profondeur. Le chapitre 6 permet de conclure cet exercice avec l'implication des résultats et les pistes qui restent à explorer.

2. Revue de Littérature

Pour introduire notre sujet, il est de mise de présenter les éléments qui nous ont inspirés tout au long de ce travail. Dans un premier temps, nous discuterons de l'efficacité des marchés et de la valeur économique de synchroniser la volatilité des marchés. Deuxièmement, nous présenterons l'essence du développement des modèles de Markov cachés. L'introduction à ce type de modèle sera essentielle au cours de ce travail. Par la suite, nous élaborerons sur la littérature qui entoure les rendements boursiers et le concept de changements de régime, et nous terminerons avec une note sur les stratégies d'investissements en gestion de portefeuille.

Efficacité des marchés et la valeur économique de la synchronisation de la volatilité.

Une des hypothèses sous-jacentes à ce travail est que les marchés ne présentent aucune forme d'efficacité. Selon la forme faible de l'efficacité des marchés, il n'est pas possible d'ajouter de la valeur dans un processus de gestion de portefeuille en se basant sur les prix du passé. De plus, elle stipule que les mouvements des prix sont dictés par l'information qui n'est pas encore connue. Or, nous voulons développer des modèles utilisant l'information qui est déjà connue dans les prix et l'interpréter avec les modèles de Markov cachés. L'utilisation de cet outil est en lien avec une autre hypothèse que nous utilisons pour ce mémoire. Celle-ci est qu'il existe une valeur économique à la synchronisation de la volatilité.

L'essence de nos modèles reposera sur le concept qu'il est possible pour un investisseur de synchroniser son allocation d'actif en fonction de la volatilité des régimes étudiés. À ce sujet, Fleming, Kirby & Ostdiek (2001) démontrent qu'il existe une valeur économique à synchroniser la volatilité. Ils se basent sur le fait que la volatilité est beaucoup plus facile à prévoir que les

rendements futurs. Pour prouver leurs points, ils proposent deux manières d'optimiser la stratégie. La première est de fixer le rendement espéré et de résoudre pour l'allocation qui minimise la volatilité conditionnelle. La seconde est de fixer la variance du portefeuille à un certain niveau et de résoudre pour maximiser le rendement conditionnel. Pour ce faire, ils utilisent l'or, les actions, les obligations et le marché monétaire comme classe d'actif. Leurs résultats démontrent qu'une telle stratégie surperforme le portefeuille statique. Nous croyons qu'il était important de souligner qu'il existe de la littérature entourant le phénomène de la synchronisation de la volatilité, car c'est un concept important qui sera utilisé d'une manière similaire dans ce mémoire.

Modèles de Markov cachés

Avant toute chose, un modèle de Markov caché est un modèle statistique qui suit un processus de Markov avec des états qui ne sont pas directement observables. Dans le cas qui nous intéresse, les états représentent les régimes des rendements boursiers.

D'une part, ce type de modèle découle de la recherche que le mathématicien Andreï Markov (1856-1922) a effectuée sur les processus stochastiques. Il développa le concept de chaînes de Markov, qui est au cœur du modèle, et qui stipule que dans un processus stochastique la prévision du futur n'est pas améliorée par l'intégration d'information du passé. Cependant, l'utilisation des modèles de Markov cachés ne se concrétisa que beaucoup plus tard, car les mathématiciens n'avaient pas encore été en mesure de résoudre le problème d'identification des fonctions finies des chaînes de Markov comme mentionne Gilbert (1959). C'est Baum et *al.* (1970), qui développa les algorithmes nécessaires pour permettre l'application de ce modèle. Ensemble, ils prouvent que l'estimation par maximum de vraisemblance converge correctement. Une première utilisation pratique d'un modèle de Markov caché a été dans le domaine acoustique, et fut développée par Baker (1975).

Encore aujourd'hui, ce concept est utilisé dans des logiciels de reconnaissance vocale. Quelques années plus tard, Rabiner (1989) publia un tutoriel sur les modèles de Markov cachés et leurs utilisations dans le domaine de la reconnaissance vocale. Encore aujourd'hui, ce document demeure un incontournable pour une introduction à ce sujet.

En économie, la première application d'envergure découle du travail de Goldfeld et Quandt (1973), car c'est avec l'utilisation de leur modèle de Markov pour des régressions changeantes, qu'Hamilton (1989) effectua ces travaux. D'une part, le modèle de Goldfeld et Quandt révolutionne l'utilisation de ce type de modèles en économétrie, car il permet de faire plus d'un changement de régime en étudiant une série temporelle. Pour en faire la démonstration, ils proposent un modèle en déséquilibre pour le marché immobilier aux États-Unis. D'autre part, Hamilton propose un algorithme qui permet d'inférer les probabilités de l'état dans la série temporelle observée. Il en fait l'application empirique avec le produit national brut réel des États-Unis. La technique, qui est ainsi utilisée, suggère qu'il y a des changements périodiques dans le comportement de la série temporelle, et il découvre que ces changements de régime sont en lien avec le cycle économique des États-Unis.

Par la suite, la communauté économique a produit plusieurs autres utilisations très intéressantes des modèles de Markov cachés. Parmi celles-ci, une des applications est l'utilisation de ces modèles pour déterminer les probabilités réelles d'être en récession aux États-Unis. Chauvet et Piger (2008) utilise un modèle de Markov caché pour inférer les probabilités que l'économie soit en récession. Leurs résultats sont très concluants lorsqu'on les compare aux dates officielles de récession déterminées par le National Bureau of Economic Research (NBER). Maintenant, penchons-nous sur l'utilisation en lien avec les rendements boursiers.

Les marchés financiers et les modèles de Markov cachés

Un des premiers articles à s'intéresser aux rendements boursiers avec l'aide des modèles de Markov cachés est celui de Turner, Startz et Nelson (1989). Leur étude se penche sur le fait que les modèles de prix d'actif avec une variance constante n'arrivent pas à bien expliquer le comportement des rendements boursiers, car ceux-ci, comme Mandelbrot avait spécifié, ne semblent pas tirer d'une distribution normale. En étudiant les rendements boursiers excédentaires d'après la Deuxième Guerre mondiale, ils démontrent qu'un modèle, qui les explique adéquatement, peut être construit avec un mélange de densité de loi normale. De plus, ils mentionnent que la variance de ces mélanges est fortement dépendante du temps, ce qui est utile dans la prévision de celle-ci.

En plus des rendements boursiers, beaucoup de recherches ont été effectuées sur les taux d'intérêt. Il suffit de penser aux travaux d'Ang et Bekaert (2002), qui développe des modèles de Markov cachés pour les taux d'intérêt des États-Unis, Grande-Bretagne et de l'Allemagne. Ils comparent la performance de ce type de modèles aux modèles comportant un seul régime. Ils notent qu'avec des tests de résidus, les modèles comportant plusieurs régimes performant moins bien. Cependant, les prévisions des modèles avec régimes sont meilleures. Encore une fois, les travaux démontrent des liens entre les régimes des taux d'intérêt et le cycle économique aux États-Unis.

Maintenant, nous pouvons revenir sur un thème qui se rapproche beaucoup plus de ce mémoire; l'allocation d'actif et les modèles de Markov cachés. C'est avec Brennan et *al.* (1997) que nous pouvons en voir une des premières applications. Ils démontrent qu'un modèle, qui suit un processus de Markov décrit par les taux d'intérêt à court terme, les taux obligataires longs termes et le taux de dividende sur un portefeuille d'actions, est utile lors d'une stratégie d'allocation d'actif. Ils montrent que le portefeuille optimal est différent pour les investisseurs avec des horizons temporels différents. Ce postulat est réaffirmé par Honda (2003), mais avec une méthode différente.

Ce dernier utilise un régime variable où l'état de l'économie est caché, et il attribue la différence dans la composition des portefeuilles à la différence de demande d'actif permettant de se couvrir des changements dans l'espérance des rendements moyens.

Guidolin et Timmermann (2007) s'attardent à l'allocation d'actif en gestion de portefeuille avec un modèle de Markov caché multivarié. Pour leur étude, ils utilisent la période de 1954 à 1999, et ce pour garder une fenêtre hors échantillon. Selon eux, ce type de modèle de changements de régime permet de capturer les variations, que ce soit courts termes ou longs termes, dans les opportunités d'investissement. De ce fait, il existe une grande variation dans l'allocation d'actif des investisseurs avec ce modèle. Ceci s'explique par le fait que l'investisseur peut percevoir l'économie de différentes manières à travers les différents régimes. Il peut donc réallouer ses actifs conditionnellement à l'état de l'économie. Nous allons utiliser un concept similaire pour développer notre stratégie d'investissement.

Dans un article plus récent, les mêmes auteurs réitèrent certains postulats de l'article précédent, et ce en étudiant la question avec d'autres facteurs. Guidolin et Timmermann (2008) étudient les anomalies de taille et valeur dans la distribution des rendements boursiers aux États-Unis pour la période de 1927 à 2005. Ils démontrent qu'il y a présence de 4 régimes distincts dans la distribution jointe des rendements pour les portefeuilles de marchés, de tailles et ceux de valeur aux livres. Les régimes sont différenciés à l'aide des rendements espérés, de leurs volatilités et à l'aide des corrélations entre les portefeuilles. De plus, ils testent le pouvoir explicatif du rendement des dividendes sur les rendements du portefeuille de marchés. Bien qu'il y ait encore 4 régimes distincts, ceux-ci ne représentent pas les mêmes caractéristiques. Encore une fois, l'importance de la prise en considération des régimes est étudiée. Ils stipulent qu'un investisseur à un gain d'utilité, si ce dernier les prend en considération lors de son allocation d'actif. Ce gain est réaffirmé lorsque des tests hors échantillonnages sont effectués.

Guidolin et al. (2009) étudient la non-linéarité des rendements boursiers et des taux d'intérêt à travers les pays du G7. Ils testent différents modèles de changement de régime, dont le modèle de Markov caché, et ce, pour en vérifier leur pouvoir de prévision. Un des éléments important trouvé est qu'il n'y a pas de modèle de changement de régime qui est constamment le meilleur dans les prévisions pour tous les pays. Cependant, pour le cas des rendements boursiers des États-Unis et de la Grande-Bretagne, ils trouvent qu'un modèle de Markov caché améliore significativement le pouvoir prédictif, en les comparant à des modèles plus simples comme le modèle à seuil autorégressif.

Dans un de ces derniers papiers, Guidolin (2012) revoit en détail l'utilisation des modèles de changements de Markov cachés en finance empirique. Il débute par une élaboration des divers contributeurs à la littérature et à ceux qui ont permis des avancées majeures sur le sujet, et ce, tout en touchant aux formes alternatives de ces modèles. Il discute des modèles de changements de régime de Markov cachés autorégressifs et de l'utilisation possible d'une matrice de transition qui varie dans le temps. Avec toutes ces observations, il postule que ces modèles sont d'une grande utilité dans la modélisation des rendements des actifs et permettent de mieux comprendre certains des phénomènes clés les entourant. Pour terminer, il souligne que quelques découvertes ont été faites par plusieurs chercheurs. La première d'entre elles est que les taux d'intérêt court terme sont bien décrits par deux régimes. Un premier régime présente des taux d'intérêts élevés et volatiles, mais font preuve d'un retour vers la moyenne tandis que le second régime présente des taux d'intérêts bas, persistants et stables. La deuxième découverte concerne les actions. Elle stipule qu'un premier régime illustre une prime de risque élevé avec une faible volatilité et qu'un deuxième possède une faible prime de risque avec une haute volatilité.

Nous allons pouvoir observer certains de ces postulats au cours de ce mémoire.

Les stratégies d'investissements

Dans le monde de la finance de marchés, beaucoup de gens s'attardent à développer des stratégies d'investissements. Elles varient de l'appariement entre les actifs et les passifs d'un fonds de pension ou d'une compagnie d'assurance vie aux stratégies de faible volatilité qui sont très populaires depuis la fin de la crise de financière de 2008. Une grande partie d'entre elles ont comme mandat de diminuer le risque du portefeuille tout en ayant le meilleur rendement possible. C'est un peu ce que nous allons tenter d'accomplir.

Toutes ces stratégies ont bien évolué depuis l'œuvre phare d'Harry Markowitz (1952) sur la théorie de portefeuille. Il suffit de penser aux facteurs de Fama & French (1993) ou de Carhart (1997) qui permettent de bien expliquer une partie de la variation dans le prix des actions. Dès lors, un gestionnaire de portefeuille peut utiliser ces facteurs comme outils dans sa prise de décision. Cependant, au fil du temps, ces facteurs sont devenus nécessaires pour bien mesurer l'alpha d'un gestionnaire. Ils permettent de corriger pour les biais de valeur aux livres, de taille de *momentum*.

L'ampleur d'une revue de littérature complète sur le sujet des stratégies d'investissement va bien au-delà de ce mémoire. Un lecteur averti peut s'introduire facilement à ce sujet avec les innombrables ouvrages sur le sujet de la finance quantitative ou s'instruire à travers les différents journaux scientifiques financiers qui publient des articles empiriques sur le sujet comme le *Financial Analysts Journal*.

Pour nous, il est important de souligner l'ampleur de ce phénomène, qui prend une partie importante dans le monde de la finance.

3. Modèle de Markov Caché

Chaîne de Markov

Avant d'élaborer la conception du modèle de Markov caché, nous devons introduire le concept de chaîne de Markov à temps discret. Celui-ci sera utilisé pour nos hypothèses et il est à la base des modèles utilisés. Cette chaîne est une séquence de variables aléatoires qui suit un processus sans mémoire et où le processus de transition entre les états, ou dans notre cas les régimes est dirigé par une matrice de transition. Ce processus, ou chaîne stipule que la précision des prédictions du futur, avec les éléments du présent, n'est pas améliorée en considérant les éléments du passé. Notons la séquence comme une suite d'observations, qui peut être représentée par des rendements boursiers :

$$3.1 \quad Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_t$$

Dans le cas où ces observations proviennent de régimes, nous pouvons écrire ce concept comme la probabilité conditionnelle future d'être dans un régime quelconque dépend seulement du régime actuel.

$$3.2 \quad P(Y_{t+1} = X_{t+1} | Y_t = X_t, \dots, Y_0 = X_0) = P(Y_{t+1} = X_{t+1} | Y_t = X_t)$$

$$3.3 \quad X_t \in \{S_1, \dots, S_k\}$$

Où la valeur de X_t est définie par un ensemble qui comprend tous les régimes, la valeur S définit un régime et k est le nombre de régimes.

Pour l'instant, prenons l'hypothèse que nos probabilités conditionnelles sont constantes, nous pouvons écrire que la probabilité de transition que le régime i sera suivi par le régime j de la manière suivante :

$$3.4 \quad P(Y_{t+1} = j | Y_t = i) = P(Y_1 = j | Y_0 = i) = p_{i,j}$$

Dès lors, le processus de transition entre ces régimes peut être représenté par une matrice de transition que nous pouvons noter de la manière suivante et où la somme de chaque colonne est unitaire :

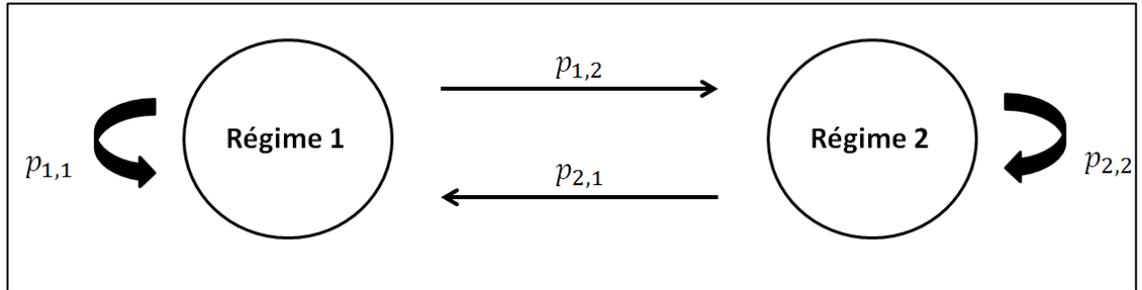
$$3.4 \quad TM = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{k,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1,k} & \cdots & p_{k,k} \end{bmatrix}$$

$$3.5 \quad p_{i,1} + \cdots + p_{i,k} = 1, \quad \forall \text{ colonne } i$$

Il est à noter que deux choix peuvent être utilisés pour spécifier la matrice de transition. Le premier est de considérer un processus de Markov homogène, ce qui signifie que notre matrice de transition est constante dans le temps, et le deuxième est d'utiliser une matrice de transition qui est variante dans le temps. Dans le deuxième cas, nous pouvons conditionner la matrice de transition sur des variables économiques comme le PIB ou des variables financières comme le VIX. Les travaux de Diebold, Lee & Weinbach (1994) forment les bases pour les modèles de changements de régimes markoviens utilisant des matrices de transition variantes dans le temps. Plus récemment, Morier & Teles (2011) utilisent ce principe avec la qualité des institutions et le niveau des investissements pour développer leur modèle de Markov, et ainsi tenter d'expliquer la croissance économique dans divers pays. Pour ce mémoire, nous utiliserons une matrice de transition qui est constante dans le temps.

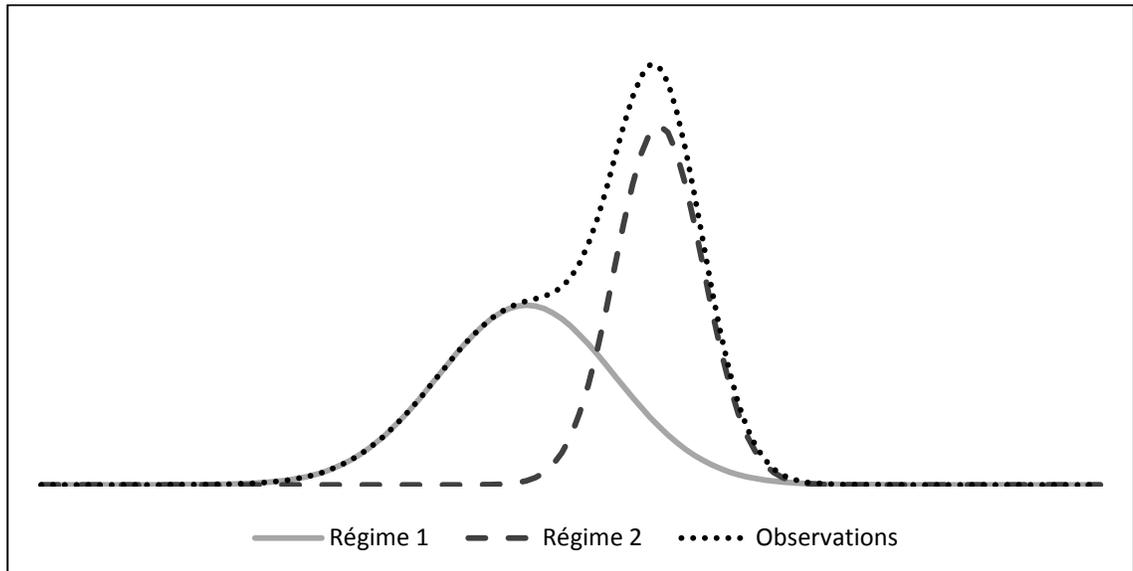
Il est facile d'illustrer le concept développé jusqu'à maintenant avec la Figure 3.1. Celle-ci démontre bien la transition entre les divers régimes que suit une chaîne de Markov.

Figure 3.1 : Illustration d'une chaîne de Markov avec 2 régimes



Maintenant que le concept de chaîne de Markov est bien introduit, nous pouvons introduire l'hypothèse que les rendements boursiers que nous observons sont le résultat d'un mélange de densités gaussiennes, comme supposé par Mandelbrot (1963), et que le processus de transition peut être représenté par une chaîne de Markov. Dans cette conceptualisation, chaque densité est un régime qui est défini avec ses propres paramètres. La Figure 3.2 nous permet de bien conceptualiser la situation.

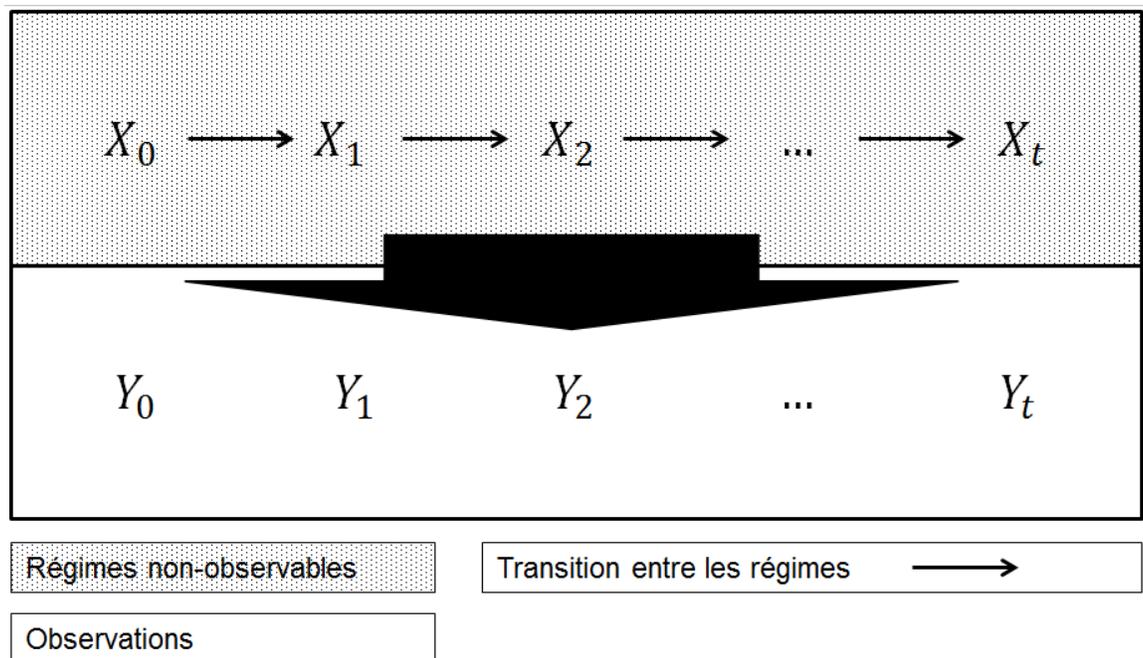
Figure 3.2 – Mélange de densités gaussiennes



Dès lors, nous voulons déterminer les paramètres de chacun des régimes pour pouvoir développer nos stratégies d'investissements. C'est ici que nous introduirons les modèles de changements de régime de Markov cachés.

Il est facile d'interpréter ces régimes lorsque ceux-ci sont directement observables par l'utilisateur. En réalité, nous ne sommes pas en mesure d'établir de façon directe dans quel régime se trouvent, par exemple, les rendements d'un indice boursier à chaque instant. Cependant, nous sommes en mesure d'en observer le produit de ces régimes qui sont les rendements représentés par Y_t dans la prochaine figure. Voici une interprétation graphique de la situation :

Figure 3.3 – Concept de régime non observable



À partir de maintenant, notre intérêt se porte sur l'inférence de ces régimes, qui ne sont pas directement observables, et des paramètres de population qui les caractérisent. Une fois cette étape accomplie, nous pourrons développer nos stratégies d'investissements.

Introduction aux modèles multivariés

Nous allons introduire les modèles de changement de régime de Markov cachés sous une forme générale et expliquer le processus itératif qui nous permet de déterminer les paramètres de population des différents régimes, et ainsi inférer la probabilité d'être dans ceux-ci régimes.

En plus de pouvoir utiliser ce type de modèle sur un processus univarié, comme dans le cas d'Hamilton (1989), il est possible de l'utiliser sur un processus multivarié. Ce type de modèle à plusieurs équations fait partie de la grande famille des modèles autorégressifs de changement de régime de Markov. Sachant qu'un processus multivarié a été utilisé par Guidolin et Timmermann (2007) pour expliquer le comportement de la distribution jointe des actions et des obligations, nous introduirons ce type de modèle pour nous permettre de bien le comprendre pour ensuite l'utiliser comme outil dans notre recherche de rendements supérieurs. De plus, ces explications englobent le cas univarié.

L'introduction que nous allons faire des modèles multivariés se base en grande majorité sur la notation du document de Bellone (2005). Ce dernier explique les modèles de changements de régimes markoviens multivariés utilisés dans l'écriture de son programme en Gauss. Pour un traitement plus en profondeur, nous pouvons nous référer à Krolzig (1997). Ce dernier explique en détail les différents aspects des modèles de vecteurs autorégressifs avec changements de régimes markoviens, les diverses méthodes d'inférences, les différentes structures et en fait la démonstration avec quelques exemples pratiques.

L'utilité de ce genre de modèle provient de la capacité à identifier des changements de régime sur un ensemble de variables. Ces variables peuvent représenter des variations dans le prix des actifs, des variations dans certains indicateurs économiques ou encore une combinaison des deux. Les possibilités à explorer sont très grandes lorsque ce genre de

modèle est utilisé. Tout au long de ce travail, nous allons parcourir quelques-unes d'entre elles dans la réalisation de notre objectif.

Débutons par l'introduction d'une équation sous forme vectorielle qui nous permet de mettre les bases sur ce type de modèle.

$$3.6 \quad Y_t = X_t B_{s_t} + Z_t \Phi + E_t$$

Dans un premier temps, Y_t est un vecteur composé de i variables indépendantes d'intérêts et il est de forme $(1 \times i)$, où chaque variable peut changer de régime. Dans notre cas, les variables d'intérêts utilisées seront des variations de prix d'actifs, de facteurs ou des indicateurs économiques.

Le nombre de régimes peut prendre les valeurs de 1 à k . La détermination du nombre de régimes sera approfondie dans une des prochaines sections.

Les variables exogènes qui sont sujettes aux changements de régime sont représentées par le vecteur X_t de taille $(1 \times n)$, où n est le nombre de ces variables explicatives. Les coefficients de ces variables dépendantes aux régimes prennent la forme de la matrice B_{s_t} de forme $(n \times i)$. Il est à noter que des variables explicatives peuvent être indépendantes des régimes. Suivant ce postulat, le vecteur Z_t , de forme $(1 \times q)$, est composé de q variables exogènes qui ne sont pas sujettes aux changements de régime. Les coefficients de ces variables sont représentés par la matrice Φ $(q \times i)$.

La composition du terme d'erreur peut prendre plusieurs formes dépendamment de l'interaction désirée dans la matrice de variance-covariance. Les termes à l'intérieur de celle-ci peuvent être représentés par une seule variance, des variances indépendantes ou par l'entière relation de la matrice variance-covariance. Pour notre utilisation, il sera utile d'estimer la totalité de cette matrice. Dès lors, nous pouvons illustrer la composition de E_t de la manière suivante :

$$3.7 \quad E_t \sim N(0, \Sigma_{s_t})$$

$$3.8 \quad \Sigma_{S_t} = \begin{bmatrix} \sigma_{1 S_t}^2 & \cdots & \sigma_{1, k S_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k, 1 S_t} & \cdots & \sigma_{k S_t}^2 \end{bmatrix}$$

Noter que E_t suit une loi normale multidimensionnelle où le nombre de dimensions est représenté par le nombre de régimes k . Prenons-en note, qu'il est possible d'utiliser d'autres lois statistiques, cependant nous supposons que les séries temporelles utilisées sont des mélanges de densités normales.

En prenant en considération que la matrice de transition est constante, nous pouvons maintenant déterminer la composition des probabilités de cette matrice en prenant en compte l'ensemble des informations (I) de notre système d'équations disponible au pas de temps précédent ($I_{t-1} = Y_{t-1} \dots Y_1$) et de la propriété de Markov.

$$3.9 \quad \begin{aligned} p_{ij} &= P(S_t = j | S_{t-1} = i, \dots, S_1 = 1, I_{t-1}) \\ &= P(S_t = j | S_{t-1} = i), \quad \forall i, j \in \{1 \dots k\} \end{aligned}$$

Pour rendre l'application d'une chaîne de Markov plus utile avec des vecteurs autorégressifs, Hamilton (1994) utilise une notation qui utilise une matrice identité et les probabilités d'être dans chaque régime. Il dénote ξ_t comme le vecteur des probabilités conditionnelles d'être dans les régimes. Nous pouvons donc réécrire la probabilité conditionnelle d'être dans le régime j comme suit :

$$3.10 \quad P(S_t = j | I_t) = E(\xi_t^j | I_t)$$

Il est possible de réexprimer le tout sous une forme vectorielle, nous noterons $\hat{\xi}_{t|t}$ comme le vecteur de nos probabilités filtrées dans les régimes à chaque pas de temps.

$$3.11 \quad \begin{aligned} P(S_t | I_t) &= E(\xi_t | I_t) = (P(S_t = 1 | I_t) \dots P(S_t = k | I_t)) \\ &= \hat{\xi}_{t|t} = (E(\hat{\xi}_t^1 | I_t) \dots E(\hat{\xi}_t^k | I_t)) \end{aligned}$$

Dans ce mémoire, l'obtention de ce vecteur est centrale aux développements des stratégies d'investissements. Pour obtenir ces probabilités et les paramètres de chaque régime, il faut procéder à l'estimation de ceux-ci.

Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres d'un modèle multivarié suit le même processus que pour le modèle univarié, cependant elle se fait avec une loi normale multidimensionnelle. Pratiquement, un modèle est estimé pour chaque régime (k) simultanément. L'architecture des équations peut être représentée sous la forme suivante :

$$3.12 \quad (1_i \otimes Y_t) = X_t(\beta_1 | \dots | \beta_k) + (1_i \otimes Z_t)\Phi + (\varepsilon_t^1 | \dots | \varepsilon_t^k)$$

Pour entreprendre l'estimation, elle se doit d'être conditionnée pour chaque régime, et ce, à l'aide de i variables d'intérêts. Il faut maintenant construire les équations à être maximisées pour obtenir nos paramètres. Dans un premier temps, définissons $\mu_{t,j}$ comme le membre de droite des équations excluant les termes d'erreurs.

$$3.13 \quad \mu_{t,j} = x_t \beta_j + z_t \phi$$

À partir d'ici, nous avons besoin des fonctions de densités de probabilités conditionnelles pour poursuivre. Dans notre cas, comme mentionné précédemment, nous utiliserons un processus de loi normale multidimensionnelle avec une interaction complète de la matrice variance-covariance. Pour chaque régime j nous avons la fonction de densité de probabilités conditionnelles suivante :

$$3.14 \quad f(Y_t | S_t = j, I_{t-1}, \Theta) = (2\pi)^{-i/2} \det(\Sigma_j^{-1/2}) \exp\left(-\frac{(Y_t - \mu_{t,j})' \Sigma_j^{-1} (Y_t - \mu_{t,j})}{2}\right)$$

Les probabilités inconditionnelles sont nécessaires pour débiter le processus de maximisation, celles-ci sont obtenues en effectuant la somme des

fonctions de probabilités de densités conditionnelles. Nous pouvons les représenter comme suit :

$$3.15 \quad f(Y_t|I_{t-1}, \theta) = \sum_{j=1}^k P(S_t = j, I_{t-1}, \theta) \cdot f(Y_t|S_t = j, I_{t-1}, \theta)$$

Où θ est la matrice des paramètres à estimer.

Dès lors, il est possible d'exprimer le log vraisemblance du modèle comme suit :

$$3.16 \quad L(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln(f(Y_t|I_{t-1}, \theta))$$

Pour bien saisir le processus de maximisation, imaginons que nous connaissons déjà les paramètres de la population et que nous voulons obtenir les probabilités à chaque pas de temps t . Le processus itératif pour obtenir les probabilités peut se résumer en 4 étapes.

1. Détermination des probabilités de départs de façon arbitraire comme illustré avec l'équation suivante :

$$3.17 \quad Pr(S_0 = j) = 0.5$$

L'alternative est d'utiliser les probabilités inconditionnelles de S_t :

$$3.18 \quad Pr(S_0 = 1) = \frac{1-p_{11}}{2-p_{22}-p_{11}}$$

2. Au pas de temps t , calculer les probabilités pour chaque régime avec les observations qui vont jusqu'à $t - 1$, et ce à l'aide de la matrice de transition et de la probabilité à l'instant $t - 1$:

$$3.19 \quad P(S_t = j|\Omega_{t-1}) = \sum_{i=1}^k p_{ji}(P(S_{t-1} = i|\Omega_{t-1}))$$

3. Mettre à jour la probabilité de chaque état avec la nouvelle information du pas de temps t . Celle-ci est accomplie en utilisant les paramètres des régimes et de la matrice de transition. Par la suite, nous utilisons la formule suivante pour mettre à jour la probabilité d'être dans chaque régime étant donné la nouvelle information :

$$3.18 \quad P(S_t = j | \Omega_t) = \frac{f(y_t | S_t = j, \Omega_{t-1}) P(S_t = j | \Omega_{t-1})}{\sum_{j=1}^k f(y_t | S_t = j, \Omega_{t-1}) P(S_t = j | \Omega_{t-1})}$$

4. Répéter les étapes 2 à 3 jusqu'à la dernière observation de l'échantillon.

Ayant expliqué l'architecture derrière le processus itératif, qui permet de trouver les probabilités d'être dans un état à chaque pas de temps, nous devons déterminer les paramètres de la population. Le tout est fait en maximisant numériquement l'équation 3.16. Dès lors, nous obtenons l'ensemble des paramètres qui maximise le log-vraisemblance de notre modèle.

L'utilisation d'un logiciel mathématique permet de grandement faciliter la tâche. Dans notre cas, nous avons utilisé Matlab et les codes de Perlin (2012) pour la maximisation numérique.

Calcul des erreurs standards

Comme le note Hamilton (1994), Kiefer (1978) démontre qu'il existe un maximum local délimité à l'équation 3.16 et il produit un estimé cohérent et asymptotiquement gaussien pour les paramètres estimés. C'est pour cette raison qu'il est possible d'utiliser la matrice hessienne pour débiter et calculer les erreurs standards des paramètres estimés à partir de la racine carré de la diagonale de 3.20.

$$3.19 \quad H(\theta) = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'}$$

$$3.20 \quad \text{var}(\theta) = (-E[H(\theta)])^{-1}$$

Il est possible d'obtenir plus l'information nécessaire à ce sujet dans le livre de Hamilton *Time Series Analysis (1994)*. Dans notre cas, nous avons utilisé cette méthodologie.

Choix du nombre de régimes

Au travers la littérature sur les modèles de Markov cachés, le problème du choix du nombre de régimes sont souvent soulevés. Étant donné que c'est un intrant très important dans tout processus utilisant ces modèles, il faut bien évaluer l'impact de ce choix. Dans le cas du développement d'une stratégie d'investissement, la différence peut être grande entre l'interprétation d'un modèle avec 2,3 ou 4 régimes.

Les méthodes pour déterminer le nombre de régimes varient. Quelques alternatives s'offrent à nous. Tout d'abord, les approches économétriques sont un bon endroit pour débiter. Il est possible d'utiliser le critère d'information Akaike.

$$3.21 \quad AIC = 2k - 2\ln(L)$$

Ce critère est une mesure de qualité relative entre la complexité d'un modèle et sa qualité d'ajustement, et ce en fonction du nombre de paramètres (k) et du maximum de vraisemblance (L). Il pénalise le fait qu'un modèle à de plus en plus de paramètres pour augmenter la qualité d'ajustement. Bien qu'il effectue cette tâche, dans notre cas, il peut être préférable d'utiliser le critère d'information bayésien, car le nombre de régimes augmente de beaucoup le nombre de paramètres et qu'une des critiques de critère d'Akaike c'est le manque de pénalité envers le nombre de paramètres.

$$3.22 \quad BIC = k \ln(n) - 2 \ln(L)$$

Encore une fois, ce critère est une mesure de qualité relative entre la complexité d'un modèle et sa qualité d'ajustement. La grande différence est le fait que le premier terme pénalise plus grandement le critère en fonction du nombre d'observations (n).

D'autres alternatives peuvent être utilisées pour déterminer le nombre de régimes. Une première d'entre est utilisé par Guidolin & Timmermann (2005). Ils utilisent le ratio d'information Hannan-Quinn qui utilise la somme au carré des résidus. Dans un autre article, Guidolin & Timmermann (2004) utilisent un test qui se base sur la probabilité d'observer une valeur en dessous d'un seuil et sur les travaux de Rosenblatt (1952) sur les transformés multivariés.

Bien que ces moyens économétriques soient de bons outils pour déterminer le nombre de régimes, l'interprétation économique de ces régimes est tout aussi, sinon plus importante. À ce sujet, Ang et Timmermann (2011) avancent qu'il est difficile de déterminer le nombre de régimes avec des tests, car ces tests sont normalement difficiles à implémenter dû au fait que les distributions suivies ne sont pas toujours normales. Ils poursuivent avec le fait qu'il est commun de fixer le nombre de régimes à 2.

Dans notre cas, nous allons produire les critères AIC et BIC pour chaque modèle estimé.

4. Méthodologie

Ayant développé les principes mathématiques derrière les divers modèles de Markov cachés que nous pouvons utiliser, nous pouvons expliquer notre intuition pour le développement d'une stratégie d'investissement.

L'objectif de ce mémoire est de développer une stratégie d'investissement qui se base sur le principe de régime. La littérature introduite stipule que les modèles de Markov cachés sont de bons candidats pour identifier des changements. Comme mentionner précédemment, ce type de modèle infère les probabilités d'être dans les régimes spécifiques. Dès lors, nous pouvons utiliser ces probabilités pour conditionner nos stratégies d'investissement.

Données

Dans le but d'avoir accès à plusieurs types d'industrie sur une longue période de temps, nous avons choisi d'utiliser les données de Kenneth French qui sont disponibles sur sa page personnelle¹. Pour notre utilisation, nous avons choisi la composition de 17 types d'industrie, car la sélection pouvait se rapprocher de celle du GICS (Global Industry Classification Standard), qui est plus récente. La période retenue est de 1970 à 2011, car c'est approximativement la fin de l'ère Bretton Woods et que plusieurs données économiques sont disponibles depuis 1967 aux États-Unis. Cette disposition a été utilisée pour permettre d'effectuer des recherches sur les secteurs économiques aux États-Unis. Pour permettre une application plus pratique, nous allons également utiliser l'indice du S&P 500. Il faut comprendre que l'utilisation des secteurs était en place pour permettre d'effectuer des travaux pour développer une stratégie d'allocation basée sur la rotation de ceux-ci lors d'un cycle économique. Quelques tests ont été effectués, mais sans grand succès. Nous allons en discuter au chapitre 5.

¹ http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

De plus Kenneth French compile plusieurs autres données comme le taux sans risque et certains facteurs comme SMB, HML et MOM. Pour les variables macroéconomiques des États-Unis, la base de données de la Federal Reserve Bank of St. Louis² sera utilisée. Nous pouvons y retrouver les données sur la production industrielle, l'emploi et sur plusieurs autres variables d'intérêts.

Dans les cas où nous utilisons des données macroéconomiques, il faut s'assurer de la disponibilité en temps réel de ceux-ci. De ce fait, nous utiliserons la date de publication pour ces données. Par exemple, la production industrielle aux États-Unis du mois de juin est connue au milieu du mois de juillet. Dans l'application de nos stratégies d'investissements, nous l'utiliserons pour faire l'allocation d'actif au mois d'août. De plus, nous utiliserons, lorsque possible, les données non révisées pour augmenter la validité de nos modèles.

Pour être en mesure de bien comparer nos stratégies d'investissements, nous avons décidé de construire un indice de marché qui nous servira d'indice de référence. Pour ce faire, nous avons fait une moyenne équipondérée des rendements des 17 secteurs pour former notre indice de marché. Il est à noter que la recherche de secteur n'est pas couverte dans ce mémoire, cependant la mise en place d'une telle méthodologie pourra le permettre.

Développement du principe de base de nos stratégies d'investissements

La première étape dans le développement d'une stratégie est la période d'estimation. Pour ce faire, nous avons estimé les paramètres du modèle en utilisant les données de 1970 à 1979. Par la suite, nous avons utilisé le modèle sur chaque mois de 1980 à 2011, et ce en utilisant une fenêtre d'estimation grandissante. De cette manière, nous n'avons pas de biais dans

² <http://alfred.stlouisfed.org/>

la sélection du modèle. Le Tableau 4.1.0 résume les données utilisées pour cet exemple.

Tableau 4.1.0 – Détails des données

Données	17 Secteurs de Kenneth French
Marché (Indice de Référence)	1/N
Période	1970-2011
Fenêtre d'estimation	1970-1979
Fenêtre grandissante	1980-2011
Fréquence d'observation	Mensuelle

Les premiers modèles qui sont estimés sont de la forme suivante :

$$4.1 \quad R_t = \mu_{S_t} + \varepsilon_t$$

$$4.2 \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

Où R_t représente le rendement de l'indice, μ_{S_t} la moyenne du régime et $\sigma_{S_t}^2$ la variance du régime.

À chaque pas de temps après la fenêtre d'estimation, nous sauvegardons les probabilités d'être dans un régime spécifique. De ce fait, nous obtenons cette probabilité en temps réel.

Avec la période d'estimation, nous obtenons les paramètres des régimes, et donc nous pouvons débiter la construction d'une stratégie d'investissement. Pour un exemple de démonstration, nous avons estimé des modèles avec un différent nombre de régimes, mais de la même forme. Les modèles qui ont 2,3 et 4 régimes sont majoritairement différentiables dans leurs variances. À ce sujet, Ang et Timmermann (2011) discute du fait que les tests statistiques

ne semblent pas rejeter l'hypothèse nulle que les moyennes sont identiques, mais parviennent facilement à rejeter l'hypothèse nulle que les variances sont identiques à travers les régimes. En observant les paramètres des régimes des périodes d'estimation, nous pouvons choisir, quel régime devrait être évité et ainsi faire notre allocation d'actif.

Cependant, rien ne nous permet de croire que les rendements du mois prochain seront dans le même régime, mis à part notre matrice de transition. Celle-ci démontre les probabilités de transition dépendamment du régime dans lequel nous nous trouvons, et nous pouvons remarquer qu'il y a une certaine persistance dans le temps. Dès lors, il est logique de vouloir utiliser la probabilité d'être dans un régime en janvier pour faire l'allocation d'actif au mois de février.

De ce fait, nous investissons en fonction de la probabilité d'être dans le régime à éviter. Dans tous les cas, cela représente le régime ayant le profil ayant la plus haute variance. La stratégie consiste à investir la probabilité d'être dans le mauvais régime au temps $t-1$ dans le taux sans risque à t et le reste dans l'indice de référence. Le conditionnement à l'aide de la probabilité se fait de la manière suivante :

$$4.3 \quad V_t = V_{t-1} \left[(1 - P(S_{t-1}^n)) * (1 + R_t^{\text{Indice}}) + (P(S_{t-1}^n)) * (1 + R_t^{\text{Rf}}) \right]$$

Où n est le régime qui présente la combinaison variance élevée et rendement faible, V_t la valeur du portefeuille, R_t^{Indice} le rendement de l'indice et R_t^{Rf} le rendement du taux sans risque. Nous avons utilisé ce principe pour les 3 modèles estimés et le Tableau 4.1.2 présente quelques mesures de performance.

Prévoir la prochaine probabilité avec la matrice de transition

En élaborant la structure de la stratégie d'investissement, nous avons longuement réfléchi à l'utilisation de la matrice de transition pour définir la

probabilité d'être dans un régime à haute volatilité. Pour ce faire, nous pouvons utiliser le procédé suivant :

$$P(S_t^n) = P(S_{t-1}^n) * p_{k,k}$$

Dès lors, il serait possible d'utiliser la probabilité présente d'être dans un état précis et de la multiplier par la probabilité de transition dans l'état désiré. À première vue, cela nous semblait être une bonne idée. Cependant, la résultante en est tout autre. Prenons l'exemple où nous 2 régimes et que nous avons une probabilité de rester dans le même régime $p_{k,k} = 0.95$. La résultante est une multiplication de toutes les probabilités inférées par 0.95, ce qui amène un biais systématique vers une classe d'actif. Nous perdons la flexibilité de la probabilité entre 0 et 1, ce qui est un élément important dans notre travail. C'est pour cette raison que nous n'avons pas retenu cette méthodologie.

Une analyse préliminaire des paramètres d'une fenêtre d'estimation

Avant de démontrer les résultats, nous devons nous pencher sur la robustesse du modèle utilisé. Pour se faire, nous avons développé une méthode nous permettant d'éliminer, en partie, le biais de regarder dans l'avenir. La première étape est d'utiliser les paramètres des modèles sur la période d'estimation de 1970 à 1979 pour obtenir certains coefficients statistiques sur la robustesse de nos régimes.

En observant les valeurs du tableau suivant, nous pouvons remarquer que ce modèle est bien expliqué par 2 régimes, si nous utilisons le critère BIC pour sélectionner notre modèle. Dès lors, nous pouvons dire que le système avec 2 régimes décrit un régime avec une faible variance et une moyenne positive tandis que le deuxième régime est volatile avec une moyenne non significative. Après cette brève analyse, il est justifiable d'utiliser ce modèle pour notre stratégie. Analysons les mesures de performance de ce modèle.

Tableau 4.1.2 – Paramètres du modèle 4.1 pour la période 1970 à 1979

	2 Régimes	3 Régimes	4 Régimes
Maximum de Vraisemblance	189.4	201.5	196.2
Nombre de paramètres	8	15	24
Critère AIC	-363	-373	-344
Critère BIC	-340	-331	-278
Valeur des coefficients avec 2 régimes			
	Moyenne	Variance ³	
Régime 1	0.0102 (0.05)	0.001656 (0.00)	
Régime 2	-0.0014 (0.96)	0.005281 (0.16)	
Matrice de transition avec 2 régimes			
	Régime 1	Régime 2	
Régime 1	0.94 (0.00)	0.15 (0.60)	
Régime 2	0.06 (0.51)	0.85 (0.00)	
Durée Moyenne du Régime 1	23.63 mois		
Durée Moyenne du Régime 2	6.70 mois		

³ Les variances présentées sont sur une base mensuelle

Tableau 4.1.2 – Mesures de performance du modèle 4.1

	Indice de marché (1/N)	60% Indice de Marché / 40% Rf	Stratégie avec 2 régimes	Stratégie avec 3 régimes	Stratégie avec 4 régimes
Moyenne Arithmétique Annualisée	12.68%	9.65%	10.29%	10.72%	11.65%
Moyenne Géométrique Annualisée	11.89%	9.51%	9.81%	10.30%	11.19%
Volatilité Annualisée	16.20%	9.72%	13.26%	13.16%	14.00%
Skewness	-0.8288	-0.8387	-0.9215	-0.9128	-0.7630
Kurtose	3.5424	3.5558	5.1221	5.3643	4.6507
Ratio de Sharpe	0.4688	0.4686	0.3972	0.4329	0.4733
Perte Cumulée Maximale ⁴	-51.81%	-33.98%	-27.09%	-25.86%	-26.18%
Ratio d'Omega	1.8130	2.1233	1.8189	1.8804	1.9016
Ratio de Sortino	0.2934	0.3681	0.2868	0.3004	0.3184

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

L'analyse des mesures de performance des diverses stratégies présentées démontre peu ou pas d'avantages à l'utilisation des modèles de Markov caché pour le développement de stratégies d'investissement. Cependant, deux mesures de performance sont relativement améliorées par rapport au marché. La perte cumulée maximale pour les stratégies est pratiquement la moitié de celle du marché et la volatilité annualisée est partiellement diminuée. Cependant, la moyenne géométrique annualisée est diminuée dans tous les cas. Bien que les résultats de ce modèle ne soient pas très concluants, nous avons continué nos recherches en explorant d'autres spécifications de modèles. En nous référant à la littérature, nous avons utilisé des modèles où les rendements boursiers étaient expliqués par des variables macroéconomiques.

⁴ Les pertes cumulées maximales présentées sont sur l'horizon total des échantillons

Pour débiter, nous avons testé quelques modèles où la production industrielle explique les rendements boursiers. Pour déterminer des variables d'intérêts, nous avons eu recours aux travaux de Chen, Roll et Ross (1986). Tout d'abord, les modèles où le coefficient de la variation dans la production industrielle ne change pas de régime :

$$4.4 \quad R_t = \mu_{S_t} + \beta_{IP} * \Delta IP_t + \varepsilon_t$$

$$4.5 \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

En suivant le même processus que pour la première stratégie démontrée, le Tableau 4.1.3 résume les mesures de performance pour ce modèle.

Tableau 4.1.3 – Mesures de performance du modèle 4.4

	Indice de marché (1/N)	60% Indice de Marché / 40% Rf	Stratégie avec 2 régimes	Stratégie avec 3 régimes	Stratégie avec 4 régimes
Moyenne Arithmétique Annualisée	12.68%	9.65%	11.05%	10.95%	12.32%
Moyenne Géométrique Annualisée	11.89%	9.51%	10.30%	10.23%	11.65%
Volatilité Annualisée	16.20%	9.72%	13.22%	12.90%	13.83%
Skewness	-0.8288	-0.8387	-0.9165	-0.7948	-0.7079
Kurtose	3.5424	3.5558	5.2363	4.5847	4.4555
Ratio de Sharpe	0.4688	0.4686	0.4511	0.4540	0.5228
Perte Cumulée Maximale	-51.81%	-33.98%	-26.92%	-25.22%	-25.65%
Ratio d'Omega	1.8130	2.1233	1.9018	1.9212	1.9786
Ratio de Sortino	0.2934	0.3681	0.3109	0.3230	0.3492

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

Avec les variables précédentes, nous pouvons remarquer que la stratégie comportant 4 régimes présente des caractéristiques intéressantes. Bien que

la moyenne annualisée soit légèrement inférieure à l'indice de référence, quelques statistiques de risques s'améliorent grandement. Nous pouvons remarquer que la volatilité annualisée diminue de 14.6% et que la perte cumulée est pratiquement diminuée de moitié. Pour bien saisir l'implication de l'utilisation du changement de la production industrielle dans un modèle, il est important de comparer avec le modèle 4.1. En comparant régime pour régime, nous pouvons remarquer que l'utilisation de la production industrielle est bénéfique à notre objectif original de recherche de rendements supérieurs. Cependant, nous pouvons noter que les améliorations sont substantielles, et que celles-ci ne représentent pas une finalité.

Le modèle précédent ne permettait pas à la production industrielle de changer de régime. L'équation 4.6 permet à cette dernière de changer de régime. De notre point de vue, il semble pertinent de vouloir tester le concept général de changement de régime sur la production industrielle pour ainsi en voir l'impact sur notre allocation d'actif.

Nous pouvons représenter ce modèle à l'aide des équations suivantes :

$$4.6 \quad R_t = \mu_{S_t} + \theta_{S_t} * \Delta IP_t + \varepsilon_t$$

$$4.7 \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

Tableau 4.1.4 - Mesures de performance du modèle 4.6

	Indice de marché (1/N)	60% Indice de Marché / 40% Rf	Stratégie avec 2 régimes	Stratégie avec 3 régimes	Stratégie avec 4 régimes
Moyenne Arithmétique Annualisée	12.68%	9.65%	9.25%	11.31%	12.26%
Moyenne Géométrique Annualisée	11.89%	9.51%	8.59%	10.58%	11.57%
Volatilité Annualisée	16.20%	9.72%	11.58%	13.24%	14.15%

Skewness	-0.8288	-0.8387	-0.6386	-0.8475	-0.6393
Kurtose	3.5424	3.5558	1.7193	5.2913	4.2648
Ratio de Sharpe	0.4688	0.4686	0.3596	0.4701	0.5070
Perte Cumulée Maximale	-51.81%	-33.98%	-27.05%	-25.78%	-29.05%
Ratio d'Omega	1.8130	2.1233	1.8294	1.9367	1.9469
Ratio de Sortino	0.2934	0.3681	0.3061	0.3213	0.3414

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

Avec les résultats du Tableau 4.1.4, il est très difficile de voir le bénéfice net d'utiliser le concept de changement sur la production industrielle. Pratiquement aucune statistique ne semble améliorer. Seulement en comparant la stratégie avec 4 régimes du modèle 4.4 et 4.6, nous observons qu'il y a seulement, et de façon très substantielle, la skewness, la kurtose et le ratio de sortino qui sont améliorés. De ce fait, il est difficile de constater le bénéfice net de faire changer la production industrielle d'état pour le développement de nos stratégies. De plus, l'interprétation peut devenir de plus en plus ambiguë. Fondamentalement, il faut penser au modèle comme des équations différentes pour chaque régime. Dès lors, il peut être logique pour une situation précise d'avoir un coefficient qui explique que la production industrielle diffère par régime.

Dans un autre ordre d'idée, les mêmes auteurs ne font pas mention seulement de la production industrielle. L'écart des taux corporatifs est aussi une des variables d'intérêts sur les rendements des marchés boursiers. De plus, nous avons intégré le rendement de dividende sur l'indice du S&P 500, car Guidolin et Timmermann (2007) postulent qu'il existe une relation entre la demande pour les actions et le rendement de dividendes. De plus, cette variable peut faciliter l'identification de régime par le fait qu'elle réagit inversement au niveau du marché boursier. Nous avons tenté diverses

combinaisons avec ces variables explicatives, et en voici un exemple qui présente des résultats intéressants.

$$4.8 \quad R_t = \mu_{S_t} + \theta_{S_t} * \Delta IP_t^S + \beta_{DIV} * DIV_t + \beta_{CS} * CS_t + \varepsilon_t$$

$$4.9 \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

Tableau 4.1.5 - Mesures de performance du modèle 4.8

	Indice de marché (1/N)	60% Indice de Marché / 40% Rf	Stratégie avec 2 régimes	Stratégie avec 3 régimes	Stratégie avec 4 régimes
Moyenne Arithmétique Annualisée	12.68%	9.65%	11.21%	12.03%	12.42%
Moyenne Géométrique Annualisée	11.89%	9.51%	10.47%	11.29%	11.85%
Volatilité Annualisée	16.20%	9.72%	13.23%	13.57%	13.80%
Skewness	-0.8288	-0.8387	-0.9704	-0.5979	-0.3852
Kurtose	3.5424	3.5558	5.7594	3.6796	2.4872
Ratio de Sharpe	0.4688	0.4686	0.4628	0.5112	0.5317
Perte Cumulée Maximale	-51.81%	-33.98%	-26.80%	-24.76%	-26.33%
Ratio d'Omega	1.8130	2.1233	1.9292	1.9858	1.9982
Ratio de Sortino	0.2934	0.3681	0.3110	0.3467	0.3681

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

Bien que beaucoup plus complet qu'un simple modèle exhibant la production industrielle, ce modèle, qui comporte également l'écart des taux corporatifs et le rendement de dividendes sur le S&P 500, n'est que sensiblement supérieur aux précédents lorsque la stratégie avec 4 régimes est étudiée. Les ratios de Sharpe, utilisant des nombres de régimes différents, sont tous supérieurs comparés aux modèles précédents.

Jusqu'à présent, l'utilisation de ces modèles s'est avérée mitigée. D'un côté, la volatilité des rendements produits par les stratégies d'investissement semble diminuée dans pratiquement tous les cas, mais dans la plupart des cas les rendements s'en trouvent grandement affectés, ce qui peut remettre en considération l'utilisation de ce genre de modèle univarié. Pour expliquer les rendements, Guidolin et Timmermann (2007) utilisent un modèle multivarié où une composante est le marché boursier et l'autre est le rendement de dividendes.

Ceci étant dit, nous avons cru pertinent d'explorer ce type de modèle pour le développement d'une stratégie d'investissement.

Processus multivarié

Le principe du développement demeure inchangé avec ce type de modèle, car nous pouvons toujours utiliser la probabilité produite par les itérations. Cependant, il faut noter que l'interprétation de nos régimes ne sera plus la même. Prenons par exemple les deux équations suivantes :

$$4.10 \quad Y_t = X_t B_{S_t} + E_t$$

$$Y_t = \begin{pmatrix} R_t \\ \Delta IP_t \end{pmatrix}, X_t = 1, B_{S_t} = \begin{pmatrix} \mu_{1,S_t} \\ \mu_{2,S_t} \end{pmatrix}, E_t \sim N(0, \Sigma_{S_t})$$

Cet ensemble d'équations peut être interprété comme un tout qui comprend à la fois les rendements boursiers de notre indice et la production industrielle. Les modèles de Markov cachés multivariés nous permettent de considérer ce tout comme étant expliqué par des régimes. De ce fait, nous pouvons toujours utiliser le même concept, car l'algorithme produit les probabilités que l'ensemble soit dans certains régimes. L'interprétation de nos régimes est quelque peu différente, car il faut tenir compte de chacune des équations.

Le Tableau 4.1.6 présente les mesures de performance en utilisant les mêmes principes que les autres stratégies d'investissements.

Tableau 4.1.6 - Mesures de performance du modèle 4.10

	Indice de marché (1/N)	60% Indice de Marché / 40% Rf	Stratégie avec 2 régimes
Moyenne Arithmétique Annualisée	12.68%	9.65%	10.33%
Moyenne Géométrique Annualisée	11.89%	9.51%	9.76%
Volatilité Annualisée	16.20%	9.72%	13.14%
Skewness	-0.8288	-0.8387	-0.9443
Kurtose	3.5424	3.5558	5.9064
Ratio de Sharpe	0.4688	0.4686	0.3987
Perte Cumulée Maximale	-51.81%	-33.98%	-26.16%
Ratio d'Omega	1.8130	2.1233	1.8622
Ratio de Sortino	0.2934	0.3681	0.2829

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

Les résultats de ce modèle sont décevants, car il n'y a pas d'amélioration du ratio de Sharpe comparé aux modèles univariés. C'est pour cette raison que nous avons exploré d'autres avenues.

Une approche différente

Une fois l'analyse de toutes ces mesures de performance de stratégies d'investissement étudiées, le concept d'utiliser les probabilités produites par des modèles de Markov cachés, qui proviennent directement de notre actif risqué, pour produire des rendements supérieurs semble peu concluant. Jusqu'à maintenant, nous avons tenté d'utiliser des modèles qui

comprennent les rendements de notre indice. Ceci étant dit, nous pouvons utiliser les probabilités d'autres séries temporelles que celles de nos rendements pour conditionner nos stratégies d'investissement.

L'idée est de conditionner notre allocation entre divers actifs risqués, que ce soit entre des actions et obligations, des différents secteurs d'un indice, ou sur des facteurs de risques. En temps réel, la difficulté est de choisir adéquatement les facteurs de risques pour la situation présente des marchés financiers, car certains de ces facteurs sont plus importants dans certains cycles que d'autres. Il suffit de penser aux nombreuses différences entre la bulle des technologies et la crise de 2008. Cependant, certains facteurs, comme ceux de Fama French (1993) et Carhart (1997), valent la peine d'être étudiés dans ce travail.

Dans un premier temps, nous avons évalué les facteurs de SMB, HML et MOM individuellement à l'aide du modèle de Markov caché qui a la forme suivante :

$$4.11 \quad SMB_t = \mu_{S_t}^{SMB} + \varepsilon_t^{SMB} \quad \varepsilon_t^{SMB} \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

$$4.12 \quad HML_t = \mu_{S_t}^{HML} + \varepsilon_t^{HML} \quad \varepsilon_t^{HML} \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

$$4.13 \quad MOM_t = \mu_{S_t}^{MOM} + \varepsilon_t^{MOM} \quad \varepsilon_t^{MOM} \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

Les résultats les plus intéressants proviennent du facteur momentum et le Tableau 4.1.7 résume les mesures de performance.

Comparativement aux stratégies utilisant comme intrant les rendements de notre actif risqué, il n'y a pas de beaucoup d'améliorations.

Tableau 4.1.7 - Mesures de performance du modèle 4.13

	Indice de marché (1/N)	60% Indice de Marché / 40% Rf	Stratégie avec 2 régimes	Stratégie avec 3 régimes	Stratégie avec 4 régimes
Moyenne Arithmétique Annualisée	12.68%	9.65%	10.11%	11.55%	12.50%
Moyenne Géométrique Annualisée	11.89%	9.51%	10.08%	11.24%	12.08%
Volatilité Annualisée	16.20%	9.72%	10.46%	12.60%	14.02%
Skewness	-0.8288	-0.8387	-0.2220	-0.9187	-0.8834
Kurtose	3.5424	3.5558	3.7650	6.6869	5.3169
Ratio de Sharpe	0.4688	0.4686	0.4806	0.5131	0.5287
Perte Cumulée Maximale	-51.81%	-33.98%	-21.24%	-30.65%	-30.90%
Ratio d'Omega	1.8130	2.1233	2.2787	2.1095	2.0332
Ratio de Sortino	0.2934	0.3681	0.3792	0.3328	0.3238

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

Approche différente et multivariée

Bien que les résultats des modèles univariés de l'approche directe ne semblent pas améliorer significativement les résultats, nous avons poussé l'utilisation de ces facteurs plus loin en les combinant dans un modèle multivarié.

Comme mentionnée précédemment, l'utilisation indirecte peut avoir ses avantages. L'utilisation d'un seul facteur de risque dans notre approche indirecte peut nous pénaliser. Le fait que le facteur SML soit dans un régime avec une haute variance ne signifie pas nécessairement que le facteur HML ou MOM soit aussi dans un régime à haute variance. De ce fait, les événements captés par nos facteurs de risques peuvent être très différents.

Nous avons donc poussé l'approche pour tenter d'obtenir une lecture d'un régime où notre indice qui représente le marché présentait des caractéristiques de rendements à éviter.

Lorsque nous utilisons la combinaison des facteurs HML et MOM pour construire une stratégie d'investissement, les mesures de performance sont très intéressantes. Tout d'abord, le modèle utilisé est le suivant :

$$4.14 \quad Y_t = X_t B_{s_t} + E_t$$

$$Y_t = \begin{pmatrix} HML_t \\ MOM_t \end{pmatrix}, X_t = 1, B_{s_t} = \begin{pmatrix} \mu_{1,S_t} \\ \mu_{2,S_t} \end{pmatrix}, E_t \sim N(0, \Sigma_{s_t})$$

Comme démontré précédemment, nous avons refait l'exercice pour tenter d'éliminer une partie du biais de regarder vers l'avenir. Le tableau 4.1.8 présente les statistiques de robustesses pour le modèle 4.14, et ce, avec 2 régimes.

Nous avons exploré les approches multivariées avec plus que 2 régimes, cependant il y avait quelques inconvénients. Tout d'abord l'interprétation économique des régimes devenait vite ambiguë. De plus, le temps de calcul était extrêmement long et la signifiante des paramètres estimés était faible.

L'analyse des statistiques de robustesses est essentielle pour poursuivre notre travail, car sans elles les probabilités inférer peuvent être seulement le fruit du hasard et peuvent n'avoir aucune signification. Débutons par comparer le maximum de vraisemblance de chaque modèle spécifié. Le modèle comportant le plus de régimes démontre une valeur plus élevée, ce qui peut être expliqué par les nombres plus élevés de paramètres dans le modèle. C'est pour cette raison que la comparaison est biaisée.

Tableau 4.1.8 – Statistiques de robustesse pour la période d’estimation (1970-1979) du modèle 4.14 avec 2 régimes

	2 Régimes	3 Régimes	4 Régimes
Maximum de Vraisemblance	505.0244	515.1202	524.0098
Nombre de paramètres	14	21	32
Critère AIC	-982.0488	-988.2404	-984.0197
Critère BIC	-933.3199	-915.1470	-872.6392
Valeur des coefficients – 2 Régimes			
HML	Moyenne	Variance	
Régime 1	0.0031 (0.27)	0.000400 (0.00)	
Régime 2	0.0124 (0.04)	0.001309 (0.00)	
MOM	Moyenne	Variance	
Régime 1	0.0126 (0.00)	0.000297 (0.00)	
Régime 2	0.0026 (0.78)	0.003617 (0.00)	
Matrice de transition – 2 Régimes			
	Régime 1	Régime 2	
Régime 1	0.89 (0.00)	0.20 (0.06)	
Régime 2	0.11 (0.06)	0.80 (0.00)	
Matrice de Variance-Covariance – 2 Régimes			
Régime 1	HML	MOM	
HML	0.000400 (0.00)		
MOM	0.000030 (0.55)	0.000297 (0.00)	
Régime 2	HML	MOM	
HML	0.001310 (0.00)		
MOM	0.000140 (0.72)	0.003620 (0.00)	
Durée des régimes – 2 Régimes			
Durée Moyenne du Régime 1	8.93 mois		
Durée Moyenne du Régime 2	4.92 mois		

Pour pallier à ce problème, nous pouvons utiliser le critère d’information Akaike ou Bayésien. Il est important dans notre processus de tenir compte de la lourdeur et complexité qu’apporte un nombre de régimes supérieurs, il est

préférable d'utiliser le critère d'information Bayésien pour augmenter l'effet discriminant sur le choix du nombre de régime. En utilisant ce critère, nous pouvons remarquer, que le modèle avec un nombre de régimes $k = 2$, est préférable.

L'interprétation plus qualitative du choix du nombre de régimes est tributaire aux coefficients obtenus et à leurs robustesses. Nous pouvons débiter par décortiquer les valeurs obtenues pour les coefficients du facteur HML. Dans le modèle comportant 2 régimes, la moyenne et la variance sont très différentes sous les deux régimes. Dans le régime #1, la moyenne est relativement petite à 0.0031, mais n'est pas robuste avec un p-valeur de 0.27. Comparativement, le coefficient dans le régime #2 possédant une valeur de 0.0124 et possédant un p-valeur de 0.04 est beaucoup plus significatif. En ce qui concerne les variances de ces paramètres, elles sont très significatives. À ce sujet, Timmermann et Ang (2011) élabore qu'il est toujours plus facile pour les modèles de Markov cachés de discriminer par rapport à la variance qu'à la moyenne. Le premier régime démontre une petite variance de 0.000400 comparativement au deuxième avec une variance de 0.001309.

Du côté du facteur MOM, nous observons que la moyenne du premier régime à 0.0126 est supérieure à celle du deuxième régime à 0.0026, et que la p-valeur du premier régime est significatif à 1%, mais pas celle du deuxième avec 0.78. Encore une fois, les variances des deux régimes pour ce coefficient sont significatives avec des p-valeurs près de 0. Le régime un présente une variance faible de 0.000297, et le régime deux une variance plus élevée de 0.003617.

La covariance entre les facteurs MOM et HML auraient été intéressante à interpréter, cependant leur signifiante est loin d'être bonne.

En nous penchant sur la matrice de transition, nous sommes en mesure de remarquer que le régime 1 est beaucoup plus stable que le régime 2. La probabilité de rester dans le régime 2 lorsque le système se trouve dans le régime 2 est plus faible que de rester dans le régime 1 lorsque le point de départ est le régime 1.

L'ensemble de tous ces éléments nous permet de dresser une description plus qualitative du système que nous tentons de décrire en utilisant les modèles de Markov cachés. Sans même voir les probabilités d'être dans chacun des régimes, nous pouvons en faire une description qui se rapproche d'une réalité économique.

À ce point, il est pertinent de se rafraîchir la mémoire sur comment les facteurs HML et MOM sont construits. Le facteur HML est calculé en faisant la différence entre des portefeuilles d'entreprise qui comportent une valeur aux livres élevée et une valeur aux livres plus faible, et ce, par rapport à la valeur marchande. Nous pouvons aussi attribuer aux entreprises possédant une valeur par action au livre plus élevé un qualificatif de valeur, et aux entreprises possédant une valeur par action au livre plus faible un qualificatif de croissance. Sur ce sujet, Durand, Lim and Zumwalt (2011) étudie la relation entre la prime de risque reliée aux entreprises de valeur et la volatilité implicite du marché calculé par l'indice VIX aux États-Unis avec des données de 1993 à 2007. Ils démontrent qu'une relation existe entre une augmentation du VIX et une augmentation de la prime accordée aux entreprises possédant un ratio de valeur aux livres sur la valeur marchande plus élevée. Le phénomène observé est décrit comme un vol vers la qualité.

Dans notre cas, nous pouvons faire le lien entre ce postulat et les valeurs de la moyenne et de la variance obtenues avec notre modèle à deux régimes sur la période d'estimation. Le facteur HML présente une moyenne positive et significative dans le régime 2 ainsi qu'une variance beaucoup plus élevée que dans le régime #1. De ce fait, nous observons que la prime de risque accordée aux entreprises de valeurs est plus élevée lorsque la variance de

ce même facteur est plus élevée. Cependant, il faut prendre en considération que l'échantillon présente seulement la période d'estimation du modèle. Nous devons être très vigilants sur le postulat développé par rapport à cette période. Plus loin, nous pourrions nous pencher plus en détail sur la relation entre les régimes et les périodes économiques d'importances.

Avant d'aller plus loin sur la description des régimes, attardons-nous à la construction du facteur MOM. Comme HML, il est composé de différents portefeuilles d'entreprises, mais cette fois, c'est sur la base des rendements. La définition que Kenneth French utilise pour construire ce facteur se définit par l'expression 4.15 :

$$4.15 \quad MOM = \frac{1}{2}[(Small\ High + Big\ High) - (Small\ Low + Big\ Low)]$$

Sachant ça construction, penchons-nous sur la moyenne et la variance que nous avons obtenues par chacun de nos 2 régimes. Dans le premier régime, la moyenne des facteurs est élevée (0.0126) comparativement à la moyenne du deuxième régime (0.0026). Il est à noter que la moyenne est seulement robuste dans le premier régime. Par défaut de construction, le régime 1 présente encore une fois la plus petite variance (0.000297) comparativement au deuxième régime (0.003617). Avec les valeurs des coefficients pour le facteur MOM, il est facile de relier le régime #1 à un régime où la volatilité est faible et où les gagnants demeurent les gagnants, car la moyenne du facteur est positive et significative.

Combinons maintenant les données de nos deux facteurs pour interpréter, de manière plus économique, le système dans son ensemble. Le régime #1 peut être qualifié d'un état dit normal, où la volatilité des marchés financiers est faible et où il y a une certaine persistance dans les entreprises qui ont un bon rendement boursier. Ce régime pourrait être qualifié de régime calme, ou normal.

Le régime #2 pourrait être décrit de la manière opposée. Les facteurs étudiés y possèdent une grande variance et une prime de risque est associée avec les entreprises possédant une grande valeur aux livres. De ces faits, nous pouvons dire que ce régime est beaucoup plus tumultueux que le précédent, et ainsi le nommé un régime de crise ou de bulle.

Prenons en considération que nous avons étudiée les paramètres du modèle seulement avec la période d'estimation de 1970 à 1979, il est probable que la robustesse des coefficients soit remise en question au fur et à mesure que l'échantillon grandit avec le temps. Cependant, nous pouvons enlever une partie de biais de regarder vers l'avenir. Une fois l'analyse des résultats faite, nous reviendrons sur les coefficients et sur leurs robustesses.

Le Tableau 4.1.11 démontre les mesures de performance, et ce suivant le même concept que démontré précédemment pour la stratégie d'investissement.

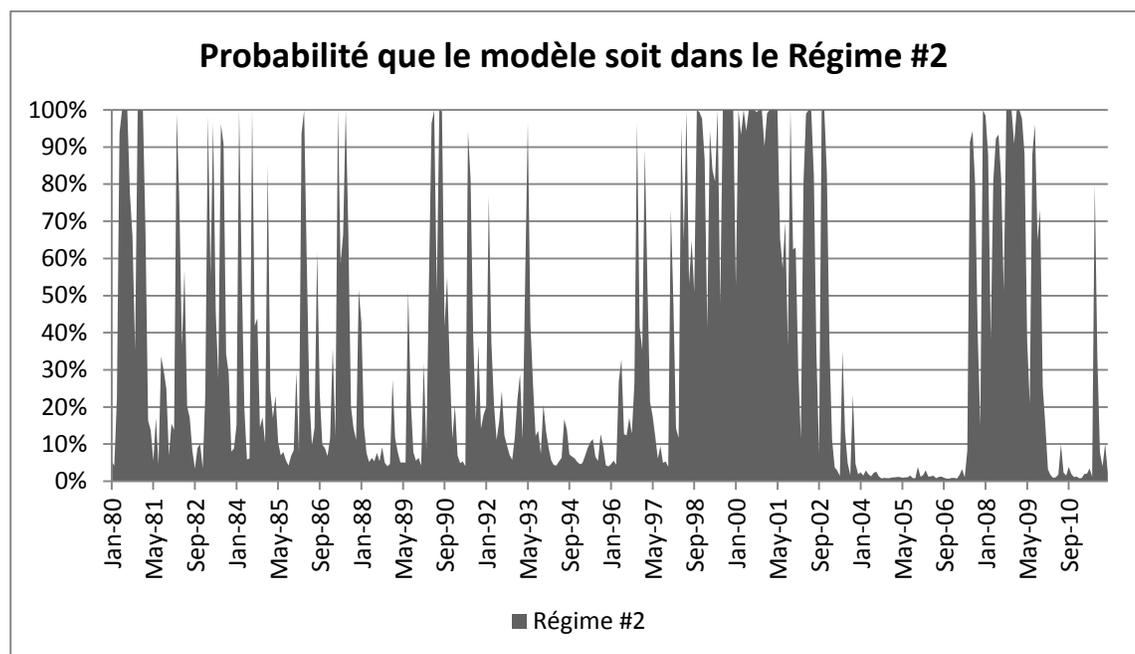
Tableau 4.1.11 - Mesures de performance du modèle 4.14

	Indice de marché (1/N)	60% Indice de Marché / 40% Rf	Stratégie avec 2 régimes
Moyenne Arithmétique Annualisée	12.68%	9.65%	12.36%
Moyenne Géométrique Annualisée	11.89%	9.51%	12.30%
Volatilité Annualisée	16.20%	9.72%	12.08%
Skewness	-0.8288	-0.8387	-0.3862
Kurtose	3.5424	3.5558	4.3099
Ratio de Sharpe	0.4688	0.4686	0.6022
Perte Cumulée Maximale	-51.81%	-33.98%	-25.30%
Ratio d'Omega	1.8130	2.1233	2.3390
Ratio de Sortino	0.2934	0.3681	0.4004

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

Bien que les résultats précédents soient très intéressants, avec un ratio de Sharpe supérieur, nous devons nous pencher sur l'interprétation économique du modèle utilisé. Pour ce faire, étudions le Graphique 4.1.1. Celui-ci présente les probabilités produites par le modèle avec une fenêtre grandissante pour la période 1980-2011.

Graphique 4.1.1- Probabilité de régime du modèle 4.14 avec fenêtre grandissante

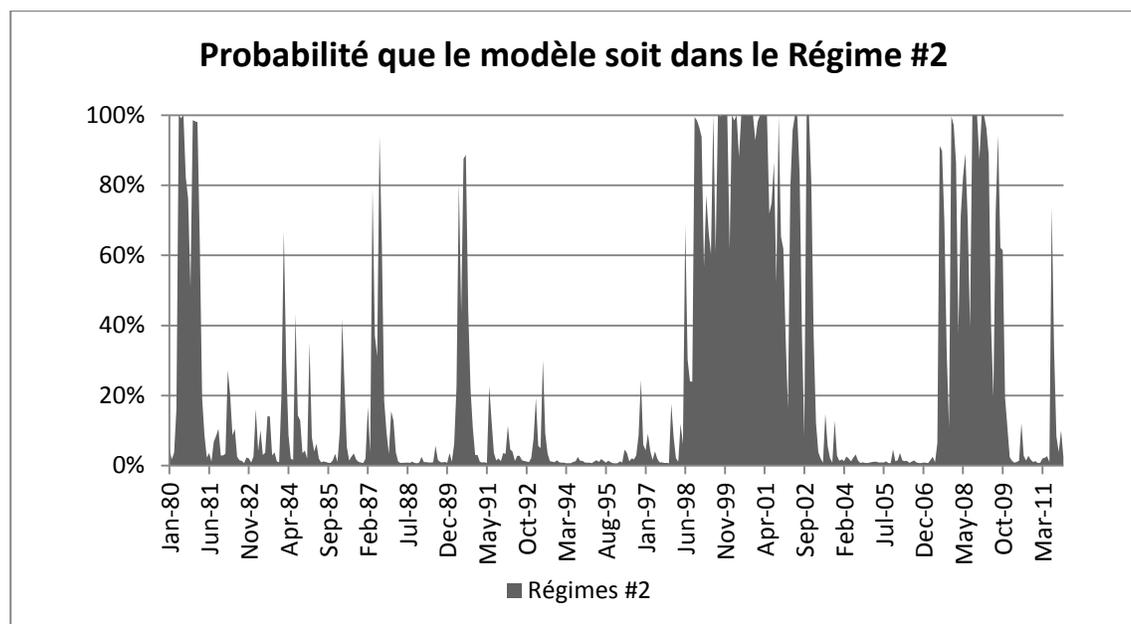


À première vue, les probabilités d'être dans le régime 2 sont très élevées lors de la bulle des technologies et lors de la crise de 2008. Comme nos paramètres du modèle sont sensibles à la variance des observations, nous pouvons faire le parallèle entre les périodes volatiles des années 2000 et de la crise de 2008 avec les probabilités inférées. Cela nous indique que le modèle utilisé identifie que la combinaison des facteurs HML et MOM se retrouve

dans un régime concordant à des événements où le marché est plus volatile. Cependant, nous pouvons nous questionner sur la validité de ce commentaire.

En portant une attention particulière, nous remarquons la présence de plusieurs autres pics dans les années avant la bulle des technologies, qui ne semble pas tous provenir d'événement où le marché était sous une période de stress. Certains d'entre eux sont facilement attribuables à des événements comme les récessions du début des années 1980 ou encore la récession du début des années 1990, mais beaucoup d'autres semblent très sporadiques. Une autre explication plausible est le fait que le modèle est instable lors de ces périodes, car la fenêtre d'estimation de 1970 à 1979 n'est pas assez longue. Pour vérifier cette hypothèse, et ce malgré notre postulat de départ vis-à-vis la période utilisée, nous avons utilisé une fenêtre fixe sur toute la période. Le Graphique 4.1.2 présente ces résultats.

Graphique 4.1.2- Probabilité de régime du modèle 4.14 avec fenêtre fixe

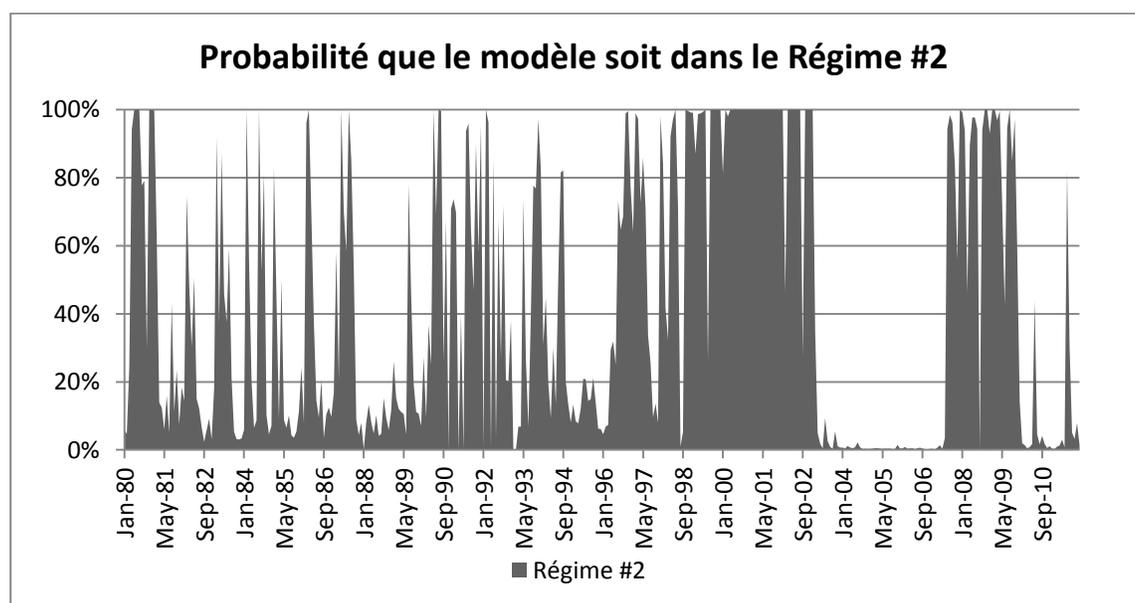


En comparant les graphiques 4.1.1 et 4.1.2, qui proviennent du même modèle, mais qui utilisent une fenêtre grandissante comparativement à une

fenêtre fixe, nous pouvons remarquer qu'il y a une plus grande divergence entre les probabilités d'être dans le régime #2 au début de l'échantillon. La raison des disparités provient de la différence dans nos paramètres. En utilisant une fenêtre grandissante, les probabilités du graphique 4.1.1 n'ont pas toujours la même distribution, car celle-ci reçoit une nouvelle donnée à chaque pas de temps. C'est pourquoi qu'en utilisant les modèles de Markov cachés, il est possible que l'inférence des régimes diverge entre les différentes méthodes.

En pratique, il n'est pas possible d'utiliser la méthode avec une fenêtre fixe, car la donnée de demain n'est pas connue. Cependant, nous pouvons nous questionner sur l'effet d'une fenêtre grandissante ou roulante. Une fenêtre roulante est définie comme une fenêtre où le nombre des données utilisées est fixe, mais où à chaque pas de temps la donnée la plus récente est introduite et où la donnée la plus vieille est supprimée. Le graphique 4.1.3 démontre ce que sont les probabilités, et ce avec une période roulante de 120 observations mensuelles.

Graphique 4.1.3- Probabilité de régime du modèle 4.14 avec fenêtre roulante



En observant le graphique 4.1.3, il est facile d'observer qu'il y a beaucoup plus de bruit avant 2000 que les deux autres fenêtres utilisées. Encore une fois, la cause de ces observations provient de la distribution qui est étudié avec les diverses fenêtres.

Pour notre utilisation, nous avons longuement réfléchi pour déterminer les paramètres optimaux concernant la fenêtre. Nous sommes revenus sur une des premières raisons pour laquelle nous voulions utiliser les modèles de Markov cachés : la reconnaissance des situations. Pour nous, il est important que le modèle soit en mesure d'inférer le même type de probabilités pour un type d'événement similaire. De ce fait, il est important pour nous de garder en mémoire toutes les observations et ainsi bâtir sur celles-ci. Les probabilités ainsi inférées proviennent d'une distribution qui converge de plus en plus, et ce au fur et à mesure que l'échantillon augmente. Nous n'avons pas utilisé les fenêtres roulantes, car celles-ci éliminaient les anciennes observations, n'avaient pas de distribution convergente et l'interprétation des probabilités du régime inférées devenaient de plus en plus abstraites.

Performance obtenue avec les diverses fenêtres

Dans un premier temps, il n'est pas possible d'utiliser une fenêtre fixe pour développer une stratégie d'investissement, car nous nous exposons au biais de regard vers l'avenir. Cependant, il est pertinent de comparer la performance de cette fenêtre avec les autres pour avoir une idée de l'information transmise par les modèles de Markov caché.

Étant donné que nous avons déjà discuté de divers éléments qui affectent nos trois types de fenêtres, nous allons nous concentrer sur la performance de celles-ci, et ce, en utilisant toujours le modèle d'investissement 4.14. Le Tableau 4.1.12 présente les détails des mesures de performance.

À première vue, deux éléments distincts peuvent être observés. Tout d'abord, il est facile de remarquer des différences lorsque nous comparons les

mesures de performance de la fenêtre grandissante et roulante. Leurs similarités peuvent être questionnables. À ce sujet, nous pouvons avancer plusieurs hypothèses.

Tableau 4.1.12 - Mesure de performance du modèle 4.14

	Indice de marché (1/N)	60% Indice de Marché / 40% Rf	Grandissante	Fixe	Roulante
Moyenne Arithmétique Annualisée	12.68%	9.65%	12.36%	12.34%	9.55%
Moyenne Géométrique Annualisée	11.89%	9.51%	12.30%	12.26%	9.47%
Volatilité Annualisée	16.20%	9.72%	12.08%	12.13%	10.21%
Skewness	-0.8288	-0.8387	-0.3862	-0.4029	0.1096
Kurtose	3.5424	3.5558	4.3099	4.3100	3.3697
Ratio de Sharpe	0.4688	0.4686	0.6022	0.5976	0.4368
Perte Cumulée Maximale	-51.81%	-33.98%	-25.30%	-25.38%	-16.96%
Ratio d'Omega	1.8130	2.1233	2.3390	2.3243	2.3450
Ratio de Sortino	0.2934	0.3681	0.4004	0.3967	0.3547

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

Tout d'abord, en nous référant aux graphiques 4.1.1 et 4.1.2, nous remarquons qu'il y existe une grande similarité entre les probabilités inférées. La performance similaire qui en découle n'est donc pas extrêmement surprenante. En nous attardant plus longtemps aux graphiques, et comme discuté précédemment, la plus grande différence provient du début de la période utilisée. De plus, le fait que les probabilités inférées d'être dans un régime avec une grande volatilité avec la fenêtre grandissante soient plus grandes dans un environnement où les taux d'intérêt étaient plus élevés vient

diminuer l'effet d'être investi en plus grande proportion dans l'actif sans risque.

Durant les dernières années de la période étudiée, la convergence de la fenêtre grandissante et ce celle fixe rend la différence entre les probabilités inférées de plus en plus petite, et même presque inexistante. Il est intéressant d'observer ce phénomène avec les modèles de Markov cachés que nous utilisons. Dans notre cas et en utilisant les probabilités filtrées, l'utilité des modèles à l'intérieur d'un échantillon donne une bonne idée d'une expérience hors échantillon vers la fin de la série temporelle utilisé. Cela permet de faire des recherches rapides sur la fin des échantillons, ce qui peut s'avérer de raccourcir le temps de calcul significativement.

Il est quand même surprenant que la signifiante économique de nos modèles ne soit pas largement supérieure dans l'échantillon que hors échantillon. Un autre élément explicatif provient du fait que la maximisation se fait en connaissant la distribution de toutes les observations, mais pas la prochaine observation. Il est possible d'utiliser un concept de probabilités lissées, et ce, une fois les probabilités filtrées calculées. Ce concept part de la dernière observation pour revenir dans la série temporelle et ajuste ainsi les probabilités. Par son effet temporel, ce concept n'a pas de réelle valeur pour le développement d'une stratégie d'investissement.

Poursuivons avec les mesures de performances de la fenêtre roulante. En la comparant avec la fenêtre grandissante, il y a peu de mesure de rendements qui la favorise. Néanmoins, les mesures de risques lui sont favorables. Une fenêtre roulante démontre une plus faible volatilité, une plus grande skewness, une plus faible kurtose et une perte maximale cumulée plus faible que la fenêtre grandissante.

Une première piste d'explication vient de la structure de notre stratégie d'investissement qui évite les moments où la variance est trop élevée dans l'échantillon. En ayant une fenêtre roulante, la distribution des observations

ne tend plus vers un équilibre, mais vacille au fur et à mesure que le modèle avance dans le temps. Il est possible de corroborer ce postulat en observant le graphique 4.1.3. Les probabilités inférées sont beaucoup plus variantes que celles de la fenêtre grandissante. Cependant, nous perdons beaucoup d'informations pertinentes sur les moments de crises en utilisant cette méthode, car elle éliminera tôt ou tard les observations critiques comme celles de la crise de 2008. En perdant une telle information, la force de reconnaissance de situation est de facto dégradée.

Robustesse des régimes

Revenons maintenant sur la robustesse de notre modèle. Pour ce faire, jetons un coup d'œil au Tableau 4.1.13.

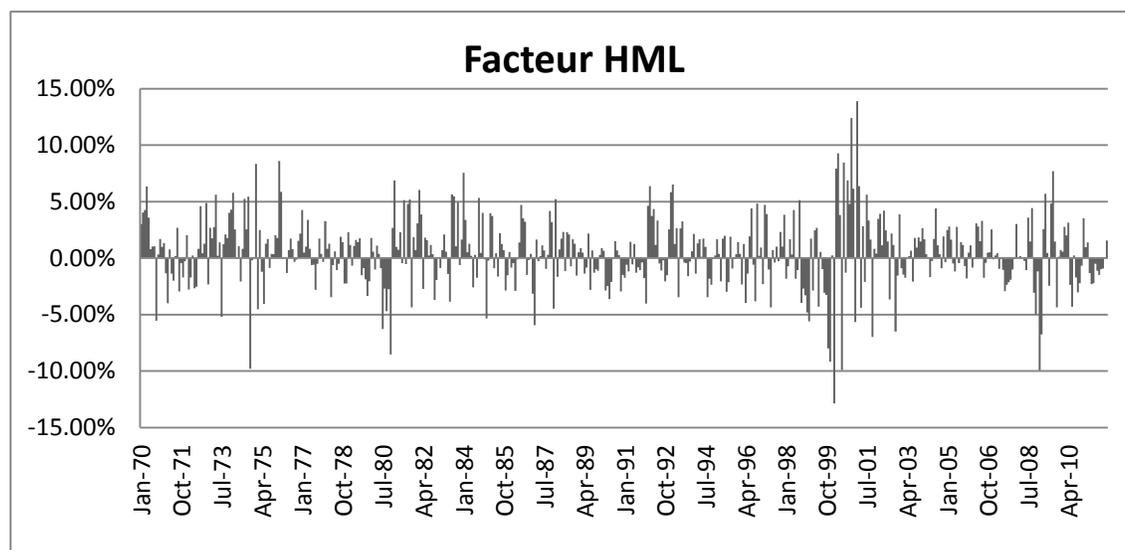
En comparant le Tableau 4.1.8 et le tableau 4.1.13, nous remarquons qu'il y a quelques changements dans la valeur de nos coefficients et dans leurs robustesses. Tout d'abord, il est rassurant de voir que les variances demeurent robustes, car c'est sous cet élément que nous avons plus de facilité à discriminer les régimes. Encore une fois, la différence des variances entre les deux régimes est très élevée. Pour le facteur HML, la variance dans le régime #2 est environ 4 fois plus élevée, et pour le facteur MOM environ 10 fois plus élevé. Même si les amplitudes entre les variances de la fenêtre d'estimation et l'échantillon en entier sont différentes, l'interprétation en demeure la même.

Tableau 4.1.13 – Statistiques de robustesse pour la période entière (1970-2011) du modèle 4.14 avec 2 régimes

Maximum de Vraisemblance	2039.3839	
Nombre de paramètres	14	
Critère AIC	-4058	
Critère BIC	-3981	
Valeur des coefficients		
HML	Moyenne	Variance
Régime 1	0.0046 (0.00)	0.000534 (0.00)
Régime 2	0.0024 (0.55)	0.002074 (0.00)
MOM	Moyenne	Variance
Régime 1	0.0093 (0.00)	0.000635 (0.00)
Régime 2	0.0005 (0.95)	0.006104 (0.00)
Matrice de transition		
	Régime 1	Régime 2
Régime 1	0.97 (0.00)	0.09 (0.01)
Régime 2	0.03 (0.01)	0.91 (0.00)
Matrice de variance-covariance		
Régime 1	HML	MOM
HML	0.000534 (0.00)	
MOM	0.000080 (0.03)	0.000635 (0.00)
Régime 2	HML	MOM
HML	0.002074 (0.00)	
MOM	-0.00004 (0.89)	0.006104 (0.00)
Durée Moyenne du Régime 1	32.73 mois	
Durée Moyenne du Régime 2	10.54 mois	

C'est en comparant les moyennes qu'une différence apparaît. Premièrement, nous perdons la relation que nous avons précédemment établie entre le facteur HML et la prime de risque s'y associant en période plus volatile. En étudiant tout l'échantillon, nous obtenons une moyenne de 0.0024 avec une p-valeur de 0.55 pour ce facteur. Cependant, nous pouvons tenter d'expliquer ce phénomène par deux éléments. Tout d'abord avec une très grande volatilité vers la fin de l'échantillon, il est normal qu'une moyenne soit moins robuste. De plus, la période de la fin des années 1990 et du début des années 2000 comporte beaucoup de bruit pour ce facteur. Le graphique 4.1.4 le démontre bien. La relation qui a été précédemment établie, n'est donc plus significative sur toute la période

Graphique 4.1.4 – Évolution du facteur HML (1970-2011)



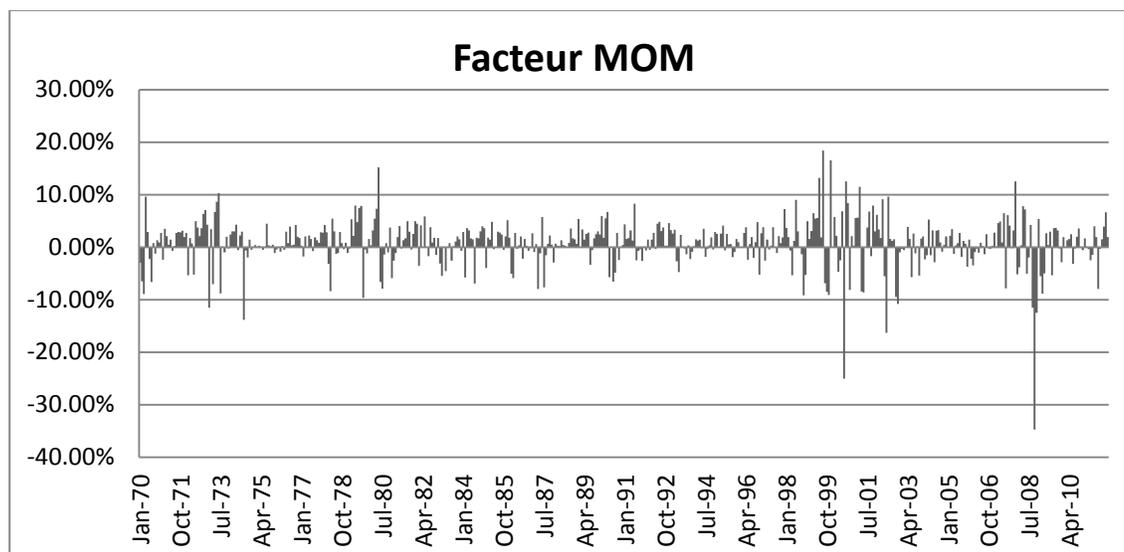
Lorsque la bulle des technologies faisait rage, la proportion d'entreprises possédant une petite valeur aux livres étant plus grande que la moyenne et ces entreprises surperformaient. Nous pouvons remarquer que le facteur HML devient négatif et persiste, mis à part pour le début de 1999, jusqu'à ce que la bulle éclate au début de l'an 2000. Cette période vient affaiblir de beaucoup la moyenne, et ce dans un environnement de variance élevé. Un

autre élément pouvant venir contredire l'affirmation que nous avons fait précédemment est la différence entre les périodes utilisées pour mener l'étude empirique. Malgré le fait que la moyenne du facteur HML ne soit pas significative dans le deuxième régime, nous pouvons faire un parallèle avec notre stratégie d'allocation d'actif. Le fait que le facteur HML soit très volatile dans le deuxième régime est synonyme d'un marché qui est incertain. Ce postulat est renforcé par la faible signifiante de sa moyenne. Dès lors, nous ne voulons pas être exposé à l'actif risqué quand ce climat d'incertitude règne, mais nous voulons être exposé à ce dernier lorsque la volatilité est faible.

Au sujet du facteur MOM et pour la période complète de notre échantillon, nous avons une situation où la moyenne du premier régime est significative avec une p-valeur de 0.00 pour une valeur de 0.0093. La variance du premier régime est également faible. Dans ce cas, nous avons une situation qui ressemble beaucoup à notre période d'estimation de 1970 à 1979. C'est dans un même ordre d'idée que la logique d'éviter un régime s'applique avec ce facteur. Sachant qu'il est difficile pour les actions gagnantes de le rester dans un milieu où le facteur est volatile, l'investisseur peut débiter à voir ce changement comme un signe qu'il y a une certaine rotation à l'intérieur du marché boursier. Dans une telle situation, nous ne voulons pas être exposés à l'actif risqué, car nous pouvons supposer que la prime de risque en est diminuée.

Il est quand même intéressant d'observer l'évolution du facteur MOM à travers le temps. Comparativement aux facteurs HML, les valeurs négatives sont moins nombreuses, mais plus prononcées.

Graphique 4.1.5 – Évolution du facteur MOM (1970-2011)

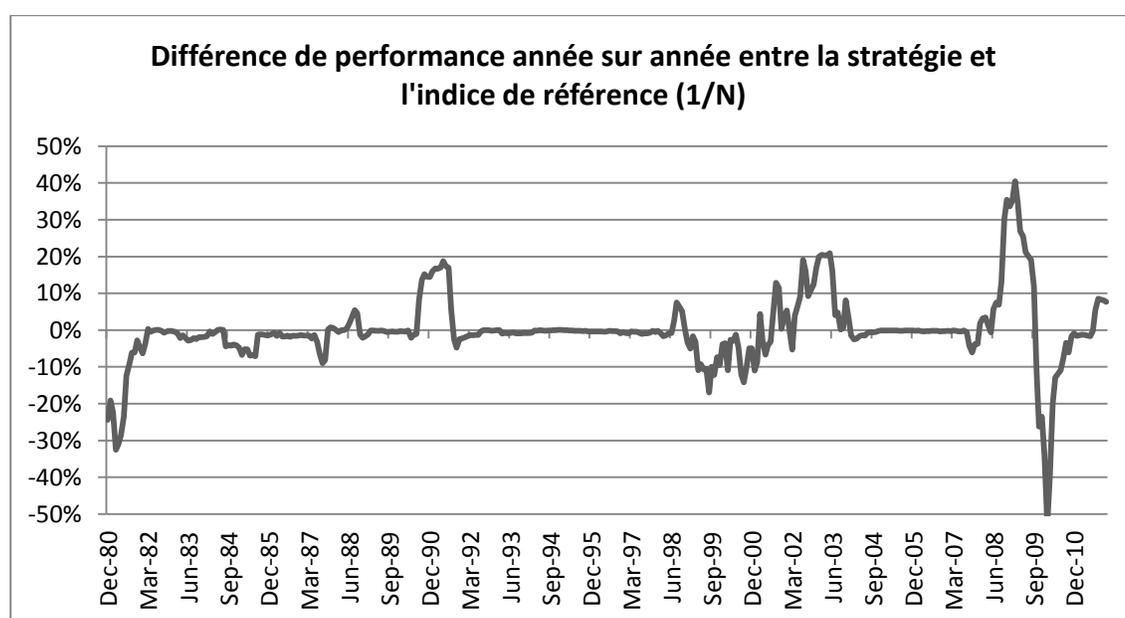


L'effet individuel de ces facteurs est beaucoup moindre que l'effet combiné dans un système multivarié. L'interprétation finale que nous pouvons faire est que lorsqu'il y a une combinaison volatile des facteurs MOM et HML, l'espérance de l'indice de marché est très difficile à déterminer et le fait de ne pas y être exposé est bénéfique. C'est exactement ce que la méthodologie que nous avons développée effectue.

Le graphique 4.1.6 démontre les périodes où la stratégie développée avec le modèle 4.14 surperforme ou sous-performe l'indice de marché. En tout début d'échantillon, la stratégie sous-performe. À la fin de 1979 et au début de 1980, il y a eu une période volatile dans le marché et de ce fait notre modèle à débiter en investissant dans l'actif sans risque. Nous pouvons faire un parallèle si nous avons choisi 2009 comme première année d'investissement, la surperformance du fait que nous étions hors du marché avant n'aurait pas été prise en considération. Le modèle capte très bien la période du début des années 1990, car il n'y a pas vraiment de sous-performance à ce niveau. Au cours de la bulle des technologies, il préfère l'actif sans risque, car la volatilité des facteurs est beaucoup plus élevée qu'à la normale. C'est pour cette raison qu'il y a une sous-performance importante

pendant près de 2 ans. Cependant, il surperforme lorsque cette dernière éclate. Durant la crise de 2008, le modèle préfère l'actif sans risque. De cette manière, le fait de ne pas subir la plus grande partie de la baisse des actions peut permettre à l'investisseur de sous-performer lors de la reprise. Par exemple, il est beaucoup plus difficile de revenir au même niveau après une perte de 50%, car il faut effectuer 100%. La diminution de la perte maximale cumulée est un grand avantage de cette stratégie.

Graphique 4.1.6 – Différence de la performance année sur année



Application au SP500

Depuis le début, nous avons eu l'idée d'utiliser un indice équipondéré avec la classification sectorielle de Kenneth French. En considérant le dernier modèle, qui nous n'utilise plus les rendements de cet indice équipondéré pour établir notre stratégie d'investissement, nous pouvons utiliser tester notre stratégie en interchangeant les rendements de notre indice par ceux du S&P 500. Cet exercice nous permet d'être plus près de la pratique, car l'existence d'un contrat à terme sur cet indice vient grandement simplifier l'application dans un processus de gestion de portefeuille. Encore une fois,

nous avons appliqué la même stratégie. Le Tableau 4.1.14 résume les mesures de performance.

Tableau 4.1.14 – Mesures performance du modèle 4.14 avec le S&P 500

	Indice de marché (S&P500)	60% Indice de Marché / 40% Rf	Stratégie avec 2 régimes
Moyenne Arithmétique Annualisée	8.90%	7.37%	9.84%
Moyenne Géométrique Annualisée	8.00%	7.16%	9.63%
Volatilité Annualisée	15.50%	9.31%	11.53%
Skewness	-0.6563	-0.6579	-0.2668
Kurtose	2.1386	2.1514	3.4039
Ratio de Sharpe	0.2457	0.2454	0.4122
Perte Cumulée Maximale	-52.56%	-34.77%	-24.69%
Ratio d'Omega	1.5423	1.8148	2.0443
Ratio de Sortino	0.2228	0.3062	0.3334

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

Application d'un levier dynamique

Un élément qui revient constamment lorsque nous appliquons nos modèles pour développer des stratégies d'investissement est la diminution de la volatilité. Sachant ce fait, qu'en advient-il de nos stratégies lorsque nous appliquons un levier dynamique pour augmenter cette volatilité à des niveaux qui ressemble plus à ceux du marché boursier?

Pour répondre à cette question, nous avons utilisé les probabilités produites par nos modèles pour les différentes stratégies développés, et par la suite, une fonction de levier dynamique a été construite.

La fonction de levier dynamique transforme la probabilité de ne pas être dans le bon régime, par la suite nous pouvons utiliser ce nombre pour conditionner nos stratégies d'investissement. Voici la construction mathématique :

$$4.16 \quad x = \sin(1 - P(S_{t-1}^n)) - \cos(1 - P(S_{t-1}^n))$$

Étant donné que $P(S_{t-1}^n)$ est toujours compris entre 0 et 1, la valeur de x est comprise entre 0.3012 lorsque $P(S_{t-1}^n)$ est égale à 0 et -1 lorsque cette dernière est égale à 1. Nous pouvons donc utiliser x pour variable dans notre allocation d'actif, et ce par rapport à un seuil de 100% investi dans l'indice comme démontré par la fonction suivante :

$$4.17 \quad f(Allocation) = \begin{cases} V_t = V_{t-1}[(1 + x) * (1 + R_t^{Indice}) - x * (1 + R_t^{Rf})], & x \leq 0 \\ V_t = V_{t-1}[(1 + R_t^{Indice} * (1 + x)) - (x * R_t^{Rf})], & x > 0 \end{cases}$$

Pour en démontrer les effets, nous avons utilisé la stratégie d'investissement précédente avec les probabilités prises de certains modèles énumérer précédemment. Le Tableau 4.1.15 présente les mesures de performance en utilisant l'indice de marché que nous avons créé.

Tableau - 4.1.15 – Mesures performance du modèle 4.14 avec l'indice 1/N et levier

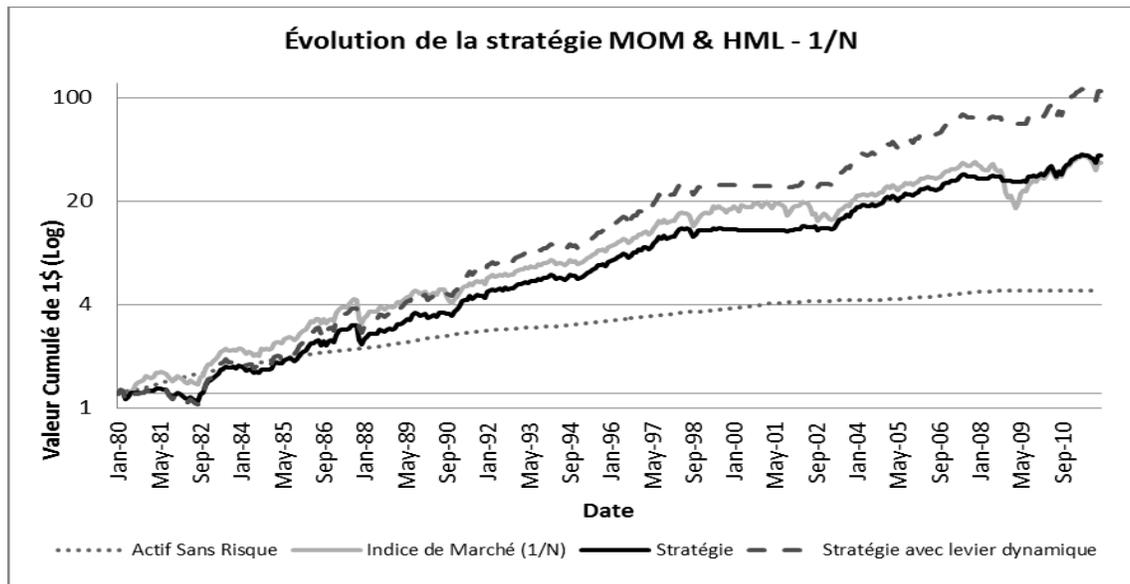
	Indice de marché (1/N)	Modèle 4.14 sans levier	Modèle 4.14 avec levier
Moyenne Arithmétique Annualisée	12.68%	12.36%	16.03%
Moyenne Géométrique Annualisée	11.89%	12.30%	15.90%
Volatilité Annualisée	16.20%	12.08%	15.58%
Skewness	-0.8288	-0.3862	-0.3528
Kurtose	3.5424	4.3099	4.2204
Ratio de Sharpe	0.4688	0.6022	0.7023
Perte Cumulée Maximale	-51.81%	-25.30%	-31.86%
Ratio d'Omega	1.8130	2.3390	2.3572
Seuil Omega	0%	0%	0%
Ratio de Sortino	0.2934	0.4004	0.4038
Seuil Sortino	0%	0%	0%

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

En comparant les mesures de performances, nous remarquons que la performance du modèle multivarié utilisant MOM et HML comme facteurs conditionnant la stratégie d'investissement est grandement améliorée. La moyenne géométrique annualisée passe de 12.30% à 15.90%, une augmentation de 29%. En contrepartie, la volatilité annualisée augmente elle aussi de 29%, passant de 12.08% à 15.58%. Malgré cette augmentation, le ratio de Sharpe est supérieur de 0.10. Les mesures de ratio d'omega et de ratio de sortino ne sont pas vraiment affectées par l'utilisation du levier, car c'est seulement l'amplitude des rendements qui changent. L'utilisation d'un levier a comme plus grand désavantage d'augmenter les pertes, lorsqu'il est utilisé. Dans notre cas, l'utilisation de ce levier est conditionnelle au régime dans lequel l'investisseur se trouve. De ce fait, le levier est appliqué lorsque les deux facteurs sont dans un régime moins volatile. Nous pouvons

remarquer que l'augmentation de la perte cumulée maximale n'est pas dramatiquement plus grande que celle de la stratégie sans levier et elle demeure plus petite que l'indice de référence. Le Graphique 4.1.7 démontre l'évolution de la valeur cumulée des différentes stratégies.

Graphique 4.1.7 – Rendements cumulés – Indice 1/N - Modèle 4.14 – MOM & HML



L'évolution des rendements démontre bien que sur le long terme la stratégie avec un levier dynamique surperforme la stratégie de base et l'indice de référence. Sur le long terme, il est définitif que la stratégie avec le levier dynamique est supérieure. Il n'est pas tout à fait clair que la stratégie sans le levier est supérieure en termes de rendement, mais n'oublions pas que la volatilité est beaucoup moins grande.

Encore une fois, nous avons utilisé les probabilités avec les rendements du S&P 500. Le Tableau 4.1.16 présente les mesures de performance en utilisant les données du S&P 500 ainsi que le Graphique 4.1.8.

Tableau - 4.1.16 – Mesures performance du modèle 4.14 avec le S&P 500 et levier

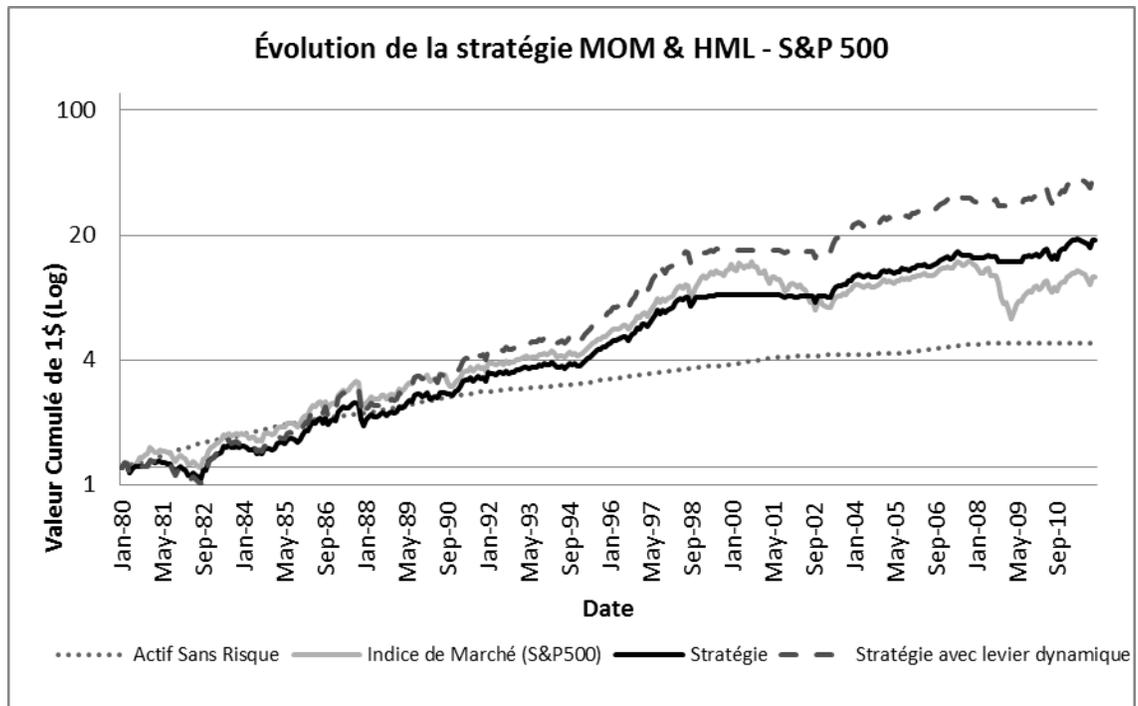
	Indice de marché (S&P500)	Modèle 4.14 sans levier	Modèle 4.14 avec levier
Moyenne Arithmétique Annualisée	8.90%	9.84%	12.77%
Moyenne Géométrique Annualisée	8.00%	9.63%	12.39%
Volatilité Annualisée	15.50%	11.53%	14.87%
Skewness	-0.6563	-0.2668	-0.2404
Kurtose	2.1386	3.4039	3.3515
Ratio de Sharpe	0.2457	0.4122	0.5164
Perte Cumulée Maximale	-52.56%	-24.69%	-31.01%
Ratio d'Omega	1.5423	2.0443	2.0582
Seuil Omega	0%	0%	0%
Ratio de Sortino	0.2228	0.3334	0.3358
Seuil Sortino	0%	0%	0%

Seuil minimum pour le ratio de Sortino et d'Omega = 0%

Encore une fois, l'utilisation du levier dynamique permet d'obtenir des résultats très intéressants. La performance est améliorée et la volatilité est contenue, ce qui a pour effet d'augmenter le ratio de Sharpe.

L'élément qui est intéressant en l'utilisant sur un indice de référence qui est différent et qui est plus représentatif du marché boursier américain est le fait que la stratégie n'est pas tributaire seulement de nos données pour obtenir ces résultats. C'est donc un élément qui est de bon augure pour l'utilisation de ce genre de modèles sur d'autres indices ou sur les secteurs.

Graphique 4.1.8 – Rendements cumulés – S&P 500 - Modèle 4.14 – MOM & HML



5. Autres modèles expérimentés

Au cours des travaux empiriques que nous avons effectués, nous avons expérimenté plusieurs façons avec les modèles de Markov cachés. Un des premiers buts avait été de développer une stratégie de rotation d'actifs avec les secteurs de l'économie. L'idée était d'éviter les secteurs lorsque ceux-ci étaient dans un régime où la volatilité des rendements était élevée et qu'il était difficile d'inférer, avec une bonne certitude statistique, la valeur de la moyenne. Une fois l'identification de ces régimes effectuée, l'exposition des secteurs était diminuer et les actifs étaient réalloués dans les secteurs dans un régime à faible volatilité.

Nous avons tenté de développer cette stratégie en prenant chaque secteur individuellement. Nous nous sommes vite rendu compte qu'il était très complexe d'interpréter les régimes pour tous les secteurs. De plus, il y avait beaucoup de bris structurels dans les données temporelles. Il suffit de penser aux secteurs des mines ou du pétrole qui ont subi plusieurs chocs. Ceux-ci ont complètement changé la dynamique des régimes. Pour parvenir à nos fins, nous avons également pensé à développer un modèle multivarié avec 17 équations. Celles-ci représentent tous les secteurs. L'idée a vite été mise de côté, étant donné la complexité de la maximisation numérique et le nombre de paramètres qui explosait.

Devant le peu de résultats significatifs, nous avons décidé de poursuivre sous d'autres angles. Ceux-ci étaient d'intégrer des variables explicatives dans les modèles de Markov cachés et d'effectuer l'allocation d'actif d'une manière indirecte.

À ce sujet, nous avons testé quelques modèles univariés avec différentes variables explicatives qui ne sont pas présents dans ce mémoire. Dans le but de bien détecter les régimes, nous avons pensé qu'introduire des variables indicatrices sur des variables macroéconomiques pouvait être utile. Lorsqu'une variation positive de la période précédente était observée, la

variable indicatrice prenant comme valeur 1. Il n'y avait pas vraiment d'effet bénéfique à utiliser cette spécification. La signifiante statistique était souvent inexistante.

De plus, il y a eu beaucoup de combinaisons des variables explicatives testées. Il était facile d'introduire un changement de régime ou de garder constante la variable. Il était difficile de grandement améliorer la valeur statistique du modèle en entier.

Au niveau des modèles multivariés, nous avons effectué quelques tests avec un nombre de régimes supérieur à 2. Il devenait très difficile d'interpréter les modèles. Il serait possible de passer beaucoup de temps encore à tester des combinaisons pour développer des modèles d'allocations indirectes.

Au niveau des périodes d'observations, nous avons testé deux autres fréquences. Lorsque nous utilisons des rendements quotidiens, il n'y avait pas de grande stabilité dans les régimes. Dès lors, il n'était pas pratique dans le développement de stratégie d'investissements. L'utilisation de données hebdomadaires peut être adéquate, cependant il était difficile d'y intégrer des variables économiques.

Pour terminer, nous avons pu explorer quelques modèles utilisant une matrice de transition variante dans le temps. Vers la fin des travaux, nous avons eu accès à une méthode numérique qui nous permettait de conditionner la matrice de transition sur une variable. Pour les lecteurs qui sont intéressés, vous pouvez vous référer à Ding (2012). Notre utilisation fut minime, mais nous croyons qu'il est très intéressant de poursuivre des recherches à ce niveau.

6. Conclusion

Tout au long de ce mémoire, nous avons pu explorer en détail l'utilisation des modèles de Markov cachés et leur utilité pour développer des stratégies d'allocation entre un actif risqué et un actif sans risque.

Dans notre cas, nous avons développé une méthodologie utilisant les probabilités inférées d'être dans un régime particulier pour construire notre algorithme d'allocation d'actif. Nous utilisons la probabilité d'être dans un régime favorable, et ce, en fin de période actuelle pour investir à la période suivante, car les régimes possèdent une certaine stabilité décrite par la matrice de transition du système. Dès lors, une application pratique est envisageable, car les transactions peuvent s'effectuer au cours de la dernière journée du mois.

L'application d'une telle méthode se complique à certains niveaux. Tout d'abord, le choix du nombre de régimes est question difficile à répondre. Comme mentionné précédemment, il peut être préférable d'utiliser 2 régimes, car l'interprétation économique peut être plus simple. Dans un cas avec 2 régimes, nous avons remarqué qu'il est facile d'identifier un régime dit normal où le comportement des variables présente une moins grande volatilité souvent très significative et un autre régime avec une volatilité beaucoup plus grande. Ce dernier régime peut être qualifié de mauvais régime, c'est dans celui-ci que nous ne voulons pas être exposés à l'actif risqué. Au fil de notre recherche, nous avons choisi d'utiliser 2 régimes pour les raisons précédentes. De plus, lorsque nous estimons un modèle multivarié, le temps de calcul était moins long et la robustesse statistique était plus grande. Deux critères importants dans le développement d'une stratégie d'allocation d'actif.

Deuxièmement, le choix des facteurs utilisés doit être robuste sous plusieurs aspects. La valeur économique est la plus importante. Si un ensemble de facteurs donne d'excellents résultats, mais qu'il est difficile d'en interpréter la

valeur économique, ces facteurs devraient être ignorés. Comme démontré dans les premiers modèles, il est possible d'utiliser la série de rendements directement pour construire la stratégie, mais les résultats obtenus étaient moins intéressants, et ce même avec l'ajout de variables explicatives. Le modèle réagissait directement aux grandes variations, tant positives que négatives, des rendements. Dès lors, la reprise était inférée comme un mauvais régime. En utilisant des facteurs relatifs, une partie du problème est résolue. C'est justement avec cette approche que nous avons eu les meilleures mesures de performance.

Troisièmement, le choix de l'échantillon est une décision qui se répercute sur pratiquement tous les éléments du développement d'une stratégie d'allocation d'actif. Les modèles de Markov cachés peuvent s'avérer très bons dans une partie de l'échantillon, mais inutile dans une autre partie. Un bon exemple serait d'avoir arrêté notre échantillon avant l'éclatement de la bulle des technologies. Étant donné que les rendements sont cumulés, nous aurions sous-performé l'indice de marché depuis quelques années, car les rendements ou les facteurs utilisés étaient beaucoup plus volatiles que la normale. Dès lors, le mauvais régime est identifié, allouant ainsi le capital dans l'actif sans risque, et ce quand le marché avait de très bon rendements. Il y aurait plusieurs étapes à respecter pour le choix de l'échantillon. La première d'entre elles consiste à la disponibilité des données. La deuxième étape devrait être une recherche sur les changements importants dans la série de données, que ce soit la méthode de collecte ou simplement un grand changement économique. Dans notre cas, nous avons identifié Bretton Woods comme un changement structurel. Il est donc important de faire la différence entre les changements cycliques et structurels. Un changement structurel peut venir biaiser tout le travail effectué.

De plus, pour en partie éliminer le biais de regard vers l'avenir dans notre étude empirique, nous devons prendre le début de l'échantillon pour faire nos

choix de modèles. Une fois l'évaluation du système avec la signifiante des paramètres et de son interprétation économique, nous pouvons utiliser les modèles de Markov cachés sur toute la période.

Également, il est important de revenir sur le fait que nous avons utilisé un indice équi pondéré, car le but initial était de travailler sur les secteurs de l'économie. De plus, l'utilisation d'une telle méthodologie permet de diminuer l'effet de la bulle des technologies.

En gardant en tête les postulats précédents, revenons quelque peu sur les modèles présentés. Les premiers modèles utilisant directement les rendements comme des intrants, que ce soit avec ou sans variables explicatives, et donnaient des mesures de performance inférieure ou similaire à celui de l'indice. C'est pour cette raison que nous avons tenté d'utiliser une méthode indirecte, qui prend des facteurs de risques communs dans l'environnement de l'actif risqué pour allouer les actifs. Dans notre cas, la combinaison d'un modèle multivarié utilisant deux facteurs pertinents, MOM et HML, pour les actions aux États-Unis se trouve à donner de bons résultats. La surperformance est attribuable à une bonne protection contre les pertes. Le modèle diminue efficacement l'allocation à l'actif risqué lorsque les deux facteurs sont dans une plus grande volatilité. Le premier régime se caractérise par une volatilité plus faible des deux facteurs, et ce avec une moyenne significative et positive. Le deuxième régime est très volatile pour les deux facteurs et les facteurs possèdent des moyennes non significatives. L'interprétation économique du système multivarié utilisé avec MOM et HML est fondée. Dans un premier régime plus tranquille, le marché boursier est relativement calme et les investisseurs accordent une prime aux valeurs aux livres plus élevées. Ce premier élément explique la moyenne positive du facteur HML. De plus, les entreprises qui performant bien continuent de la faire sur une base peu volatile. Ce qui vient expliquer la moyenne positive du facteur MOM. En récapitulatif, le premier régime est calme et une prime est accordé aux entreprises avec une valeur aux livres élevée et les entreprises

qui performant bien à la bourse continuent de le faire. Le deuxième régime est un régime à haute volatilité et où il est difficile de déterminer les moyennes de HML et MOM.

Pour résumer, la méthodologie développée permet d'allouer le capital vers l'actif sans risque lorsque les facteurs HML et MOM entrent dans un régime où la prime de risque du marché est très difficile à déterminer. Par exemple, ce système réduit l'allocation à l'actif risqué pendant la crise des années 1980, 1991, la bulle des technologies et la crise de 2008. Observant qu'il y avait une grande amélioration de la perte maximale cumulée, nous avons développé une méthode de levier dynamique qui utilise l'actif sans risque comme source de financement pour augmenter l'exposition à l'actif risqué lorsque le système se trouve dans le régime avec une plus faible volatilité des paramètres. De cette manière, les mesures de performances étaient supérieures.

Plusieurs autres utilisations pourraient être faites des probabilités inférées avec le système que nous avons développé. Il suffit de penser à une protection dynamique avec des options sur des indices ou en stratégie de superposition pour des portefeuilles d'actions américaines.

Nous croyons que nous avons simplement effleuré les possibilités que pourrait permettre une telle méthodologie avec les modèles de Markov Cachés, des modèles qui permettent une grande flexibilité. Beaucoup de recherches peuvent être faites avec différents facteurs que ceux de Fama, French et Carhart. De plus, la méthodologie pourrait s'appliquer à un univers d'investissement plus varié qu'un seul actif risqué. Il est facile d'imaginer un exemple où l'investisseur a le choix d'investir dans différents pays ou en y intégrant les obligations longs termes ou avec les secteurs économiques.

Bibliographie

ANG, Andrew et BEKAERT, Geert (2002), *Regime Switches in Interest Rates*, Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 20, No. 2, p.163-182.

ANG, Andrew et TIMMERMANN, Allan, (2011), *Regimes Changes and Financial Markets*, Network for Studies on Pensions, Aging and Retirement, Discussion Papers, DP 06/2011-068.

BAKER, James (1975). *The DRAGON system—An overview*, Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. 23, No.1, p.24-29.

BAUM, E. Leonard, PETRIE, Ted, SOULES, George et WEISS, Norman (1970). *A Maximization Technique Occurring in the Statistical Analysis of Probabilistic Functions of Markov Chains*. Annals of Mathematical Statistics, Vol. 41, No. 1, p.164-171.

BELLONE, Benoît (2005), *Classical Estimation of Multivariate Markov-Switching Models using MSVARlib*. RePEc, IDEAS.

BRENNAN, J. Micheal, SCHWARTZ, S. Eduardo et LAGNADO, Ronald (1997), *Strategic Asset Allocation*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 21, No.8-9, p.1377-1403.

CARHART, Mark M., (1997), *On Persistence in Mutual Fund Performance*, The Journal of Finance, Vol. 52, No. 1, p. 87-82.

CHAUVET, Marcelle et PIGER, Jeremy (2008). *A Comparison of the Real-Time Performance of Business Cycle Dating Methods*, Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 26, No.1, p.42-49.

CHEN, Nai-Fu, ROLL, Richard et ROSS, Stephen A., (1986), *Economic Forces and the Stock Market*. Journal of Business, Vol. 59, No.3, p. 383-403.

DIEBOLD, Francis X., LEE, Joon-Haeng et WEINBACH, Gretchen C. (1994), *Regime switching with time-varying transition probabilities*, Hargreaves, Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration. (Advanced Texts in Econometrics), Oxford University Press. p.283-302.

DING, Zhuanxin, (2012), *An Implementation of Markov Regime Switching Model with Time Varying Transition Probabilities in Matlab*, Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2083332>

DURAND, Robert B., LIM, Domininc et ZUMWALT, J. Kenton (2011), *Fear and the Fama-French Factors*, Financial Management, Vol. 40, No.2, p. 409-426.

FAMA, Eugene F. et FRENCH, Kenneth R., (1993), *Common risk factors in the returns on stocks and bonds*, Journal of Financial Economics, No. 33, p.3-56.

FLEMING, Jeff, KIRBY, Chris, OSTDIEK, Barbara (2001), *The Economic Value of Volatility Timing*, Journal of Finance, Vol. 56, No.1, p.329-352.

GILBERT, J. Edgar (1959). *On the Identifiability Problem for Functions of Finite Markov Chains*, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 30, No. 3, p.688-697.

- GOLDFELD, M. Stephen et Quandt, E. Richard (1973). *A Markov Model for Switching Regressions*, Journal of Econometrics, Vol. 1, No.1, p.3-15.
- GUIDOLIN, Massimo et TIMMERMANN, Allan, (2004), *Strategic Asset Allocation and Consumption Decision under Multivariate Regime Switching*, SSRN.
- GUIDOLIN, Massimo et TIMMERMANN, Allan, (2005), *An Econometric Model of Nonlinear Dynamics in the Joint Distribution of Stock and Bond Returns*, Federal Reserve Bank of St-Louis, Working Paper 2005-003A.
- GUIDOLIN, Massimo et TIMMERMANN, Allan (2007), *Asset Allocation under Multivariate Regime Switching*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol.31, No.11, p.3503-3544.
- GUIDOLIN, Massimo et TIMMERMANN, Allan (2008), *Size and Value Anomalies under Regime Shifts*, Journal of Financial Econometrics (2008), Vol.6, No.1, p.1-48.
- GUIDOLIN, Massimo, HYDE, Stuart, McMillan, David et ONO, Sadayuki (2009), *Non-linear Predictability in Stock and Bond Returns: When and Where is it Exploitable?*, International Journal of Forecasting, Vol. 25, No. 2, p.373-399.
- GUIDOLIN, Massimo, (2012), *Markov Switching Models in Empirical Finance*, IGIER – Università Bocconi, working paper n.415.
- HAMILTON, D. James (1989). *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle*, Econometrica, Vol. 57, No.2, p.357-384.
- HONDA, Toshiki (2003), *Optimal Portfolio Choice for Unobservable and Regime-Switching Mean Returns*, Journal of Economics Dynamics and Control, Vol.28, No.1, p.45-78
- KROLZIG, Hans-Martin (1997), *Markov-switching vector autoregressions: Modelling, statistical inference, and application to business cycle analysis*, Springer, New York, ISBN: 3540630732.
- MANDELBROT, Benoit (1963). *The Variation of Certain Speculative Prices*, The Journal of Business, Vol. 36, No. 4, p. 394-419.
- MARKOWITZ, Harry, (1952), *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, Vol. 7, No.1 p. 77-91.
- PERLIN, Marcelo, (2012), *MS Regress the MATLAB package for Markov Regime Switching Models*, available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract/1714016>.
- RABINER, R. Lawrence (1989). *A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*, Proceedings of the IEEE, p.257-286.
- ROSENBLATT, Murray, (1952), *Remarks on Multivariate Transformation*, Annals of Mathematical Statistics, Volume 23, Number 3, p.470-472.
- TURNER, M. Christopher, STARTZ, Richard et NELSON, R. Charles (1989). *A Markov Model of Heteroskedasticity, Risk, and Learning in the Stock Market*, Journal of Financial Economics, Vol. 25, p.3-22.