



HEC MONTRÉAL

**Évaluation d'obligations convertibles par  
programmation dynamique**

**Par**

**Alexandre Cléroux Perrault**

**Sciences de la gestion  
(Ingénierie financière)**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
maîtrise ès sciences (M.Sc.)*

Avril 2013

© Alexandre Cléroux Perrault, 2013



**Retrait d'une ou des pages pouvant contenir des renseignements personnels**

# Résumé

Ce mémoire porte sur une nouvelle méthode numérique pour l'évaluation d'obligations convertibles. Elle permet aussi d'évaluer d'autres types d'options qui sont relativement fréquentes, dont les options de rachat et de revente. L'algorithme développé est basé sur la programmation dynamique et utilise des approximations spectrales par polynômes de Tchebychev. La méthode peut être utilisée pour une large gamme d'options imbriquées.

Le modèle utilisé est un mouvement Brownien géométrique pour l'action de la compagnie, alors que le taux d'intérêt est modélisé par la dynamique de Vasicek. Ce choix permet d'obtenir la distribution conjointe des deux variables d'état et donc d'améliorer la performance de l'algorithme. Les résultats numériques montrent la convergence de la méthode.

***mots-clés** : obligation convertible, Vasicek, taux d'intérêt stochastique, Tchebychev, programmation dynamique, option américaine*

# Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier mes parents pour leur appui depuis le tout début, je leur en serai toujours reconnaissant. De plus, mes sœurs, grand-parents et amis ont tous su m'appuyer à leur façon tout au long de ce processus.

Je ne saurais oublier ma directrice, Michèle Breton, sans qui ce projet n'aurait vu le jour. Je lui suis entièrement reconnaissant pour avoir accepté de me diriger, pour ses conseils et suggestions, son soutien et sa grande disponibilité. En terminant, j'aimerais remercier l'Institut de Finance Mathématique de Montréal (IFM<sup>2</sup>) pour son appui financier qui m'a permis de me concentrer sur l'aboutissement de ce mémoire.

# Table des matières

Résumé	i
Remerciements	ii
Introduction	1
<b>1 Revue de la littérature</b>	<b>3</b>
1.1 Solutions analytiques . . . . .	3
1.2 Arbres binomiaux . . . . .	5
1.3 Différences finies . . . . .	6
1.4 Simulation Monte Carlo . . . . .	7
1.5 Programmation dynamique . . . . .	9
<b>2 Notions de base</b>	<b>11</b>
2.1 Évaluation à <i>rebours</i> . . . . .	11
2.1.1 Méthodologie générale . . . . .	11
2.1.2 Approche pour obligations convertibles . . . . .	12
2.2 Passage à la mesure <i>Forward-Neutre</i> . . . . .	14
2.3 Algorithme . . . . .	15
2.4 Approximation de $v^{hold}$ . . . . .	15
2.4.1 Première approche . . . . .	16
2.4.2 Deuxième approche . . . . .	17
<b>3 Boîte à outils</b>	<b>18</b>
3.1 Modèle de taux d'intérêt - Vasicek . . . . .	18

---

3.2	Construction de la distribution conjointe . . . . .	19
3.2.1	Utilisation du modèle de Vasicek . . . . .	20
3.2.2	Solution de $R_t$ . . . . .	21
3.2.3	Solution de $X_t$ . . . . .	22
3.2.4	Densité jointe . . . . .	25
3.3	Polynômes de Tchebychev . . . . .	27
3.3.1	Polynôme de Tchebychev à une variable . . . . .	27
3.3.2	Polynômes de Tchebychev à deux variables . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Approximation numérique</b>	<b>31</b>
4.1	Hypothèses . . . . .	31
4.2	Procédure générale . . . . .	32
4.2.1	Constitution de l'algorithme . . . . .	32
4.2.2	Algorithme . . . . .	44
4.3	Deuxième approche . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>49</b>
5.1	Convergence des algorithmes . . . . .	49
5.1.1	Obligation zéro-coupon . . . . .	49
5.1.2	Comparaison à des obligations gouvernementales rachetables	50
5.2	Analyse des résultats . . . . .	54
5.2.1	Résultats : obligations convertibles avec options de rachat et de revente . . . . .	55
	<b>Conclusion</b>	<b>60</b>
	<b>Références</b>	<b>62</b>

# Table des figures

4.1	Obligation zéro-coupon avec et sans option de rachat (montant de rédemption de 100\$ et d'échéance 1 an) . . . . .	41
4.2	Obligation zéro-coupon avec et sans option de revente (montant de rédemption de 100\$ et d'échéance 1 an) . . . . .	42
4.3	Distribution des points de Gauss-Lobatto - 48 points . . . . .	46
4.4	Distributions des points de Gauss-Lobatto - 3 intervalles . . . . .	47
5.1	Progression de l'erreur en fonction de $n_1$ . . . . .	52
5.2	Surface de prix ( $M = N = n_1 = 12$ ) - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8 . . . . .	58
5.3	Surface de prix ( $M = N = n_1 = 12$ ) - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8 . . . . .	58
5.4	Valeur de l'obligation ( $R_t$ fixe) - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8 . . . . .	59
5.5	Valeur de l'obligation ( $S_t$ fixe) - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8 . . . . .	59

# Liste des tableaux

5.1	Paramètres pour le modèle de Vasicek . . . . .	50
5.2	Convergence du prix d'une obligation zéro-coupon - 1ère approche .	51
5.3	Convergence du prix d'une obligation zéro-coupon - 2e approche . .	52
5.4	Valeurs d'obligations vanilles . . . . .	53
5.5	Prix de rachat . . . . .	53
5.6	Valeurs d'obligations rachetables . . . . .	54
5.7	Caractéristiques de l'obligation convertible considérée . . . . .	55
5.8	Paramètres de l'obligation convertible considérée . . . . .	55
5.9	Variations des prix de l'obligation convertible en fonction de la taille de la grille - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8 . . . . .	56
5.10	Obligations convertible avec option de rachat et de revente - Les ca- ractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8	57

# Introduction

Depuis la parution des articles de Ingersoll [ING77a] et de Brennan et Schwartz [BS77], il y a une trentaine d'années, l'évaluation des obligations convertibles a grandement évolué. Ces articles ont pavé la route à de nouvelles techniques d'évaluations et ont complètement changé la façon de concevoir la modélisation de ce type d'obligation. L'évaluation d'une obligation convertible, un produit financier qui permet au détenteur de l'échanger contre un nombre prédéterminé d'actions de la compagnie émettrice, est particulièrement complexe puisque si l'option de conversion est exercée, l'obligation sous-jacente disparaît, ce qui crée une incertitude sur les flux financiers futurs.

Au tout début, les obligations convertibles étaient évaluées en prenant la valeur escomptée à un moment futur donné de la valeur maximale entre l'action de la compagnie émettrice et la valeur de l'obligation sans option de conversion. Le problème avec cette méthode, comme le fait remarquer Jonathan Ingersoll [ING77a], est que lorsque le moment futur considéré précède l'échéance de l'obligation, il y a sous-évaluation du prix de l'obligation convertible. De plus, en ne considérant qu'une seule date d'exercice, le prix obtenu est nécessairement biaisé si l'obligation peut être convertie à plusieurs instants futurs.

Les méthodes de calcul pour les obligations convertibles ont été largement étudiées par différents auteurs. Une des raisons principales est qu'il n'existe pas de solution sous forme fermée à partir d'une modélisation réaliste. Cela ouvre alors la porte à une panoplie de méthodes numériques et de modèles tentant de représenter la réalité le plus fidèlement possible.

Comme il a été mentionné précédemment, une obligation convertible est une

obligation qui donne le droit à son détenteur de la convertir contre un nombre spécifique d'actions de la compagnie émettrice. Puisque l'option de conversion donne un avantage au détenteur par rapport à l'émetteur, ce dernier peut augmenter la valeur de son obligation en exerçant l'option si la valeur de l'action de la compagnie est suffisamment élevée. Le prix d'une obligation convertible sera alors toujours au moins aussi élevé que celui d'une obligation sans option supplémentaire.

La plupart des obligations convertibles contiennent aussi d'autres optionalités comme des options de rachat (*call*) et/ou de revente (*put*). Une option de rachat donne droit à l'émetteur de l'obligation de la racheter au détenteur à un prix spécifié lors de l'émission tandis qu'une option de revente permet au détenteur de revendre son obligation à l'émetteur pour un prix convenu au contrat.

Comme pour l'option de conversion ajoutée à une obligation standard, l'option de revente est un avantage pour le détenteur ce qui fait qu'elle augmente la valeur de l'obligation. Par contre, l'option de rachat permet à l'émetteur de la racheter à n'importe quel moment, ce qui a un impact négatif pour le détenteur car les flux financiers futurs deviennent alors incertains ; ce type d'option fait donc diminuer la valeur de l'obligation.

Le premier chapitre propose une revue de littérature des différentes méthodes numériques utilisées pour le calcul des obligations convertibles. Le chapitre subséquent présente les notions de base servant à l'évaluation d'un produit financier de type américain par récurrence ainsi que les caractéristiques d'exercice pour les différents types d'obligations convertibles. Par la suite, le troisième chapitre propose une boîte à outils contenant les modèles utilisés pour le taux d'intérêt et le sous-jacent. De plus, les caractéristiques des polynômes de Tchebychev à une et deux dimensions  $y$  sont présentées. Le quatrième chapitre présente les deux algorithmes développés dans le cadre de ce travail. Le dernier chapitre contient les résultats numériques ainsi que la comparaison avec ceux obtenus par [BBKL07] pour des obligations avec options de rachat. Le dernier chapitre est une conclusion.

# Chapitre 1

## Revue de la littérature

Au cours des trente dernières années, plusieurs chercheurs ont tenté de résoudre le problème complexe qu'est l'évaluation d'une obligation convertible. Plusieurs facteurs sont en cause. Il y a premièrement le fait que, dans la plupart des cas, l'obligation peut être convertie à n'importe quel instant, c'est-à-dire que l'option est de type américain, ce qui la rend notablement plus complexe à évaluer qu'une option de type européen. Deuxièmement, la valeur de conversion n'est pas le seul élément qui affecte la valeur d'exercice ; si une option de rachat et/ou de revente est combinée à l'option de conversion, la valeur d'exercice varie grandement dû aux différents scénarios possibles (conversion, conversion forcée, revente, rachat).

Les solutions classiques proposées au cours des dernières années se regroupent en cinq familles : les solutions analytique ou semi-analytiques ; les arbres binomiaux ; l'approche par différences finies ; la simulation Monte Carlo ; et, plus récemment, la programmation dynamique amenée par [BBKL07] et [BK11].

### 1.1 Solutions analytiques

Le premier à avoir proposé une solution analytique au problème du calcul de la valeur d'une obligation convertible est Jonathan Ingersoll en 1977 [ING77a]. Le modèle proposé est simple et ne reflète pas toutes les caractéristiques d'une telle obligation. Par contre, il permet l'obtention d'une solution analytique pour plusieurs types d'obligations :

- obligation zéro-coupon (*discount bond*);
- obligation zéro-coupon convertible (*convertible discount bond*);
- obligation zéro-coupon rachetable convertible (*callable convertible discount bond*);
- obligation convertible payant des coupons de façon continue;
- obligation convertible avec coupons et dividendes payés de manière continue.

Le modèle proposé est basé sur les mêmes hypothèses que celles du modèle de Black-Scholes ([BS73]) et c'est sa principale lacune. De nos jours, il n'est plus possible de justifier que l'évolution de la valeur d'une obligation se fait avec un taux d'intérêt constant. Cette hypothèse peut être acceptée pour des options de courte maturité qui n'ont pas un produit de taux d'intérêt comme sous-jacent, mais dans le cas d'obligations convertibles cette hypothèse doit être relâchée puisqu'en général ces produits ont de longues maturités et dépendent directement du taux d'intérêt. De plus, une autre hypothèse posée par [ING77a] est le fait que les coupons sont payés de manière continue. Cela lui permet de trouver une solution analytique, mais ne correspond pas à la réalité des obligations car dans la majorité des cas les coupons sont payés deux fois par année. L'impact que les coupons ne soient pas appliqués aux dates précises implique qu'aux dates d'évaluations différentes des dates de coupons, le prix calculé est biaisé ce qui peut amener des opportunités d'arbitrage ou des mauvaises décisions de la part du détenteur ou de l'émetteur.

Ce sont ces hypothèses qui permettent d'utiliser une extension proposée par Merton [M74] de la maintenant célèbre équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes. L'extension permet de calculer la valeur d'un droit contingent,  $f(V, T)$ , corporatif si ce dernier ne dépend que de la valeur de la firme ( $V$ ) et de la date de maturité ( $T$ ). Par exemple, l'EDP qui régit un droit contingent de type obligation zéro-coupon est :

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2f_{vv} + (rV)f_v - rf - f_t = 0 \quad (1.1)$$

où  $f_v$  et  $f_{vv}$  sont respectivement les dérivées premières et secondes par rapport à la valeur de la firme;  $f_t$  est la dérivée première du droit contingent par rapport au temps;  $r$  est le taux d'intérêt sans risque; et  $\sigma$  la volatilité.

[ING77a] réussit à réduire le problème du calcul des différents types d'obligations convertibles à la résolution d'équations similaires à (1.1). De plus, les conditions aux bornes de l'équation sont spécifiées et varient selon le type d'obligation à calculer.

Malgré que la modélisation proposée soit assez simple, les résultats obtenus sont encore utiles aujourd'hui puisqu'ils servent de bases comparatives aux techniques numériques ; si les résultats avec techniques numériques donnent les bons résultats pour une modélisation simple, cela annonce que le développement de la nouvelle technique est sur la bonne voie.

Plus récemment, [BBW02] propose aussi une solution semi-analytique. Les auteurs arrivent à une solution élégante en utilisant le cours de l'action de la compagnie comme numéraire. Le problème majeur est que la démarche et solution qu'ils proposent sont pour une obligation convertible non-rachetable ne payant aucun coupon. Cela implique que leur solution n'est valide que dans certains cas très spécifiques.

## 1.2 Arbres binomiaux

La méthode des arbres binomiaux (*binomial lattice-based method*) a été très utilisée au cours des années 90. Elle est basée sur une discrétisation du marché, i.e. que les transactions, observations et valeurs possibles des différents produits financiers sont discrétisées. Lorsqu'il n'y a qu'une seule variable d'état, la méthode est assez simple à implémenter numériquement.

Le premier article à avoir présenté cette approche pour l'évaluation d'options est [CRR79]. Par la suite, quelques articles sont apparus pour l'évaluation d'obligations convertibles de différents types, dont entre autres [GS94], [HP96] et [TKN01].

[GS94] propose un modèle binomial avec une seule variable d'état soit le cours de l'action de la compagnie émettrice de l'obligation. Selon ce modèle, il est possible d'inclure des dividendes, mais ceux-ci doivent être payés de façon continue. Les auteurs proposent un ajustement du taux d'escompte utilisé dépendant du degré de parité de l'obligation convertible pour tenir compte du risque de défaut.

De plus, les auteurs de [HP96] proposent un modèle d'arbre binomial à deux facteurs, c'est-à-dire qu'à chaque point de l'arbre, il y a quatre possibilités à l'instant suivant. Les deux facteurs modélisés sont le cours de l'action de la compagnie ainsi que le taux d'intérêt sans risque. Pour tenir compte du risque de crédit de la compagnie, à chaque point de l'arbre, un ajustement est fait au taux sans risque servant à

actualiser les flux financiers.

Par ailleurs, [TKN01] propose un modèle basé sur [GS94]. La différence majeure entre les deux modèles est que [TKN01] inclut le risque de crédit en utilisant l'approche réduite (approche de Duffie-Singleton [DS99]). Cela est différent de ce qui avait été proposé précédemment par [ING77a] et [BS77] où le risque de crédit de l'obligation était modélisé selon une approche structurelle. Utiliser l'approche réduite comme l'a fait [TKN01] est une amélioration par rapport à certaines méthodes plus simples dont celle consistant à ajouter un écart de crédit au taux sans risque.

La méthode des arbres binomiaux est victime de la malédiction de la dimension : le temps de calcul varie exponentiellement avec le nombre de variables d'états. Puisque les obligations convertibles sont assujetties à au moins deux variables d'état pour une bonne modélisation, cela implique que cette méthode est onéreuse. De plus, les arbres binomiaux ont de la difficulté à bien gérer l'effet des dividendes et des coupons discrets.

### 1.3 Différences finies

Les premiers à avoir utilisé la technique des différences finies sont Brennan et Schwartz [BS77] en 1977. Les hypothèses que les auteurs ont posées pour leur modèle sont principalement les mêmes que celles posées par [ING77a], ce qui fait qu'ils ont obtenu plusieurs résultats similaires. Par ailleurs, une différence majeure de leur article avec celui de Ingersoll est que ces derniers résolvent l'équation aux dérivées partielles (ÉDP) par différences finies, i.e. qu'ils construisent une grille et discrétisent chacune des dérivées de l'équation. L'utilisation de cette technique est particulièrement efficace lorsqu'il n'y a qu'une seule variable d'état, mais se complique grandement avec l'augmentation de la dimension de l'espace d'état. La méthode de résolution que les auteurs emploient est la méthode implicite qui est beaucoup plus stable que la méthode explicite, mais prend plus de temps à résoudre.

De plus, [BBH03] propose aussi un algorithme de calcul de prix d'obligations convertibles, mais cette fois-ci en incorporant un deuxième facteur contrairement à [BS77]. Le deuxième facteur que les auteurs prennent en considération est le taux d'intérêt sans risque. Le processus de diffusion pour le taux d'intérêt est celui de Hull-White,

ce qui permet de reproduire parfaitement n'importe quelle structure à terme initiale. Ils incorporent à leur solution des options de rachat et de revente en plus de l'option de conversion. Les auteurs utilisent une approche numérique de type *characteristic/finite difference* ce qui leur permet de résoudre plus facilement le problème de borne libre (option de type américain).

Quelques autres auteurs, dont [FRU05] et [TF98], ont aussi utilisé la méthode des différences finies pour résoudre l'ÉDP et ses conditions aux bornes qui caractérisent les obligations convertibles. [FRU05] utilise le modèle de Cox-Ingersoll-Ross pour le taux d'intérêt et un mouvement brownien géométrique avec taux d'accroissement constant pour le sous-jacent. La discrétisation est faite en deux étapes : les variables d'états sont discrétisées de manière linéaire tandis que la variable de temps est discrétisée en utilisant la méthode de Runge-Kutta, qui est non-linéaire. Les résultats obtenus dans [FRU05] montrent sans équivoque la convergence de l'algorithme. Par ailleurs, [TF98] utilise la méthode explicite pour résoudre l'ÉDP. Les résultats obtenus s'avèrent légèrement instables, i.e. la surface de prix obtenue possède beaucoup de sauts ; possiblement qu'en ayant utilisé la méthode implicite ou une discrétisation plus fine du temps, les auteurs auraient pu éviter ce problème. Par contre, un des avantages que propose [TF98] est l'incorporation du risque de crédit de la firme.

## 1.4 Simulation Monte Carlo

La simulation Monte Carlo n'était pas une technique utilisée pour les produits financiers de type *américain* étant donné sa caractérisation de type *forward*. Par contre, depuis la parution de [LS01] des auteurs F.A. Longstaff et E.S. Schwartz, en 2001, la situation a bien changé et la simulation est maintenant considérée comme une méthode efficace. La technique proposée est un calcul du prix de l'option par résolution *backward* et une estimation de la fonction de la valeur de continuation par régression linéaire sur toutes les trajectoires qui sont à-la-monnaie (*at-the-money*).

Au cours des dernières années, quelques auteurs, dont [AKW08] et [LYB04], ont appliqué la simulation Monte Carlo au problème du calcul du prix d'obligations convertibles. L'avantage d'utiliser une telle méthode est qu'il est facile d'incorporer autant de variables d'état que l'on désire. Par contre, il existe plusieurs inconvénients à utiliser cette technique. Premièrement, la simulation contient toujours deux

types d'erreurs, c'est-à-dire une erreur statistique et une erreur numérique. L'erreur statistique vient de la convergence en fonction du nombre de simulations ; l'erreur numérique provient de la discrétisation des processus. Pour obtenir une solution qui n'a qu'une petite marge d'erreur il faut effectuer un très grand nombre de simulations avec de petits pas de discrétisation. Cela amène des temps de calcul très élevés et donc le calibrage de paramètres avec cette technique n'est pas des plus efficaces.

Un des principaux attraits de [AKW08] est que les auteurs, en plus de calibrer leur modèle sur les obligations convertibles existantes, analysent l'impact de modéliser le taux d'intérêt, i.e. qu'il soit défini de manière stochastique plutôt que constant. Ils font remarquer que l'ajout d'une modélisation stochastique pour le taux d'intérêt a un plus gros impact pour les obligations à-la-monnaie et dont la corrélation entre l'action de la compagnie et le taux d'intérêt est plus élevée. Les résultats qu'ils obtiennent montrent que l'ajout d'une modélisation stochastique pour le taux d'intérêt fait varier le prix d'une obligation convertible d'échéance 2 ans d'au maximum 0,5% en valeur absolue. Ils arrivent à la conclusion que l'ajout d'un taux d'intérêt stochastique ne vient que compliquer le modèle pour le peu de précision que cela amène. Une des raisons qu'ils supposent pour que l'impact soit négligeable est que la corrélation entre la structure à terme des taux et les mouvements de l'action des compagnies est très faible.

De plus, [AKW08] modélise la volatilité de l'action de manière stochastique avec l'aide d'un modèle GARCH(1,1). Il aurait été intéressant de voir les effets d'une modélisation non-stochastique pour la volatilité, mais stochastique pour les taux d'intérêts. Cela aurait été bien pour voir si l'impact mentionné plus haut aurait été le même. Les données qu'ils utilisent sont en date de février 2002, une époque où les taux étaient plus élevés qu'aujourd'hui. Dû à la convexité naturelle des obligations, l'impact d'une hausse de taux est plus significative lorsque ces dernières ont une valeur plutôt basse qu'élevée. Possiblement qu'une modélisation stochastique serait alors plus significative de nos jours puisque les taux sont à des bas historiques et qu'une hausse de taux est inévitable au cours des prochaines années.

Finalement, les auteurs de [AKW08] utilisent une méthode paramétrique basée sur celle présentée dans [G03] pour évaluer s'il est préférable d'exercer l'option plutôt que de conserver l'obligation. La méthode se déroule en deux étapes, un certain nombre de trajectoires est premièrement utilisé pour l'optimisation des paramètres

de la fonction et ces paramètres sont par la suite utilisés pour évaluer deux éléments, soit la valeur de l'obligation pour les trajectoires faisant partie de l'échantillon d'approximation et la valeur pour les trajectoires n'en faisant pas partie. La valeur finale en ce point est calculée comme étant la moyenne de ces deux prix.

De leur côté, les auteurs de [LYB04] proposent un algorithme basé sur la méthode de Longstaff-Schwartz [LS01] pour approximer l'espérance définissant la valeur de continuation de l'obligation à un point spécifique d'une trajectoire. Ils proposent comme polynôme de régression d'utiliser celui contenant les produits croisés entre les variables et aussi de prendre seulement les trajectoires à-la-monnaie dans l'estimation des paramètres de régression pour une convergence plus rapide (comme le conseille [LYB04]).

## 1.5 Programmation dynamique

Les algorithmes de programmation dynamique sont des méthodes numériques très efficaces pour le calcul de produits financiers complexes. Ces algorithmes sont appelés *dynamiques* dû au processus décisionnel imbriqué, c'est-à-dire que, par exemple, pour l'évaluation d'une option américaine où le temps est discrétisé, à chaque pas de temps la décision d'exercer ou non une option tient compte des potentialités futures du contrat. Ce type d'algorithme est grandement utilisé pour le calcul de droits contingents de type américain ou bermudéen puisqu'à chaque pas de temps, le détenteur doit choisir s'il conserve ou exerce son option.

Les programmes dynamiques s'appuient sur des méthodes d'approximations, et plusieurs méthodes sont explicitées dans [BF11]. Les approximations numériques sont nécessaires parce que la valeur d'un contrat ne peut être évaluée que pour un nombre fini d'états possibles. Les deux types d'approximations les plus courantes sont l'approximation par éléments finis et l'approximation spectrale. Ces approximations servent, dans la plupart des cas, à interpoler la fonction valeur du droit contingent calculé.

[BBKL07] utilise un programme dynamique couplé à une approximation linéaire par morceaux pour le calcul d'obligations contenant une option de rachat et/ou de revente. L'utilisation d'une approximation linéaire par morceaux permet d'éviter le

---

calcul d'une double intégrale à chacun des points de la grille constituant les variables d'états discrétisées ; cela améliore grandement le temps de calcul comparé aux autres méthodes présentées dans l'article.

Finalement, [BK11] utilise un algorithme de programmation dynamique pour le calcul d'obligations convertibles rachetables. Les auteurs utilisent un processus à saut pour l'évolution de la valeur de la firme ainsi que le modèle de Vasicek pour le processus de diffusion du taux d'intérêt. Les auteurs supposent une politique initiale d'exercice pour une obligation qui n'a qu'une option de rachat et de conversion. Ils ne proposent pas une politique d'exercice pour l'option de revente.

# Chapitre 2

## Notions de base

### 2.1 Évaluation à rebours

Plusieurs méthodes existent pour évaluer la valeur d'un produit dérivé, certaines sont mieux adaptées pour certains produits. Une de ces méthodes est l'évaluation à rebours ou récursive ; elle est surtout utilisée pour l'évaluation de produits dérivés américains dans un contexte à temps discret ou bermudiens. Puisque les obligations convertibles peuvent être considérées comme un produit financier contenant une option bermudienne, il est possible d'utiliser cette méthode pour en calculer la valeur.

#### 2.1.1 Méthodologie générale

Considérons premièrement un vecteur  $\Theta_t \in \mathbb{R}^n$  contenant l'information en  $t$  de la valeur des différentes variables affectant le produit contingent en question. On définit alors

$$v_t(\Theta_t) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

comme la valeur du droit contingent en date  $t$ . On pose aussi  $t = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \dots < t_M = T$ , les dates de décision du droit contingent. À chaque date (excepté à la maturité), le détenteur de l'option peut choisir entre exercer le droit contingent ou le conserver pour une période supplémentaire, i.e. de  $t_m$  à  $t_{m+1}$ . Puisque le détenteur désire maximiser son avoir, il est possible de définir l'égalité suivante :

$$v_{t_m}(\Theta_{t_m}) = \max\{v_{t_m}^e(\Theta_{t_m}); v_{t_m}^{hold}(\Theta_{t_m})\} \quad (2.1)$$

où  $v_{t_m}^e(\Theta_{t_m})$  est la valeur d'exercice et  $v_{t_m}^{hold}(\Theta_{t_m})$  est la valeur de détention en date  $t_m$  du droit contingent pour une période supplémentaire. La valeur de  $v^{hold}(\Theta_{t_m})$  est définie comme étant la valeur actualisée du droit contingent à la prochaine période prise sous la mesure neutre au risque, i.e.

$$v_{t_m}^{hold}(\Theta_{t_m}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_{t_m}^{t_{m+1}} r_s ds} v_{t_{m+1}}(\Theta_{t_{m+1}}) \mid \mathcal{F}_{t_m} \right). \quad (2.2)$$

Pour trouver la valeur du droit contingent américain avec date de maturité  $T$ , il suffit de calculer  $v_T(\Theta_T)$  et de procéder par récurrence en calculant sa valeur à chaque période d'observation en utilisant (2.1) et (2.2), et ce jusqu'à la date  $t$  où l'on désire sa valeur.

### 2.1.2 Approche pour obligations convertibles

La méthodologie pour évaluer en  $t$  une obligation convertible qui vient à maturité en  $T$  est identique à celle présentée ci-haut. Il ne suffit que de bien définir la valeur d'exercice à chaque instant d'observation. De plus, dans la majorité des cas le vecteur  $\Theta_{t_m} \in \mathbb{R}^2$ , où les deux composantes sont le taux d'intérêt sans risque ainsi que la valeur du cours de l'action de la compagnie émettrice en  $t_m$ . Il est important de définir les trois valeurs suivantes pour la composition de l'algorithme :

- $\gamma_{t_m}$  représente le nombre d'actions de la compagnie qu'il est possible d'avoir si l'obligation est convertie en  $t_m$ ;
- $S_{t_m}$  la valeur du cours de l'action à  $t_m$ ;
- $C_{t_m}$  représente la valeur à laquelle l'émetteur peut racheter l'obligation convertible en  $t_m$ ;
- $P_{t_m}$  représente la valeur contre laquelle le détenteur peut revendre son obligation en  $t_m$ .

#### Décision d'exercice

L'ajout d'options (de rachat ou de revente) à l'option de conversion fait varier la valeur de l'obligation, i.e. une option de revente en fait augmenter la valeur tandis qu'une option de rachat la fait diminuer. Lorsqu'une option de rachat est incluse dans l'obligation convertible, il n'est plus possible de ne considérer que le détenteur de l'obligation étant donné que l'émetteur prend aussi des décisions pour minimiser sa dette. La décision de racheter dépend alors directement de la valeur de continuation,

i.e. que si la valeur de continuation est plus élevée que la valeur de rachat, l'émetteur va racheter l'obligation pour que la valeur de sa dette soit la plus basse. De plus, lorsque l'obligation est rachetée, il est possible que le détenteur décide de convertir l'obligation si la valeur de conversion est plus élevée que la valeur de rachat. Cela est appelé une conversion forcée (*forced conversion*) puisque si le détenteur n'exerce pas son option de conversion, il va perdre un certain montant, car l'émetteur, lui, va exercer son option de rachat. En résumé, la valeur en  $t_m$  d'une obligation convertible avec option de rachat et de revente est définie par :

$$v_{t_m}(\Theta_{t_m}) = \begin{cases} C_{t_m} & \text{si } v^{hold}(\Theta_{t_m}) > C_{t_m} \\ & \text{et } C_{t_m} \geq \gamma_{t_m} S_{t_m} \\ \gamma_{t_m} S_{t_m} & \text{si } v^{hold}(\Theta_{t_m}) > C_{t_m} \\ & \text{et } C_{t_m} < \gamma_{t_m} S_{t_m} \\ P_{t_m} & \text{si } P_{t_m} \geq v^{hold}(\Theta_{t_m}) \\ & \text{et } P_{t_m} \geq \gamma_{t_m} S_{t_m} \\ \gamma_{t_m} S_{t_m} & \text{si } \gamma_{t_m} S_{t_m} \geq v^{hold}(\Theta_{t_m}) \\ & \text{et } P_{t_m} \leq \gamma_{t_m} S_{t_m} \\ v_{t_m}^{hold}(\Theta_{t_m}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est important de noter que la valeur de l'obligation exprimé ci-haut n'est valide que lorsque la structure de capital de l'entreprise n'est faite que de fonds propres et de dette convertible.

C'est le cas le plus général qui est présenté plus haut, mais il est très facile de l'adapter si certaines options ne sont pas incluses avec l'obligation. Si

- il n'y a plus d'option de conversion il suffit de mettre  $\gamma_{t_m} = 0$ , ainsi la valeur de conversion va toujours être nulle, donc l'investisseur ne l'exercera jamais ;
- il n'y a plus d'option de revente, comme pour l'option de conversion, car c'est une option qui profite au détenteur de l'obligation, il est nécessaire de poser  $P_{t_m} = 0$  ;
- il n'y a plus d'option de rachat, on pose que  $C_{t_m} = \infty$ , ainsi l'émetteur ne voudra jamais racheter l'obligation à ce prix, ce qui donne une valeur nulle à l'option.

Il est possible de constater que l'obligation prend la même valeur dans deux cas différents. Le premier est une conversion forcée tandis que le deuxième cas est la situation où le détenteur décide de convertir son obligation sans que l'émetteur ait un mot à dire.

## 2.2 Passage à la mesure *Forward-Neutre*

Lorsque que le taux d'intérêt est stochastique, il peut être utile de passer à la mesure *Forward-Neutre* pour simplifier le calcul de (2.2). Sans son utilisation, calculer (2.2) peut être assez complexe puisqu'il est nécessaire d'avoir la distribution jointe de  $\int_{t_m}^{t_{m+1}} r_s ds$  et de  $\Theta_{t_{m+1}}$  sachant l'information à  $t_m$ . La passage à la mesure  $(t_{m+1}) - \text{Forward Neutre}$  permet en quelque sorte d'extraire le terme  $e^{-\int_{t_m}^{t_{m+1}} r_s ds}$  de l'espérance.

Sous la mesure neutre au risque, le numéraire est le compte bancaire. En passant à la mesure  $(t_{m+1}) - \text{Forward Neutre}$  le numéraire est désormais l'obligation zéro-coupon qui échoit en date  $t_{m+1}$ .

Soit  $P(t_m, t_{m+1} | \mathcal{F}_{t_m})$  la valeur d'une obligation zéro-coupon à  $t_m$  qui vient à échéance à  $t_{m+1}$  :

$$P(t_m, t_{m+1} | \mathcal{F}_{t_m}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left( e^{-\int_{t_m}^{t_{m+1}} r_s ds} | \mathcal{F}_{t_m} \right) \quad (2.3)$$

où  $r_s$  est le taux court sans risque et  $\mathcal{F}_{t_m}$  représente l'information accumulée jusqu'à  $t_m$ .

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $v_{t_m}^{hold}(\Theta_{t_m})$  la valeur de continuation de l'obligation convertible définie par (2.2),  $\mathbb{Q}$  la mesure neutre au risque,  $\mathbb{P}^{t_{m+1}}$  la mesure  $(t_{m+1}) - \text{Forward Neutre}$ ,  $P(t_m, t_{m+1} | \mathcal{F}_{t_m})$  la valeur d'une obligation zéro-coupon venant à échéance à  $t_{m+1}$  et  $\mathbb{E}^{t_{m+1}}$  l'espérance sous la mesure  $(t_{m+1}) - \text{Forward Neutre}$ . Alors,*

$$\begin{aligned} v_{t_m}^{hold}(\Theta_{t_m}) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left( v_{t_{m+1}}(\Theta_{t_{m+1}}) e^{-\int_{t_m}^{t_{m+1}} r_s ds} | \mathcal{F}_{t_m} \right) \\ &= P(t_m, t_{m+1} | \mathcal{F}_{t_m}) \mathbb{E}^{t_{m+1}} (v_{t_{m+1}}(\Theta_{t_{m+1}}) | \mathcal{F}_{t_m}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

La proposition 2.2.1 est très utile lorsque, pour le modèle de taux d'intérêt utilisé,

il existe une forme fermée pour le prix d'obligations zéro-coupon. Cette proposition est bien connue dans la littérature et peut être retrouvée dans plusieurs livres portant sur le calcul stochastique appliqué à la finance quantitative, par exemple [SHRE].

## 2.3 Algorithme

En utilisant le passage à la mesure *Forward-Neutre*, il est possible de construire l'algorithme d'évaluation de l'obligation. Rappelons que les moments d'observation sont  $t = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \dots < t_M = T$ . L'algorithme pour une obligation convertible qui ne contient aucune autre option est :

1. calculer la valeur à l'échéance de l'obligation, i.e.  $v_T(\Theta_T) = \max\{\text{valeur nominale}; \gamma_T S_t\}$ ;
2. calculer  $v_{t_{M-1}}^{hold}(\Theta_{t_{M-1}}) = P(t_{M-1}, t_M) \mathbb{E}^{t_M}(v_{t_M}(\Theta_{t_M}) | \mathcal{F}_{t_{M-1}})$ ;
3. calculer  $v_{t_{M-1}}^e(\Theta_{t_{M-1}}) = \gamma_{t_{M-1}} S_{t_{M-1}}$ ;
4. définir  $v_{t_{M-1}}(\Theta_{t_{M-1}}) = \max\{v_{t_{M-1}}^{hold}(\Theta_{t_{M-1}}); v_{t_{M-1}}^e(\Theta_{t_{M-1}})\}$ ;
5. répéter les étapes 2, 3 et 4 pour chaque date  $t_m$ ;
6. le prix de l'obligation convertible est alors  $v_{t=t_0}(\Theta_0)$ .

Pour des obligations avec options de rachat et/ou de revente il n'y a que l'étape 3 et 4 à modifier. Dans ces cas, on doit se référer à la section 2.1. Le calcul de la valeur de continuation ( $v^{hold}$ ) sera explicité à la section 2.4.

## 2.4 Approximation de $v^{hold}$

Rappelons que sous la mesure  $t_{m+1} - ForwardNeutre$ ,  $v^{hold}(\Theta_{t_m})$  est calculée selon (2.4). Le calcul de l'espérance se rapporte alors à l'évaluation d'une double intégrale dans le cas où  $\Theta_{t_m} \in \mathbb{R}^2$ . Les deux variables aléatoires définissant  $\Theta_{t_m}$  sont, dans le cas d'une obligation convertible, le taux d'intérêt sans risque ( $R_{t_m}$ ) et le cours de l'action de la compagnie ( $S_{t_m}$ ). De plus, définissons  $f_{S,R}(s, r)$  la fonction de densité jointe de  $S$  et  $R$  sous la mesure forward-neutre. Soit  $A$  le domaine de  $S$  et  $B$  le domaine de  $R$ . La valeur de continuation est alors calculée de la manière

suivante :

$$\begin{aligned} v^{hold}(\Theta_{t_m}) &= P(t_m, t_{m+1} | \mathcal{F}_{t_m}) \mathbb{E}^{t_{m+1}}(v_{t_{m+1}}(\Theta_{t_{m+1}}) | \mathcal{F}_{t_m}) \\ &= P(t_m, t_{m+1} | \mathcal{F}_{t_m}) \int_A \int_B v_{t_{m+1}}(s, r) f_{S,R}(s, r) dr ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Il est alors possible de constater qu'un problème majeur émerge de l'équation (2.5), la fonction  $v_{t_{m+1}}(\Theta_{t_{m+1}})$  n'est pas connue sous une forme fermée, mais est connue en certains points puisque l'algorithme procède récursivement.

### 2.4.1 Première approche

Une première approche que quelqu'un pourrait prendre serait de passer par une discrétisation du support de la distribution de probabilité, i.e. les variables aléatoires ne peuvent prendre que des valeurs discrètes prédéfinies.

Dans le cas présent, puisque deux variables entrent en jeu, on peut appliquer la discrétisation à une seule des variables et interpoler une fonction pour l'autre. Premièrement, posons une grille d'observation des deux variables aléatoires  $S$  et  $R$ , soient  $s_0 < s_1 < \dots < s_M$  les valeurs observées de  $S$  et  $r_0 < r_1 < \dots < r_N$  les valeurs possibles de  $R$ .

Pour le développement, posons que  $v_{t_{m+1}}(s, r) = v(s, r)$  pour alléger la notation. On peut alors développer l'intégrale double de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_A \int_B v(s, r) f_{S,R}(s, r) dr ds &= \int_A \int_B v(s, r) f_{S,R}(s|r) f_R(r) dr ds \\ &= \int_A \sum_{j=1}^N v(x, r_j) f_{S,R}(s|R = r_j) f_R(r_j) \Delta_{r_j} ds \\ &= \sum_{j=1}^N \int_A v(s, r_j) f_{S,R}(s|R = r_j) ds f_R(r_j) \Delta_{r_j} \end{aligned}$$

Donc, à partir de la dernière expression il est possible de poser la fonction  $g(s, r_j) = v(s, r_j) f_{S,R}(s|R = r_j)$  à une variable ( $r_j$  est un paramètre de la fonction).

Nous allons approximer  $g(s, r_j)$  par  $\hat{g}(x, b_i)$ . La fonction  $\hat{g}$  peut être un polynôme quelconque facilement intégrable. Les points d'ancrage pour déterminer le polynôme sont les valeurs observables de  $S$  soient  $s_i \forall i$  où  $i \in \{0, 1, \dots, M\}$ . Le type d'approxi-

mation peut être un polynôme de Lagrange, une spline cubique, un polynôme de Tchebychev, etc.

L'expression finale de la valeur de continuation sera alors :

$$v^{hold}(s, r) = P(t_m, t_{m+1} | \mathcal{F}_{t_m}) \sum_{j=1}^N \int_A \hat{g}(s, r_j) ds f_R(r_j) \Delta r_j. \quad (2.6)$$

Il est important de noter que cette méthode fonctionne aussi si l'hypothèse initiale est inversée, i.e. que l'on fixe les valeurs de  $S$  et non de  $R$ . Par ailleurs, l'utilisation de cette méthode introduit une erreur d'approximation d'une distribution continue par une distribution discrète.

### 2.4.2 Deuxième approche

Une deuxième approche qui peut être considérée est d'approximer  $v_{t_{m+1}}(s, r)$  par  $\hat{h}(s, r)$ . Les points qui seront utilisés pour approximer la fonction sont  $s_i \forall i$  où  $i \in \{0, 1, \dots, M\}$  pour  $S$  et  $r_j \forall j$  où  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$  pour  $R$ . Ces points, contrairement à la méthode précédente pour  $R$ , sont des points d'observations et nous supposons que la fonction prend des valeurs autres que 0 ailleurs. De plus, on pose que la fonction  $v_{t_{m+1}}(s, r)$  est constante pour des valeurs de  $S < s_0$  et  $S \geq s_M$  ainsi que pour des valeurs de  $R < r_0$  et  $R \geq r_N$ . Cette hypothèse n'est pas trop contraignante pour des valeurs élevées de  $s_M$  et  $r_N$  et basses de  $s_0$  et  $r_0$ , car lorsqu'elles sont multipliées par la fonction de probabilité, le résultats est négligeable.

Un polynôme à deux variables sera utilisé pour  $\hat{h}(s, r)$ , cette approximation permet l'intégration de  $\hat{h}(s, r)$ . La valeur de continuation est alors :

$$v^{hold}(s, r) = P(t_m, t_{m+1}) \int_A \int_B \hat{h}(s, r) \times f_{S,R}(s, r) dr ds. \quad (2.7)$$

Comme pour la première approche, la fonction  $\hat{h}(s, r)$  de (2.7) peut être approximée par différents types de polynômes. De plus, pour utiliser cette approche, la fonction de densité doit être connue.

## Chapitre 3

# Boîte à outils

Dans ce chapitre, nous allons présenter le modèle de taux d'intérêt de type Vasicek ainsi que la distribution conjointe de l'évolution du taux d'intérêt et de l'action de la compagnie sous la mesure *Forward-Neutre*. De plus, les polynômes de Tchebychev et leur utilisation en deux dimensions seront présentés.

### 3.1 Modèle de taux d'intérêt - Vasicek

Les modèles de taux d'intérêt à un facteur ont été grandement étudiés au cours des 30 dernières années, ce qui a permis de connaître plusieurs résultats importants ainsi que leurs avantages et faiblesses. Un des modèles les plus utilisés est celui de Vasicek [V77].

Le modèle de Vasicek est pratique dû à sa forme affine et à sa solution gaussienne, ce qui vient faciliter son analyse. L'équation différentielle stochastique (EDS) qui régit le modèle de Vasicek est

$$dR_t = \kappa(\theta - R_t) dt + \sigma dW_t, \quad \text{avec } R(0) = R_0, \quad (3.1)$$

où  $\kappa$ ,  $\theta$  et  $\sigma$  sont des constantes positives ;  $\kappa$  représente l'intensité du retour à la moyenne long terme ;  $\theta$  est la moyenne long terme de  $R_t$  ; et  $\sigma$  est la volatilité.

Il est possible de voir que la solution de (3.1), sachant l'information jusqu'à  $u \leq t$ ,

en utilisant le changement de variable  $y_t = R_t e^{\kappa t}$  et le lemme d'Itô, est :

$$R_t | \mathcal{F}_u = R(u) e^{-\kappa(t-u)} + \theta \left(1 - e^{-\kappa(t-u)}\right) + \sigma \int_u^t e^{-\kappa(t-m)} dW_m. \quad (3.2)$$

À partir de (3.2), on remarque que  $R_t$  est de loi gaussienne et que les deux premiers moments peuvent être calculés (voir (3.3) et (3.4)). Par ailleurs, le fait que  $R_t$  soit de loi gaussienne amène un aspect légèrement indésirable, i.e. le modèle accorde une probabilité non-nulle à des taux négatifs ; ce n'est pas une propriété désirable pour un modèle de taux courts, mais le fait que le modèle soit gaussien lui donne un avantage majeur vis-à-vis des autres.

$$E [R_t | \mathcal{F}_u] = R(u) e^{-\kappa(t-u)} + \theta \left(1 - e^{-\kappa(t-u)}\right) \quad (3.3)$$

$$Var [R_t | \mathcal{F}_u] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa(t-u)}\right) \quad (3.4)$$

De plus, une formule fermée est disponible pour la valeur d'une obligation zéro-coupon. Soit  $P(t, T)$  une obligation zéro-coupon en date  $t$  qui vient à maturité en  $T$ , sa valeur est :

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T) R(t)} \quad (3.5)$$

où

$$\begin{aligned} A(t, T) &= e^{\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)(B(t, T) - (T-t)) - \frac{\sigma^2}{4\kappa} B(t, T)^2} \\ B(t, T) &= \frac{1}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right). \end{aligned}$$

## 3.2 Construction de la distribution conjointe

Le modèle général utilisé, indépendant du modèle de taux d'intérêt, est :

$$\begin{aligned} dR_t &= \mu(t, R_t) dt + \eta(t, R_t) dW_t^1 \\ dS_t &= (R_t) S_t dt + \sigma_s S_t dW_t^2 \end{aligned}$$

où  $W_t^1$  et  $W_t^2$  sont deux mouvements Browniens corrélés et  $\mathbb{E}(dW_t^1 dW_t^2) = \rho dt$  ;  $\mu(t, R_t)$  et  $\nu(t, R_t)$  sont deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  ;  $\sigma_s$  est une constante représentant la volatilité.

Il est plus pratique de travailler avec des mouvements Browniens indépendants

$(Z_t^1$  et  $Z_t^2$ ) sous  $\mathbb{Q}$ . L'utilisation de la décomposition de Cholesky permet d'obtenir les EDS suivantes :

$$dR_t = \mu(t, R_t)dt + \eta(t, R_t)dZ_t^1 \quad (3.6)$$

$$dS_t = (R_t)S_tdt + \sigma_s S_t \left( \rho dZ_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t^2 \right) \quad (3.7)$$

De plus, il est plus simple d'utiliser la modélisation de  $X_t = \log(S_t)$  plutôt que de  $S_t$ , cela permet d'obtenir une solution gaussienne plutôt que log-normale. Le lemme d'Itô est utilisé pour obtenir l'EDS de la transformation  $\log(S_t)$  :

$$dX_t = d\log(S_t) = \left( R_t - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \right) dt + \sigma_s \left( \rho dZ_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t^2 \right). \quad (3.8)$$

### 3.2.1 Utilisation du modèle de Vasicek

Sous le modèle de Vasicek, l'EDS du taux d'intérêt sans risque est :

$$dR_t = \alpha (\mu - R_t) dt + \sigma_r dZ_t^1 \quad (3.9)$$

$$= (\theta - \alpha R_t) dt + \sigma_r dZ_t^1. \quad (3.10)$$

L'équation (3.10) est simplement une écriture plus compacte de (3.9). Elle est plus pratique, mais enlève quelque peu la signification des paramètres. Par exemple, les paramètres  $\alpha$  et  $\mu$  de (3.9) signifient respectivement la vitesse du retour à la moyenne et la tendance à long terme. Par ailleurs, il n'est plus possible d'en dire autant sur  $\theta$ .

#### Passage à la mesure *T-Forward Neutre*

Le passage à la mesure T-Forward Neutre implique la transformation suivante au mouvement Brownien  $Z_t^1$  :

$$dZ_t^1 = dW_t^T - \frac{\sigma_r}{\alpha} \left( 1 - e^{-\alpha(T-t)} \right).$$

La dynamique du taux sans risque et du sous-jacent sous la mesure *T-Forward Neutre*

deviennent :

$$dR_t = \left( \theta - \frac{\sigma_r^2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) - \alpha R_t \right) dt + \sigma_r dW_t^T \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} dX_t &= \left( R_t - \frac{\sigma_s^2}{2} - \frac{\rho\sigma_r\sigma_s}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \right) dt \\ &\quad + \sigma_s \left( \rho dW_t^T + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^* \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

où  $dW_t^* = dZ_t^2$ .

### 3.2.2 Solution de $R_t$

La solution de  $R_t$  sous la mesure  $T$ -Forward Neutre est assez simple à trouver. Commençons par effectuer le changement de variable  $y_t = R_t e^{\alpha t}$  et utiliser le lemme d'Itô pour trouver sa dynamique.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = R_t \alpha e^{\alpha t} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial R} = e^{\alpha t} \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial R^2} = 0$$

On obtient alors l'EDS suivante

$$\begin{aligned} dy_t &= \left( \alpha R_t e^{\alpha t} + \theta e^{\alpha t} - \alpha R_t e^{\alpha t} - \frac{\sigma_r^2}{\alpha} e^{\alpha t} (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \right) dt + \sigma_r e^{\alpha t} dW_t^T \\ &= \left( \theta e^{\alpha t} - \frac{\sigma_r^2}{\alpha} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha(T-2t)}) \right) dt + \sigma_r e^{\alpha t} dW_t^T \end{aligned} \quad (3.13)$$

On peut maintenant intégrer (3.13) de chaque côté ( $0 \leq u < t$ )

$$\begin{aligned} \int_u^t dy_s &= \int_u^t \theta e^{\alpha s} ds - \int_u^t \frac{\sigma_r^2}{\alpha} (e^{\alpha s} - e^{-\alpha(T-2s)}) ds + \int_u^t \sigma_r e^{\alpha s} dW_s^T \\ y_t - y_u &= \frac{\theta}{\alpha} (e^{\alpha t} - e^{\alpha u}) - \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2} \left( e^{\alpha t} - e^{\alpha u} - \frac{e^{-\alpha(T-2t)} - e^{-\alpha(T-2u)}}{2} \right) \\ &\quad + \sigma_r \int_u^t e^{\alpha s} dW_s^T \end{aligned}$$

On applique le changement de variable inverse, i.e.  $R_t = y_t e^{-\alpha t}$

$$\begin{aligned}
R_t &= R_u e^{-\alpha(t-u)} + \frac{\theta}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(t-u)}\right) \\
&\quad - \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha(t-u)} - \frac{e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T+t-2u)}}{2}\right) \\
&\quad + \sigma_r \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s^T.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

**Densité de  $R_t | \mathcal{F}_u$**

On remarque alors que  $R_t | \mathcal{F}_u$  suit une loi Gaussienne d'espérance et de variance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^T(R_t | \mathcal{F}_u) &= R_u e^{-\alpha(t-u)} + \frac{\theta}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(t-u)}\right) \\
&\quad - \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha(t-u)} - \frac{e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T+t-2u)}}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
Var^T(R_t | \mathcal{F}_u) &= \sigma_r^2 \int_u^t e^{-2\alpha(t-s)} ds \\
&= \frac{\sigma_r^2}{2\alpha} \left(1 - e^{-2\alpha(t-u)}\right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

### 3.2.3 Solution de $X_t$

On commence par intégrer des deux côtés de (3.12)

$$\begin{aligned}
X_t - X_u &= \int_u^t R_v dv - \frac{\sigma_s^2}{2}(t-u) - \frac{\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha} \int_u^t (1 - e^{-\alpha(T-v)}) dv \\
&\quad + \sigma_s \rho \int_u^t dW_v^T + \sigma_s \sqrt{1-\rho^2} \int_u^t dW_v^* \\
X_t &= X_u + \int_u^t R_v dv - \left(\frac{\sigma_s^2}{2} + \frac{\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha}\right)(t-u) \\
&\quad + \frac{\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha^2} \left(e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T-u)}\right) \\
&\quad + \sigma_s \rho \int_u^t dW_v^T + \sigma_s \sqrt{1-\rho^2} \int_u^t dW_v^*.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

**Solution de  $\int_u^t R_v dv$**

Puisque l'on connaît la solution de  $R_t|\mathcal{F}_u$  (voir (3.14)), on peut l'intégrer :

$$\begin{aligned} \int_u^t R_v dv &= \int_u^t R_u e^{-\alpha(v-u)} dv + \int_u^t \frac{\theta}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(v-u)}\right) dv \\ &\quad - \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2} \int_u^t \left(1 - e^{-\alpha(t-u)} - \frac{e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T+t-2u)}}{2}\right) dv \\ &\quad + \sigma_r \int_u^t \int_u^v e^{-\alpha(v-m)} dW_m^T dv. \end{aligned} \quad (3.18)$$

On change l'ordre d'intégration des deux intégrales doubles et on peut ensuite faire le calcul des intégrales :

$$\begin{aligned} \int_u^t R_v dv &= R_u \frac{(1 - e^{-\alpha(t-u)})}{\alpha} + \left(\frac{\theta}{\alpha} - \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2}\right) \left((t-u) - \frac{1 - e^{-\alpha(t-u)}}{\alpha}\right) \\ &\quad + \frac{\sigma_r^2}{2\alpha^3} \left(e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T-u)}\right) - \frac{\sigma_r^2}{2\alpha^3} \left(e^{-\alpha(T-u)} - e^{-\alpha(T+t-2u)}\right) \\ &\quad + \frac{\sigma_r}{\alpha} \int_u^t (1 - e^{-\alpha(t-m)}) dW_m^T \\ &= R_u \frac{(1 - e^{-\alpha(t-u)})}{\alpha} + \left(\frac{\theta}{\alpha} - \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2}\right) \left((t-u) - \frac{1 - e^{-\alpha(t-u)}}{\alpha}\right) \\ &\quad + \frac{\sigma_r^2}{2\alpha^3} \left(e^{-\alpha(T-t)} - 2e^{-\alpha(T-u)} + e^{-\alpha(T+t-2u)}\right) \\ &\quad + \frac{\sigma_r}{\alpha} \int_u^t (1 - e^{-\alpha(t-m)}) dW_m^T. \end{aligned} \quad (3.19)$$

On simplifie l'écriture de (3.19) :

$$\int_u^t R_v dv = \beta(u, t) + \frac{\sigma_r}{\alpha} \int_u^t (1 - e^{-\alpha(t-m)}) dW_m^T \quad (3.20)$$

où

$$\begin{aligned} \beta(u, t) &= R_u \frac{(1 - e^{-\alpha(t-u)})}{\alpha} + \left(\frac{\theta}{\alpha} - \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2}\right) \left((t-u) - \frac{1 - e^{-\alpha(t-u)}}{\alpha}\right) \\ &\quad + \frac{\sigma_r^2}{2\alpha^3} \left(e^{-\alpha(T-t)} - 2e^{-\alpha(T-u)} + e^{-\alpha(T+t-2u)}\right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

**Expression finale de  $X_t$** 

Maintenant que la solution de  $\int_u^t R_v dv$  est connue sous la mesure  $T$ -*ForwardNeutre*, on peut remplacer son expression dans (3.17) :

$$\begin{aligned} X_t &= X_u + \beta(u, t) + \frac{\sigma_r}{\alpha} \int_u^t (1 - e^{-\alpha(t-m)}) dW_m^T - \frac{\sigma_s^2}{2}(t-u) \\ &\quad - \frac{\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha}(t-u) + \frac{\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha^2} (e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T-u)}) \\ &\quad + \sigma_s\rho \int_u^t dW_v^T + \sigma_s\sqrt{1-\rho^2} \int_u^t dW_v^*. \end{aligned}$$

On simplifie et regroupe des termes de la dernière équation pour obtenir :

$$\begin{aligned} X_t &= X_u + \beta(u, t) - \left( \frac{\sigma_s^2}{2} + \frac{\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha} \right) (t-u) + \frac{\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha^2} (e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T-u)}) \\ &\quad + \int_u^t \left( \sigma_s\rho + \left( \frac{\sigma_r}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-v)}) \right) \right) dW_v^T + \sigma_s\sqrt{1-\rho^2} \int_u^t dW_v^*. \quad (3.22) \end{aligned}$$

**Distribution de  $X_t|\mathcal{F}_u$** 

Maintenant que la solution de  $X_t|\mathcal{F}_u$  est connue, il est possible de constater que sa distribution de probabilité sous la mesure  $T$ -*ForwardNeutre* est toujours de loi gaussienne avec comme deux premiers moments (3.23) (3.24).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^T(X_t|\mathcal{F}_u) &= X_u + \beta(u, t) - \left( \frac{\sigma_s^2}{2} + \frac{\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha} \right) (t-u) \\ &\quad + \frac{\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha^2} (e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T-u)}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $\beta(u, t)$  est défini par (3.21).

Le calcul de la variance est un peu plus complexe :

$$\begin{aligned}
Var^T(X_t|\mathcal{F}_u) &= \int_u^t \left( \sigma_s \rho + \left( \frac{\sigma_r}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-v)}) \right) \right)^2 dv + \int_u^t \sigma_s^2 (1 - \rho^2) dv \\
&= \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2} \int_u^t (1 - 2e^{-\alpha(t-v)} + e^{-2\alpha(t-v)}) dv \\
&\quad + \frac{2\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha} \int_u^t (1 - e^{-\alpha(t-v)}) dv + \sigma_s^2 \rho^2 (t - u) \\
&\quad + \sigma_s^2 (1 - \rho^2) (t - u) \\
&= \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2} (t - u) - \frac{2\sigma_r^2}{\alpha^2} e^{-\alpha t} \int_u^t e^{\alpha v} dv + \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2} e^{-2\alpha t} \int_u^t e^{2\alpha v} dv \\
&\quad + \frac{2\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha} (t - u) - \frac{2\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha} e^{-\alpha t} \int_u^t e^{\alpha v} dv + \sigma_s^2 (t - u) \\
&= \left( \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2} + \frac{2\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha} + \sigma_s^2 \right) (t - u) \\
&\quad - \frac{\sigma_r^2}{2\alpha^3} (3 - 4e^{-\alpha(t-u)} + e^{-2\alpha(t-u)}) \\
&\quad - \frac{2\rho\sigma_s\sigma_r}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha(t-u)}). \tag{3.24}
\end{aligned}$$

### 3.2.4 Densité jointe

Puisque nous connaissons les distribution de probabilités de  $X_t|\mathcal{F}_u$  et de  $R_t|\mathcal{F}_u$  et que les deux distributions sont des lois gaussiennes, on sait que leur distribution conjointe sera gaussienne bivariable.

Posons

$$\Psi_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

un vecteur  $2 \times 1$  qui contient respectivement les valeurs de  $X_t$  et  $R_t$ . À partir des distributions trouvées plus tôt, on peut définir la distribution de  $\Psi_t|\mathcal{F}_u$  (sachant les valeurs jusqu'au temps  $u$ ).

**Proposition 3.2.1.** *La distribution conditionnelle de  $\Psi_t(u, t)|\mathcal{F}_u$ , où  $u \leq t$ , est de*

loi normale bivariée avec espérance

$$\mu_{\Psi}(u, t) = \begin{bmatrix} \mu_X(u, t) \\ \mu_R(u, t) \end{bmatrix}$$

et de matrice de variance-covariance

$$\Sigma_{\Psi}(u, t) = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(u, t) & \sigma_{X,R}(u, t) \\ \sigma_{X,R}(u, t) & \sigma_R^2(u, t) \end{bmatrix}.$$

où  $\mu_X(u, t)$  et  $\mu_R(u, t)$  sont définies respectivement par (3.23) et (3.15). De plus,  $\sigma_X^2(u, t)$  et  $\sigma_R^2(u, t)$  sont données par (3.24) et (3.16). Quant à  $\sigma_{X,R}(u, t)$ , il est défini comme étant la covariation quadratique entre  $X_t$  et  $R_t$ .

**Calcul de  $\sigma_{X,R}(u, t)$**

$$\begin{aligned} \langle X, R \rangle_t &= \langle \int_u^t \left( \frac{\sigma_r}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-v)}) + \sigma_s \rho \right) dW_v^T; \sigma_r \int_u^t e^{-\alpha(t-v)} dW_v^T \rangle_t \\ &\quad + \langle \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} \int_u^t dW_v^*; \sigma_r \int_u^t e^{-\alpha(t-v)} dW_v^T \rangle_t \\ &= \langle \int_u^t \left( \frac{\sigma_r}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-v)}) + \sigma_s \rho \right) dW_v^T; \sigma_r \int_u^t e^{-\alpha(t-v)} dW_v^T \rangle_t \\ &= \int_u^t \left( \frac{\sigma_r}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-v)}) + \sigma_s \rho \right) (\sigma_r e^{-\alpha(t-v)}) dv \\ &= \int_u^t \left( \frac{\sigma_r^2}{\alpha} (e^{-\alpha(t-v)} - e^{-2\alpha(t-v)}) \right) dv \\ &\quad + \int_u^t \sigma_s \sigma_r \rho e^{-\alpha(t-v)} dv \\ &= \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha(t-u)}) - \frac{\sigma_r^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(t-u)}), \\ &\quad + \frac{\rho \sigma_s \sigma_r}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-u)}), \end{aligned} \tag{3.25}$$

on conclut alors que  $\sigma_{X,R}(u, t) = (3.25)$ .

### 3.3 Polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev sont grandement utilisés dans le cadre d'approximations spectrales dû à plusieurs propriétés intéressantes dont la possibilité d'utiliser les Transformées de Fourier Rapides (FFT) dans le calcul des coefficients spectraux.

#### 3.3.1 Polynôme de Tchebychev à une variable

Les polynôme de Tchebychev à une variable sont définis sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , et ce, soit de manière récursive ou par trigonométrie.

Ainsi,  $T_n(x)$  le polynôme de Tchebychev de degré  $n$  où  $x \in [-1, 1]$ , peut être défini d'une des deux manières suivantes :

- Par récursion
  - $T_0(x) = 1$
  - $T_1(x) = x$
  - $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$
- Par trigonométrie
  - $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ .

Il est important de noter que  $\forall n$  on a que  $T_n(1) = 1$  et  $T_n(-1) = (-1)^n$ .

#### Interpolation

Les polynômes de Tchebychev peuvent être utilisés pour interpoler une fonction quelconque  $g(x)$  définie pour  $x \in [a, b]$ . Puisque  $g(x)$  est définie sur  $[a, b]$ , il est nécessaire d'effectuer le changement de variable suivant pour que  $x$  soit transposé dans l'intervalle  $[-1, 1]$  :

$$y = c + dx$$

où

$$c = -\frac{b+a}{b-a}$$

$$d = \frac{2}{b-a}.$$

Si la fonction  $g(x)$  est connue en  $N + 1$  points, au maximum un polynôme de degré  $N$ , dénoté  $P_N(x)$ , est nécessaire pour qu'il coïncide avec les  $N + 1$  points de  $g(x)$ . Les polynômes de Tchebychev sont alors utilisés de la manière suivante pour approximer  $g(x)$  :

$$g(x) \approx P_N(x) = \sum_{k=0}^N c_k T_k(c + dx) \quad (3.26)$$

où  $c_k$  représente le coefficient spectral de chacun des polynômes  $T_k$ .

Pour utiliser l'expression (3.26), il est nécessaire de trouver la valeur de chacun des coefficients  $c_k$ . Le calcul des coefficients  $c_k$  revient à résoudre un système d'équation linéaire, i.e.

$$g = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \dots \\ g(x_N) \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_0(c + dx_0) & T_1(c + dx_0) & \dots & T_N(c + dx_0) \\ T_0(c + dx_1) & T_1(c + dx_1) & \dots & T_N(c + dx_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_0(c + dx_N) & T_1(c + dx_N) & \dots & T_N(c + dx_N) \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_N \end{pmatrix}.$$

Le système à résoudre se résume alors à

$$g = T \times c. \quad (3.27)$$

### Utilisation des points de Gauss-Lobatto

La résolution du système d'équation (3.27) peut se faire numériquement et relativement rapidement en utilisant la factorisation  $LU$ . Par contre, si on opte pour l'utilisation d'un certain type de points, i.e. les points de Gauss-Lobatto, la résolu-

tion du système s'effectue beaucoup plus rapidement car il est possible d'utiliser les Transformées de Fourier Rapide (*TFR*). Les *TFR* utilisent  $O(N \log(N))$  opérations tandis que la décomposition *LU* utilise  $O(N^2)$  opérations, cette différence dans le nombre total d'opérations est très utile si un grand nombre de systèmes doivent être résolus.

Donc, au lieu d'observer la fonction  $g(x)$  à des points quelconques et ensuite approximer cette fonction en ces points, nous allons observer la fonction  $g(x)$  aux points de Gauss-Lobatto et interpoler la fonction à partir de ces derniers. Les points de Gauss-Lobatto sont définis de la manière suivante pour  $x_i \in [a, b]$  et  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$  :

$$x_i = \frac{1}{2} \left( a + b - (b - a) \cos \left( \frac{\pi i}{N} \right) \right). \quad (3.28)$$

### 3.3.2 Polynômes de Tchebychev à deux variables

La fonction que nous avons à approximer nécessite l'utilisation de polynômes à deux variables puisque le taux d'intérêt ainsi que la valeur de l'action de la compagnie affectent la valeur des obligations convertibles.

Soit  $h(x, y)$  où  $(x, y) \in [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$ , l'interpolation de Tchebychev pour cette fonction est de la forme :

$$h(x, y) \approx P_N(x, y) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M c_{k,l} T_k(c_1 + d_1 x) T_l(c_2 + d_2 y) \quad (3.29)$$

où les coefficients sont calculés en utilisant les points  $\{x_i : i = 0, 1, \dots, N\}$  et  $\{y_j : j = 0, 1, \dots, M\}$  de la fonction  $h(x, r)$  :

$$h(x_i, y_j) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M c_{k,l} T_k(c_1 + d_1 x_i) T_l(c_2 + d_2 y_j) \quad (3.30)$$

où

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{x_{max} + x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \\
 d_1 &= \frac{2}{x_{max} - x_{min}} \\
 c_2 &= -\frac{y_{max} + y_{min}}{y_{max} - y_{min}} \\
 d_2 &= \frac{2}{y_{max} - y_{min}}.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

En utilisant les points de Gauss-Lobatto pour  $x$  et  $y$ , il est de nouveau possible d'utiliser les *TFR* et l'expression (3.30) pour calculer la matrice de coefficients  $c_{k,l}$ . L'utilisation des *TFR* ne peut se faire en une seule étape dans le cas d'une fonction à deux variables, mais plutôt en deux étapes :

$$\begin{aligned}
 h(x_i, y_j) &= \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M c_{k,l} T_k(c_1 + d_1 x_i) T_l(c_2 + d_2 y_j) \\
 &\quad \sum_{k=0}^N \left( \sum_{l=0}^M c_{k,l} T_l(c_2 + d_2 y_j) \right) T_k(c_1 + d_1 x_i).
 \end{aligned}$$

On définit

$$F_k(y_j) = \sum_{l=0}^M c_{k,l} T_l(c_2 + d_2 y_j), \tag{3.32}$$

ce qui donne

$$h(x_i, y_j) = \sum_{k=0}^N F_k(y_j) T_k(c_1 + d_1 x_i). \tag{3.33}$$

On a alors que  $F_k(y_j)$  où  $k = 0, \dots, N$  sont les coefficients de Tchebychev de la fonction à une variable  $h(\cdot, y_j)$ . Donc, pour calculer la valeur de  $c_{k,l}$  on commence par fixer  $y_j$  et utiliser les *TFR* pour chaque  $x_i$  de (3.33) et on répète pour chaque valeur de  $y_j$  où  $j = 0, 1, \dots, M$ . . On peut maintenant calculer pour chacune des valeurs de  $k$  les coefficients  $c_{k,l}$ , où  $l = 0, 1, \dots, M$  de l'expression (3.32) à l'aide des *TFR* sur la dimension de  $y$  en utilisant les valeurs de  $F_k(y_j)$  calculées plus tôt. On répète alors l'opération pour chacune des valeurs de  $k = 0, 1, \dots, N$ .

## Chapitre 4

# Approximation numérique

Dans ce chapitre, les hypothèses utilisées, la méthode numérique ainsi que les particularités qui la définissent seront présentées. Ce chapitre combine les éléments présentés lors des derniers chapitres pour qu'il soit possible de calculer le prix de différents types d'obligations convertibles, i.e vanille, rachetable, revendable ou bien rachetable et revendable.

### 4.1 Hypothèses

Le modèle pour le calcul des prix d'obligations se place principalement sous les hypothèse du modèle de *Black-Scholes*, [BS73] , c'est-à-dire que

- la volatilité du sous-jacent ainsi que du taux d'intérêt est supposée constante et connue ;
- l'action de la compagnie ne verse pas de dividende ;
- il n'y a pas de coût de transactions, d'impôts ni de taxes ;
- il n'y a aucune limite à prêter ou emprunter au taux sans risque ;
- il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

En plus de ces hypothèses, il est important d'en poser quelques-unes supplémentaires :

- il n'y a pas de délai de transactions, i.e. si la compagnie décide de racheter l'obligation, il n'y a pas de délai auquel les détenteurs ont habituellement

droit, la même hypothèse s'applique aussi aux détenteurs pour leur option de conversion ou de revente ;

- le sous-jacent est défini par (3.7) et le taux d'intérêt par (3.10) ;
- la corrélation entre les deux mouvements browniens reste constante à travers la vie de l'obligation.

Certaines de ces hypothèses, i.e. l'élimination des différents délais avant de pouvoir convertir, racheter ou revendre l'obligation, sont posées dans le but de simplifier l'écriture de l'algorithme. Ces hypothèses ne sont pas supposées changer grandement les prix calculés d'obligations. L'algorithme qui sera présenté peut très facilement s'adapter aux délais de transactions (voir par exemple [BBKL07]).

De plus, il est aussi important de mentionner que, comme la plupart des algorithmes de programmation dynamique, le temps a été discrétisé ce qui implique qu'il n'est possible d'exercer les différentes optionalités de l'obligation qu'aux dates d'observation. Cela vient bien rejoindre le côté pratique puisqu'en réalité il n'est pas possible d'exercer ce type d'options de manière continue.

## 4.2 Procédure générale

L'algorithme servira à calculer le prix d'une obligation en  $t = 0$  dénoté  $v_0(x_0, r_0)$  où  $x_t$  est égal au logarithme népérien de la valeur du sous-jacent et est régi par l'EDS (3.8). Le tout consiste à calculer une grille de valeur du sous-jacent à chaque instant de discrétisation  $t$  et la méthodologie présentée se rapprochera grandement de la méthodologie générale présentée à la section 2.3 (p. 15).

### 4.2.1 Constitution de l'algorithme

L'algorithme se base sur la deuxième approche proposé dans [SIL12]. Quelques modifications ont été apportées pour notre première approche et des modifications supplémentaires ont été faites pour la deuxième approche qui sera présentée à la section 4.3 (p. 46).

La procédure proposée pour le calcul de prix d'obligations est basée sur la construction d'une grille d'observation du log sous-jacent et du taux d'intérêt sans risque.

La première étape consiste à choisir les extremums pour chacune des deux variables et on suppose donc que la probabilité de sortir du domaine créé par ces intervalles,  $[x_{min}, x_{max}] \times [r_{min}, r_{max}]$ , est quasi-nulle.

Donc, supposons que l'on souhaite connaître la valeur de l'obligation convertible à  $t_m$  pour toutes les valeurs de la grille. Étant donné les équations (2.1) et (2.4), on a montré plus tôt que l'essentiel du travail consiste à calculer :

$$v_{t_m}^{hold}(x_{t_m}, r_{t_m}) = P(t_m, t_{m+1}) \mathbb{E}^{t_{m+1}} [v_{t_{m+1}}(x, r) | \mathcal{F}_{t_m}]$$

et qui revient à calculer l'intégrale double suivante :

$$v_{t_m}^{hold}(x_{t_m}, r_{t_m}) = P(t_m, t_{m+1}) \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} v_{t_{m+1}} f_{X_{t_m}, R_{t_m}}(x, r) dx dr.$$

Puisqu'une formule fermée est connue pour les obligations zéro-coupon sous le modèle de taux d'intérêt de Vasicek, il n'est nécessaire que de travailler sur l'intégrale.

#### Approximation de $v_{t_{m+1}}$

Puisque nous procédons récursivement, la valeur de l'obligation est connue en  $t_{m+1}$  sur tous les points de la grille. Les points de la grille sont choisis de sorte à être les points de Gauss-Lobatto pour qu'il soit ensuite possible d'utiliser les Transformées de Fourier Rapides (*TFR*) pour calculer les coefficients spectraux.

On choisit  $N + 1$  points pour la variable  $X_t$  et  $M + 1$  pour  $R_t$ . Soit

$$\{x_i : 0 < 1 < \dots < i < \dots < N\}$$

et

$$\{r_j : 0 < 1 < \dots < j < \dots < M\}$$

respectivement les points de Gauss-Lobatto des variables  $x$  et  $r$  qui sont donc positionnés de la manière suivante :

$$x_i = \frac{1}{2} \left( x_{max} + x_{min} - (x_{max} - x_{min}) \cos \left( \frac{\pi i}{N} \right) \right) \quad (4.1)$$

$$r_j = \frac{1}{2} \left( x = r_{max} + r_{min} - (r_{max} - r_{min}) \cos \left( \frac{\pi j}{M} \right) \right). \quad (4.2)$$

Les polynômes de Tchebychev à 2 variables sont alors utilisés pour approximer la fonction valeur  $v_{t_{m+1}}$

$$v_{t_{m+1}}(x, r) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M C_{k,l} T_k(c_1 + d_1 x) T_l(c_2 + d_2 r) \quad (4.3)$$

où les paramètres  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$  et  $d_2$  sont définis par (3.31).

Les coefficients spectraux sont déterminés en utilisant la fonction valeur évaluée aux points définis par (4.1) et (4.2) et en utilisant la méthode présentée à la section 3.3.2.

Donc, en prenant la forme définie par (4.3) et en l'utilisant avec l'espérance de l'expression (4.1) on obtient que la valeur de détermination de l'obligation aux points de la grille  $(x_i, r_j)$  est :

$$\begin{aligned} v_{t_m}^{hold}(x_i, r_j) &= P(t_m, t_{m+1} | R_{t_m} = r_j) \mathbb{E}^{t_{m+1}} [v_{t_{m+1}}(x, r) | \mathcal{F}_{t_m}] \\ &\approx P(t_m, t_{m+1} | R_{t_m} = r_j) \mathbb{E}^{t_{m+1}} \left[ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M C_{k,l} T_k(c_1 + d_1 x) \times \right. \\ &\quad \left. T_l(c_2 + d_2 r) | \mathcal{F}_{t_m} \right] \\ &= P(t_m, t_{m+1} | R_{t_m} = r_j) \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M C_{k,l} \mathbb{E}^{t_{m+1}} [T_k(c_1 + d_1 x) \times \\ &\quad T_l(c_2 + d_2 r) | \mathcal{F}_{t_m}] \\ &= P(t_m, t_{m+1} | R_{t_m} = r_j) \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M C_{k,l} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [T_k(c_1 + d_1 x) \times \\ &\quad T_l(c_2 + d_2 r) f_{X_{t_m}=x_i, R_{t_m}=r_j}(x, r)] dx dr \\ &= P(t_m, t_{m+1} | R_{t_m} = r_j) \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M C_{k,l} D_{k,l}(x_i, r_j) \end{aligned} \quad (4.4)$$

où

$$D_{k,l}(x_i, r_j) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[ T_k(c_1 + d_1 x) T_l(c_2 + d_2 r) f_{X_{tm}=x_i, R_{tm}=r_j}(x, r) \right] dx dr. \quad (4.5)$$

Il est possible à partir de quelques changements de variables de simplifier l'expression (4.5). Posons premièrement

$$\begin{aligned} \epsilon^x &= \frac{x - \mu_X(x_i)}{\sigma_X(x_i)}; \\ \epsilon^r &= \frac{r - \mu_R(r_j)}{\sigma_R(r_j)}; \\ d\epsilon^x &= \frac{1}{\sigma_X} dx \\ d\epsilon^r &= \frac{1}{\sigma_R} dr \\ \epsilon_+^x(x_{max}) &= \frac{x_{max} - \mu_X(x_i)}{\sigma_X(x_i)}; \\ \epsilon_-^x(x_{min}) &= \frac{x_{min} - \mu_X(x_i)}{\sigma_X(x_i)}; \\ \epsilon_+^r(r_{max}) &= \frac{r_{max} - \mu_R(r_j)}{\sigma_R(r_j)}; \\ \epsilon_-^r(r_{min}) &= \frac{r_{min} - \mu_R(r_j)}{\sigma_R(r_j)}. \end{aligned}$$

En utilisant la fonction de densité conjointe gaussienne proposé par le théorème 3.2.1, la double intégrale se résume à :

$$\begin{aligned} D_{k,l}(x_i, r_j) &= \int_{\epsilon_-^x(x_{min})}^{\epsilon_+^x(x_{max})} \int_{\epsilon_-^r(r_{min})}^{\epsilon_+^r(r_{max})} \left[ T_k(c_1 + d_1 (\mu_X(x_i) + \epsilon^x \sigma_X(x_i))) \times \right. \\ &\quad T_l(c_2 + d_2 (\mu_R(r_j) + \epsilon^r \sigma_R(r_j))) \times \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} \times \\ &\quad \left. \exp\left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left( (\epsilon^x)^2 + (\epsilon^r)^2 - 2\rho \epsilon^x \epsilon^r \right)\right) \right] d\epsilon^x d\epsilon^r. \quad (4.6) \end{aligned}$$

**Proposition 4.2.1.** *Il est possible de simplifier (4.6) en posant les variables sui-*

vantes :

$$\begin{aligned}\tilde{c}_1 &= -\frac{\epsilon_+^x + \epsilon_-^x}{\epsilon_+^x - \epsilon_-^x}; \\ \tilde{d}_1 &= \frac{2}{\epsilon_+^x - \epsilon_-^x}; \\ \tilde{c}_2 &= -\frac{\epsilon_+^r + \epsilon_-^r}{\epsilon_+^r - \epsilon_-^r}; \\ \tilde{d}_2 &= \frac{2}{\epsilon_+^r - \epsilon_-^r};.\end{aligned}$$

Ce qui amène la forme suivante :

$$\begin{aligned}D_{k,l}(x_i, r_j) &= \int_{\epsilon_-^x(x_{min})}^{\epsilon_+^x(x_{max})} \int_{\epsilon_-^r(r_{min})}^{\epsilon_+^r(r_{max})} \left[ T_k(\tilde{c}_1 + \tilde{d}_1 \epsilon^x) T_l(\tilde{c}_2 + \tilde{d}_2 \epsilon^r) \times \right. \\ &\quad \left. \frac{\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\epsilon^x)^2 + (\epsilon^r)^2 - 2\rho\epsilon^x\epsilon^r)\right)}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \right] d\epsilon^x d\epsilon^r. \quad (4.7)\end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $c_1, d_1, c_2$  et  $d_2$  définis par (3.31) et  $\tilde{c}_1, \tilde{d}_1, \tilde{c}_2$  et  $\tilde{d}_2$  définis par (4.7).

On commence à travailler avec le polynôme de Tchebychev qui dépend de  $x$  et on remplace les valeurs de  $c_1$  et  $d_1$  :

$$\begin{aligned}T_k(c_1 + d_1(\mu_X(x_i) + \epsilon^x \sigma_X(x_i))) &= T_k\left(-\frac{x_{max} + x_{min}}{x_{max} - x_{min}} + \frac{2}{x_{max} - x_{min}}(\mu_X + \epsilon^x \sigma_X)\right) \\ &= T_k\left(-\frac{(x_{max} - \mu_X) + (x_{min} - \mu_X)}{x_{max} - x_{min}} + \frac{2\epsilon\sigma_X}{x_{max} - x_{min}}\right) \\ &= T_k\left(-\frac{\frac{x_{max} - \mu_X}{\sigma_X} + \frac{x_{min} - \mu_X}{\sigma_X}}{\frac{x_{max} - x_{min}}{\sigma_X}} + \frac{\frac{2\epsilon\sigma_X}{\sigma_X}}{\frac{x_{max} - x_{min}}{\sigma_X}}\right) \\ &= T_k\left(-\frac{\epsilon_+^x + \epsilon_-^r}{\frac{x_{max} - \mu_X + \mu_X - x_{min}}{\sigma_X}} + \frac{2\epsilon}{\frac{x_{max} - \mu_X + \mu_X - x_{min}}{\sigma_X}}\right) \\ &= T_k\left(-\frac{\epsilon_+^x + \epsilon_-^r}{\epsilon_+^x - \epsilon_-^x} + \frac{2\epsilon}{\epsilon_+^x - \epsilon_-^x}\right) \\ &= T_k(\tilde{c}_1 + \tilde{d}_1 \epsilon)\end{aligned}$$

Les termes  $\tilde{c}_2$  et  $\tilde{d}_2$  sont obtenus par la même démarche.  $\square$

En résumé, on a que la valeur de détention à  $t_m$ , i.e.  $v_{t_m}^{hold}(x_i, r_j)$  est donnée par les équations (4.4) et (4.7).

Une des méthodes pour calculer ces valeurs serait :

1. évaluer la matrice des coefficients spectraux  $C_{k,l}$  en utilisant les valeurs de l'obligation à  $t_{m+1}$  ;
2. pour chaque couple de la grille  $(x_i, r_j)$  à  $t_m$ , calculer l'intégrale  $D_{k,l}(x_i, r_j) \forall k$  et  $l$  ;
3. calculer la double somme (4.4) ;
4. multiplier la valeur de la double somme par  $P(t_m, t_{m+1} | R_{t_m} = r_j)$  ;
5. répéter les étapes 2 à 4 pour tous les couples de la grille.

Le problème avec la méthode présentée est que  $(N + 1) \times (M + 1)$  doubles intégrales doivent être calculées à chaque pas de temps. Le calcul de cette double intégrale en utilisant les quadratures pose un problème puisqu'elles sont lentes à converger. De plus, il est possible d'utiliser la propriété de récurrence des polynômes de Tchebychev pour construire un algorithme rapide, mais il est discuté dans [SER09] que l'utilisation de la récurrence peut amener des explosions numériques, i.e. que l'accumulation de petites erreurs amène des prix non-raisonnables.

C'est pour cette raison que [SIL12] propose d'enlever la dépendance de la double intégrale  $D_{k,l}(x_i, r_j)$  au couple  $(x_i, r_j)$  de la grille et de plutôt en faire dépendre le coefficient  $C_{k,l}$  qui devient alors  $\tilde{C}_{k,l}(x_i, r_j)$ . En fait, comme il est possible de remarquer, la double intégrale ne dépend du couple  $(x_i, r_j)$  que de par les bornes d'intégration. L'argument que [SIL12] propose est qu'en prenant des bornes d'intégrations assez larges on s'assure que l'intervalle va contenir les mouvements les plus probables des variables aléatoires.

La manière pour transférer la dépendance au couple  $(x_i, r_j)$  est de travailler avec deux grilles de points, c'est-à-dire une grille extérieure qui est fixe (la même que l'on a présenté plus tôt) et une grille d'interpolation dont les bornes vont varier en fonction du couple de points  $(x_i, r_j)$ .

### Construction de la grille d'interpolation

Pour la sous-grille, les points de Gauss-Lobatto seront de nouveau utilisés pour permettre d'utiliser les *TFR*. C'est pour cette raison qu'il est préférable que ce soit  $C_{k,l}$  qui dépende de  $(x_i, r_j)$ ; exécuter  $(N + 1) \times (M + 1)$  calculs de matrices des coefficients spectraux à l'aide des *TFR* est beaucoup plus rapide que de calculer le même nombre de doubles intégrales avec l'utilisation de quadratures.

Les bornes de  $D_{k,l}(x_i, r_j)$  sont définies par  $\epsilon_-^x(x_i)$ ,  $\epsilon_+^x(x_i)$ ,  $\epsilon_-^r(r_j)$  et  $\epsilon_+^r(r_j)$ . Ces bornes doivent être fixées pour que la probabilité que le vecteur de loi gaussienne bivariée sorte de cet intervalle soit quasi-nulle, par exemple, prendre les bornes à 6 écarts-types serait acceptable. Donc, la forme pour  $D_{k,l}$  est alors :

$$D_{k,l} = \int_{\epsilon_-^x}^{\epsilon_+^x} \int_{\epsilon_-^r}^{\epsilon_+^r} \left[ T_k(\tilde{c}_1 + \tilde{d}_1 \epsilon^x) T_l(\tilde{c}_2 + \tilde{d}_2 \epsilon^r) \times \frac{1}{2\pi \sqrt{(1 - (\rho(x, r))^2)}} \times \exp\left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}((\epsilon^x)^2 + (\epsilon^r)^2 - 2\rho \epsilon^x \epsilon^r)\right) \right] d\epsilon^x d\epsilon^r. \quad (4.8)$$

La nouvelle forme d'approximation pour la valeur de détention de l'équation (4.4) au point  $(x_i, r_j)$  est alors définie par :

$$v_{t_m}^{hold}(x_i, r_j) \approx P(t_m, t_{m+1} | R_{t_m} = r_j) \sum_{k=0}^{\eta} \sum_{l=0}^{\zeta} \tilde{C}_{k,l}(x_i, r_j) D_{k,l} \quad (4.9)$$

où  $\eta + 1$  et  $\zeta + 1$  représentent le nombre de points pour chacune des variables sur la sous-grille.

Le choix des bornes de l'intégrale doit être conséquent avec la sous-grille d'interpolation. Cette grille d'interpolation, comme nous l'avons déjà mentionné, dépend du couple  $(x_i, r_j)$  à  $t_m$  de la grille extérieure.

La grille d'interpolation est construite de manière à fixer les bornes pour que soit prises en compte les bornes d'intégration de (4.8). Les bornes de la grille d'interpo-

lation sont alors définies par :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{min}(x_i, r_j) &= \mu_X(x_i, r_j) - \epsilon_-^x \sigma_X(x_i); \\
\tilde{x}_{max}(x_i, r_j) &= \mu_X(x_i, r_j) + \epsilon_+^x \sigma_X(x_i); \\
\tilde{r}_{min}(r_j) &= \mu_R(r_j) - \epsilon_-^r \sigma_R(r_j); \\
\tilde{r}_{max}(r_j) &= \mu_R(r_j) - \epsilon_+^r \sigma_R(r_j).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

À noter qu'il est préférable de choisir les valeurs  $\epsilon$  pour qu'elles soient opposées i.e.  $\epsilon_- = -\epsilon_+$ .

Une fois les bornes de la grille d'interpolations calculées, les  $(\eta + 1) \times (\zeta + 1)$  points de la grille utilisées sont définis par

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_p(x_i, r_j) &= \frac{1}{2} \left( \tilde{x}_{max} + \tilde{x}_{min} - (\tilde{x}_{max} - \tilde{x}_{min}) \cos \left( \frac{\pi p}{\eta} \right) \right); \\
\tilde{r}_q(r_j) &= \frac{1}{2} \left( \tilde{r}_{max} + \tilde{r}_{min} - (\tilde{r}_{max} - \tilde{r}_{min}) \cos \left( \frac{\pi q}{\zeta} \right) \right);
\end{aligned} \tag{4.11}$$

où  $p \in \{0, 1, \dots, \eta\}$  et  $q \in \{0, 1, \dots, \zeta\}$ .

Un des problèmes soulevés en utilisant cette méthode est que les valeurs de l'obligation à  $t_{m+1}$  ne sont connues qu'aux points de la grille extérieure et, comme il a été possible de le constater, les points de la grille d'interpolation ne sont pas nécessairement les mêmes. Il est possible de pallier ce problème en effectuant une première approximation par les polynômes de Tchebychev sur les valeurs connues de la grille extérieure et d'utiliser cette approximation pour ensuite interpoler les valeurs nécessaires à la sous-grille, i.e la grille d'interpolation.

Par ailleurs, un autre problème survient en utilisant l'interpolation, i.e. que l'on ne connaît que les points à l'intérieur des bornes de la grille externe et qu'à certains couples de points de la grille d'interpolation, ces derniers peuvent sortir des bornes. Pour résoudre ce problème, [SIL12] parvient à imposer certaines conditions aux bornes de la grille extérieure pour s'assurer que les bornes de la grille d'interpolation

soient toujours à l'intérieur, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{min}(x_i, r_j) &\geq x_{min}, \forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \ \& \ \forall j \in \{0, 1, \dots, M\}; \\
\tilde{x}_{max}(x_i, r_j) &\leq x_{max}, \forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \ \& \ \forall j \in \{0, 1, \dots, M\}; \\
\tilde{r}_{min}(r_j) &\geq r_{min}, \forall j \in \{0, 1, \dots, M\}; \\
\tilde{r}_{max}(r_j) &\leq r_{max}, \forall j \in \{0, 1, \dots, M\}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Cependant, il n'est pas possible de trouver une valeur pour  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $r_{min}$  et  $r_{max}$  qui vont satisfaire ces conditions aux bornes. Cela est dû au fait que la variable aléatoire  $X_t$  suit un mouvement brownien arithmétique et qu'elle dépend en tout temps de  $R_t$ . Certaines conditions sont satisfaites, mais au même moment d'autres conditions ne peuvent plus être respectées.

Deux choix s'offrent pour résoudre ce problème : soit de forcer les bornes d'interpolations à être égales aux bornes de la grille extérieure si elles sortent de ces dernières ou bien de laisser la grille d'interpolation comme elle est et de poser une hypothèse d'extrapolation pour les points qui sont à l'extérieur de la grille externe. Il est primordial de ne pas utiliser les polynômes d'interpolation pour extrapoler à l'extérieur de la grille, il est connu que d'utiliser ces polynômes pour extrapoler peut causer de graves problèmes numériques. Puisque les polynômes peuvent être de degré très élevé, il est commun de voir la valeur des polynômes exploser à l'extérieur de la région interpolée. Nous proposons donc d'utiliser la deuxième méthode étant donné les caractéristiques du type de produit calculé, c'est-à-dire que les nombreuses conditions d'exercice amènent des prix relativement plus stables aux bornes et donc les hypothèses posées forment de meilleures approximations.

C'est un total de 8 cas qui doivent être considérés :

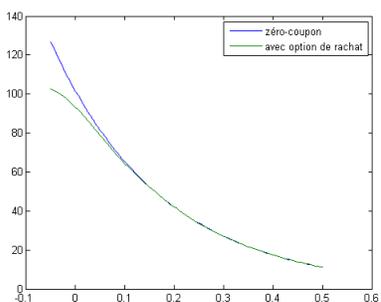
- $\tilde{x}_p > x_{max}$  &  $\tilde{r}_q > r_{max}$  ;
- $\tilde{x}_p > x_{max}$  &  $\tilde{r}_q < r_{min}$  ;
- $\tilde{x}_p < x_{min}$  &  $\tilde{r}_q > r_{max}$  ;
- $\tilde{x}_p < x_{min}$  &  $\tilde{r}_q < r_{min}$  ;
- $\tilde{x}_p \geq x_{max}$  &  $\tilde{r}_q \in [r_{min}, r_{max}]$  ;
- $\tilde{x}_p \leq x_{min}$  &  $\tilde{r}_q \in [r_{min}, r_{max}]$  ;
- $\tilde{x}_p \in [x_{min}, x_{max}]$  &  $\tilde{r}_q \geq r_{max}$  ;
- $\tilde{x}_p \in [x_{min}, x_{max}]$  &  $\tilde{r}_q \leq r_{min}$ .

### Extrapolation

Prenons un des cas les plus fréquents pour les obligations convertibles, i.e. le cas où une option de rachat et de revente sont ajoutées à l'option de conversion. La valeur de ce type d'obligation, dû aux nombreuses options qu'elle contient, ne peut varier grandement. Nous allons premièrement présenter l'impact des options de manière séparée, c'est-à-dire que nous considérons que l'effet simple et non les effets croisés entre options. Voici les principaux effets des différentes optionalités sur une obligation vanille :

- l'option de rachat de l'obligation donne une assurance à l'émetteur, car si les taux d'intérêt diminuent, et donc la valeur de l'obligation augmente, l'émetteur va racheter l'obligation pour émettre une nouvelle dette à plus faible coût (taux plus bas) : cela a pour effet de mettre un plafond à la valeur de l'obligation ; de plus cette option amène de la convexité négative pour des faibles taux, mais toujours une convexité positive pour les taux élevés (la figure 4.1 montre la convexité négative qu'apporte l'ajout d'une option de rachat à une obligation zéro-coupon) ;

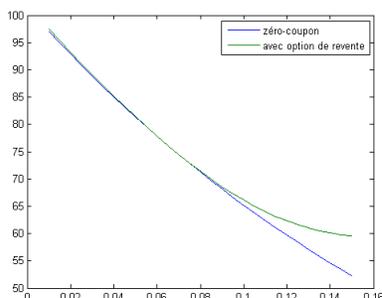
FIGURE 4.1 – Obligation zéro-coupon avec et sans option de rachat (montant de rédemption de 100\$ et d'échéance 1 an)



- l'option de revente quant à elle implique une assurance au détenteur de l'obligation, car si les taux d'intérêt du marché augmentent, la valeur du marché de l'obligation diminue. Donc, le détenteur exercera son option de revente à un prix fixe pour profiter de la force des taux d'intérêt et donc d'accorder un prêt (acheter une obligation) à un taux plus avantageux pour lui. De plus, l'option de revente, contrairement à l'option de rachat, «ajoute» de la convexité

à l'obligation pour des taux élevés (voir figure 4.2) ;

FIGURE 4.2 – Obligation zéro-coupon avec et sans option de revente (montant de rédemption de 100\$ et d'échéance 1 an)



- l'option de conversion est aussi une assurance pour le détenteur de l'obligation, mais ne dépend pas seulement du taux d'intérêt comme les options de rachat et de revente, i.e. qu'elle agit de manière intrinsèque à une non diminution de la valeur de l'obligation dans le cas que les taux augmentent si bien sûr la valeur de l'action de l'entreprise ne diminue pas. Cette option amène alors un deuxième plancher à la valeur de l'obligation, mais implique aussi que si la valeur de l'action de la compagnie se valorise beaucoup et les taux d'intérêts restent stable alors la valeur de l'obligation n'est théoriquement pas bornée ;

De plus, il est important de noter que les options de rachat et de revente sont aussi étroitement liées à la valeur de l'action de la compagnie lorsqu'il y a aussi une option de conversion. Lorsque l'action de la compagnie prend de la valeur, cela fait nécessairement augmenter le prix de l'obligation convertible par ailleurs, la compagnie ne désire pas que la valeur au marché de sa dette ne prenne trop d'importance alors elle exercera son option de rachat ce qui crée un plafond artificiel au prix de l'obligation convertible. De plus, si le prix de l'action diminue, l'obligation aura tendance à diminuer pour retrouver sa valeur sans option de conversion.

Étant donné les nombreuses contraintes qui affectent la valeur d'une obligation convertible dans le cas où elle contient aussi des options de rachat et de revente, nous posons comme hypothèse qu'à l'extérieur de la grille, la valeur du droit contingent est égale à sa valeur à la borne. Donc, elle est constante à l'extérieur de la grille. Cette hypothèse n'est pas trop simpliste dû aux caractéristiques de ce type

d'obligation mentionné précédemment. Puisque les bornes sont choisies de sorte à englober un domaine très large, les variations dans la valeur de l'obligation aux valeurs extrêmes se veulent, en théorie, minimales. En termes mathématiques, cela est résumé dans l'énoncé 4.2.1.

**Énoncé 4.2.1.** *Soit les hypothèses d'extrapolations suivantes :*

- $\tilde{x}_p \geq x_{max} \ \& \ \tilde{r}_q \in [r_{min}, r_{max}] \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v(x_{max}, \tilde{r}_q) ;$
- $\tilde{x}_p \leq x_{min} \ \& \ \tilde{r}_q \in [r_{min}, r_{max}] \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v(x_{min}, \tilde{r}_q) ;$
- $\tilde{x}_p \in [x_{min}, x_{max}] \ \& \ \tilde{r}_q \geq r_{max} \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v(\tilde{x}_p, r_{max}) ;$
- $\tilde{x}_p \in [x_{min}, x_{max}] \ \& \ \tilde{r}_q \leq r_{min} \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v(\tilde{x}_p, r_{min}) ;$
- $\tilde{x}_p > x_{max} \ \& \ \tilde{r}_q > r_{max} \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v(x_{max}, r_{max}) ;$
- $\tilde{x}_p > x_{max} \ \& \ \tilde{r}_q < r_{min} \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v(x_{max}, r_{min}) ;$
- $\tilde{x}_p < x_{min} \ \& \ \tilde{r}_q > r_{max} \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v(x_{min}, r_{max}) ;$
- $\tilde{x}_p < x_{min} \ \& \ \tilde{r}_q < r_{min} \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v(x_{min}, r_{min}) ;$

De plus, il est possible de poser la même hypothèse dans le cas où l'obligation n'est que convertible et rachetable. Cela est dû au fait que l'option de revente agit comme plancher lorsque les taux d'intérêts diminuent, mais dans le cas où les taux diminuent et l'action de la compagnie reste assez stable, cela a aussi pour effet d'agir comme valeur plancher. Bien que ce soit une approximation, nous croyons qu'elle ne devrait pas avoir un trop gros impact sur la valeur finale de l'obligation. Donc, les valeurs extrapolées seront les mêmes que celles montrés ci-haut.

Dans le cas où l'obligation n'est que convertible, nous allons aussi poser l'hypothèse que la valeur du droit contingent est constante à l'extérieur de la grille externe, mais avec comme seule différence lorsque  $\tilde{x}_i$  est plus grand en valeur que  $x_{max}$ . Puisque l'obligation n'est que convertible, pour les grandes valeurs du sous-jacent, il est certain que le détenteur va exercer son option de conversion, puisque l'obligation vanille ne vaut presque rien relativement à l'option de conversion.

- Soit  $\tilde{x}_p \geq x_{max}$  &  $\tilde{r}_q \in [r_{min}, r_{max}] \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v^{ex}(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q)$  ;
- Soit  $\tilde{x}_p \geq x_{max}$  &  $\tilde{r}_q < r_{min} \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v^{ex}(\tilde{x}_p, r_{min})$  ;
- Soit  $\tilde{x}_p \geq x_{max}$  &  $\tilde{r}_q > r_{max} \rightarrow v(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = v^{ex}(\tilde{x}_p, r_{max})$  ;

### 4.2.2 Algorithme

Maintenant que les bases ont été jetées, il est possible d'énoncer en détail l'algorithme. Comme il a déjà été mentionné, il est important de commencer par définir les extremums des variables  $X_t$  et  $R_t$  tout au long de la durée de vie de l'obligation. Les bornes  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $r_{min}$  et  $r_{max}$  peuvent être choisies de manière totalement arbitraire, mais il est par ailleurs préférable de prendre en compte la distribution des variables. Nous proposons donc de poser les bornes à 6 écarts-types de la moyenne, i.e.

$$\begin{aligned} x_{min} &= \mu_X(x_0, r_0, T) - 6 \times \sigma_X(x_0, T) & r_{min} &= \mu_R(r_0, T) - 6 \times \sigma_R(r_0, T) \\ x_{max} &= \mu_X(x_0, r_0, T) + 6 \times \sigma_X(x_0, T) & r_{max} &= \mu_R(r_0, T) + 6 \times \sigma_R(r_0, T). \end{aligned}$$

De plus, il est essentiel de poser le nombre de points  $N$  et  $M$  utilisés pour chacune des variables, les expériences numériques peuvent aider à déterminer des valeurs acceptables. Après avoir fixé ces nombres, les points de la grille externe peuvent être déterminés à partir de (4.1) et (4.2).

La double intégrale (4.8) doit alors être calculée puisqu'elle ne dépend pas du couple  $(x_i, r_j)$  de la grille auquel on se trouve et sa valeur est la même à chaque pas de temps si ces derniers sont constants. De plus, les bornes  $\epsilon_-^x$ ,  $\epsilon_+^x$ ,  $\epsilon_-^r$  et  $\epsilon_+^r$  de l'intégrale doivent être fixées. Une fois les bornes choisies, elles sont aussi utilisées pour créer la sous-grille. Il est primordial que les dimensions de la sous-grille restent constantes à travers le temps pour ne pas avoir à recalculer de nouvelles valeurs de (4.8) puisque leurs dimensions sont les mêmes.

De plus, il est possible d'utiliser le fait que la matrice constituée des valeurs de  $D_{k,l}$ , lorsque  $\zeta$  et  $\eta$  sont égaux, est symétrique. Donc, on propose d'utiliser un sous-grille de taille  $\eta \times \zeta$  où  $\eta = \zeta = \xi$ . Ainsi le temps de calcul requis pour calculer la matrice

$D_{k,l}$  est presque coupé de moitié en utilisant le fait que  $D_{k,l} = D_{l,k}$ .

Puisque l'on se trouve à l'échéance de l'obligation la matrice de valeur,  $v_T$ , est connue en chacun des points de la grille. Nous allons donc présenter l'itération du passage de  $t_M = T$  à  $t_{M-1}$ .

1. À partir de la matrice de valeurs  $v_T$ , exécuter une interpolation de Tchebychev pour extraire le coefficient  $C_{k,l}$  en utilisant l'équation :

$$v_{t_M}(x_i, r_j) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M C_{k,l} T_k(c_1 + d_1 x_i) T_l(c_2 + d_2 r_j); \quad (4.13)$$

2. Pour le point  $(x_i, r_j)$ , construire la sous-grille d'interpolation ;
3. Calculer les valeurs de l'obligation pour chacun des points de la sous-grille en utilisant (4.13) ;
4. Exécuter à nouveau une interpolation de Tchebychev pour cette sous-grille propre à  $(x_i, r_j)$  :

$$v_{t_M}(\tilde{x}_p, \tilde{r}_q) = \sum_{k=0}^{\xi} \sum_{l=0}^{\xi} \tilde{C}_{k,l}(x_i, r_j) T_k(\tilde{c}_1 + \tilde{d}_1 \tilde{x}_p) T_l(\tilde{c}_2 + \tilde{d}_2 \tilde{r}_q); \quad (4.14)$$

5. Calculer la valeur de détention en utilisant (4.9), i.e.

$$v_{t_{M-1}}^{hold}(x_i, r_j) = P(t_{M-1}, t_M | R_{t_M} = r_j) \sum_{k=0}^{\xi} \sum_{l=0}^{\xi} \tilde{C}_{k,l}(x_i, r_j) \times D_{k,l}; \quad (4.15)$$

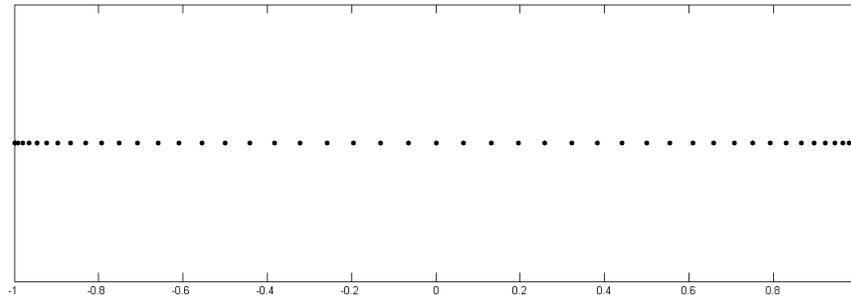
6. Les étapes 2 à 5 doivent alors être répétées pour tous  $(x_i, r_j)$  où  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$  et  $j \in \{0, 1, \dots, M\}$ .
7. Lorsque la matrice  $v_{t_{M-1}}^{hold}$  est complétée, la matrice  $v_{t_{M-1}}$  doit être déterminé en utilisant les caractéristiques d'exercices de l'obligation présentées à la section 2.1.2 (p. 12).

Une fois la matrice  $v_{t_{M-1}}$  calculée, on réitère les étapes 1 à 7, mais en utilisant cette dernière comme matrice connue et on calcule les valeurs de la matrice  $v_{t_{M-2}}$ . On continue jusqu'à ce que  $v_{t_0}$  soit calculée.

### 4.3 Deuxième approche

Une importante caractéristique des points de Gauss-Lobatto doit être considérée lors de leur utilisation : ils ne sont pas distribués uniformément sur l'intervalle, mais sont plutôt concentrés sur les extrémités (voir figure 4.3). Cela amène le problème

FIGURE 4.3 – Distribution des points de Gauss-Lobatto - 48 points

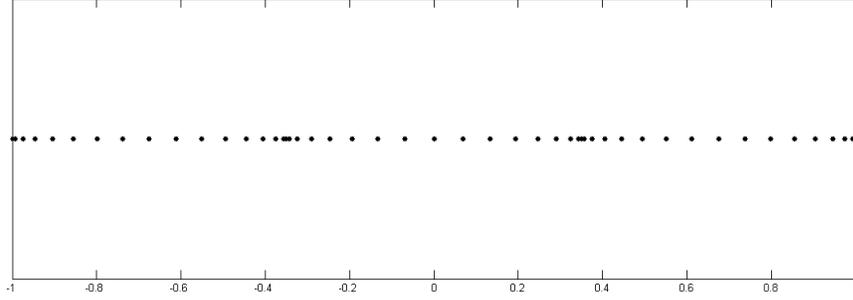


que si l'intervalle est centré autour de la monnaie de l'obligation (*at-the-money*) et que les bornes de l'intervalle sont arbitrairement éloignées du centre pour s'assurer que les variables n'en sortent pas, il n'y a alors que peu de points qui viennent expliquer la convexité autour de la monnaie et beaucoup aux bornes où la fonction est généralement linéaire.

Une des manières de pallier cette faille est de séparer l'intervalle initial d'interpolation en plusieurs sections. Nous proposons de couper chaque intervalle des deux variables en trois parties. La Figure 4.4 montre avec 16 points par intervalle la distribution de ces derniers. Les intervalles sont déterminés de la manière suivante :  $[-1, -0.1]$ ,  $[-0.1, 0.1]$  et  $[0.1, 1]$ . Ainsi le nombre de points utilisés est le même, mais il est possible d'aller placer plus de points à l'endroit où la fonction fluctue le plus.

Dans le cas présent, ce n'est que la grille extérieure qui sera séparée. Nous proposons pour l'intervalle des deux variables d'être séparé à  $\pm 2$  écarts-types. Pour une distribution gaussienne, la probabilité de rester à l'intérieur de 2 écarts-types est

FIGURE 4.4 – Distributions des points de Gauss-Lobatto - 3 intervalles



d'environ 0,95. La grille extérieure est alors définie par les bornes suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_b^{-6} &= \mu_X(x_0, r_0, T) - 6 \times \sigma_X(x_0, T) & ; & & r_b^{-6} &= \mu_R(r_0, T) - 6 \times \sigma_R(r_0, T) \\
 x_b^{-2} &= \mu_X(x_0, r_0, T) - 2 \times \sigma_X(x_0, T) & ; & & r_b^{-2} &= \mu_R(r_0, T) - 2 \times \sigma_R(r_0, T) \\
 x_b^{+2} &= \mu_X(x_0, r_0, T) + 2 \times \sigma_X(x_0, T) & ; & & r_b^{+2} &= \mu_R(r_0, T) + 2 \times \sigma_R(r_0, T) \\
 x_b^{+6} &= \mu_X(x_0, r_0, T) + 6 \times \sigma_X(x_0, T) & ; & & r_b^{+6} &= \mu_R(r_0, T) + 6 \times \sigma_R(r_0, T).
 \end{aligned}$$

Cela crée alors les intervalles suivants :

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &: \left[ x_b^{+2}, x_b^{+6} \right] & ; & & \phi_1 &: \left[ r_b^{+2}, r_b^{+6} \right] \\
 \psi_2 &: \left[ x_b^{-2}, x_b^{+2} \right] & ; & & \phi_2 &: \left[ r_b^{-2}, r_b^{+2} \right] \\
 \psi_3 &: \left[ x_b^{-6}, x_b^{-2} \right] & ; & & \phi_3 &: \left[ r_b^{-6}, r_b^{-2} \right].
 \end{aligned}$$

En séparant les intervalles de la manière précédente, on va créer 9 régions différentes à l'intérieur de la grille et donc autant de régions d'interpolations. Les points à l'intérieur de chacune des régions sont définis par les points de Gauss-Lobatto avec comme bornes ceux délimitant l'intervalle.

Il est alors nécessaire, pour exécuter une interpolation de Tchebychev, de calculer le même nombre de coefficients spectraux que de régions. La fonction valeur est maintenant approximée de la manière suivante :

$$v_{tm}(x_i, r_j) \approx \sum_{g=1}^3 \sum_{h=1}^3 \left[ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^m C_{k,l}^{\psi_g, \phi_h} T_k \left( c_1^{\psi_g} + d_1^{\psi_g} x_i \right) T_l \left( c_2^{\phi_h} + d_2^{\phi_h} r_j \right) \right] \times \mathbb{1}_{\{x_i \in \psi_g\}} \times \mathbb{1}_{\{r_j \in \phi_h\}} \quad (4.16)$$

### Algorithme

L'algorithme est très similaire à ce qui a été présenté à la section 4.2.2. Comme il a été mentionné, la sous-grille d'interpolation n'a pas à être séparée, elle dépend du point de la grille extérieure où nous nous trouvons.

En résumé, ce n'est que la première étape de l'algorithme qui doit être changée, i.e. l'approximation initiale de  $v_{t_{m+1}}$  est maintenant calculée en utilisant (4.16). Cette nouvelle approximation sert à calculer les différents points de la sous-grille d'interpolation. De plus, il est important de noter que les hypothèses d'extrapolation restent les mêmes.

# Chapitre 5

## Résultats numériques

Ce chapitre présente une analyse de la convergence des deux algorithmes, proposés respectivement aux sections 4.2.2 et 4.3, ainsi que les résultats obtenus pour des obligations contenant plusieurs types d'options.

### 5.1 Convergence des algorithmes

Il est premièrement primordial de s'assurer que les algorithmes convergent vers une valeur connue. Pour ce faire, nous proposons premièrement de comparer la convergence des 2 approches au prix d'une obligation zéro-coupon et de, par la suite, les comparer les algorithmes aux résultats obtenus par [BBKL07].

#### 5.1.1 Obligation zéro-coupon

Malgré que les prix d'une obligation zéro-coupon n'est affecté que par le taux d'intérêt sans risque et non par la valeur de l'action d'une compagnie, nous allons utiliser comme référence ce prix qui a une forme fermée dans le modèle de taux d'intérêts de Vasicek [V77]. Cela permet de voir si les algorithmes convergent comme il devrait et comment cette convergence est affectée par le choix de la méthode.

Les tableaux 5.2 et 5.3 montrent les prix obtenus selon respectivement la première et la deuxième approche du prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance 5 ans. De

plus, l'erreur relative obtenue et le temps de calcul pour chacun des scénarios considérés sont aussi présentés. Le tableau 5.1 résume les caractéristiques de l'obligation.

TABLE 5.1 – Paramètres pour le modèle de Vasicek

$\alpha$	0.44178462
$\theta$	0.04347029
$\sigma_r$	0.13264223
$T = 5$	

La variable  $n_1$  représente le nombre de points par variable de la sous-grille d'interpolation, la variable  $M$  représente le nombre de points pour la variable  $R_t$  pour la première approche tandis que pour la deuxième approche, elle représente le nombre de points par région ; dans le cas présent, puisqu'il y a trois régions d'interpolations, il y a  $3 \times M$  points pour  $R_t$ .

Comme il est possible de constater, la convergence est très similaire pour les deux algorithmes. Par contre, nous croyons que la deuxième approche est plus efficace lorsqu'il y a deux variables d'états en jeu. De plus, on peut voir que le deuxième algorithme prend plus de temps pour calculer un prix ce qui est normal. Pour que l'algorithme fonctionne correctement, nous devons poser que  $N = 1$  ; ce qui fait que chaque région contient 1 point, donc une grille totale extérieure de taille  $3 \times (3M)$  (une grille 3 fois la taille de celle de la première approche).

### 5.1.2 Comparaison à des obligations gouvernementales rachetables

[BBKL07], comme il l'a été mentionné dans le chapitre de la revue de la littérature, propose un algorithme de programmation avec approximation linéaire pour le calcul d'obligations vanilles (aucune option), rachetables et avec option de revente. Nos résultats sont comparés à ceux rapportés dans [BBKL07] puisque les auteurs utilisent aussi le modèle de Vasicek pour la modélisation des taux d'intérêt.

#### Obligations vanilles

Les prix calculés sont pour une obligation qui paye des coupons annuels au taux de 4.25 % et qui a une échéance de 20.172 ans. Les paramètres pour le modèle

TABLE 5.2 – Convergence du prix d’une obligation zéro-coupon - 1ère approche

		1ère approche			
		$\alpha = 0.44178462, \theta = 0.04347029, \sigma_r = 0.13264223, T = 5$			
		$n_1$			
M		4	8	12	24
12	prix	0.740443	0.740489	0.740544	0.740528
	err. rel	(-1.607e-04)	(-9.845e-05)	(-2.349e-05)	(-4.553e-05)
	temps	14.06s	15.67s	17.52s	41.89s
18	prix	0.740556	0.740559	0.740563	0.740567
	err. rel	(-7.102e-06)	(-2.845e-06)	(2.224e-06)	(7.907e-06)
	temps	14.95s	16.46s	19.16s	47.89s
24	prix	0.740550	0.740562	0.740564	0.740561
	err. rel	(-1.500e-05)	(6.834e-07)	(3.803e-06)	(-1.354e-06)
	temps	15.69s	18.57s	22.28s	56.66s
36	prix	0.740493	0.740561	0.740561	0.740561
	err. rel	(-9.230e-05)	(-3.263e-07)	(-1.241e-06)	(-7.849e-07)
	temps	16.94s	20.72s	26.98s	71.50s
48	prix	0.740421	0.740560	0.740561	0.740561
	err. rel	(-1.891e-04)	(-1.707e-06)	(-6.160e-07)	(-5.850e-07)
	temps	19.36s	23.97s	33.15s	95.10s
72	prix	0.740718	0.740555	0.740561	0.740561
	err. rel	(2.109e-04)	(-9.031e-06)	(-6.992e-07)	(-7.293e-07)
	temps	21.31s	29.66s	45.35s	135.40s
96	prix	0.740578	0.740572	0.740561	0.740561
	err. rel	(2.245e-05)	(1.440e-05)	(-1.179e-06)	(-7.147E-07)
	temps	24.56s	36.74s	60.78s	182.31s

de Vasicek sont les mêmes que ceux utilisés pour les obligations zéro-coupon de la section précédente. Il n’est pas nécessaire de spécifier les paramètres pour la dynamique du sous-jacent puisque ce dernier n’affecte pas le prix de l’obligation.

Le tableau 5.4 montre les résultats obtenus selon les deux approches présentées plus tôt. Comme il est possible de constater, les deux versions de l’algorithme convergent lorsque l’obligation contient aussi des coupons et la convergence se fait avec des grilles de tailles assez petites.

La figure 5.1 montre la convergence de la deuxième approche de l’algorithme pour l’obligation vanille présentée plus haut avec  $r_0 = 0.05$ . Comme on peut voir la convergence est obtenue avec une grille d’interpolation assez petite, avec  $n_1 = 12$  le

TABLE 5.3 – Convergence du prix d’une obligation zéro-coupon - 2e approche

		2e approche				
		$\alpha = 0.44178462, \theta = 0.04347029, \sigma_r = 0.13264223, T = 5$				
		$t_0 = 0$	$T = 5$	$r_0 = 0.05$	$\sigma_r = 0.15$	$\theta = 0.06$
M	$n_1$	4	8	12	24	
	4	prix	0.741662	0.740674	0.741198	0.741194
err. rel.		(1.486E-03)	(1.523E-04)	(8.591E-04)	(8.545E-04)	
temps		67.32s	73.90s	87.06s	143.28	
6	prix	0.740544	0.740715	0.740409	0.740571	
	err. rel.	(-2.404E-05)	(2.072E-04)	(-2.054E-04)	(1.269E-05)	
	temps	81.14s	90.40s	102.39s	153.18s	
8	prix	0.740291	0.740560	0.740586	0.740529	
	err. rel.	(-3.647E-04)	(-1.406E-06)	(3.259E-05)	(-4.452E-05)	
	temps	94.96s	103.86s	117.57s	175.06s	
12	prix	0.740653	0.740563	0.740563	0.740561	
	err. rel.	(1.231E-04)	(2.016E-06)	(2.219E-06)	(-6.815E-07)	
	temps	118.78s	137.96s	152.81s	226.26s	
16	prix	0.740632	0.740559	0.740561	0.740561	
	err. rel.	(9.472E-05)	(-3.717E-06)	(-7.440E-07)	(-1.038E-06)	
	temps	129.90s	147.44s	160.79s	255.84s	
24	prix	0.740568	0.740567	0.740561	0.740561	
	err. rel.	(8.753E-06)	(6.827E-06)	(-1.225E-06)	(-7.053E-07)	
	temps	145.48s	162.11s	185.66s	332.90s	
32	prix	0.740559	0.740561	0.740560	0.740561	
	err. rel.	(-3.751E-06)	(-1.173E-06)	(-2.614E-06)	(-1.067E-06)	
	temps	165.89s	186.19s	217.08s	422.15s	

prix de l’obligation est précis à la quatrième décimale.

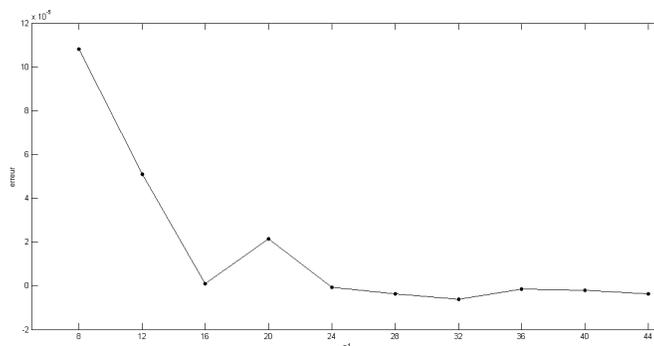
FIGURE 5.1 – Progression de l’erreur en fonction de  $n_1$ 

TABLE 5.4 – Valeurs d’obligations vanilles

$\alpha = 0.44178462, \theta = 0.04347029, \sigma_r = 0.13264223, T = 5$			
$r_0$	1ère approche ( $m = 24, n_1 = 12$ )	2e approche ( $m = 24, n_1 = 12$ )	BBKL07 $p = 2400$
0.01	0.92742	0.92742	0.92742
0.02	0.90895	0.90895	0.90895
0.03	0.89088	0.89088	0.89088
0.04	0.87318	0.87318	0.87319
0.05	0.85587	0.85587	0.85587
0.06	0.83892	0.83892	0.83892
0.07	0.82233	0.82233	0.82233
0.08	0.80609	0.80609	0.80609
0.09	0.79019	0.79019	0.79020
0.10	0.77463	0.77464	0.77464

### Obligations rachetables

Un autre tableau des résultats présent dans [BBKL07] contient les prix d’obligations rachetables qui a les caractéristiques suivantes : l’échéance est à  $T = 20.172$  avec des coupons annuels au taux de 4.25% dont le premier à être payé est à  $t_1 = 0.172$ . L’obligation peut être rachetée à chaque année à partir de  $t_{11} = 10.172$  aux prix donnés par le tableau 5.5.

TABLE 5.5 – Prix de rachat

$C_{11} = 1.025$
$C_{12} = 1.020$
$C_{13} = 1.015$
$C_{14} = 1.010$
$C_{15} = 1.005$
$C_{16} = \dots = C_{21} = 1.000$

Le tableau 5.6 montre les valeurs de l’obligation rachetable pour différentes valeurs de taux d’intérêts initiales. Comme il est possible de le constater, les prix que nous obtenons sont légèrement décalés de ceux de [BBKL07]. Cela est principalement dû aux hypothèses que nous avons posées au départ : l’élimination de tout délai de transaction et de décision ; et l’effet des coupons courus a été supprimé. Ces différences d’hypothèses, comme les résultats le démontrent, produisent une légère différence

qui est tout à fait acceptable. La convergence de l'algorithme peut quand même être observée lorsqu'une option de rachat est ajoutée.

TABLE 5.6 – Valeurs d'obligations rachetables

$\alpha = 0.44178462, \theta = 0.04347029, \sigma_r = 0.13264223, T = 20.172, coupon = 0.0425$			
$r_0$	1ère approche ( $m = 24, n_1 = 12$ )	2e approche ( $m = 24, n_1 = 12$ )	BBKL07 $p = 1200$
0.01	0.83504	0.83504	0.84285
0.02	0.81866	0.81867	0.82630
0.03	0.80262	0.80263	0.81009
0.04	0.78693	0.78694	0.79423
0.05	0.77157	0.77157	0.77871
0.06	0.75654	0.75653	0.76351
0.07	0.74182	0.74181	0.74862
0.08	0.72740	0.72739	0.73406
0.09	0.71328	0.71328	0.71980
0.10	0.69946	0.69947	0.70583

Comme il est possible de constater aux tableaux 5.4 et 5.6, les deux versions de l'algorithme convergent bien vers des résultats connus. Cela est rassurant et permet de croire que la méthode va converger si l'on ajoute une variable d'état supplémentaire, i.e. la valeur de l'action de la compagnie émettrice. Nous devons comparer les résultats à ceux de [BBKL07] puisqu'il n'y a pas de résultats dans la littérature qui proviennent d'une modélisation similaire à la nôtre pour des obligations. Par ailleurs, il serait possible d'en faire la comparaison avec des options d'achats européennes sur actions et avec taux d'intérêt stochastique ou aux obligations zéro-coupon sous le modèle de Vasicek à deux facteurs (forme fermée). Par contre en comparant aux deux produits mentionnés, nous ne considérons plus l'aspect américain de l'algorithme.

## 5.2 Analyse des résultats

Cette section fera la comparaison des résultats obtenus avec les deux algorithmes pour les obligations convertibles ainsi que les combinaisons possibles avec les options de rachat et de revente.

### 5.2.1 Résultats : obligations convertibles avec options de rachat et de revente

Cette section porte sur l'analyse des prix d'obligations convertibles obtenus lorsque sont ajoutées les options de rachat et de revente. La valeur de ce type d'obligation, comme il en a été brièvement discuté plus tôt, reste assez stable, i.e. elle ne peut sortir des bornes créées par les prix de rachat et de revente.

L'obligation calculée vient à échéance dans 5 ans avec valeur de rédemption de 1 et contenant des options de conversion, de rachat et de revente pouvant être exercées à n'importe quel moment 2 ans après l'émission. Les caractéristiques de l'obligation sont résumées au tableau 5.7. Les coupons sont semestriels.

TABLE 5.7 – Caractéristiques de l'obligation convertible considérée

taux de coupon	4.25%
$C_t$	0 si $t < 2$ ans 1.10 si $t \geq 2$ ans
$P_t$	0 si $t < 2$ ans 0.90 si $t \geq 2$ ans
$\gamma_t$	0 si $t < 2$ ans 0.3 si $t \geq 2$ ans

Les paramètres utilisés pour la dynamique de l'action de la compagnie et du taux d'intérêt sont donnés au tableau 5.8; il est bon de noter que les paramètres pour le taux d'intérêt sont les mêmes que ceux utilisés pour les résultats de la section précédente, i.e. la comparaison aux résultats de [BBKL07].

TABLE 5.8 – Paramètres de l'obligation convertible considérée

$r_t$	
$\alpha$	0.44178462
$\theta$	0.04347029
$\sigma_r$	0.13264223
$S_t$	
$\sigma_s$	0.15
$\rho$	0.3

Le tableau 5.9 montre l'évolution du prix de l'obligation en fonction de la taille de la grille extérieure. La taille de la grille intérieure (ou d'interpolation) reste constante à  $12 \times 12$ ; comme on l'a fait remarquer plus tôt, cette taille de grille donne de bons résultats.

TABLE 5.9 – Variations des prix de l'obligation convertible en fonction de la taille de la grille - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8

1ère approche		2e approche	
$r_0 = 0.05$		$S_0 = 100$	
$M \times N$	Prix	$M \times N$	Prix
$12 \times 12$	0.934656	$6 \times 6$	0.94107
$16 \times 16$	0.937531	$8 \times 8$	0.94323
$18 \times 18$	0.943645	$12 \times 12$	0.94313
$24 \times 24$	0.941990	$16 \times 16$	0.94336
$32 \times 32$	0.944290	$20 \times 20$	0.94438
$36 \times 36$	0.943549	$24 \times 24$	0.94317
$40 \times 40$	0.943130	$28 \times 28$	0.94300
$48 \times 48$	0.942884	$32 \times 32$	0.94315
$64 \times 64$	0.943079	$36 \times 36$	0.94307
$72 \times 72$	0.943038		
$80 \times 80$	0.943226		
$96 \times 96$	0.943027		

Il est possible de voir que le prix de l'obligation converge, mais est légèrement instable. Ce problème provient principalement du fait que la méthode suppose que l'obligation prend des valeurs constantes à l'extérieur de ses bornes. Pour résoudre ce problème, il faudrait utiliser de meilleures hypothèses d'extrapolations.

### Variations en fonction des valeurs initiales ( $R_0$ et $S_0$ )

Le tableau 5.10 contient le prix de l'obligation convertible pour la première et la deuxième méthode selon différentes valeurs initiales pour l'action de la compagnie et le taux d'intérêt. Il est à noter que, pour les deux approches, la grille d'interpolation est de taille  $n_1 = 12$ . De plus, le taux de conversion est changé pour  $\gamma = 0.65$ . Changer la valeur de  $\gamma$  a pour effet de faire varier davantage la valeur de l'obligation en fonction de  $S_0$  et il est donc plus facile de voir son effet graphiquement.

Les figures 5.2 et 5.3 montrent la surface de prix de l'obligation montré au tableau

TABLE 5.10 – Obligations convertible avec option de rachat et de revente - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8

1ère approche ( $N \times M = 40 \times 40$ )				
$r_0 \backslash S_0$	0.9	1.00	1.10	1.20
0.01	1.027	1.041	1.060	1.084
0.02	1.012	1.027	1.048	1.072
0.03	0.998	1.014	1.035	1.061
0.04	0.984	1.001	1.023	1.049
0.05	0.970	0.988	1.011	1.039
0.06	0.957	0.976	0.999	1.028
0.07	0.944	0.963	0.988	1.018
0.08	0.931	0.952	0.977	1.008
0.09	0.919	0.940	0.967	0.999
0.10	0.907	0.929	0.957	0.990
2e approche ( $N \times M = 20 \times 20$ )				
$r_0$	0.9	1.00	1.10	1.20
0.01	1.025	1.039	1.058	1.081
0.02	1.011	1.025	1.045	1.069
0.03	0.996	1.012	1.032	1.058
0.04	0.982	0.999	1.020	1.046
0.05	0.969	0.986	1.008	1.036
0.06	0.956	0.974	0.997	1.025
0.07	0.943	0.961	0.986	1.015
0.08	0.930	0.950	0.975	1.005
0.09	0.918	0.938	0.964	0.996
0.10	0.906	0.927	0.954	0.987

5.10 sous la deuxième méthode. Il est possible de constater que les caractéristiques principales des obligations sont respectées, c'est-à-dire que le prix augmente lorsque  $R_t$  diminue. De plus, pour des valeurs élevées de  $R_t$ , l'obligation vanille ne vaut presque rien ce qui implique que ce sont principalement les autres options qui entrent en jeu. Il est aussi possible de voir que l'obligation se comporte comme une option d'achat sur action, ce qui est normal puisque c'est ce qui vaut le plus. Pour des valeurs élevées de  $S_t$  l'obligation devient plus linéaire et se comporte de plus en plus comme une action de compagnie.

Les figures 5.4 et 5.5 montrent respectivement la surface de prix selon plusieurs taux d'intérêts initiaux spécifiques et valeurs initiales de l'action. Ces figures permettent une meilleure visualisation de la surface de prix.

FIGURE 5.2 – Surface de prix ( $M = N = n_1 = 12$ ) - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8

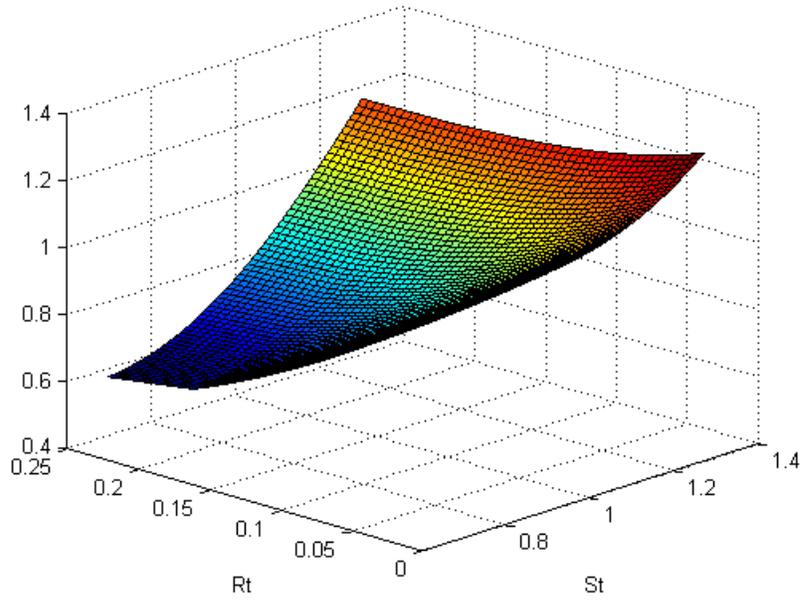


FIGURE 5.3 – Surface de prix ( $M = N = n_1 = 12$ ) - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8

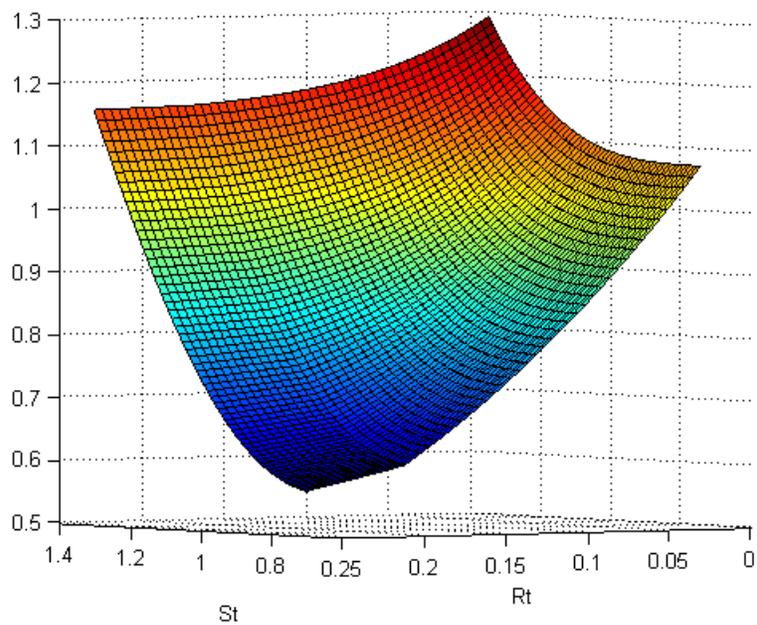


FIGURE 5.4 – Valeur de l'obligation ( $R_t$  fixe) - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8

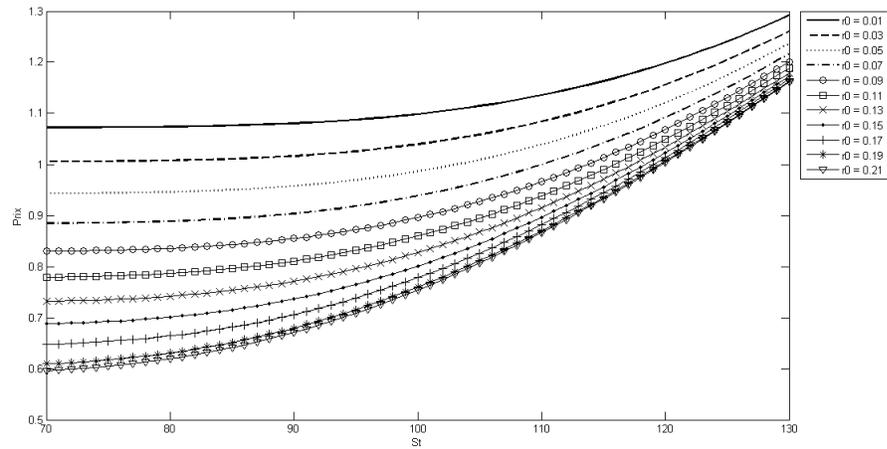
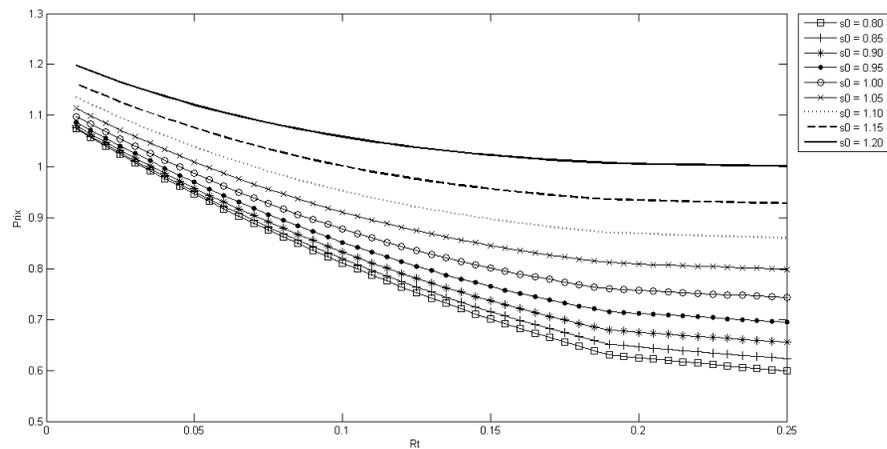


FIGURE 5.5 – Valeur de l'obligation ( $S_t$  fixe) - Les caractéristiques de l'obligation sont mentionnés aux tableaux 5.7 et 5.8



# Conclusion

Dans ce mémoire, on propose une nouvelle méthode pour l'évaluation d'obligations convertibles pouvant aussi contenir des options de rachat et de revente. L'utilisation d'un programme dynamique couplé aux approximations spectrales est nouvelle pour résoudre le problème d'évaluation d'obligations convertibles. De plus, la deuxième approche apporte de nouveaux éléments aux méthodes de programmation dynamique et, plus précisément, à leur utilisation pour l'évaluation d'obligations convertibles, c'est-à-dire qu'elle combine les méthodes d'interpolations plus conventionnelles et les éléments finis.

Nous avons montré au dernier chapitre que les deux versions de l'algorithme convergent vers des solutions connues et que les prix obtenus respectent bien les nombreuses caractéristiques des obligations. La deuxième version de l'algorithme dispose mieux les points lors de l'approximation de la fonction valeur et permet à tous et à chacun de modifier les paramètres de la grille extérieure, i.e. le nombre de régions et leurs délimitations.

Quelques avenues intéressantes n'ont pas été explorées dans ce mémoire. La méthode peut s'adapter à tout modèle dont la fonction de densité est connue, i.e. qu'elle n'a pas besoin d'être gaussienne comme nous l'avons fait. La méthode est inspirée de [SIL12]; nous avons pris une fonction de densité conjointe du taux d'intérêt et de l'action de la compagnie tandis que [SIL12] utilise une fonction de densité définissant les deux facteurs d'un modèle de taux d'intérêt (Vasicek a deux facteurs ou Gaussien ++). Il pourrait alors être intéressant de voir comment réagirait l'algorithme en termes de temps de calcul et de précision si le modèle de taux d'intérêt est changé par un Vasicek deux facteurs par exemple. La méthode fonctionnerait toujours puisque la densité conjointe de ce modèle est aussi gaussienne. Les modèles à deux facteurs sont connus pour mieux modéliser les différentes formes de courbe

possibles. De plus, la méthode pourrait aussi être adaptée au modèle de Hull-White. Cela donnerait une reproduction parfaite de la structure à terme initiale.

Comme nous l'avons mentionné, il n'est pas nécessaire que la fonction de densité conjointe de l'action de la compagnie et du taux d'intérêt soit gaussienne. Une piste de recherche intéressante pourrait être de tenter de trouver un modèle de taux d'intérêt qui, combiné à un modèle Variance-Gamma pour l'action de la compagnie, permettrait l'obtention d'une forme fermée pour la fonction de probabilité jointe.

Finalement, il serait intéressant de voir si un autre type d'approximation ne serait pas aussi efficace, comme par exemple les splines cubiques et de ne pas seulement approximer la fonction valeur, mais la fonction valeur multipliée par la fonction de densité. En connaissant à l'avance le polynôme, la double intégrale pourrait se calculer de manière analytique et ainsi éviter de passer par les quadratures.

# Bibliographie

- [AKW08] AMMANN, M., KIND, A., WILDE, C. (2008) “Simulation-based pricing of convertible bonds”, *Journal of Empirical Finance*, vol. 15, no 2.
- [AFV03] AYACHE, E., FORSYTH, P.A., VETZAL, K.R. (2003) “The valuation of convertible bonds with credit risk”, *Journal of Derivatives*, vol. 11, no 1.
- [BK11] BALLOTTA, L., KYRIAKOU, I. (2011), “Price convolution for convertible bonds in a jump diffusion setting with stochastic interest rates”, *SSRN - WP*.
- [BBH03] BARONE-ADESI, G., BERMUDEZ, A., HATGIOANNIDES, J. (2003), “Two-factor convertible bonds valuation using the method of characteristics/finite elements”, *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol. 27, no 10.
- [BBKL07] BEN AMEUR, H., BRETON, M., KAROUI, L., L'ÉCUYER, P. (2007), “A dynamic programming approach for pricing options embedded in bonds”, *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol. 31, no 7.
- [BBW02] BENNINGA, S., BJÖRK, T., WIENER, Z. (2002), “On the use of numeraires in option pricing”, *Journal of Derivatives*, vol. 10, no 2.
- [BS73] BLACK, F., SCHOLES, M. (1973), “The pricing of options and corporate liabilities”, *Journal of Political Economy*, vol. 81, no 3.
- [BS77] BRENNAN, M.J., SCHWARTZ, E.S. (1977), “Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion”, *The Journal of Finance*, vol. 32, no 5.
- [BF11] BRETON, M., DE FRUTOS, J. (2011), “Approximation of dynamic programs”, *Handbook of Mathematical Finance*.
- [BM06] BRIGO, D., MERCURIO, F., “Interest Rate Models - Theory and Practice : with Smile, Inflation and Credit”, Springer, 2006.
- [CRR79] COX, J.C., ROSS, S.A., RUBINSTEIN, M. (1979), “Option pricing : A simplified approach”, *Journal of Financial Economics*, vol. 7, no 3.

- [DS99] DUFFIE, D., SINGLETON, K. (1999), "Modeling term structure of defaultable bonds", *Review of Financial Studies*, vol. 12, no 4.
- [FOX] FOX, L., PARKER, I. B., "Chebychev polynomials in numerical analysis", *Oxford University Press*, 1968.
- [FRU05] DE FRUTOS, JAVIER, "A finite element method for two-factor convertible bonds", *GERAD - Numerical Methods in Finance*, Springer, 2005.
- [G03] GARCÍA, DIEGO (2003), "Convergence and biases of Monte Carlo estimates of American options prices using a parametric exercise rule", *Journal of Economic Dynamic & Control*, vol. 27, no 10.
- [GS94] GOLDMAN SACHS (1994), "Valuing convertible bonds as derivatives", *Quantitative Strategies Research Notes*.
- [HP96] HO, THOMAS S. Y., PFEFFER, DAVID M. (1996) "Convertible bonds : Model, value attribution, and analytics", *Financial Analysts Journal*, vol. 52, no 5.
- [HW90] HULL, J., WHITE, A. (1990), "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", *The Review of Financial Studies*, vol. 3, no 4.
- [HW94a] HULL, J., WHITE, A. (1994), "Branching Out", *Risk*, vol. 7, no 7.
- [ING77a] INGERSOLL, JONATHAN E. JR (1977), "A contingent-claims valuation of convertible securities", *Journal of Financial Economics*, vol. 4, no 3.
- [ING77b] INGERSOLL, JONATHAN E. JR (1977), "An Examination of Corporate Call Policies on Convertible Securities", *The Journal of Finance*, vol. 32, no 2.
- [LS01] Longstaff, F.A., Schwartz, E.S. (2001), "Valuing american options by simulation : a simple least-squares approach", *The Review of Financial Studies*, vol. 14, no 1.
- [LYB04] Lvov, D., Yigitbasiglu, A.B., El Bachir, N. (2004) "Pricing convertible bonds by simulation", *SSRN - WP*.
- [M74] MERTON, ROBERT C. (1974), "On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rate", *Journal of Finance*, vol. 29, no 2.
- [RIV] RIVLIN, THEODORE J., "The Chebychev polynomials", *John Wiley & Sons, Inc.*, 1974.
- [SER09] SERGHINI IDRISI, SAAD (2009), "Tarification d'options sous GARCH par des méthodes spectrales d'approximation en programmation dynamique", *Mémoire de maîtrise - HEC Montréal*.

- [SIL12] SILIADIN, YAOVI GASSESE (2012), “A dynamic programming approach using Tchebychev interpolation for pricing bonds with embedded options under the two-factor gaussian model”, *Mémoire de maîtrise - Tunisia Polytechnic School*.
- [SHRE] SHREVE, STEVEN E., “Stochastic Calculus for Finance I and II”, *Springer*, 2004.
- [TKN01] TAKAHASHI, A., KOBAYASHI, T., NAKAGAWA, N. (2001), “Pricing convertible bonds with default risk : a Duffie-Singleton approach”, *The Journal of Fixed income*, vol. 11.
- [TF98] TSIVERIOTIS, K., FERNANDES, C.(1998), “Valuing convertible bonds with credit risk”, *The Journal of Fixed Income*, vol. 8, no 2.
- [V77] VASICEK, O.(1977), “An Equilibrium Characterization of the Term Structure”, *Journal of Financial Economics*, vol. 5, no 2.