

HEC MONTRÉAL

Évaluation d'un produit dérivé dont le sous-jacent est un
indice de survie de la population canadienne

par

Amélie Favaro

Sciences de la gestion
Finance

HEC MONTRÉAL

Évaluation d'un produit dérivé dont le sous-jacent est un
indice de survie de la population canadienne

par

Amélie Favaro

Sciences de la gestion
Finance

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences
(M. Sc.)*

Mai 2011

© Amélie Favaro, 2011

**DÉCLARATION DE L'ÉTUDIANTE, DE L'ÉTUDIANT
ÉTHIQUE EN RECHERCHE AUPRÈS DES ÊTRES HUMAINS**

Recherche sans collecte directe d'informations

Cette recherche n'impliquait pas une collecte directe d'informations auprès de personnes (exemples : entrevues, questionnaires, appels téléphoniques, groupes de discussion, tests, observations participantes, communications écrites ou électroniques, etc.)

Cette recherche n'impliquait pas une consultation de documents, de dossiers ou de banques de données existants qui ne font pas partie du domaine public et qui contiennent des informations sur des personnes.

Titre de la
recherche :

Évaluation d'un produit dérivé dont le sous-jacent est un indice de survie de la population canadienne

Nom de l'étudiant : Favaro Amélie

Signature :

Date :

2011-04-30

Table des matières

TABLE DES MATIÈRES	II
LISTE DES TABLEAUX	IV
LISTE DES FIGURES	V
REMERCIEMENTS	VI
I- INTRODUCTION	1
II- SPÉCIFICITÉ DE LA MORTALITÉ.....	2
A) ÉVOLUTION DE LA MORTALITÉ.....	2
B) RISQUE DE LONGÉVITÉ	3
C) AGENTS CHERCHANT À DIMINUER LEUR EXPOSITION	5
D) CONTREPARTIES POTENTIELLES	6
1) Les Compagnies d'assurance	6
2) Le gouvernement.....	6
3) Les marchés financiers	7
E) LE RECOURS AUX MARCHÉS FINANCIERS.....	8
III- LITTÉRATURE	10
A) PRODUITS DE LONGÉVITÉ PROPOSÉS.....	10
1) Obligations de longévité	10
2) Swaps de survie.....	11
3) Futures.....	12
4) Options, Caps, Floors	12
B) MODÈLES DE PRÉVISION DE LA MORTALITÉ.....	13
1) Types de modèles existants	13
2) Modèles en temps discret	14
3) Modèles en temps continu.....	15
C) MÉTHODES D'ÉVALUATION EN MARCHÉ INCOMPLET	16
1) Principe d'utilité équivalente	16
2) Méthode du CAPM et du CCPAM	17
3) Approche du ratio de Sharpe.....	18
4) Transformation de Wang.....	19
IV- MODÈLE THÉORIQUE.....	21
A) OBJECTIFS DE CETTE ÉTUDE	21
B) FORWARDS ET SWAPS VANILLE DE SURVIE.....	22
1) Principe d'évaluation des forwards et swaps vanille de survie	22
2) Caractéristiques des forwards et swaps de survie évalués.....	23
3) Évaluation d'un FS et d'un SVS	26
C) CALCUL DE L'INDICE DE SURVIE ANTICIPÉ	28
D) CALCUL DE L'INDICE DE SURVIE SIMULÉ.....	30
1) Estimation du modèle de Lee et Carter	30
2) Prévisions à l'aide du modèle de Lee et Carter	33

E)	CALCUL DE L'INDICE DE SURVIE SIMULÉ ET AJUSTÉ POUR LE RISQUE.....	36
V-	APPLICATION DU MODÈLE.....	39
A)	CALCUL DE L'INDICE DE SURVIE ANTICIPÉ.....	39
B)	ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE LEE ET CARTER	41
1)	Données.....	41
2)	Estimation des paramètres.....	42
3)	Modélisation des $\{kt\}$	46
C)	ESTIMATION DES FONCTIONS DE DISTRIBUTION CUMULATIVES RELATIVES À L'INDICE DE SURVIE SIMULÉ	50
1)	Simulation des $\{kt\}$	50
2)	Calcul de l'indice de survie simulé	53
3)	Estimation des fonctions de distribution cumulatives	55
D)	ÉVALUATION DES SWAPS ET FORWARDS DE SURVIE	59
1)	Évaluation des forwards de survie	59
2)	Évaluation des swaps de survie.....	65
3)	Construction d'un swap de survie à partir de forwards.....	72
VI-	CONCLUSION	75
	ANNEXES	76
	BIBLIOGRAPHIE	109

Liste des tableaux

Table 1 : Table RP-2000 et facteurs d'amélioration AA pour les hommes et les femmes.....	39
Table 2 : Nombre de survivants anticipé.....	40
Table 3 : Paramètres $\{a_x\}$ calculés pour les hommes et les femmes canadiens....	42
Table 4 : Estimation des $\{b_x\}$ pour la population canadienne masculine et féminine.....	44
Table 5 : Modèles de séries temporelles testés pour la population masculine, et coefficients AIC et BIC associés.....	47
Table 6 : Modèles de séries temporelles testés pour la population féminine, et coefficients AIC et BIC associés.....	47
Table 7 : ISS moyen de 2010 à 2030.....	54
Table 8 : Quantiles des fonctions de distribution cumulatives des ISS.....	56
Table 9 : ISSAR selon différents scénarios d'évaluation des FS.....	60
Table 10 : Primes d'évaluation π des FS pour différents λ	62
Table 11 : Deuxième tranche de la prime (en PB) pour les FS.....	64
Table 12 : Corrélations entre l'ISS fin 2015, 2020, 2025, et 2030.....	66
Table 13 : Valeurs envisagées pour la prime de risque λ	67
Table 14 : β utilisés dans l'évaluation du SVS 10 ans.....	68
Table 15 : β utilisés dans l'évaluation du SVS 15 ans.....	68
Table 16 : β utilisés dans l'évaluation du SVS 20 ans.....	69
Table 17 : ISSAR selon différents scénarios d'évaluation du SVS 10 ans.....	69
Table 18 : ISSAR selon différents scénarios d'évaluation du SVS 15 ans.....	70
Table 19 : ISSAR selon différents scénarios d'évaluation du SVS 20 ans.....	70
Table 20 : Primes d'évaluation π pour les SVS sur la population masculine.....	71
Table 21 : Primes d'évaluation π pour les SVS sur la population féminine.....	72
Table 22 : Différence entre VA(Patte fixe) dans la situation 1 et la situation 2..	74

Liste des figures

Figure 1 : Spécificité de la mortalité.....	2
Figure 2 : Flux monétaires d'un FS de maturité 15 ans.....	24
Figure 3 : Flux monétaires d'un SVS de maturité 15 ans.....	25
Figure 4 : $\{k_t\}$ estimés pour les hommes et les femmes canadiens.....	43
Figure 5 : $\{k_t\}$ estimés et ré-estimés pour les hommes canadiens.....	45
Figure 6 : $\{k_t\}$ estimés et ré-estimés pour les femmes canadiennes.....	46
Figure 7 : Trajectoires simulées pour les $\{k_t\}$ de la population canadienne masculine.....	52
Figure 8 : Trajectoires simulées pour les $\{k_t\}$ de la population canadienne féminine.....	53
Figure 9 : ISA et ISS moyen de 2010 à 2030.....	55
Figure 10 : Fonctions de distribution cumulatives de l'ISS de la population masculine.....	57
Figure 11 : Fonctions de distribution cumulatives de l'ISS de la population féminine.....	58

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaite remercier ceux et celles qui ont rendu la réalisation de ce travail possible.

J'adresse tout d'abord mes plus sincères remerciements à mon directeur de mémoire, Martin Boyer, qui a su être d'excellents conseils tout au long de ma maîtrise.

Je remercie également mon codirecteur de mémoire, Lars Stentoft, pour l'aide précieuse qu'il m'a fournie dans le cadre de cette recherche.

Enfin, je souhaite remercier mes parents qui m'ont soutenu psychologiquement et financièrement tout au long de mes études.

I- INTRODUCTION

Le risque de longévité agrégé correspond à l'éventualité que les taux de mortalité observés pour une population et une année données soient inférieurs à ceux qui étaient anticipés par les actuaires. Certaines entités économiques, telles que les fonds de pensions, doivent alors verser plus de rentes qu'elles ne l'avaient initialement prévu. Afin de limiter l'impact de ces situations sur leurs finances, elles cherchent à se protéger contre le risque de longévité. Toutefois, en raison du caractère non diversifiable de ce dernier, les compagnies d'assurance sont réticentes à offrir ce type de couvertures. Une solution alternative consiste alors à développer des instruments financiers négociés en bourse, dont les flux monétaires dépendent d'indices de survie de la population considérée. Cependant, le marché est incomplet : il n'existe effectivement à ce jour aucun actif de mortalité transigé. Par conséquent, l'évaluation de ces produits de longévité nécessite l'estimation d'une prime de risque à partir de données de marché. Or, ces dernières sont quasi-inexistantes, puisque les quelques transactions réalisées à ce jour ont été effectuées de gré-à-gré.

La prime ne pouvant être calculée avec précisions, l'objectif principal de ce travail est d'étudier la sensibilité de l'évaluation des dérivés de longévité à celle-ci. Il devrait exister une relation positive entre la prime de risque et le prix de ces produits : plus le risque est perçu comme étant élevé par les investisseurs, plus la couverture devrait être coûteuse. Notre recherche permet de chiffrer la force de cette relation. Pour ce faire, nous évaluons à l'aide de la transformation de Wang des forwards et swaps de survie de différentes maturités, dont le sous-jacent est la mortalité de la population canadienne. À notre connaissance, il s'agit de la première étude de ce type portée sur le Canada, un pays pourtant fortement exposé au risque de longévité agrégé.

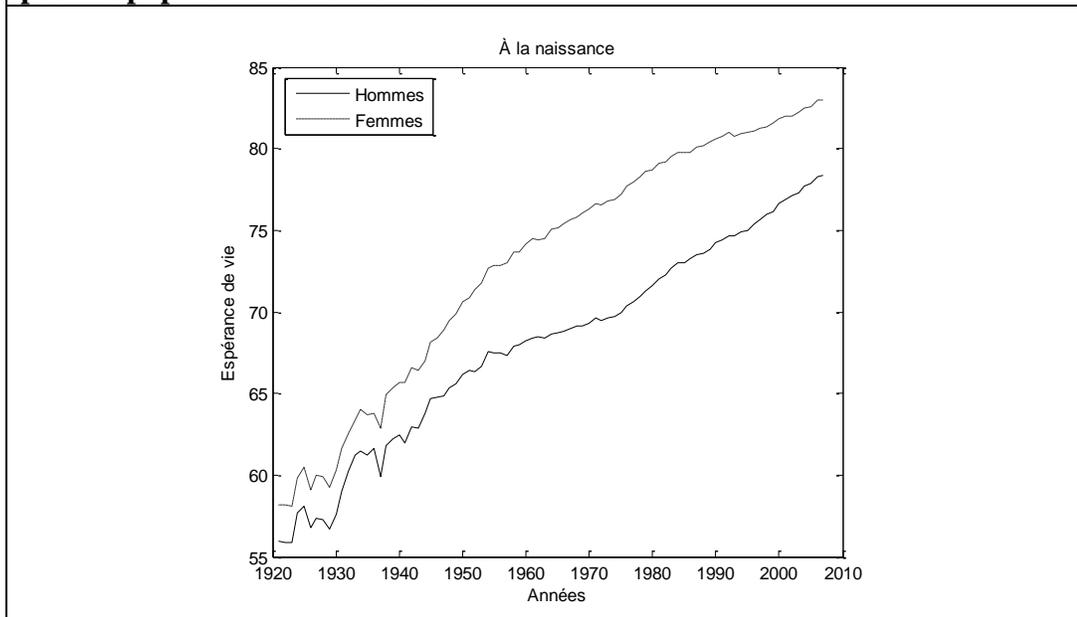
Ce rapport de recherche débute par un bref aperçu de la spécificité de la mortalité, ainsi que des écrits pertinents à notre étude. Le modèle d'évaluation est ensuite présenté puis appliqué au cas de la population canadienne.

II- SPÉCIFICITÉ DE LA MORTALITÉ

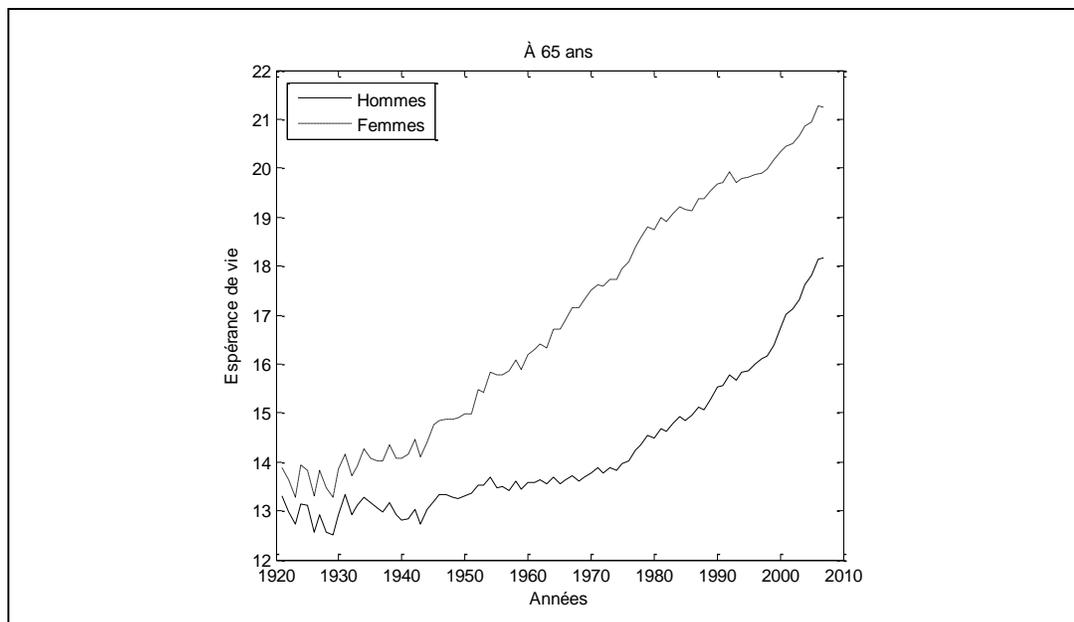
A) Évolution de la mortalité

Durant le XIXème et le XXème siècle, les taux de mortalité des pays développés ont considérablement diminué. Alors que l'espérance de vie d'un canadien de sexe masculin n'était que de 56 ans en 1921, elle était de plus de 78 ans en 2007. Sur la même période, l'espérance de vie d'une canadienne est passée de 58 ans à presque 83 ans. En outre, à partir de 1950, cet allongement de la durée de vie moyenne s'explique notamment par la progression de celle des personnes âgées de 65 ans et plus. La Figure 1 présente l'évolution de l'espérance de vie à la naissance et à 65 ans pour les hommes et les femmes canadiens de 1921 à 2008¹.

Figure 1 **Évolution de l'espérance de vie à la naissance et à 65 ans pour la population canadienne.**



¹ Données compilées à partir de la base de données Human Mortality Database pour le Canada



B) Risque de longévité

Les taux de mortalité suivent ainsi une tendance baissière depuis plus d'un siècle. Cependant, leur évolution demeure difficile à anticiper. En effet, il a été démontré que leurs diminutions ou augmentations suivent un processus stochastique. Par conséquent, les futurs taux de mortalité ne peuvent pas être prévus avec certitude ; cette difficulté est à la base du risque de longévité. Celui-ci s'observe à deux niveaux : individuel et agrégé. Ce premier correspond au fait qu'une personne puisse vivre plus longtemps que la moyenne de sa cohorte, une cohorte étant définie comme un groupe d'individus nés à une même période. Le risque de longévité agrégé (RLA), quant-à-lui, fait référence à la probabilité que l'espérance de vie observée d'une cohorte soit supérieure à celle qui était anticipée par les démographes et actuaires.

Le RLA peut être considéré comme un risque positif et négatif à la fois. Il s'agit d'un risque positif dans le sens où la population vit en moyenne de plus en plus longtemps, et ce, en raison de l'amélioration des conditions sanitaires et des progrès de la médecine. Toutefois, il s'agit d'un risque négatif d'un point de vue financier. En effet, les systèmes de retraite des pays développés, tels que les fonds de pension, versent généralement aux retraités une rente jusqu'à leur décès. Afin

de prévoir les montants totaux à payer, ils posent des anticipations sur les taux de mortalité agrégés. Lorsque le groupe d'individus couverts par le système vit en moyenne plus longtemps que ce qui était attendu, ce dernier se voit obliger de distribuer un montant plus important de rentes. Il est alors exposé au risque de manquer de capital pour subvenir à ses engagements financiers.

De plus, l'une des particularités du RLA est son caractère non-diversifiable. Milevsky, Promislow et Young (2006) ont étudié ce phénomène. Pour une période donnée, tant que le taux de mortalité moyen de la cohorte est déterminé, les décès individuels demeurent des variables aléatoires indépendantes. La Loi des Grands Nombres peut alors s'appliquer. Prenons l'exemple d'un fond de pension qui connaît les statistiques de mortalité de la population canadienne, mais ignore celles de son groupe de pensionnaires. Alors, plus son échantillon de population sera grand, plus ses statistiques de mortalité se rapprocheront de celles connues pour la population totale, et moins ses anticipations seront risquées. Au final, son risque de longévité sera minimisé.

Or, le taux de mortalité agrégé évolue, et de manière non totalement prévisible. Il n'est donc pas connu avec certitude. Dans ce cas-ci, la Loi des Grands Nombres ne s'applique pas, car les décès individuels ne sont plus des variables parfaitement indépendantes. Seule une évolution coordonnée des âges de décès peut effectivement permettre de modifier la mortalité agrégée. Les trépas individuels deviennent donc en partie corrélés. Dans cette situation, plus le fonds de pension couvre une partie importante de la population, plus il augmente son exposition au risque. En effet, en cas de diminution non anticipée de la mortalité agrégée, un groupe de taille plus grande implique un plus grand nombre de rentes non prévues à payer.

Par conséquent, le RLA est dit non diversifiable, et les divers systèmes de retraite peinent à s'en couvrir.

C) Agents cherchant à diminuer leur exposition

Quatre contreparties différentes supportent présentement le RLA au Canada : les gouvernements, les fonds de pension et les compagnies d'assurance.

Au Canada², le gouvernement fournit tout d'abord un régime de retraite aux employés du gouvernement et aux employés du secteur public. Par ailleurs, il offre deux programmes d'aide aux revenus pour les personnes âgées et retraitées aux rentrées d'argent considérées comme faibles : le programme de la Sécurité de la vieillesse, et le programme de Supplément de revenu garanti. Son exposition au risque de longévité est donc considérable.

Dans ce même pays, les compagnies sont exposées à travers les fonds de pension qu'elles offrent à leurs employés, et plus particulièrement ceux à prestations déterminées. En moyenne, en 2009, les fonds étaient sous capitalisés de 7%³.

Enfin, les compagnies d'assurance sont exposées au risque de longévité à travers les programmes d'annuité qu'elles offrent. Dans un contrat d'annuité jusqu'au décès, un individu échange un montant d'argent contre la garantie de recevoir périodiquement des revenus jusqu'à sa mort. Il se protège ainsi contre son risque de longévité individuel. L'assureur vend un grand nombre de contrats, et évalue leurs prix à l'aide de prévisions sur le taux de mortalité agrégé. Lorsque ses anticipations s'avèrent faussées, il devra effectuer davantage de versements qu'il ne l'anticipait, et n'aura pas vendu ses annuités à un prix suffisamment élevé.

Ces entités économiques peuvent chercher à transférer leur risque de longévité. Les groupes d'agents possiblement à même de supporter ce risque sont : les assureurs et réassureurs, le gouvernement, et les marchés financiers. Le rôle de ces deux premiers acteurs a été discuté en détails dans Brown et Orszag (2006) ; nous synthétisons ici quelques conclusions des auteurs.

²Site web *Le genre et la pauvreté*. <<http://www.genderandhealth.ca/en/modules/pauvrete/pauvrete-pauvreteetvieillessement-06.jsp?r=>>

³DBRS (Juin 2010), *Canadian Private Pension Plans in 2009 – Performance Maintained, Challenges Remain*, Industry Study.

D) Contreparties potentielles

1) Les Compagnies d'assurance

Les opérations des compagnies d'assurance se basent sur le principe de diversification. Or, tel qu'énoncé ci-dessus, le RLA n'est pas diversifiable. Par conséquent, les compagnies d'assurance sont réticentes à offrir des couvertures contre le risque de longévité. En effet, l'accepter dans leur bilan les oblige soit à maintenir un capital de réserve élevé et coûteux, soit à transférer le risque à des réassureurs, qui eux aussi préfèrent limiter leur exposition. À cela s'ajoute le problème de sélection adverse existant dans la vente de contrats de longévité : les agents prêts à acheter une couverture contre le RLA sont aussi ceux qui sont conscients que leur exposition à ce risque est forte.

Par conséquent, les compagnies d'assurance montrent de la réticence à émettre des produits de longévité. C'est pourquoi, elles le font uniquement à des prix très élevés, ce qui exacerbe le problème de sélection adverse. Toutefois la vente de ce type de produits peut leur permettre de se couvrir contre le risque de mortalité, auquel elles sont exposées dans les polices d'assurance vie. La possibilité d'un recours au système privé semble au final être limitée.

2) Le gouvernement

Tout d'abord, le gouvernement est le seul à pouvoir transférer le risque de longévité d'une génération à une autre. La richesse des jeunes cohortes est essentiellement composée de leur capital humain, tandis que celle des retraitées découle essentiellement de leur droit à la retraite. Ainsi, le gouvernement cherche à transférer le risque de longévité vers les nouvelles générations, plus à même de le supporter, en faisant par exemple augmenter la période de cotisation. Cependant, un problème se pose : le gouvernement transfère-t-il de façon optimale le risque ? Il a souvent été prouvé que les décisions de ce dernier sont davantage prises dans le but de satisfaire les votants actuels que dans celui d'optimiser le

bien-être futur de la société. Il reste donc à savoir si le gouvernement est capable de jouer convenablement ce rôle.

En outre, il pourrait également émettre des titres de dette, dont les coupons dépendraient du taux de survie observé pour la population. Les agents exposés au RLA achèteraient ces obligations dites de longévité pour se couvrir, ou bien les utiliserait pour calculer un indice du taux de mortalité agrégé. Toutefois, le RLA serait alors transféré au gouvernement, qui y est déjà fortement exposé. Ce type de dette ne ferait qu'augmenter le risque financier de l'État.

3) Les marchés financiers

Les marchés financiers constituent une troisième solution envisageable à la gestion du RLA. Celle-ci se fait alors à l'aide de produits financiers, dont les flux monétaires fluctuent en fonction d'un indice de survie (IS). Un IS fournit le nombre de survivants d'une population au fur et à mesure des années. Sur une période donnée, plus les taux de survie ont été élevés, plus l'acheteur de la couverture reçoit une indemnité importante. Soulignons ici que le RLA n'est pas éliminé de la société ; il est seulement transféré à ceux qui sont prêts à le supporter.

Ces produits dits de longévité ont la capacité d'attirer les investisseurs tels que les fonds de couverture, et ce, pour deux raisons. Premièrement, cette classe d'actifs est très faiblement corrélée avec les actions, obligations et autres investissements alternatifs. Deuxièmement, une prime de risque importante y est rattachée, notamment parce qu'il s'agit aujourd'hui d'un marché non liquide.

D'autres investisseurs potentiels ont été étudiés par Thomsen (2008). L'auteur s'est intéressé aux compagnies positivement exposées au risque de longévité, telles que les firmes pharmaceutiques ou encore les maisons de retraite. Celles-ci bénéficient de la longévité, puisque plus la population vit longtemps, plus elle a recours à leurs services : médicaments, soins, etc. Elles sont donc exposées au risque de mortalité, et constitueraient une contrepartie intéressante à qui transférer

le RLA. Cependant, ces acteurs ont jusqu'à présent montré peu d'intérêt pour le marché de la longévité.

Ainsi, l'offre et la demande sont déséquilibrées : beaucoup cherchent à se couvrir contre le RLA, mais peu sont prêts à le supporter. Des trois solutions proposées, le recours aux marchés financiers semble être la plus viable, et c'est sur quoi la suite de ce travail va porter.

E) Le recours aux marchés financiers

Il existe plusieurs difficultés inhérentes au développement d'un marché de produits de longévité.

Ces instruments financiers peuvent prendre toutes sortes de formes : obligations, futures, swaps ou encore options. Elles seront expliquées en détail par la suite. En outre, la construction de ces produits est sujette à un trade-off : standardisation versus efficacité de la couverture. Un contrat très standardisé, du type futures, a l'avantage de faciliter la création d'un marché liquide et peu sujet au risque de contrepartie. Toutefois, la population sous-jacente doit être suffisamment grande afin d'attirer beaucoup d'investisseurs. La couverture offerte par ces contrats très normalisés est alors sujette à un risque de base : le risque que les taux de survie diffèrent entre la population utilisée comme sous-jacent au produit, et la population à laquelle l'acheteur de la couverture est exposé.

Par ailleurs, l'évaluation de ces produits de longévité est également complexe. D'une part, il s'agit d'un marché particulièrement non-liquide, notamment en raison de son jeune âge. D'autre part, la mortalité n'est pas un actif transigé comme le sont généralement les titres et contrats financiers ; il n'existe à cette date aucune d'indice de survie négociable. Par conséquent, ce marché est dit incomplet, et la construction d'un portefeuille de réplique n'est pas réalisable. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes d'évaluation adaptées, qui pose l'existence d'une prime de risque. Cependant, cette dernière ne peut être estimée qu'à partir de données de marchés. Or, celles-ci sont quasi-inexistantes puisque, jusqu'à

présent, la majorité des contrats de longévité ont été transigés over-the-counter. Enfin, il n'existe pas de structure à terme des taux de survie. Ceux-ci doivent donc être simulés afin de pouvoir évaluer ces produits de longévité.

Nous allons à présent d'écrire l'éventail d'instruments de longévité proposés dans la littérature, ainsi que les modèles de prévision de la mortalité et d'évaluation en marché incomplet employables pour les évaluer.

III- LITTÉRATURE

A) Produits de longévité proposés

Différents types de produits de longévité ont d'ores et déjà été proposés dans la littérature. Nous en faisons ici une brève description.

1) Obligations de longévité

Les obligations de longévité ont été l'une des premières pistes de recherche explorées pour transférer le RLA. Plusieurs types en ont été proposés dans la littérature ; notre étude se concentre principalement sur celle décrite par Blake et Burrows (2001). Tout d'abord, cette obligation se caractérise par des coupons dont le montant est proportionnel à un indice de survie. À une date donnée, plus le nombre de survivants d'une population de référence est grand, plus l'acheteur de la couverture reçoit des coupons élevés. La maturité de l'obligation peut être considérée comme étant stochastique, puisque ce titre vient à échéance uniquement lors du décès de la dernière personne de la cohorte. EIP/BNP ont tenté d'émettre une obligation basée sur ce modèle, mais où la maturité était fixée à 25 ans. Cependant, l'émission fut un échec.

Notons que les versements de l'obligation commencent dès l'émission de celle-ci. Les premiers flux monétaires comportent peu de risque de longévité, puisque les prévisions faites sur la mortalité sont relativement fiables à court terme. Toutefois, leur valeur aujourd'hui sera élevée, car ils sont actualisés sur une courte période. Ainsi, la contrepartie achetant l'obligation paie très cher pour des flux monétaires qui lui apportent peu en termes de couverture contre le risque de longévité. En réponse à cette critique majeure, il a été proposé une obligation dont les premiers flux monétaires sont différés. Cette solution n'influence que peu le niveau de couverture apporté, mais permet d'en réduire considérablement le coût.

Cette obligation de longévité offre une possibilité de couverture intéressante, et ce, sous la forme d'un actif financier accessible à la grande majorité des investisseurs. En effet, les fonds de pension peuvent investir dans les titres obligataires, mais sont souvent restreints dans leur accès aux produits dérivés. Aussi, ce sont des titres transigés over-the-counter, ce qui facilite la création d'un marché primaire et secondaire liquide. Toutefois, cette obligation est sujette à deux principaux inconvénients. D'une part, c'est une forme de couverture très coûteuse. D'autre part, qui serait prêt à émettre ce type de titres ?

2) Swaps de survie

Le deuxième instrument vers lequel se tourne la recherche est le swap de longévité. Ce produit a été discuté par différents auteurs : Cox et Lin (2004), Dowd, Blake, Cairns et Dawson (2005), et plusieurs swaps de longévité ont déjà été émis en gré-à-gré. Pour ne citer qu'un exemple, en avril 2009, l'assureur Norwich Union est entré dans un contrat de ce type pour un montant de 475 millions de Livres⁴.

La forme de swap la plus classique proposée est celle du swap vanille de survie, qui s'inspire largement du swap vanille de taux d'intérêt. Il est composé de plusieurs échanges de flux monétaires, basés sur une patte fixe et une patte variable. Les paiements de la première sont fixés à l'initiation du contrat, et dépendent d'anticipations sur tes taux de survie futurs. Ceux de la deuxième sont calculés à partir des taux de survie empiriquement observés dans le futur. À chaque période, seule la différence entre les deux pattes est échangée.

Un tel produit comporte plusieurs avantages. Tout d'abord, il est gratuit d'entrer dans un swap. De plus, ces contrats ne nécessitent pas un marché organisé et liquide : ils sont négociés de gré-à-gré. Ils sont par conséquent plus flexibles : maturité, population choisie comme sous-jacent, etc. Cependant, ils ont deux

⁴ Site web: *Reuters*. <<http://uk.reuters.com/article/2009/03/24/norwich-union-longevity-idUKLO05521020090324>>

faiblesses. D'un part, leur négociation en gré-à-gré limite le développement d'un marché secondaire. D'autre part, le risque de contrepartie est élevé, et ce, d'autant plus qu'ici s'agit généralement de contrats sur le long terme.

Une version simplifiée des swaps de longévité a été proposée, notamment par JP Morgan : les contrats q-forward. Ce sont des swaps de survie, mais où le paiement est unique et se fait à maturité.

3) Futures

Les futures de longévité se baseraient sur le même principe que les futures actuellement transigés sur les marchés. Cependant, l'actif sous-jacent serait un indice de survie.

Une difficulté rencontrée par cette catégorie de produits est le développement d'un marché liquide, qui nécessite la mise en place d'indices de survie régulièrement mis à jour. Ceux-ci commencent à être développés par des firmes comme JP Morgan. Par ailleurs, en raison de la forte standardisation des futures, le risque de base inhérent à ces contrats est élevé. En revanche, le risque de contrepartie est réduit dans ce type de marché organisé.

4) Options, Caps, Floors

Les options, caps et floors basés sur un indice de survie sont des produits envisageables dans l'avenir. Ils permettraient d'introduire un caractère non linéaire aux flux monétaires, et donc de se protéger contre un risque négatif tout en restant exposé à un risque positif. Toutefois, leur évaluation n'en serait que plus complexe.

B) Modèles de prévision de la mortalité

1) Types de modèles existants

Il existe trois grandes classes de modèles de mortalité : les modèles d'anticipation, explicatifs et d'extrapolation. Ceux-ci sont définis dans Booth et Tickle (2008).

Dans le cadre des modèles d'anticipation, les experts démographiques donnent leurs prévisions sur l'évolution de la mortalité. Celles-ci contiennent généralement une cible d'espérance de vie, ainsi qu'un scénario pessimiste et optimiste. Par exemple, The US Social Security Trustees fournit ses anticipations d'amélioration de l'espérance de vie pour chaque âge. Cette méthode a l'avantage d'incorporer plusieurs sources de données, qu'elles soient qualitatives ou quantitatives. Cependant, elle est aussi très subjective. Il est reconnu que les experts ont un biais conservateur, ce qui les amène souvent à sous-estimer l'amélioration de l'espérance de vie.

Les modèles explicatifs, quant à eux, cherchent à déterminer quelles sont les causes de mortalité, comment celles-ci vont évoluer, et quel en sera l'impact sur l'espérance de vie. Il est particulièrement difficile de faire des prévisions à partir de ces modèles. Tout d'abord, les facteurs de décès doivent être restreints à ceux qui sont possiblement prévisibles. Idéalement, ils devraient aussi être indépendants, ce qui est rarement le cas. Il faut également avoir accès à suffisamment de données sur ces facteurs pour obtenir une certaine robustesse des résultats. Un dernier problème se pose enfin, et non le moindre : il faut déterminer comment une évolution du facteur va impacter concrètement le taux de mortalité. En pratique ces modèles ne sont donc pas utilisés pour prédire la mortalité, mais davantage pour expliquer son évolution passée.

Enfin, les méthodes d'extrapolation reposent sur une hypothèse forte, celle de l'existence d'une continuité entre les tendances d'évolution passées, et celles qui s'observeront dans le futur. Ils tentent d'identifier ces tendances à l'aide de méthodes statistiques. Pour commencer, la plupart de ces modèles supposent que

l'évolution des taux de mortalité suit un processus stochastique. Grâce à cette hypothèse, il est possible de produire une distribution de prévisions, et non plus uniquement une valeur déterministe. Ces modèles sont donc les plus utilisés dans le cadre d'évaluation de produits de longévité. Ils se séparent en deux groupes : les modèles en temps discret, et ceux en temps continu. La modélisation de la mortalité n'étant pas l'objectif principal de ce mémoire, nous allons présenter le modèle le plus utilisé en temps discret, et de même pour le temps continu. Pour une revue plus complète, il est possible de se référer à Cairns, Blake et Dowd (2008).

2) Modèles en temps discret

Le modèle de mortalité le plus reconnu et le plus utilisé est très certainement celui à deux facteurs développé par Lee et Carter (1992).

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

Le taux de mortalité $m(t, x)$ dépend à la fois de l'âge x et de l'année t . Ainsi, une personne âgée de 50 ans en 1987 aura un taux de mortalité différent que celui attribué à un individu de 30 ans en 1987, ou encore de 50 ans en 1995.

Le modèle de Lee et Carter présente plusieurs avantages. Premièrement, il est particulièrement simple, et nécessite peu de jugements de la part de celui qui veut l'appliquer. Deuxièmement, des études empiriques menées sur plusieurs pays développés montrent que le modèle explique une grande proportion de la variance des taux de mortalité. Troisièmement, sa caractéristique stochastique permet d'obtenir une distribution de la prévision de mortalité, et non une unique valeur déterministe. Quatrièmement, les paramètres ont une interprétation bien définie :

a_x permet de définir différents niveaux de mortalité pour chacun des âges.

k_t , qui suit un processus stochastique ARIMA, correspond au niveau général de la mortalité au temps t .

b_x définit la sensibilité d'un âge à des variations de la mortalité agrégée.

Cependant, le modèle de Lee et Carter possède également des faiblesses. Premièrement, il ne procède pas à un lissage des données entre les âges. Ainsi, la courbe des taux de mortalité par âge pourra présenter des points d'inflexion. Deuxièmement, le paramètre b_x ne varie pas en fonction du temps. Or, il est possible que la sensibilité d'un âge à l'évolution de la mortalité agrégée change avec les années.

Renshaw et Haberman (2006) ont par la suite proposé l'ajout d'un troisième terme au modèle de Lee et Carter, cherchant à capturer l'effet cohorte. L'année de naissance est alors prise en compte pour prévoir la mortalité. Le modèle prend alors la forme :

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + c_x \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t}$$

Toutefois, les données nécessaires à l'estimation des modèles âge-période-cohorte ne sont pas toujours disponibles, et les paramètres estimés par Renshaw et Haberman ne sont pas stables.

3) Modèles en temps continu

Parmi les modèles en taux continu, ce sont ceux dits de fonction affine qui sont les plus utilisés. Dahl (2004) a été le premier à appliqué l'un d'entre eux à la prévision de la mortalité.

Soit $\mu_{[x]+t}$ la force de la mortalité à l'âge $x + t$. $\mu_{[x]+t}$ suit un processus stochastique tel que :

$$d\mu_{[x]+t} = \alpha^\mu(t, x, \mu_{[x]+t})dt + \sigma^\mu(t, x, \mu_{[x]+t})d\widetilde{W}_t$$

avec \widetilde{W}_t un mouvement Brownien standard.

Soit $G(t, x, \mu_{[x]+t}, T)$ la probabilité de survie de t à T d'un individu âgé $x + t$ en t , sachant l'information connue en t .

$$G(t, x, \mu_{[x]+t}, T) = e^{A(t,x,T) - B(t,x,T)\mu_{[x]+t}}$$

avec $A(t, x, T)$ et $B(t, x, T)$ des fonctions déterministes. L'intensité de la mortalité suit alors un processus de mortalité de fonction affine.

Les modèles en taux continu ont l'avantage de rendre possible l'évaluation de produits de longévité dont le pay-off est non linéaire. De plus, il est parfois possible d'obtenir une solution sous forme fermée dans le cadre des modèles de classe affine. En revanche, ils sont particulièrement difficiles à calibrer. Aussi, dans le cas de certains modèles de classe affine, tel que le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck, il existe une probabilité non nulle que les taux de mortalité soient négatifs. Or, ceci est physiquement inconcevable.

C) Méthodes d'évaluation en marché incomplet

1) Principe d'utilité équivalente

Cui (2008) a proposé une méthode d'évaluation basée sur le principe d'utilité équivalente. Elle permet de déterminer la prime d'assurance minimale exigée par le vendeur de la couverture contre le RLA, ainsi que la prime maximale que l'acheteur est prêt à payer.

Étudions premièrement le cas de l'assureur. Tout d'abord, il faut maximiser deux espérances d'utilité de sa richesse : une dans la situation où il y a signature du contrat, et une dans celle où le contrat n'est pas conclu. Dans le premier scénario, l'espérance d'utilité est fonction du RLA et de la prime d'assurance. Dans le deuxième scénario, elle ne l'est pas puisque l'assureur choisit de ne pas signer le contrat. Il est alors possible de calculer la prime qui égalise les deux espérances d'utilité optimales. L'auteur obtient ainsi la prime d'assurance qui laisse indifférent l'assureur entre signer ou non le contrat.

Dans le cas de l'assuré éventuel, il faut également maximiser son espérance d'utilité dans les deux situations. Contrairement au cas de l'assureur, la richesse de l'assuré dépend du RLA uniquement dans la situation où il ne signe pas le contrat. Dans le cas contraire, il n'est plus exposé au risque de longévité, mais paie une

prime d'assurance. L'auteur calcule ensuite cette prime qui laisse l'assuré potentiel indifférent entre se couvrir ou non.

Cui a appliqué cette méthodologie à différents produits de longévité : obligations, swaps, floors, etc. Ses résultats sont les suivants. Plus la richesse de l'assureur est grande, moins celui-ci exigera une prime élevée. Par ailleurs, le prix que l'assuré est prêt à payer est fonction du risque de base, et du niveau de couverture dite naturelle.

Parmi les avantages de cette méthodologie, nous retiendrons premièrement qu'il s'agit d'un modèle flexible. Elle peut en effet être appliquée à des produits de longévité aux flux monétaires très divers. Deuxièmement, elle permet d'obtenir un intervalle acceptable pour la prime sans avoir recours à des données de marchés. Toutefois, l'un des inconvénients est qu'elle nécessite de poser une hypothèse sur les formes des fonctions d'utilité des assureurs et assurés potentiels, ainsi que sur les coefficients d'aversion au risque de ces derniers. Enfin, il est possible d'obtenir des résultats éloignés de la réalité des marchés, en raison de l'absence de calibrage.

2) Méthode du CAPM et du CCPAM

Friedberg et Webb (2007) ont cherché à évaluer des obligations de longévité à l'aide de deux méthodes différentes : le Capital Asset Pricing Model (CAPM), et le Consumption Capital Asset Pricing Model (CCAPM).

Ces auteurs ont tout d'abord repris le principe du CAPM. En appliquant celui-ci, ils obtiennent le rendement d'un actif de longévité, rendement qui peut ensuite être décomposé en une portion sans risque à laquelle s'ajoute la prime de risque. Cette dernière est fonction de la covariance entre l'actif et le marché.

Au lieu d'estimer la prime de risque à l'aide cette dernière covariance, le CCAPM utilise la covariance de l'actif avec l'utilité marginale de la consommation. Lorsque l'utilité marginale est décroissante, la logique de ce modèle est la suivante : dans les états du monde où la consommation est plus basse, l'utilité

marginale est plus élevée. Une unité supplémentaire de consommation procure alors davantage d'utilité que lorsque l'agent se trouve dans un état riche. Par conséquent, les individus sont prêts à payer plus cher les actifs qui offrent de hauts rendements en période de basse consommation. La prime de risque exigée sera donc inférieure pour ces actifs. Il est alors possible de définir le rendement espéré comme la somme d'une composante sans risque et d'une prime, qui sera fonction de cette covariance.

En appliquant ces deux méthodes à l'obligation de longévité émise par EIB/BNP, les auteurs ont estimé une prime de risque très faible en comparaison des 20 points de base généralement discutés pour l'obligation. Ces deux modèles comportent beaucoup d'inconvénients : premièrement, il faut avoir accès à des données de marché pour estimer les covariances ; deuxièmement, les résultats obtenus semblent nettement sous-estimer la valeur de la prime ; troisièmement, les auteurs suspectent qu'il existe un puzzle autour de celle-ci ; enfin quatrièmement, il faut poser de nombreuses hypothèses pour chacun des deux modèles.

3) Approche du ratio de Sharpe

L'utilisation du ratio de Sharpe pour évaluer les produits de longévité a été discutée par de nombreux auteurs, le premier article publié à ce sujet étant celui de Milevsky, Promislow et Yound (2006). Ils ont présenté cette approche dans le cadre d'une compagnie d'assurance vendant des annuités vie. Cette technique d'évaluation s'effectue en plusieurs étapes.

Dans un premier temps, l'assureur doit constituer deux portefeuilles. Le premier est formé de différents contrats d'annuités. Le deuxième est autofinancé, et comprend des obligations du gouvernement et des fonds de marche monétaire. Le nombre de titres du trésor à acheter est déterminé de manière à minimiser la variance du portefeuille total de l'assureur. La variance minimale sera positive, en raison de l'incomplétude du marché. Ainsi, l'assureur aura couvert partiellement son exposition. Dans un deuxième temps, celui-ci veut être rémunéré pour la portion du risque auquel il demeure exposé. Il va prédéterminer un niveau de

rendement par unité de risque qu'il exige, le ratio de Sharpe. Il est généralement fixé aux alentours de celui admis pour les autres classes d'actifs, soit 0,25. Par la suite, l'assureur peut déduire le prix des annuités qui lui permet d'obtenir ce ratio de Sharpe sur son portefeuille de contrats.

Cette méthode d'évaluation est l'une des plus utilisées. Toutefois, la valeur du produit de longévité dépend grandement du niveau de ratio de Sharpe choisi, lequel est fixé de manière relativement arbitraire. En effet, en raison du manque de données de marché, il est empiriquement difficile de déterminer le ratio de Sharpe adéquat pour les produits de longévité.

4) Transformation de Wang

Wang (2000) propose une méthode d'évaluation des actifs financiers basée sur la distorsion de la fonction de distribution cumulative d'une variable aléatoire de flux monétaires X . La distorsion se fait à l'aide d'une prime de risque λ exigée par le marché. Elle permet d'obtenir une nouvelle fonction de distribution cumulative, dite ajustée au risque. Les flux monétaires déduits sous cette nouvelle distribution peuvent ensuite être actualisés au taux sans risque. La transformation se fait à l'aide de la fonction suivante :

$$F^*(x) = \Phi[\Phi^{-1}(F(x)) - \lambda]$$

où Φ est fonction de distribution cumulative de la loi normale standard, $F(x)$ la fonction de distribution cumulative de la variable X , et $F^*(x)$ la fonction de distribution cumulative de X ajustée pour le risque.

Cette méthodologie a l'avantage d'être une méthode d'évaluation universelle, car elle est applicable à tout type de fonction de distribution $F(x)$. De plus, elle conserve les distributions Normale et Log-normale : si $F(x)$ suit une loi Normale($\mu ; \sigma^2$), alors $F^*(x)$ suivra une loi Normale($\mu - \lambda\sigma ; \sigma^2$); si $F(x)$ suit une loi Log-normale($\mu ; \sigma^2$), alors $F^*(x)$ suivra une loi Normale($\mu - \lambda\sigma ; \sigma^2$).

Toutefois, il est nécessaire d'avoir accès à des données de marché pour pouvoir estimer la prime λ . Aussi, il est indispensable de connaître la distribution cumulative de la variable X . Dans le cas d'évaluation de produits de longévité, il est donc nécessaire d'utiliser un modèle stochastique de prévision de la mortalité, qui permet de simuler différents taux de survie et d'estimer une fonction de distribution à partir de ceux-ci.

En marché incomplet, toute la complexité de l'évaluation d'un produit financier vient de la difficulté à estimer la prime de risque. Revoyons brièvement les différentes méthodes proposées dans la littérature.

Tout d'abord, le modèle se basant sur le principe d'utilité équivalente se distingue des autres par le fait qu'il n'est pas calibré sur les données de marché : les résultats théoriques peuvent alors s'éloigner significativement de la réalité empirique. En outre, il nécessite de poser plusieurs hypothèses telles que les fonctions d'utilité caractérisant les agents.

Les trois autres modèles sont davantage tournés vers le marché. Le CAPM estime la prime de risque en se basant sur le beta du produit. Dans le cas du ratio de Sharpe, une hypothèse est posée sur la valeur de celui-ci, ce qui permet ensuite de déduire la prime. Enfin, dans le cas de la transformation de Wang, lambda a besoin d'être calibré à l'aide de données de marché.

Étant donnée la difficulté à estimer avec précision la prime de risque, nous allons dans le cadre de ce mémoire chercher à analyser la sensibilité d'évaluation d'un produit de longévité à celle-ci.

IV- MODÈLE THÉORIQUE

A) Objectifs de cette étude

Dans le cadre de ce travail, nous allons évaluer deux produits de longévité, soient des forwards (FS) et des swaps vanille de survie (SVS), dont le sous-jacent est la mortalité de la population canadienne. Pour ce faire, nous aurons recours à quatre principaux travaux : Lee et Carter (1992), Wang (2000 et 2007) et Dowd et al. (2005). Ces recherches ont permis de développer respectivement un modèle de prévision de la mortalité, une méthode d'évaluation en marché incomplet, et une technique de valorisation des FS et SVS.

À travers cette étude, nous poursuivons plusieurs objectifs. Premièrement, afin d'être en mesure d'appliquer la méthodologie de Wang, il est nécessaire de déterminer la prime de risque λ à l'aide de techniques de calibrage. Or, le marché des produits de longévité se situe actuellement à un stade de développement primaire : le faible volume de transactions rend l'estimation de λ très difficile. Ainsi, le premier objectif de ce travail est d'étudier la sensibilité du prix des FS et SVS à des variations de cette prime. Deuxièmement, ces produits de longévité sont évalués pour différentes maturités. La mortalité étant davantage volatile à long terme qu'à court terme, nous voulons étudier l'impact de la durée des contrats FS et SVS sur leur valorisation. Troisièmement, les FS et SVS sont des produits relativement similaires : il est possible de créer un swap vanille de survie à l'aide de plusieurs forwards. Ainsi, ce travail a également pour objectif de comparer le prix de ces deux types de contrats. Quatrièmement, peu d'études ont été effectuées sur l'évaluation de ces produits lorsque le sous-jacent est la mortalité canadienne. Pourtant, cette société est elle-aussi très exposée au risque de longévité. Le dernier objectif est donc d'étendre au Canada la recherche sur ce sujet.

Ce mémoire se concentre sur les FS et SVS, et non sur d'autres produits, pour les raisons suivantes. D'une part, entrer dans ce type de contrats est gratuit. Ces dérivés ne donnent en effet lieu à aucun échange de flux monétaires à l'initiation.

D'autre part, ils ne nécessitent pas un marché organisé et liquide, guère concordant avec celui peu développé du risque de longévité. Aussi, leur négociation « over-the-counter » les rend facilement adaptables aux besoins des deux contreparties : maturité, population de base, notionnel, etc.

Finalement, le modèle de Lee et Carter a été sélectionné pour simuler les futurs taux de survie nécessaires à l'évaluation des FS et SVS. Cette méthodologie en temps discret est suffisante pour valoriser ces contrats ; des prévisions en temps continu de la mortalité ne sont en effet pas requises. De plus, les modèles en temps continu sont particulièrement difficiles à calibrer et peuvent générer des taux de mortalité négatifs tout à fait inconcevables. Le modèle de Lee et Carter, le plus reconnu et utilisé parmi ceux en temps discret, a donc été favorisé pour effectuer cette recherche.

Dans cette cinquième partie, nous détaillons le procédé d'évaluation des FS et SVS utilisé. Nous dégagons tout d'abord les particularités de ces produits, et par la suite, nous expliquons les différentes étapes de la méthodologie de valorisation.

B) Forwards et swaps vanille de survie

1) Principe d'évaluation des forwards et swaps vanille de survie

Les flux monétaires générés par les FS et SVS dépendent de deux indices de survie (IS) : celui anticipé (ISA) et celui réalisé (ISR). Pour une population de taille initiale fixée, les IS donnent le nombre de survivants après qu'une certaine période se soit écoulée. L'ISR et l'ISA correspondent respectivement au décompte de personnes vivantes effectué à la fin de la période, et au décompte anticipé en date de l'initiation du contrat de longévité. Concrètement, l'ISR n'est pas observé, mais il peut être déduit des taux de mortalité sur la période, qui eux le sont.

Dans un FS, l'acheteur de couverture paie l'ISA et reçoit l'ISR à l'échéance du contrat. En revanche, dans un contrat SVS, ces flux monétaires sont échangés à

chaque date de paiement fixée. Ainsi, l'ISA et l'ISR s'apparentent respectivement aux paiements de la patte fixe et de la patte variable d'un swap vanille de taux.

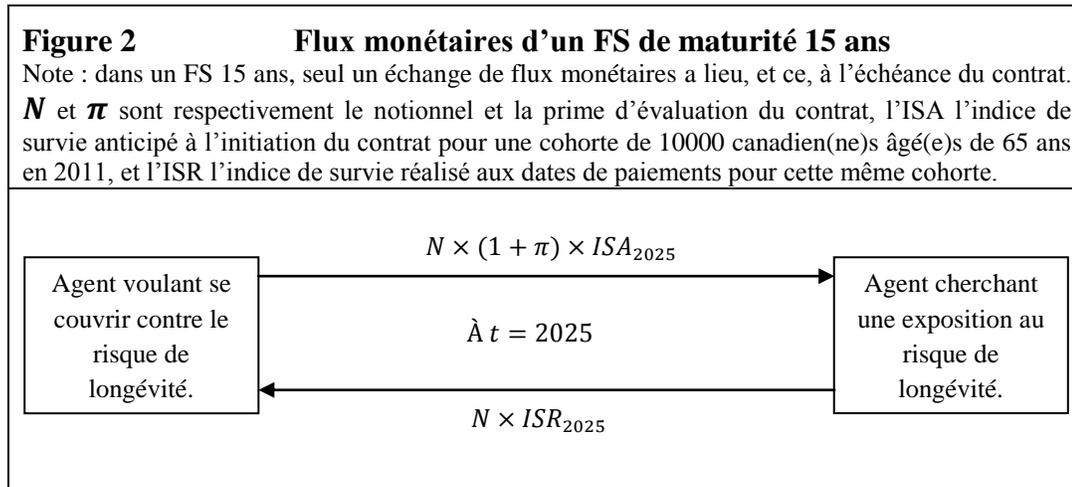
Afin d'évaluer des forwards ou swaps vanille de taux d'intérêt, les financiers ont recours à la courbe des taux à terme ; le taux fixe est alors établi de manière à ce que les contrats aient une valeur nulle au temps zéro. Or, il n'existe pas de structure à terme des indices de survie. Ainsi, l'ISR doit être estimé à l'aide de simulations des futurs taux de mortalité. Il sera alors nommé indice de survie simulé (ISS). Aussi, l'ISS n'est pas déterminé de manière à ce que les FS et SVS aient une valeur nulle à l'initiation. Dowd et al. (2005) proposent alors un ajustement de l'ISA pour remédier à ce problème. Cet indice doit être multiplié par $1 + \pi$, où π est une prime d'évaluation permettant d'égaliser au temps zéro les flux monétaires des deux contreparties du contrat de longévité.

2) Caractéristiques des forwards et swaps de survie évalués

Le sous-jacent des FS et SVS sera l'indice de survie de la population canadienne. Plus exactement, nous aurons un IS spécifique à chaque sexe, puisque les taux de mortalité des hommes et des femmes évoluent de manière significativement différente. Par conséquent, chaque contrat étudié est évalué séparément pour chaque sexe. À l'initiation des contrats de longévité, les deux populations initiales sont respectivement de 10000 hommes et de 10000 femmes âgés de 65 ans en 2011. À mesure que les années s'écoulent, les deux groupes vieillissent et leur nombre de survivants respectif diminue. Ainsi, l'ISA sera les prévisions faites au début de l'année 2011 du total de personnes vivantes fin 2011, 2012, 2013, etc. L'ISR, quant-à-lui, correspondra au nombre effectivement observé de survivants à la fin de ces années-là. La population initiale est âgée de 65 ans, car il s'agit de l'âge normal de départ à la retraite au Canada.

Plusieurs maturités sont envisagées pour les contrats de longévité. Les FS seront évalués pour des échéances dans 5, 10, 15 et 20 ans, tandis que nous ne considérerons que les SVS de maturité 10, 15 et 20 ans. Cette différence est expliquée ci-après. Dans le cas des différents forwards, les versements se font

uniquement à maturité. Ainsi, les FS 5, 10, 15 et 20 ans donnent respectivement lieu à des flux monétaires fin 2015, 2020, 2025 et 2030. Dans le cas des SVS, nous avons choisi des versements quinquennaux uniquement. Prenons l'exemple d'un SVS 10 ans ; celui-ci ne donnera alors lieu qu'à des paiements fin 2015 et 2020. Par conséquent, un FS et un SVS 5 ans ne sont qu'un seul et même contrat. Le choix d'échange de flux monétaires uniquement à des intervalles de cinq ans se justifie à l'aide de deux arguments. D'une part, la mortalité est davantage volatile à long terme qu'à court terme ; l'ISR peut se démarquer plus clairement de l'ISA sur une période de cinq ans que sur une période plus courte. D'autre part, l'application de la méthode d'évaluation de Wang est facilitée du fait du nombre restreint d'échange de flux monétaires.

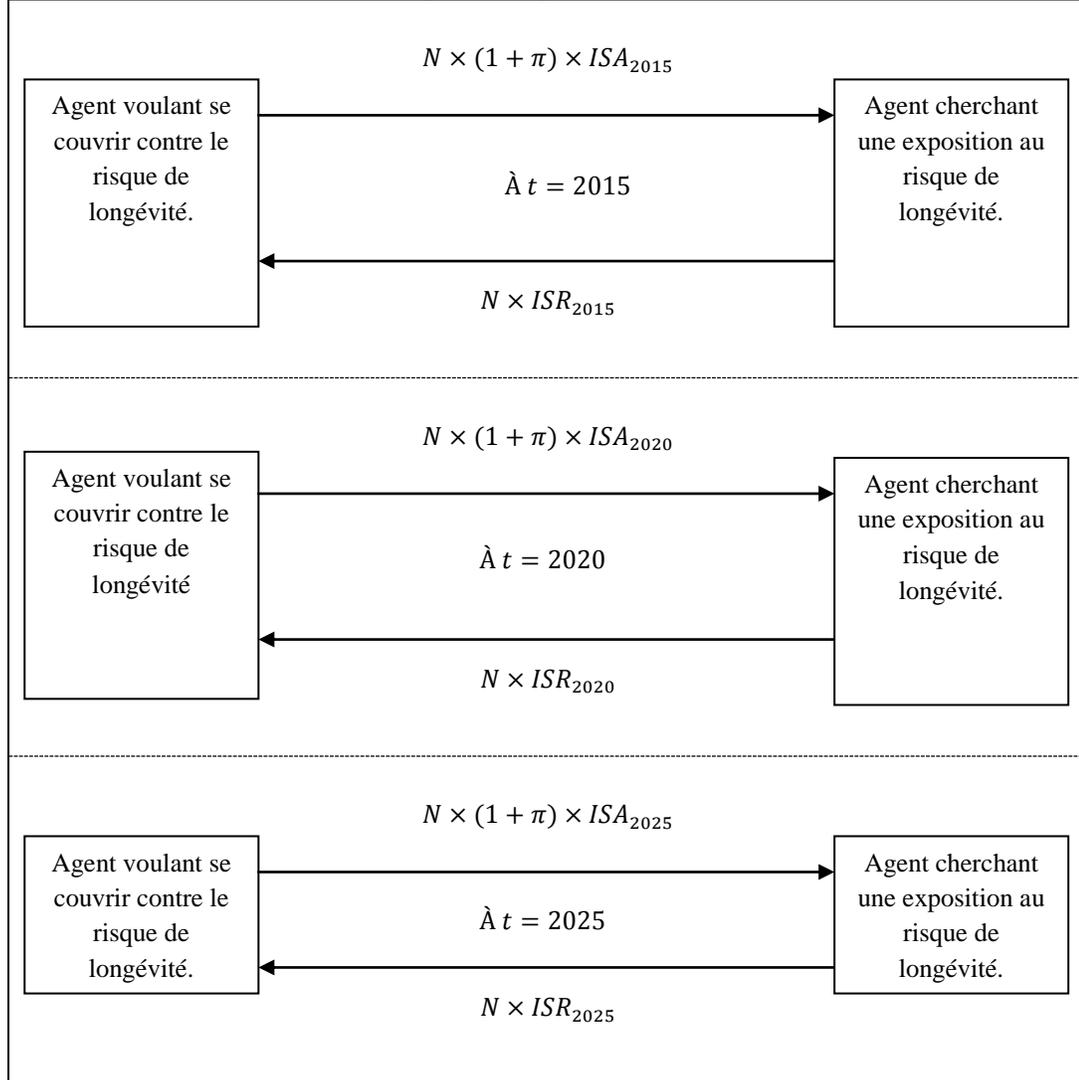


Soient l' ISA_t et ISR_t les indices de survie anticipé et réalisé pour l'année t pour une population initiale de 10000 personnes âgées de 65 ans en 2011. Soit N le notionnel du contrat. Les Figures 2 et 3 présentent les échanges de flux monétaires ayant lieu respectivement dans un FS et un SVS de maturité 15 ans. Ils sont expliqués ci-dessus. En pratique, seule la différence entre les deux flux monétaires est échangée à chaque période. Par exemple, dans le cas du FS 15 ans, la contrepartie voulant se couvrir contre le risque de longévité recevra (paiera) si la différence est positive (négative) :

$$N \times ISR_{2025} - N \times (1 + \pi) \times ISA_{2025}$$

Figure 3 Flux monétaires d'un SVS de maturité 15 ans

Note : dans ce SVS 15 ans, les échanges de flux monétaires sont quinquennaux. N et π sont respectivement le notional et la prime d'évaluation du contrat, l'ISA l'indice de survie anticipé à l'initiation du contrat pour une cohorte de 10000 canadien(ne)s âgé(e)s de 65 ans en 2011, et l'ISR l'indice de survie réalisé aux dates de paiements pour cette même cohorte.



3) Évaluation d'un FS et d'un SVS

Afin que le processus d'évaluation soit compréhensible, nous énonçons tout d'abord les grandes étapes à suivre avant de les étudier plus en détail. Pour ce faire, nous utilisons l'exemple du FS 15 ans et du SVS 15 ans. Ces deux contrats serviront par la suite à illustrer chacune des étapes d'évaluation.

Évaluer ces deux contrats équivaut à calculer la prime π par laquelle l'ISA doit être ajusté. Soit $VA(.)$ la valeur actuelle d'un flux monétaire, c'est-à-dire sa valeur au début de l'année 2011.

Étudions tout d'abord le cas du SVS 15 ans. Nous voulons que :

$$VA[(1 + \pi) \times \text{Patte fixe}] = VA[\text{Patte variable}]$$

La prime π étant identique pour chacune des périodes de paiement du SVS, nous avons alors :

$$(1 + \pi) \times VA[\text{Patte fixe}] = VA[\text{Patte variable}]$$

À l'aide des indices de survie, cette dernière équation s'écrit :

$$\begin{aligned} (1 + \pi) \times N \times [VA(ISA_{2015}) + VA(ISA_{2020}) + VA(ISA_{2025})] \\ = N \times [VA(\overline{ISS}_{2015}) + VA(\overline{ISS}_{2020}) + VA(\overline{ISS}_{2025})] \end{aligned}$$

Remarquons ici que nous avons utilisé l'indice de survie simulé (ISS) moyen pour la patte variable, et non l'indice de survie réalisé (ISR), puisque ce dernier est inconnu à l'initiation du SVS. En effet, à l'initiation du contrat, le futur niveau de l'ISR en 2015, 2020 et 2025 est simulé un grand nombre de fois. Une moyenne de toutes les valeurs simulées est ensuite calculée. Il s'agit de l'ISS moyen ; il se veut une bonne approximation de l'ISR qui sera observé dans le futur, et sert de base à l'évaluation des FS et SVS.

Ainsi, la prime du SVS 15 ans est égale à :

$$\pi^{s15} = \frac{VA(ISS_{2015}) + VA(ISS_{2020}) + VA(ISS_{2025})}{VA(ISA_{2015}) + VA(ISA_{2020}) + VA(ISA_{2025})} - 1$$

Il s'agit à présent de déterminer le taux d'actualisation adéquat. À l'initiation du swap, l'ISA est connu avec certitude pour chacune des dates de paiements. En effet, ce sont des prévisions faites début 2011 du nombre de survivants fin 2015, 2020 et 2025. Ils seront calculés à l'aide de la Table RP-2000 et de facteurs d'amélioration de la mortalité ; il s'agit d'une des principales méthodes utilisées par les actuaires canadiens. Par conséquent, les flux monétaires calculés à partir des ISA sont certains ; ils peuvent être actualisés au taux sans risque.

En revanche, utiliser l'ISS moyen comme approximation de l'ISR comporte un risque : il existe une probabilité non nulle que l'ISR soit finalement différent de l'ISS moyen fin 2015, 2020, 2025. La contrepartie offrant la couverture contre le risque de longévité s'expose à la possibilité que l'ISS moyen soit inférieur à l'ISR, ce qui lui générerait des flux monétaires négatifs plus importants que ceux anticipés. Or, l'ISR n'est pas un actif transigé ; ce risque ne peut donc être couvert de la même manière qu'il le serait dans un marché complet. La contrepartie veut être alors rémunérée pour cette éventualité. L'application de la transformation de Wang permet d'obtenir un ISS moyen ajusté pour ce risque (ISSAR). L'ISSAR est alors actualisable au taux sans risque. Soit $ISSAR_t^f$ l'ISSAR à la fin de l'année t pour l'évaluation d'un FS, quelle que soit sa maturité. Soit $ISSAR_t^{sT}$ l'ISSAR à la fin de l'année t pour l'évaluation d'un SVS de maturité T . En effet, les ISSAR ne seront pas égaux pour les deux types de contrats. De plus, les ISSAR seront différents dans le cas d'évaluation de SVS de maturités distinctes, ce qui ne sera pas le cas pour les FS. Cette différence découle directement de l'application de la transformation de Wang, expliquée plus tard dans ce travail.

Par conséquent, la prime du SVS 15 ans est égale à :

$$\pi^{s15} = \frac{\frac{ISSAR_{2015}^{s15}}{(1+r)^5} + \frac{ISSAR_{2020}^{s15}}{(1+r)^{10}} + \frac{ISSAR_{2025}^{s15}}{(1+r)^{15}}}{\frac{ISA_{2015}}{(1+r)^5} + \frac{ISA_{2020}}{(1+r)^{10}} + \frac{ISA_{2025}}{(1+r)^{15}}} - 1$$

De la même manière, la prime du FS 15 ans est égale à :

$$\pi^{f15} = \frac{\frac{ISSAR_{2025}^f}{(1+r)^5}}{\frac{ISA_{2025}}{(1+r)^5}} - 1$$

Ici, seuls les indices de survie en 2025 sont considérés puisque le FS 15 ans ne donne lieu à aucun échange de flux monétaires avant 2025. Les facteurs d'actualisation peuvent ici se simplifier, et la prime est alors égale à :

$$\pi^{f15} = \frac{ISSAR_{2025}^f}{ISA_{2025}} - 1$$

C) Calcul de l'indice de survie anticipé

Les actuaires effectuent continuellement des prévisions sur les futurs taux de mortalité ; ces anticipations leur permettent ensuite d'estimer les passifs futurs liés aux versements des pensions. Dans le cadre de cette recherche, nous aurons donc recours à la principale méthode utilisée par les actuaires pour calculer les ISA.

Selon l'Institut Canadien des Actuaires⁵, les projections doivent tenir compte d'améliorations dans les taux de mortalité. En effet, ceux-ci ont largement diminué par le passé et devraient poursuivre cette tendance en raison de progrès sanitaires, médicaux, etc. Deux méthodes sont alors envisageables. La première consiste à utiliser des tables de mortalité générationnelles ; chaque génération a alors ses propres taux de mortalité. La deuxième consiste à appliquer des facteurs d'amélioration à une table de référence. Les tables générationnelles étant peu accessibles, nous utiliserons la deuxième technique dans ce travail.

La table de mortalité statique la plus récemment développée est la Table RP-2000 ; Produite par la Société des Actuaires, elle contient des taux de mortalité de référence pour l'année 2000, classifiés par âge et par sexe. Elle est accompagnée de facteurs d'amélioration, appelés facteurs AA, qui permettent de prévoir au-delà

⁵ SOCIETE DES ACTUAIRES. « The RP-2000 Mortality Tables ». <http://www.soa.org/files/pdf/rp00_mortalitytables.pdf>.

de l'année 2000 les taux de mortalité spécifiques à chaque âge et chaque sexe. À partir de ces prévisions, il est ensuite possible de construire les ISA.

Soient $m_{x,t}^a$ et $s_{x,t}^a$ les taux de mortalité et taux de survie anticipés pour les individus d'âge x en t . La Table RP-2000 contient ainsi pour les deux sexes et pour tout âge les taux $m_{x,2000}^a$. Enfin, les taux de survie se déduisent des taux de mortalité de la manière suivante :

$$s_{x,t}^a = 1 - m_{x,t}^a$$

Soient AA_x les facteurs d'amélioration pour les individus d'âge x . Remarquons ici, qu'afin de simplifier les équations, les notations utilisées sont les mêmes pour les hommes et les femmes, bien que les données soient différentes pour les deux sexes.

Afin d'être en mesure d'évaluer les FS et SVS, nous avons besoin de connaître les ISA aux dates de paiements possibles, soit fin 2015, 2020, 2025 et 2030. Rappelons ici que la population de base est composée de 10000 hommes ou femmes âgés de 65 ans en 2011. Ils seront alors âgés de 66 ans en 2012, 67 en 2013, etc.

Le calcul des indices se fait en deux étapes. Tout d'abord, les taux de survie doivent être calculés, et ce, en utilisant la Table RP-2000 et les facteurs d'amélioration :

$$s_{65,2011}^a = 1 - m_{65,2011}^a = 1 - m_{65,2000}^a \times (1 - AA_{65})^{2011-2000}$$

$$s_{66,2012}^a = 1 - m_{66,2012}^a = 1 - m_{66,2000}^a \times (1 - AA_{66})^{2012-2000}$$

...

$$s_{84,2030}^a = 1 - m_{84,2030}^a = 1 - m_{84,2000}^a \times (1 - AA_{84})^{2030-2000}$$

Il est ensuite possible de calculer les ISA de la manière suivante :

$$ISA_{2015} = 10000 \times s_{65,2011}^a \times s_{66,2012}^a \times s_{67,2013}^a \times s_{68,2014}^a \times s_{69,2015}^a$$

$$ISA_{2020} = ISA_{2015} \times s_{70,2016}^a \times s_{71,2017}^a \times s_{72,2018}^a \times s_{73,2019}^a \times s_{74,2020}^a$$

$$ISA_{2025} = ISA_{2020} \times s_{75,2021}^a \times s_{76,2022}^a \times s_{77,2023}^a \times s_{78,2024}^a \times s_{79,2025}^a$$

$$ISA_{2030} = ISA_{2025} \times s_{80,2026}^a \times s_{81,2027}^a \times s_{83,2028}^a \times s_{83,2029}^a \times s_{84,2030}^a$$

Par exemple, l'ISA fin 2015 n'est autre que la taille de la population initiale multipliée par les taux de survie correspondant à l'âge des personnes pour chacune des cinq premières années : 2011, 2012, 2013, 2014 et 2015.

Les ISA des hommes et des femmes ne sont pas égaux car leur Table RP-2000 et leurs facteurs d'améliorations sont différents.

Nous allons à présent expliquer le processus de calcul des ISS.

D) Calcul de l'indice de survie simulé

Le calcul des ISS se fait en deux temps. Il est tout d'abord indispensable d'estimer séparément les paramètres du modèle de Lee et Carter pour les hommes et les femmes canadiens. Une fois cette étape effectuée, il est possible de prévoir les futurs taux de mortalité et d'en déduire les ISS.

1) Estimation du modèle de Lee et Carter

Les ISS se veulent une bonne approximation des indices de survie qui seront réellement observés en 2015, 2020, 2025 et 2030. Afin de les calculer, nous avons choisi d'utiliser le modèle de Lee et Carter. Nous posons ici comme hypothèse qu'il nous permettra d'obtenir des prévisions plus proches de la réalité future que celles découlant de la méthode des actuaires. Cette proposition semble raisonnable pour deux raisons. D'une part, les méthodes employées par les actuaires ont historiquement donné des anticipations très conservatrices, qui ont considérablement surestimé les taux de mortalité. D'autre part, il a été démontré que la mortalité suit un processus aléatoire. Ainsi, un modèle stochastique, tel que celui de Lee et Carter, semble préférable à une méthodologie non stochastique telle que celle à laquelle les actuaires ont recours.

Le modèle proposé par Lee et Carter (1992) se présente sous la forme :

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

Le logarithme naturel du taux de mortalité en l'année t d'une personne d'âge x peut s'exprimer à l'aide de trois termes. À chaque âge est attribué une valeur a et une valeur b , supposées constantes dans le temps. De plus, un coefficient k est assigné à chaque année de données utilisée pour l'estimation. Toutefois, seule la variable $m_{x,t}$ est historiquement observable. Une régression linéaire classique ne permet donc pas d'estimer le modèle.

Pour résoudre cette difficulté, les auteurs ont imposé deux contraintes au modèle :

$$\sum_x b_x = 1$$

$$\sum_t k_t = 0$$

La somme de tous les $\{b_x\}$ doit être égale à un, tandis que la somme de tous les $\{k_t\}$ doit être égale à zéro. Chacune des variables du modèle possède alors une interprétation économique clairement définie.

La série des $\{k_t\}$ s'apparente à un indicateur temporel du niveau de mortalité. Par exemple, k_{2060} sera inférieur à k_{2050} si en 2060 les taux de mortalité à tout âge ont globalement été plus faibles que ceux observés en 2050. Puisque la somme de tous les $\{k_t\}$ doit être nulle, les années pour lesquelles les taux de mortalité auront été les plus faibles se verront assigner des $\{k_t\}$ négatifs. Si une tendance décroissante est observée dans la série historique des $\{k_t\}$, cela signifie que les taux de mortalité diminuent dans le temps. Les $\{b_x\}$ donnent la sensibilité des taux de mortalité de chaque âge à des changements dans les niveaux de mortalité généraux. Pour un x donné, plus b est élevé, plus une variation des $\{k_t\}$ aura un impact important sur les taux de mortalité à cet âge. Enfin, les $\{a_x\}$ sont les moyennes dans le temps des logarithmes naturels des taux de mortalité respectifs à chaque âge x .

Deux méthodes d'estimation ont été proposées par Lee et Carter. La première est basée sur la méthode de la décomposition en valeur singulière, tandis que la

deuxième en est une approximation. Dans cette recherche, nous utiliserons cette dernière, qui est plus intuitive. Le modèle s'estime alors en quatre étapes.

Premièrement, les $\{a_x\}$ sont, pour tout x , la moyenne dans le temps du logarithme naturel des taux de mortalité à cet âge. Soit n le nombre d'années de données utilisé pour estimer le modèle, alors :

$$a_x = \frac{1}{n} \sum_t \ln(m_{x,t}), \text{ pour tout } x.$$

Deuxièmement, du fait que la somme des $\{b_x\}$ ait été fixée à un, une approximation des $\{k_t\}$ peut être calculée de la manière suivante :

$$k_t = \sum_x \ln(m_{x,t}) - a_x, \text{ pour tout } t.$$

Troisièmement, les $\{b_x\}$ peuvent alors être estimés à l'aide de régressions linéaires, effectuées séparément pour tous les x . Soit Y_x , une série temporelle spécifique à chaque x , telle que :

$$Y_x = \ln(m_{x,t}) - a_x$$

Le vecteur Y_x contient n éléments, soit le nombre d'années de données utilisé pour estimer le modèle. Alors, pour chaque x , nous effectuons une régression linéaire sans constante, dans laquelle Y_x est la variable dépendante, et la série des $\{k_t\}$ la variable explicative. Ainsi, nous devons effectuer autant de régressions qu'il n'y a de x .

Quatrièmement, Lee et Carter suggèrent de ré-estimer les $\{k_t\}$, et ce, parce que calculés de la sorte, ils ne permettent pas de générer les tables de vie réellement observées. Celles-ci contiennent le nombre de décès observés pour chaque âge et chaque sexe. En effet, les $\{k_t\}$ ont été calculés en attribuant la même importance aux taux de mortalité de tous les âges. Cependant, la taille de la population diffère à tout âge. Par conséquent, un même taux de mortalité pour deux x différents ne donnera pas nécessairement le même nombre de décès. Lee et Carter proposent donc de ré-estimer les $\{k_t\}$ pour rectifier cette limite. Soit $N_{x,t}$ la taille de la

population d'âge x en l'année t . Soit D_t le nombre de décès, tout âge confondu, en l'année t . Pour chaque t , il faut alors déduire par itérations le k associé, tel que :

$$D_t = \sum_x N_{x,t} e^{a_x + b_x k_t}, \text{ pour tout } t.$$

En effet, $e^{a_x + b_x k_t}$ permet de calculer le taux de mortalité des individus d'âge x en l'année t . Ce taux est ensuite multiplié par le nombre d'individus de ce groupe, ce qui permet d'obtenir le nombre de décès en l'année t , parmi les individus d'âge x . Le même calcul est effectué pour tous les x . La somme du nombre de décès à chaque âge en t permet d'obtenir le nombre de morts total durant cette année. Il s'agit ensuite de retrouver le k de la période qui permette d'approcher le plus justement possible du nombre de décès total réellement observé. Une nouvelle recherche par itérations est effectuée pour chaque t .

Une fois ces quatre étapes terminées, nous connaissons les $\{a_x\}$, $\{b_x\}$ et $\{k_t\}$ qui permettent de modéliser le plus fidèlement possible la surface de mortalité observée. Cette dernière correspond aux différents taux de mortalité à travers le temps et les âges. Nous pouvons alors utiliser le modèle pour prévoir les taux de mortalité futurs.

2) Prévisions à l'aide du modèle de Lee et Carter

Les $\{a_x\}$ et $\{b_x\}$ sont supposés fixes dans le temps par le modèle de Lee et Carter. Seuls les $\{k_t\}$ varient avec les années. Ainsi, faire des prévisions des taux de mortalité équivaut à prévoir les $\{k_t\}$ futurs, soient k_{2011} , k_{2012} , etc. Puisqu'il s'agit d'une série temporelle, les auteurs proposent d'utiliser un processus autorégressif (ARIMA) afin de modéliser la série des $\{k_t\}$ et d'anticiper les futurs niveaux de mortalité. Il sera alors possible à partir de ces derniers de calculer les futurs taux de mortalité pour les âges souhaités. Plusieurs modèles ARIMA seront testés dans ce travail pour modéliser les séries de $\{k_t\}$ relatives aux hommes et aux femmes. Le plus performant uniquement sera retenu.

Toutefois, prenons ici l'exemple que les $\{k_t\}$ suivent un processus autorégressif d'ordre un avec constante. Ce modèle AR(1) s'écrit alors :

$$k_t = \theta + \phi k_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ où } \varepsilon_t \sim i. i. d N(0, \sigma^2)$$

avec $\phi < 1$.

Pour commencer, θ et ϕ doivent être estimés à l'aide d'une méthode des moindres carrés non linéaire, et la variance des résidus ε_t calculée.

Il est ensuite possible de simuler une multitude de trajectoires possibles pour les futurs k . Une trajectoire de k comprend vingt valeurs, une pour chaque année comprise entre 2011 et 2030. Prenons l'exemple d'une entre elle. Au début de l'année 2011, k_{2010} est supposé être connu. En revanche, k_{2011} , k_{2012} , etc. doivent être simulés. Nous avons alors :

$$\tilde{k}_{2011} = \theta + \phi k_{2010} + \tilde{\varepsilon}_{2011}$$

$$\tilde{k}_{2012} = \theta + \phi \tilde{k}_{2011} + \tilde{\varepsilon}_{2012}$$

...

$$\tilde{k}_{2030} = \theta + \phi \tilde{k}_{2029} + \tilde{\varepsilon}_{2030}$$

où $\tilde{\varepsilon}_{2011}$, $\tilde{\varepsilon}_{2012}$, etc. sont des tirages indépendants d'une loi Normale de moyenne nulle et de variance σ^2 , σ^2 étant la variance des résidus du modèle AR(1).

Remarquons ici que \tilde{k}_{2012} est simulé à partir de la valeur \tilde{k}_{2011} . simulée pour cette même trajectoire. Il en va de la même logique pour les k suivants.

Une fois les différentes trajectoires simulées, il est possible d'en déduire des trajectoires de taux de survie. Soit $\tilde{s}_{x,t}^r$ le taux de survie simulé pour une personne d'âge x en l'année t . Puisque la population initiale est âgée de 65 ans en 2011, nous calculons pour chaque simulation les valeurs suivantes :

$$\tilde{s}_{65,2011}^r = 1 - \exp(a_{65} + b_{65} \tilde{k}_{2011})$$

$$\tilde{s}_{66,2012}^r = 1 - \exp(a_{66} + b_{66} \tilde{k}_{2012})$$

...

$$\tilde{s}_{84,2030}^r = 1 - \exp(a_{84} + b_{84}\tilde{k}_{2030})$$

Il est ensuite possible de calculer l'ISS fin 2015, 2020, 2025 et 2030 pour chaque trajectoire :

$$ISS_{2015} = 10000 \times \tilde{s}_{65,2011}^r \times \tilde{s}_{66,2012}^r \times \tilde{s}_{67,2013}^r \times \tilde{s}_{68,2014}^r \times \tilde{s}_{69,2015}^r$$

$$ISS_{2020} = ISS_{2015} \times \tilde{s}_{70,2016}^r \times \tilde{s}_{71,2017}^r \times \tilde{s}_{72,2018}^r \times \tilde{s}_{73,2019}^r \times \tilde{s}_{74,2020}^r$$

$$ISS_{2025} = ISS_{2020} \times \tilde{s}_{75,2021}^{h,r} \times \tilde{s}_{76,2022}^{h,r} \times \tilde{s}_{77,2023}^{h,r} \times \tilde{s}_{78,2024}^{h,r} \times \tilde{s}_{79,2025}^{h,r}$$

$$ISS_{2030} = ISS_{2025} \times \tilde{s}_{80,2026}^{h,r} \times \tilde{s}_{81,2027}^{h,r} \times \tilde{s}_{82,2028}^{h,r} \times \tilde{s}_{83,2029}^{h,r} \times \tilde{s}_{84,2030}^{h,r}$$

Les ISS des hommes et des femmes ne sont jamais supposés être égaux. En effet, le modèle de Lee et Carter est estimé séparément pour les deux sexes. Les $\{a_x\}$, $\{b_x\}$ et $\{k_t\}$ sont donc différents, ce qui donne lieu à des prévisions distinctes.

Au final, nous obtenons autant de valeurs possibles pour l'ISS fin 2015, 2020, 2025 et 2030 que nous ne simulons de trajectoires différentes pour les k . Le niveau de l'ISS à la fin de chacune de ces quatre années peut donc être considéré comme une variable aléatoire. Nous avons ainsi quatre variables aléatoires, correspondant respectivement au niveau de l'ISS fin 2015, 2020, 2025 et 2030. Étant donné que la taille de la population initiale est de 10000 personnes, ces variables prennent des valeurs uniquement comprises entre 0 et 10000.

Soulignons ici que les simulations des k sont effectuées sous une mesure historique. Elles ne pouvaient pas être réalisées sous la mesure risque-neutre, puisque celle-ci est non unique en raison du caractère incomplet du marché. Dans le cas risque-neutre, il suffirait d'effectuer les moyennes de l'ISS fin 2015, 2020, 2025 et 2030 pour toutes les trajectoires, et de les actualiser au taux sans risque pour évaluer les FS et SVS. Dans notre cas, nous allons avoir recours à la transformation de Wang afin d'ajuster pour le risque les valeurs prises par les ISS, de manière à ce qu'elles puissent finalement être actualisées au taux sans risque.

E) Calcul de l'indice de survie simulé et ajusté pour le risque

La transformation de Wang se base sur une distorsion de la fonction de distribution cumulative (FDC) d'une variable aléatoire X , de façon à obtenir une nouvelle FDC ajustée pour le risque. Soit $F_X(x)$ la FDC de la variable X , et $F_X^*(x)$, celle obtenue après application de la transformation. Alors,

$$F^*(x) = \Phi[\Phi^{-1}(F(x)) - \lambda]$$

où Φ est la fonction de distribution cumulative de la loi normale standard, et λ la prime de risque adaptée à la variable aléatoire X .

Cette formule est applicable dans le cas d'une variable aléatoire unique, ou bien dans le cas de variables aléatoires indépendantes auxquelles la transformation peut être appliquée de façon séparée.

Soient X_1 , X_2 , X_3 et X_4 l'écriture sous forme de variables aléatoires de l'ISS respectivement fin 2015, 2020, 2025 et 2030.

Dans le cas des FS, il n'y a qu'un seul échange de flux monétaires à l'échéance. Par conséquent, nous pouvons appliquer la transformation de Wang (2000). Pour un FS 15 ans, nous avons alors :

$$F_{X_3}^f(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_3}(x) \right) - \lambda_3 \right]$$

où λ_3 est la prime de risque considérée pour l'incertitude entourant l'ISS fin 2025.

Dans le cas d'un swap vanille de survie, prenons l'exemple d'un SVS 15 ans. Trois échanges de flux monétaires seront alors effectués ; ils dépendront de l'ISR fin 2015, 2020 et 2025. Or, ces trois valeurs de l'ISR sont corrélées. Par exemple, plus le nombre observé de survivants fin 2020 sera faible, plus celui observé fin 2025 le sera également. Par conséquent, les trois variables aléatoires X_1 , X_2 , et X_3 sont dépendantes, et la méthodologie présentée dans Wang (2000) ne s'applique pas.

Toutefois, Wang (2007) propose une extension du modèle dans le cas où les variables aléatoires considérées ne sont pas indépendantes. La transformation s'écrit alors :

$$F_{X_i}^*(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_i}(x) \right) - \beta_i \right]$$

$$\text{où } \beta_i = \sum_{j=1}^k \rho_{X_i, X_j} \lambda_j$$

Les variables aléatoires X_i doivent être caractérisées par une copule Normale de corrélation.

Plus précisément dans le cas d'un SVS 15 ans, nous avons :

$$F_{X_1}^{s15}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x) \right) - \beta_1^{s15} \right], \text{ où } \beta_1^{s15} = \lambda_1 + \rho_{X_1, X_2} \lambda_2 + \rho_{X_1, X_3} \lambda_3$$

$$F_{X_2}^{s15}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_2}(x) \right) - \beta_2^{s15} \right], \text{ où } \beta_2^{s15} = \lambda_2 + \rho_{X_2, X_1} \lambda_1 + \rho_{X_2, X_3} \lambda_3$$

$$F_{X_3}^{s15}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_3}(x) \right) - \beta_3^{s15} \right], \text{ où } \beta_3^{s15} = \lambda_3 + \rho_{X_3, X_1} \lambda_1 + \rho_{X_3, X_2} \lambda_2$$

Cette méthode permet de fixer la prime λ à des niveaux différents pour chaque date considérée de l'ISS. Il sera par exemple possible d'assigner une prime de risque plus importante pour l'ISS fin 2030 que l'ISS fin 2015. Par ailleurs, notons que la FDC ajustée pour le risque de l'ISS fin 2025 sera différente pour le FS 15 ans et le SVS 15 ans. De même, elle sera différente entre un SVS 15 ans et un SVS 20 ans, puisque des termes de corrélation avec la variable X_4 se rajouteront alors aux calculs des β .

Il apparaît clairement qu'il est indispensable de connaître les FDC des variables aléatoires pour être en mesure d'appliquer la transformation de Wang. Celles-ci peuvent être estimées à l'aide des nombreuses valeurs simulées pour l'ISS fin 2015, 2020, 2025 et 2030. Tel que nous l'avons mentionné précédemment, l'ISS est toujours compris entre 0 et 10000. Pour chacune des quatre années, il est donc possible d'effectuer un décompte du nombre de fois sur le total des trajectoires où l'indice a été inférieur ou égal à j , avec j compris entre 0 et 10000. Une fois le décompte effectué, il est divisé par le nombre de trajectoires simulées. Nous obtenons alors, pour tout j compris entre 0 et 10000, la probabilité que le nombre

de survivants soit inférieure ou égale à j , ce qui équivaut à une fonction de distribution cumulative de l'ISS considéré.

Une fois les FDC de l'ISS fin 2015, 2020, 2025 et 2030 estimées, il suffit d'appliquer la transformation de Wang expliquée ci-dessus. Il faut ensuite calculer l'espérance du nombre de survivants simulé et ajusté à chaque date de paiement, soient l'ISSAR.

Dans le cas du FS 15 ans, nous aurons alors :

$$ISSAR_{2025}^f = 10000 - \int_0^{10000} F_{X_3}^f(x) dx$$

Dans le cas du SVS 15 ans, il s'agira de :

$$ISSAR_{2015}^{s15} = 10000 - \int_0^{10000} F_{X_1}^{s15}(x) dx$$

$$ISSAR_{2020}^{s15} = 10000 - \int_0^{10000} F_{X_2}^{s15}(x) dx$$

$$ISSAR_{2025}^{s15} = 10000 - \int_0^{10000} F_{X_3}^{s15}(x) dx$$

Enfin, telle qu'écrite plus haut dans ce travail, la prime π du FS 15 ans s'écrit alors :

$$\pi^{f15} = \frac{ISSAR_{2025}^f}{ISA_{2025}} - 1$$

Par ailleurs, la prime π du SVS 15 ans s'écrit :

$$\pi^{s15} = \frac{\frac{ISSAR_{2015}^{s15}}{(1+r)^5} + \frac{ISSAR_{2020}^{s15}}{(1+r)^{10}} + \frac{ISSAR_{2025}^{s15}}{(1+r)^{15}}}{\frac{ISA_{2015}}{(1+r)^5} + \frac{ISA_{2020}}{(1+r)^{10}} + \frac{ISA_{2025}}{(1+r)^{15}}} - 1$$

V- Application du modèle

A) Calcul de l'indice de survie anticipé

Tel qu'expliqué ci-dessus, l'ISA se calcule grâce à la Table RP-2000. Toutefois, il existe plusieurs de ces tables. La première est calculée à partir d'une population de personnes dites actives par opposition aux personnes dites retraitées ; elle contient des taux de mortalité pour les âges compris entre 1 et 70 ans. La deuxième, est

Table 1 Table RP-2000 et facteurs d'amélioration AA pour les hommes et les femmes				
Note : la Table RP-2000 contient les taux de mortalité ($m_{x,t1}^a$) proposés comme référence pour l'année 2000 par la Société des Actuaires. Ils sont regroupés par âge x et par sexe. Il est possible de leur appliquer des facteurs d'amélioration (AA) afin de prévoir les taux de mortalité des années suivantes ($t1$) : $m_{x,t1}^a = m_{x,2000}^a \times (1 - AA_x)^{t1-2000}$.				
Âge	Hommes		Femmes	
	Table RP-2000	AA	Table RP-2000	AA
65	0,013419	0,014	0,010364	0,005
66	0,014868	0,013	0,011413	0,005
67	0,016460	0,013	0,012540	0,005
68	0,018200	0,014	0,013771	0,005
69	0,020105	0,014	0,015153	0,005
70	0,022206	0,015	0,016742	0,005
71	0,024570	0,015	0,018579	0,006
72	0,027281	0,015	0,020665	0,006
73	0,030387	0,015	0,022970	0,007
74	0,033900	0,015	0,025458	0,007
75	0,037834	0,014	0,028106	0,008
76	0,042169	0,014	0,030966	0,008
77	0,046906	0,013	0,034105	0,007
78	0,052123	0,012	0,037595	0,007
79	0,057927	0,011	0,041506	0,007
80	0,064368	0,01	0,045879	0,007
81	0,072041	0,009	0,050780	0,007
82	0,080486	0,008	0,056294	0,007
83	0,089718	0,008	0,062506	0,007
84	0,099779	0,007	0,069517	0,007

déduite à partir d'un groupe d'individus retraités et en santé ; elle contient les données pour les personnes âgées de 50 à 120 ans. Enfin, la troisième table est une combinaison des deux premières ; elle contient ainsi des taux de mortalité pour

tout âge compris entre 1 et 120 ans. Dans cette étude, nous nous intéressons principalement aux personnes retraitées de la tranche d'âges 65-89 ans. Par conséquent, la deuxième table proposée par la Société des Actuaires semble être la plus pertinente à utiliser.

La Table RP-2000 choisie, ainsi que les facteurs d'amélioration qui nous intéressent, sont présentés dans la Table 1. Les taux de mortalité des hommes sont systématiquement supérieurs à ceux des femmes. Plus l'âge considéré augmente, plus cet écart a tendance à se creuser. Il est par exemple de 50 points de base (PB) à 70 ans versus 302 PB à 84 ans. Toutefois, les facteurs d'amélioration des hommes sont également au-dessus de ceux des femmes. Ils peuvent être jusqu'à

Table 2 Nombre de survivants anticipé					
Note : les $\{s_{x,t}^a\}$ sont les taux de survie calculées pour une cohorte de canadien(ne)s âgé(e)s de 65 ans en 2011, 66 en 2012, etc. à l'aide de la Table RP-2000 et des facteurs AA. L'ISA est l'indice de survie qui peut être déduit pour cette cohorte, lorsque la taille initiale de cette dernière est fixée à 10000 individus début 2011.					
Fin de l'année	Âge	$s_{x,t}^a$		ISA	
		Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
2011	65	0,9885	0,9902	9885	9902
2012	66	0,9873	0,9893	9759	9796
2013	67	0,9861	0,9883	9624	9680
2014	68	0,9851	0,9872	9480	9556
2015	69	0,9837	0,9859	9326	9422
2016	70	0,9826	0,9845	9163	9276
2017	71	0,9810	0,9832	8989	9121
2018	72	0,9792	0,9815	8802	8952
2019	73	0,9772	0,9799	8602	8772
2020	74	0,9749	0,9779	8386	8578
2021	75	0,9719	0,9763	8150	8374
2022	76	0,9691	0,9740	7898	8157
2023	77	0,9653	0,9710	7624	7920
2024	78	0,9610	0,9682	7327	7668
2025	79	0,9561	0,9652	7005	7401
2026	80	0,9504	0,9618	6657	7118
2027	81	0,9436	0,9580	6282	6819
2028	82	0,9357	0,9538	5878	6504
2029	83	0,9289	0,9490	5460	6172
2030	84	0,9192	0,9437	5019	5825

trois fois plus élevés que ceux des femmes, comme c'est le cas à 70 ans. Par conséquent, la méthode des actuaires suggère que les taux de mortalités des

hommes sont supérieurs à ceux des femmes, mais qu'à l'avenir ils devraient diminuer plus rapidement que ceux de ces dernières.

La Table 2 présente les taux de survie, ainsi que les valeurs de l'ISA pour chaque année comprise entre 2011 et 2030. Toutefois, seules les valeurs de l'indice fin 2015, 2020, 2025 et 2030 seront utilisées dans l'évaluation des FS et SVS. Bien que les facteurs d'amélioration soient plus élevés pour le sexe masculin que féminin, les taux de survie de ce premier demeurent systématiquement inférieurs à ceux des femmes. Par conséquent, à mesure que les années s'écoulent, l'écart entre le nombre de survivants masculins et féminins se creuse. En 2030, environ 50% des hommes sont toujours en vie, tandis que la statistique s'élève à 58% pour les femmes.

B) Estimation des paramètres du modèle de Lee et Carter

1) Données

Afin de pouvoir estimer les paramètres du modèle de Lee et Carter, trois bases de données historiques sur la population canadienne sont nécessaires : les taux de mortalité et le nombre d'individus pour chaque âge et chaque sexe, ainsi que le nombre de décès total par sexe. Ces informations sont disponibles annuellement dans la Human Mortality Database.

Tel que nous l'avons montré dans la première partie de ce travail, les taux de mortalité ont eu tendance à évoluer différemment à partir de la deuxième moitié du XX^{ème} siècle. C'est pourquoi, seules les données de mortalité à partir de 1950 vont être utilisées pour estimer le modèle. En outre, la Human Mortality Database n'est à cette date pas complétée pour les années 2008, 2009, et 2010. Ce problème sera contourné par la suite. Par conséquent, nous possédons 58 années de données. Par ailleurs, le modèle sera estimé pour des tranches d'âges de cinq ans, et non pour chaque âge pris séparément. Ceci permettra de réduire le nombre de paramètres à estimer comparativement au nombre d'années de données. En effet, nous aurons cinq fois moins de $\{a_x\}$ et $\{b_x\}$ à évaluer. Enfin, la dernière tranche

d'âges sera celle des 85-89 ans. Au-delà de 90 ans, la population est bien moins nombreuse, ce qui rend les données historiques beaucoup plus variables d'une année à l'autre.

Les bases de données utilisées sont présentées en annexe.

2) Estimation des paramètres

La première étape d'estimation du modèle de Lee et Carter consiste à calculer les $\{a_x\}$ à l'aide de l'équation suivante :

$$a_x = \frac{1}{n} \sum_t \ln(m_{x,t}), \text{ pour tout } x.$$

Table 3 Paramètres $\{a_x\}$ calculés pour les hommes et les femmes canadiens

Note : les $\{a_x\}$ sont calculés pour la population canadienne, et sont égaux à : $a_x = \frac{1}{n} \sum_t \ln(m_{x,t})$, pour tout x . Ils s'interprètent comme la moyenne dans le temps du logarithme naturel des taux de mortalité à l'âge x .

Tranches d'âge	a_x	
	Hommes	Femmes
0	-4,2700	-4,4964
1-4	-7,3458	-7,5519
5-9	-7,9421	-8,2920
10-14	-7,9143	-8,3836
15-19	-6,8533	-7,7440
20-24	-6,5766	-7,6583
25-29	-6,6727	-7,5385
30-34	-6,5712	-7,2635
35-39	-6,3032	-6,8557
40-44	-5,9034	-6,4109
45-49	-5,4306	-5,9402
50-54	-4,9330	-5,4943
55-59	-4,4516	-5,0527
60-64	-3,9834	-4,6014
65-69	-3,5455	-4,1394
70-74	-3,1131	-3,6558
75-79	-2,6693	-3,1299
80-84	-2,2302	-2,6142
85-89	-1,7902	-2,0881

La Table 3 regroupe les $\{a_x\}$ par tranches d'âges de cinq ans pour les hommes et femmes canadiens. Les $\{a_x\}$ calculés pour la population masculine sont

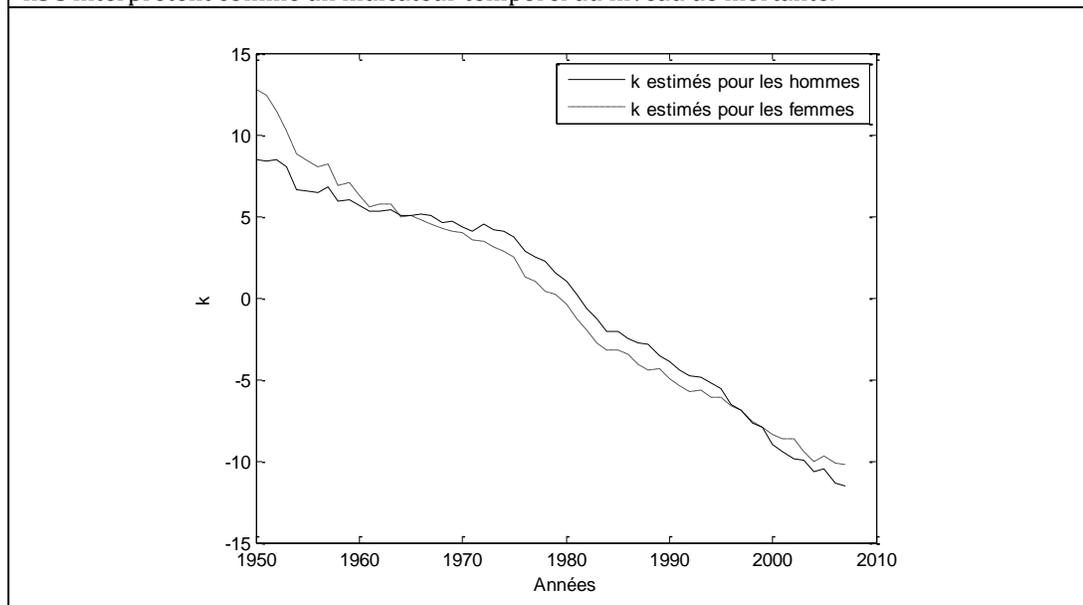
systématiquement supérieurs à ceux de la population féminine ; ainsi, quelques soit la tranche d'âges étudiée de 0 à 89 ans, les taux de mortalité des hommes ont été en moyenne supérieurs à ceux des femmes. Ce résultat est en ligne avec le fait que l'espérance de vie des femmes a été nettement plus grande que celle des hommes sur le dernier siècle. Par ailleurs, les $\{a_x\}$ sont une fonction croissante de x , ce qui reflète fidèlement l'augmentation attendue de la mortalité à des âges plus grands. En outre, remarquons que les taux de mortalités à l'âge 0 sont particulièrement élevés, reflétant les événements médicaux tels que la mort soudaine du nourrisson.

La deuxième étape consiste à calculer les $\{k_t\}$ de la manière suivante :

$$k_t = \sum_x \ln(m_{x,t}) - a_x, \text{ pour tout } t.$$

Figure 4 $\{k_t\}$ estimés pour les hommes et les femmes canadiens

Note : les $\{k_t\}$ sont calculés à l'aide de la formule suivante : $k_t = \sum_x \ln(m_{x,t}) - a_x$, pour tout t . Ils s'interprètent comme un indicateur temporel du niveau de mortalité.



Les valeurs des $\{k_t\}$ de 1950 à 2007 sont transcrites en annexe, et représentées sur la Figure 4. Tant pour les hommes que pour les femmes, les $\{k_t\}$ sont caractérisés par une tendance décroissante très marquée, s'interprétant comme une diminution des taux de mortalité de 1950 à 2007. De plus, la pente est davantage inclinée pour

les femmes que pour les hommes ; la mortalité s'est donc améliorée plus rapidement pour la population féminine que pour celle masculine.

La troisième étape est l'estimation des $\{b_x\}$ à l'aide de régressions linéaires, différentes pour chaque tranche d'âges, des Y_x sur les k_t , tels que :

$$Y_x = \ln(m_{x,t}) - a_x$$

Table 4 Estimation des $\{b_x\}$ pour la population canadienne masculine et féminine

Note : chaque b_x est le résultat d'une régression différente des $Y_x = \ln(m_{x,t}) - a_x$ sur les $\{k_t\}$. Les $\{b_x\}$ donnent la sensibilité des taux de mortalité de chaque âge à des changements dans les niveaux de mortalité agrégés.

Tranches d'âges	Hommes			Femmes		
	b_x	SEC	R ²	b_x	SEC	R ²
0	0,1144	2,7200	0,9123	0,1067	0,8733	0,9700
1-4	0,1103	1,0140	0,9629	0,1046	0,2401	0,9912
5-9	0,1094	0,3839	0,9854	0,0902	0,6138	0,9705
10-14	0,0811	0,2820	0,9806	0,0661	0,3699	0,9670
15-19	0,0441	0,9544	0,8148	0,0389	0,5505	0,8726
20-24	0,0452	0,3626	0,9243	0,0454	0,3001	0,9446
25-29	0,0382	0,1357	0,9589	0,0518	0,1859	0,9728
30-34	0,0351	0,2460	0,9153	0,0504	0,1220	0,9810
35-39	0,0376	0,2090	0,9360	0,0491	0,1236	0,9798
40-44	0,0448	0,1170	0,9738	0,0470	0,0970	0,9826
45-49	0,0496	0,1212	0,9777	0,0443	0,0687	0,9861
50-54	0,0514	0,1202	0,9794	0,0410	0,0642	0,9849
55-59	0,0490	0,1162	0,9781	0,0395	0,0429	0,9891
60-64	0,0453	0,1222	0,9732	0,0397	0,0470	0,9881
65-69	0,0392	0,1761	0,9498	0,0395	0,0570	0,9855
70-74	0,0337	0,1610	0,9384	0,0402	0,0560	0,9862
75-79	0,0297	0,0909	0,9544	0,0413	0,1033	0,9762
80-84	0,0229	0,0941	0,9232	0,0345	0,0617	0,9796
85-89	0,0190	0,0862	0,9008	0,0290	0,0830	0,9619

La Table 4 regroupe les $\{b_x\}$ estimés pour les hommes et les femmes canadiens, ainsi que la somme des erreurs au carré (SEC) et le R² de chaque régression effectuée. Tous les $\{b_x\}$ prennent des valeurs très significatives. En effet, pour tout x , la p-value est nulle pour le test d'hypothèses :

$$H_0: b_x = 0 \text{ et } H_1: b_x \neq 0$$

Par conséquent, les p-values n'ont pas été transcrites dans le tableau. D'après ces résultats, les très jeunes âges des deux sexes ont été les plus sensibles à la

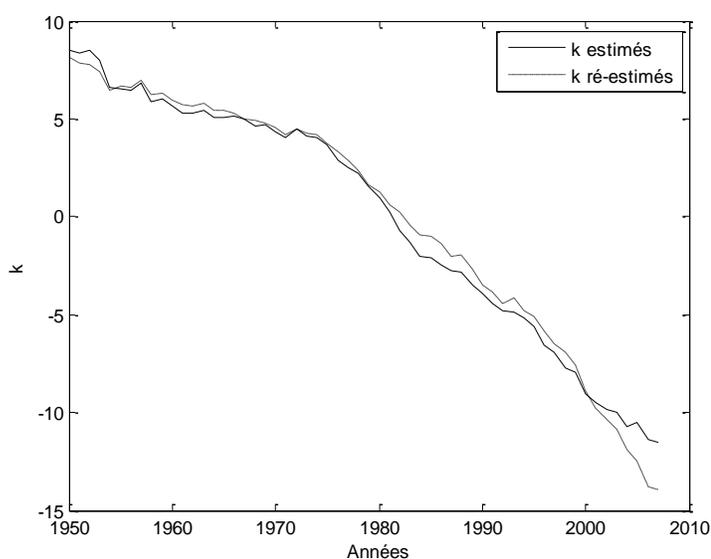
diminution du niveau général des taux de mortalité. En outre, pour les cinq tranches d'âges les plus élevées, les taux de mortalité des femmes ont montré plus de sensibilité que ceux des hommes aux changements des $\{k_t\}$. Concernant la qualité de la régression, les R^2 sont très élevés ; ils sont dans la majorité des cas supérieurs à 90%. Aussi, les SEC) de chacune des régressions sont relativement faibles, et ce, surtout à partir de 40 ans.

Dans un quatrième temps, Lee et Carter proposent de ré-estimer les $\{k_t\}$ de manière itérative tel que :

$$D_t = \sum_x N_{x,t} e^{a_x + b_x k_t}, \text{ pour tout } t.$$

Figure 5 $\{k_t\}$ estimés et ré-estimés pour les hommes canadiens

Note : les $\{k_t\}$ ré-estimés de la population canadienne masculine sont obtenus par une procédure itérative, telle que : $D_t = \sum_x N_{x,t} e^{a_x + b_x k_t}$, pour tout t . $N_{x,t}$ est la taille de la population masculine d'âge x en l'année t et D_t le nombre de décès, tout âge confondu, en l'année t . Ils s'interprètent comme un indicateur temporel du niveau de mortalité.



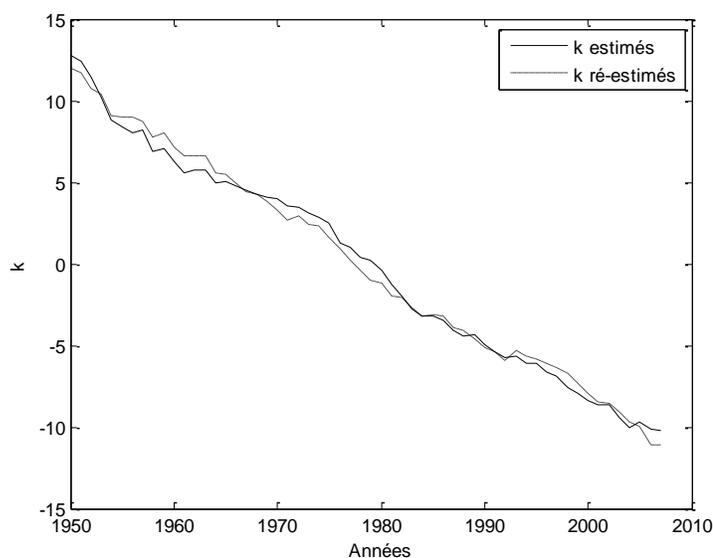
Les résultats numériques sont présentés en annexe. Les Figures 5 et 6 permettent de comparer respectivement pour les hommes et les femmes les deux séries de $\{k_t\}$. Dans le cas des hommes, la courbe des $\{k_t\}$ ré-estimés se situe principalement au-dessus de celle des premiers $\{k_t\}$ calculés ; la seconde série suppose donc des niveaux de mortalité historiques plus élevés. Toutefois, depuis

les années 2000, nous pouvons observer la situation inverse. L'écart est d'autant plus creusé pour les dernières années d'observation.

Dans le cas des femmes, les $\{k_t\}$ ré-estimés de situe alternativement au-dessus et en-dessous de la courbe des premiers $\{k_t\}$ calculés. En outre, tout comme pour les hommes, les $\{k_t\}$ ré-estimés à partir du milieu des années 2000 sont inférieurs à la première série calculée. Par conséquent, les prévisions des futurs $\{k_t\}$ faites à partir des séries ré-estimées donneront probablement des niveaux de mortalité futurs plus faibles que si nous utilisons les séries initiales.

Figure 6 $\{k_t\}$ estimés et ré-estimés pour les femmes canadiennes

Note : les $\{k_t\}$ ré-estimés de la population canadienne féminine sont obtenus par une procédure itérative, telle que : $D_t = \sum_x N_{x,t} e^{a_x + b_x k_t}$, pour tout t . $N_{x,t}$ est la taille de la population féminine d'âge x en l'année t et D_t le nombre de décès, tout âge confondu, en l'année t .



3) Modélisation des $\{k_t\}$

La cinquième et dernière étape d'estimation du modèle de Lee et Carter consiste à modéliser sous forme d'une série temporelle les $\{k_t\}$ ré-estimés pour les hommes et les femmes canadiens.

Lee et Carter (1992) proposent d'utiliser le modèle AR(1) suivant :

$$k_t = \theta + \phi k_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ où } \varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2)$$

Toutefois, nous avons testé plusieurs variantes de processus AR(1). Leur performance respective sont jugées à l'aide des critères d'information Akaike (AIC) et Bayesian (BIC). Ces derniers permettent de comparer plusieurs modèles sur la base de la somme des résidus au carré et du nombre de paramètres à estimer : plus le critère prend une valeur petite, plus le modèle est performant. Le critère BIC pénalise davantage que l'AIC l'ajout de variables explicatives. Il permet ainsi d'obtenir des modèles plus parcimonieux. Les différents modèles testés ont été estimés à l'aide de la méthode des moindres carrés non linéaire dans RATS.

Modèles	Description du modèle	AIC	BIC
N°1 : $k_t = \phi k_{t-1} + \varepsilon_t$	AR(1) sans constante, et $\phi < 1$	-1,3165	-1.2807
N°2 : $k_t = \theta + k_{t-1} + \varepsilon_t$	AR(1) avec constante, et $\phi = 1$	-1.9723	-1.9365
N°3 : $k_t = \theta + \phi k_{t-1} + \varepsilon_t$	AR(1) avec constante, et $\phi < 1$	-2.2240	-2.1523
N°4 : $k_t = \delta t + \phi k_{t-1} + \varepsilon_t$	AR(1) sans constante, $\phi < 1$, et tendance linéaire	-2.2329	-2.1612
N°5 : $k_t = \theta + \delta t + \phi k_{t-1} + \varepsilon_t$	AR(1) avec constante, $\phi < 1$, et tendance linéaire	-2.2015	-2.0940
N°6	AR(1) sans constante, $\phi < 1$, et bris structurel	-2.2519	-2.1443
N°7	AR(1) avec constante, $\phi < 1$, et bris structurel	-2.2788	-2.1354

Pour la série $\{k_t\}$ des hommes, nous observons une forte tendance baissière, ainsi que la présence d'un léger bris structurel au milieu des années 1970. En effet, à partir de 1975, la pente négative semble être plus prononcée. Par conséquent, nous avons décidé de tester sept processus AR(1) différents. La Table 5 contient une description de ces modèles, ainsi que les critères AIC et BIC qui y sont associés. Selon l'AIC, le modèle n°7 serait le plus performant : un AR(1) avec constante, et

tenant compte du bris structurel. En outre, le BIC incite à choisir le modèle n°4 : un AR(1) sans constante, mais tenant compte d'une tendance linéaire. Nous avons choisi de retenir ce dernier plutôt que le n°7 afin de suivre le principe de parcimonie : en effet, deux paramètres en moins sont à estimer, ce qui s'est reflété dans la valeur du BIC.

Pour le modèle n°4, $\delta = -0,0128$ et $\phi = 0,9967$. Les p-values associées aux deux tests suivants :

$$\begin{cases} H_0: \delta = 0 \\ H_1: \delta \neq 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} H_0: \phi = 0 \\ H_1: \phi \neq 0 \end{cases}$$

sont égales à zéro, ce qui permet de rejeter H_0 . Par conséquent, les deux coefficients sont très significatifs. Par ailleurs, la valeur prise par ϕ est particulièrement élevée ; il semble donc exister une très forte autocorrélation dans les $\{k_t\}$. Aussi, le coefficient de tendance est négatif, ce qui était à attendre en raison de la caractéristique baissière de la série. Enfin, selon le R^2 , ce modèle permet d'expliquer 99,74% de la variance de la série.

Les résidus du modèle n°4 ont un écart-type de 31,90%, et une moyenne de 0,0422 non significativement différente de zéro. Par ailleurs, la distribution des résidus s'approche d'une loi Normale selon les statistiques suivante. Premièrement, le coefficient d'asymétrie (Sk) est de -0,1341, indiquant une légère asymétrie négative. Pour le test $H_0: Sk = 0$ et $H_1: Sk \neq 0$, la p-value est de 0,6872, ce qui ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle.

Deuxièmement, le coefficient d'aplatissement en excès⁶ (Ku) est de 0,8864. Les queues de la distribution des résidus sont donc légèrement plus épaisses que celles d'une distribution Normale. Toutefois, pour le test $H_0: Ku = 0$ et $H_1: Ku \neq 0$, la p-value est de 0,1994, ce qui ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle. Par conséquent, ces deux coefficients sont non significativement différents de zéro.

⁶ Le coefficient d'aplatissement en excès correspond à l'écart par rapport au coefficient d'aplatissement d'une loi Normale, égal à 3.

Troisièmement, la statistique de Jarque-Bera (JB) est de 2,0370, et pour le test $H_0: JB = 0$ et $H_1: JB \neq 0$, la p-value est de 0,3611. L'hypothèse nulle n'est donc pas rejetée. Ces trois statistiques permettent de confirmer que la distribution des résidus peut être considérée comme suivant une loi Normale de moyenne nulle et d'écart-type 31,90%. Enfin, nous avons calculé la statistique Ljung-Box 15 (LB15) afin de savoir s'il y a toujours présence d'autocorrélations dans les résidus, et ce jusqu'à 15 retards. Elle est égale à 16,9290, et le test d'hypothèses $H_0: LB15 = 0$ et $H_1: LB15 \neq 0$ obtient une p-value de 0,3231. Ainsi, il n'y a plus d'autocorrélations dans les résidus. Le modèle estimé permet donc de capter la majorité de l'autocorrélation présente dans la série des $\{k_t\}$ des hommes canadiens.

Pour la série $\{k_t\}$ des femmes, nous observons une tendance baissière, sans aucun bris structurel apparent. Nous avons testé cinq processus pour les femmes. La Table 6 regroupe ces différents modèles, ainsi que leurs AIC et BIC respectifs. Ici les deux critères nous incitent à choisir le modèle n°5 : un processus AR(1) avec constante et présence d'une tendance.

Table 6 Modèles de séries temporelles testés pour la population féminine, et coefficients AIC et BIC associés			
Note : les modèles ont été appliqués à la série des $\{k_t\}$ ré-estimés des femmes, et régressé dans RATS à l'aide d'une méthode des moindres carrés non linéaire. AIC et BIC sont respectivement les critères d'information Akaike et Bayesian.			
Modèles	Description du modèle	AIC	BIC
N°1 : $k_t = \phi k_{t-1} + \varepsilon_t$	AR(1) sans constante, et $\phi < 1$	-1,2213	-1,1854
N°2 : $k_t = \theta + k_{t-1} + \varepsilon_t$	AR(1) avec constante, et $\phi = 1$	-2,0604	-2,0245
N°3 : $k_t = \theta + \phi k_{t-1} + \varepsilon_t$	AR(1) avec constante, et $\phi < 1$	-2,0350	-1,9633
N°4 : $k_t = \delta t + \phi k_{t-1} + \varepsilon_t$	AR(1) sans constante, $\phi < 1$, et tendance linéaire	-2,0696	-1,9979
N°5 : $k_t = \theta + \delta t + \phi k_{t-1} + \varepsilon_t$	AR(1) avec constante, $\phi < 1$, et tendance linéaire	-2,1395	-2,0319

Pour le modèle n°5, $\theta = 2,4940$, $\delta = -0,0948$ et $\phi = 0,7539$. Les tests de significativité donnent respectivement des p-values de 0,0178, 0,0063 et 0. Les trois coefficients sont donc très significatifs. Le R^2 s'élève à 99,74%. La constante est relativement élevée comparativement à la valeur nulle qu'elle prend pour la

série des homes. Le coefficient de tendance est négatif tout comme dans le cas de la population masculine. Enfin, le coefficient autorégressif est bien plus faible pour les femmes que pour les hommes.

Les résidus du modèle n°5 ont une moyenne nulle et un écart-type de 32,84%. Par ailleurs, la distribution des résidus s'approche d'une loi Normale. Les coefficients S_k et K_u sont respectivement de -0,0935 et -0,3285, ce qui est caractéristique d'une distribution ayant une asymétrie négative et des queues moins épaisses que celles d'une loi Normale. Toutefois, les tests de significativité de ces deux coefficients donnent respectivement des p-values de 0,7789 et 0,6343 ; ils ne sont donc pas significativement différents de zéro. De plus, la statistique JB est de 0,3394 et est non différente de zéro selon sa p-value de 0,8439. Par conséquent, les résidus suivent une distribution approximativement Normale de moyenne 0 et d'écart-type 32,84%. Enfin, la statistique LB15 est de 15,8431, et non significativement différente de zéro avec une p-value de 0,3925.

C) Estimation des fonctions de distribution cumulatives relatives à l'indice de survie simulé

1) Simulation des $\{k_t\}$

Une fois le modèle de Lee et Carter estimé, et les $\{k_t\}$ modélisés, il est possible de simuler les futurs taux de mortalité. Tout d'abord, il faut construire plusieurs trajectoires possibles pour les k des vingt prochaines années : 2011, 2012, ... 2030.

Dans le cas des hommes, le modèle autorégressif choisi est le suivant :

$$k_t = -0,0128t + 0,9967k_{t-1} + \varepsilon_t \text{ avec } \varepsilon_t \sim N(0; \sigma = 0,3190)$$

Le vecteur t permet de tenir compte de la présence d'une tendance linéaire. Il prend la valeur de 1 en 1950, 2 en 1951, ... 61 en 2010, 62 en 2011, etc. Pour simuler \tilde{k}_{2011} , nous avons besoin de connaître k_{2010} . Or, les bases de données de mortalité sont longues à actualiser. Par conséquent, seules les données jusqu'en

2007 sont disponibles. Nous avons donc effectué des prévisions des \tilde{k}_{2008} , \tilde{k}_{2009} , et \tilde{k}_{2010} de la manière suivante :

$$\tilde{k}_{2008} = -0,0128 \times 59 + 0,9967 \times k_{2007}$$

$$\tilde{k}_{2009} = -0,0128 \times 60 + 0,9967 \times \tilde{k}_{2008}$$

$$\tilde{k}_{2010} = -0,0128 \times 61 + 0,9967 \times \tilde{k}_{2009}$$

Nous obtenons alors $\tilde{k}_{2008} = -14,6282$, $\tilde{k}_{2009} = -15,3465$, et $\tilde{k}_{2010} = -16,0753$.

Il est ensuite possible de simuler les \tilde{k}_{2011} , \tilde{k}_{2012} , etc. en procédant de la façon suivante :

$$\tilde{k}_{2011} = -0,0128 \times 62 + 0,9967 \times \tilde{k}_{2010} + \tilde{\varepsilon}_{2011}$$

$$\tilde{k}_{2012} = -0,0128 \times 63 + 0,9967 \times \tilde{k}_{2011} + \tilde{\varepsilon}_{2012}$$

...

$$\tilde{k}_{2030} = -0,0128 \times 81 + 0,9967 \times \tilde{k}_{2029} + \tilde{\varepsilon}_{2030}$$

avec $\tilde{\varepsilon}_{2011}$, $\tilde{\varepsilon}_{2012}$, ... $\tilde{\varepsilon}_{2030}$ des tirages indépendants d'une loi Normale de moyenne nulle et d'écart-type 31,90%. Il s'agit des caractéristiques de la distribution des résidus du processus AR(1) utilisé pour modéliser la série $\{k_t\}$ des hommes. Une trajectoire de k est un vecteur comprenant une valeur possible pour k_{2011} , k_{2012} , ... et k_{2030} . Nous avons simulé 200000 trajectoires de k , ce qui revient à effectuer 200000×20 tirages de loi Normale. La Figure 7 présente les différentes trajectoires de k simulées pour les hommes.

Dans le cas des femmes, le modèle autorégressif choisit s'écrit de la manière suivante :

$$k_t = 2,4940 - 0,0948t + 0,7539k_{t-1} + \varepsilon_t \text{ avec } \varepsilon_t \sim N(0; \sigma = 0,3284)$$

Le vecteur t est identique pour les hommes et les femmes. Tout comme dans le cas des hommes, nous avons dû estimer les \tilde{k}_{2008} , \tilde{k}_{2009} , et \tilde{k}_{2010} :

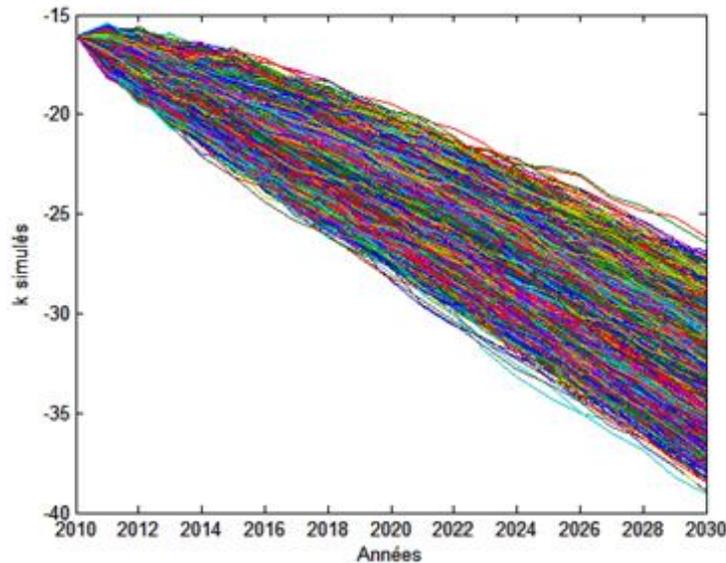
$$\tilde{k}_{2008} = 2,4940 - 0,0948 \times 59 + 0,7539k_{2007}$$

$$\tilde{k}_{2009} = 2,4940 - 0,0948 \times 60 + 0,7539\tilde{k}_{2008}$$

$$\tilde{k}_{2010} = 2,4940 - 0,0948 \times 61 + 0,7539\tilde{k}_{2009}$$

Figure 7 Trajectoires simulées pour les $\{k_t\}$ de la population canadienne masculine

Note : les simulations des trajectoires de $\{k_t\}$ ont été effectuées à l'aide du modèle AR(1) : $k_t = -0,0128t + 0,9967k_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t \sim N(0; \sigma = 0,3190)$ et t un vecteur de tendance égal à 62 ans 2011, 62 en 2012, etc.



Nous obtenons alors $\tilde{k}_{2008} = -11,4885$, $\tilde{k}_{2009} = -11,8571$, et $\tilde{k}_{2010} = -12,2298$.

Enfin, les k sont simulés de la manière suivante :

$$\tilde{k}_{2011} = 2,4940 - 0,0948 \times 62 + 0,7539\tilde{k}_{2010} + \tilde{\varepsilon}_{2011}$$

$$\tilde{k}_{2012} = 2,4940 - 0,0948 \times 63 + 0,7539\tilde{k}_{2011} + \tilde{\varepsilon}_{2012}$$

...

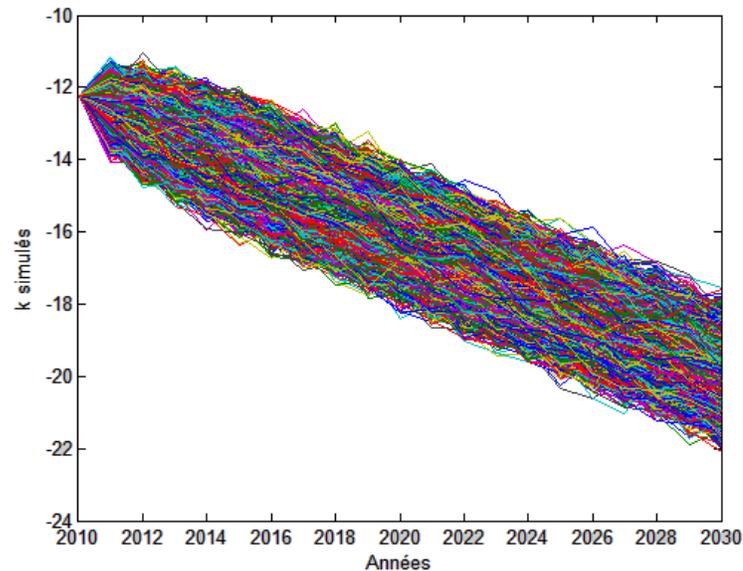
$$\tilde{k}_{2030} = 2,4940 - 0,0948 \times 63 + 0,7539\tilde{k}_{2029} + \tilde{\varepsilon}_{2030}$$

avec $\tilde{\varepsilon}_{2011}$, $\tilde{\varepsilon}_{2012}$, ... $\tilde{\varepsilon}_{2030}$ des tirages indépendants d'une loi Normale de moyenne nulle et d'écart-type 32,84%.

Dans une même trajectoire, un \tilde{k}_t est plus fortement influencé par le \tilde{k}_{t-1} dans le cas des hommes que dans celui des femmes, en raison du coefficient autorégressif plus élevé. Aussi, les trajectoires simulées pour les hommes sont davantage inclinées que celles simulées pour les femmes. Ainsi, le modèle de Lee et Carter semble prévoir une diminution plus rapide des niveaux de mortalité pour la population masculine que féminine. Ce résultat concorde avec les prévisions des actuaires.

Figure 8 Trajectoires simulées pour les $\{k_t\}$ de la population canadienne féminine

Note : les simulations des trajectoires de $\{k_t\}$ ont été effectuées à l'aide du modèle AR(1) : $k_t = 2,4940 - 0,0948t + 0,7539k_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t \sim N(0; \sigma = 0,3284)$ et t un vecteur de tendance égal à 62 ans 2011, 62 en 2012, etc.



2) Calcul de l'indice de survie simulé

Nous pouvons à présent calculer l'ISS pour chaque trajectoire à l'aide de la méthodologie expliquée dans la quatrième partie de ce travail. Par la suite, nous estimerons les fonctions de distribution cumulatives de l'ISS en 2015, 2020, 2025 et 2030 de manière à être en mesure d'appliquer la transformation de Wang.

Toutefois, nous avons décidé de présenter ici les moyennes de l'ISS sur les 200000 trajectoires pour chacune des vingt prochaines années. Bien que ces moyennes ne soient pas nécessaires à l'évaluation des FS et SVS, elles permettent une comparaison avec l'ISA, ainsi qu'une comparaison entre la population masculine et féminine. Les résultats obtenus sont transcrits dans la Table 7. Nous avons également représenté graphiquement l'ISS moyen et l'ISA des deux sexes pour les vingt prochaines années, cf. la Figure 9.

Table 7 ISS moyen de 2010 à 2030

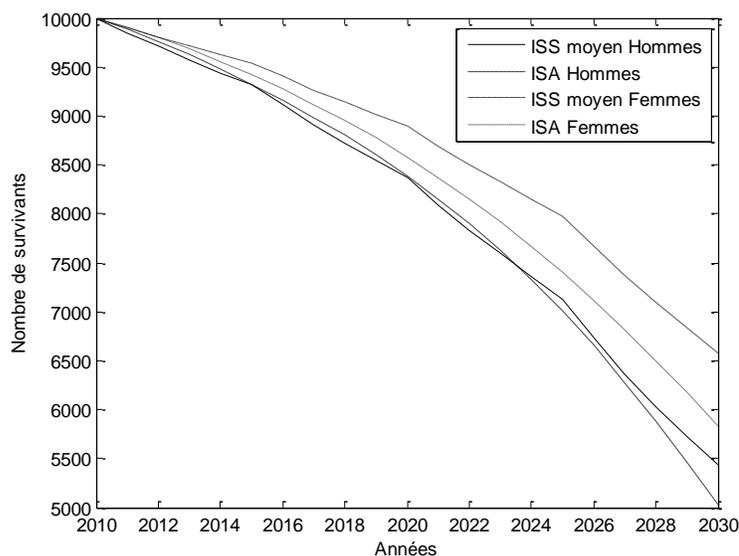
Note : pour chaque année $t1$, l'ISS moyen en $t1$ d'une cohorte de 10000 canadien(ne)s âgé(e)s de 65 ans en 2011 correspond à la moyenne des 200000 valeurs simulées pour l'ISS en $t1$. Ces dernières ont été obtenues à partir des trajectoires simulées pour les $\{k_t\}$, dont nous avons déduit les taux de mortalité et survie désirés.

Fin de l'année	Âge	Hommes	Femmes
2011	65	9851	9903
2012	66	9708	9809
2013	67	9571	9717
2014	68	9441	9627
2015	69	9316	9539
2016	70	9109	9401
2017	71	8912	9268
2018	72	8725	9138
2019	73	8547	9012
2020	74	8377	8890
2021	75	8098	8693
2022	76	7836	8504
2023	77	7588	8321
2024	78	7354	8145
2025	79	7134	7976
2026	80	6740	7666
2027	81	6375	7372
2028	82	6037	7094
2029	83	5724	6829
2030	84	5433	6578

Dans le cas de la population féminine, l'ISA est systématiquement inférieur à l'ISS. En 2015, la simulation prévoit 117 survivants de plus que la méthode des actuaires ; en 2030, la différence est de 753 personnes. La Table RP-2000 et les facteurs AA prévoient donc des taux de mortalité bien plus élevés que le modèle de Lee et Carter. Le cas de la population masculine est plus complexe. Les courbes dessinées par l'ISA et l'ISS moyen se croisent à plusieurs reprises jusqu'en 2024. À partir de cette année-là, l'ISS moyen demeure supérieur à l'ISA. En 2030, la différence entre les deux prévisions s'élève à 413 personnes. Ainsi, les prévisions des actuaires et du modèle de Lee et Carter semblent plus en accord sur les futurs taux de mortalité des hommes que sur ceux des femmes. Soulignons ici que cette différence peut en partie être expliquée par les facteurs d'amélioration plus élevés pour le sexe masculin.

Figure 9 ISA et ISS moyen de 2010 à 2030

Note : pour chaque année $t1$, l'ISS moyen en $t1$ d'une cohorte de 10000 canadien(ne)s âgé(e)s de 65 ans en 2011 correspond à la moyenne des 200000 valeurs simulées pour l'ISS en $t1$. Ces dernières ont été obtenues à partir des trajectoires simulées pour les $\{k_t\}$, dont nous avons déduit les taux de mortalité et survie désirés. L'ISA en $t1$ de cette même cohorte a quant-à-lui été calculé à l'aide de la Table RP-2000 et des facteurs d'amélioration AA.



Par ailleurs, l'ISS moyen des femmes est continuellement au-dessus de celui des hommes, tout comme c'était le cas pour l'ISA. Cet écart entre les sexes se creuse au fur et à mesure des années pour les deux indices. Toutefois, il s'élargit beaucoup plus vite dans le cas de l'ISS moyen que dans celui de l'ISA. En 2030, il existe une différence de 1146 personnes entre la taille de la population féminine et celle de la population masculine selon la simulation, tandis qu'elle est de 806 individus selon la méthode des actuaires.

3) Estimation des fonctions de distribution cumulatives

Il faut à présent estimer les fonctions de distributions cumulatives de l'ISS fin 2015, 2020, 2025, et 2030. Elles sont approximées à l'aide des 200000 valeurs de l'ISS simulées à ces dates. Les FDC sont présentées pour les hommes et les femmes respectivement sur les Figures 10 et 11. De plus, les quantiles à 2,5% et 97,5% de chaque distribution sont présentés dans la Table 8.

Table 8 Quantiles des fonctions de distribution cumulatives des ISS

Note : pour chaque année $t1$, la fonction de distribution cumulative de l'ISS en $t1$ d'une cohorte de 10000 canadien(ne)s âgé(e)s de 65 ans en 2011 a été estimée à l'aide des 200000 valeurs simulées pour l'ISS en $t1$. Ces dernières ont été obtenues à partir des trajectoires simulées pour les $\{k_t\}$, dont nous avons déduit les taux de mortalité et survie désirés.

	Hommes		Femmes	
	Quantile 2,5%	Quantile 97,5%	Quantile 2,5%	Quantile 97,5%
2015	9292	9339	9527	9551
2020	8308	8443	8863	8917
2025	7007	7257	7932	8019
2030	5256	5605	6519	6637

Nous observons tout d'abord que les FDC sont relativement lisses. Les 200000 données utilisées pour les estimer semblent donc être suffisantes pour obtenir des distributions représentatives de celles de l'ISS à la fin des quatre années étudiées.

Nous constatons ensuite que pour chacun des sexes, l'écart entre les quantiles 97,5% et 2,5% est plus large à mesure que la FDC est estimée pour un ISS plus lointain dans le temps. Par exemple, dans le cas des hommes, la différence est de 47 personnes pour l'ISS 5 ans, tandis qu'elle est de 359 pour l'ISS 20 ans. Dans le cas des femmes, les écarts sont respectivement de 24 et 118 individus. Nous constatons aussi que la masse de la distribution est plus concentrée pour les femmes que pour les hommes.

Enfin, nous pouvons comparer le positionnement de l'ISA par rapport aux quantiles. Pour les femmes, l'ISA est systématiquement à gauche du quantile 2,5%. Ainsi, les prévisions des actuaires ont une probabilité de réalisation inférieure à 2,5% selon les simulations effectuées. Pour les hommes, l'ISA se situe dans l'intervalle défini par les deux quantiles pour 2015 et 2020. Pour les deux autres années, l'ISA se situe à gauche du quantile 2,5%.

Figure 10 Fonctions de distribution cumulatives de l'ISS de la population masculine

Note : pour chaque année $t1$, la fonction de distribution cumulative de l'ISS en $t1$ d'une cohorte de 10000 canadiens âgés de 65 ans en 2011 a été estimée à l'aide des 200000 valeurs simulées pour l'ISS en $t1$. Ces dernières ont été obtenues à partir des trajectoires simulées pour les $\{k_t\}$, dont nous avons déduit les taux de mortalité et survie désirés.

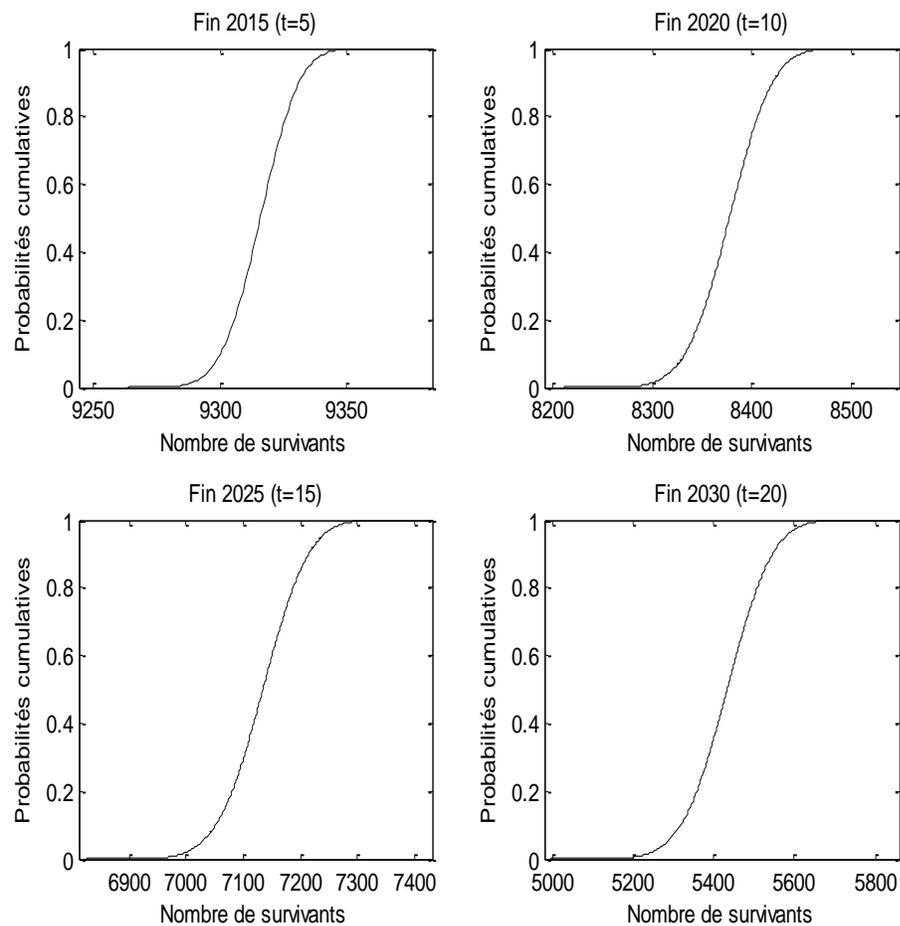
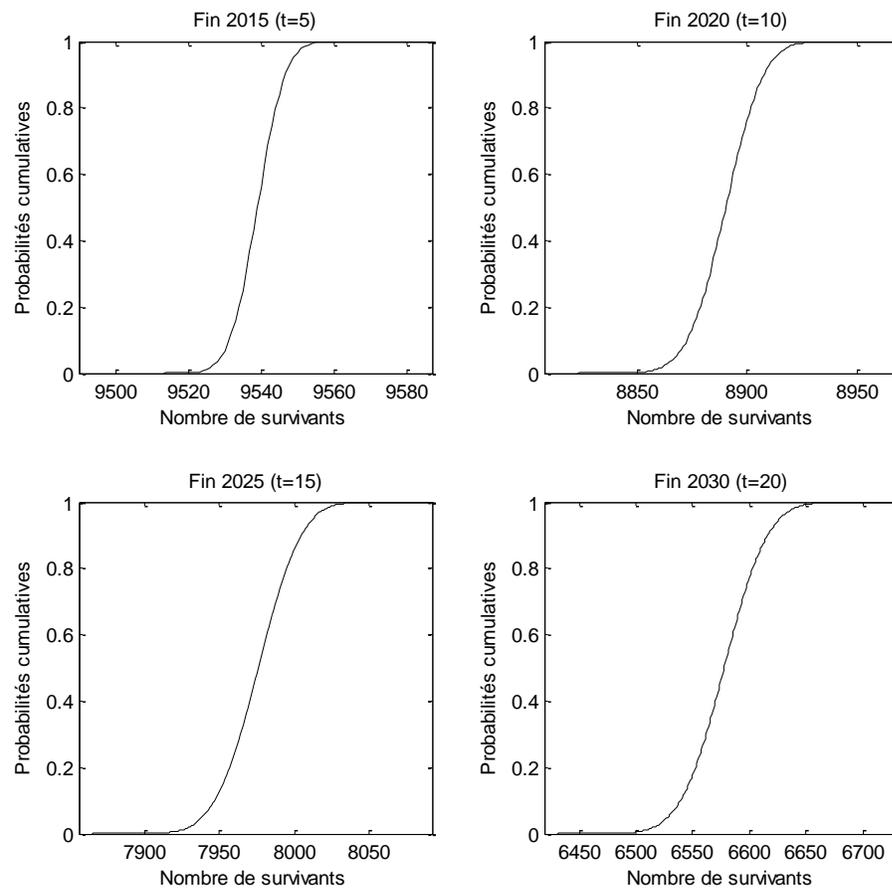


Figure 11 Fonctions de distribution cumulatives de l'ISS de la population féminine

Note : pour chaque année $t1$, la fonction de distribution cumulative de l'ISS en $t1$ d'une cohorte de 10000 canadiennes âgées de 65 ans en 2011 a été estimée à l'aide des 200000 valeurs simulées pour l'ISS en $t1$. Ces dernières ont été obtenues à partir des trajectoires simulées pour les $\{k_t\}$, dont nous avons déduit les taux de mortalité et survie désirés.



D) Évaluation des swaps et forwards de survie

1) Évaluation des forwards de survie

Dans un FS, seul un échange de flux monétaire est réalisé, et ce, à l'échéance du contrat. Nous pouvons ainsi appliquer la transformation de Wang adaptée au cas d'une variable aléatoire unique, soit :

$$F^*(x) = \Phi[\Phi^{-1}(F(x)) - \lambda]$$

où Φ est fonction de distribution cumulative de la loi Normale standard, et λ la prime de risque. Dans ce travail, x est compris entre 0 et 10000.

Les FDC de l'ISS fin 2015, 2020, 2025 et 2030 ont d'ores-et-déjà été estimées. Quant-à-la prime de risque λ , sept valeurs sont envisagées, soient 0, 0,025, 0,05, 0,10, 0,15, 0,20 et 0,30. Selon Dowd et al. (2006), cet éventail de primes englobe la majorité des λ possiblement réalisables. Il est à présent possible d'estimer les FDC ajustées pour le risque. En raison du nombre important de graphiques générés, ceux-ci sont présentés en annexe. Plus la prime de risque est élevée, plus la courbe de la FDC se situe à droite. Ainsi, l'application de la transformation de Wang permet de déplacer la masse de la distribution vers des événements où l'ISS est plus élevé. Les probabilités associées à des faibles niveaux de l'ISS diminuent, tandis que celles associées à des hauts niveaux augmentent. Remarquons que pour le cas : $\lambda = 0$, les courbes représentées sont celles des FDC initialement estimées à partir des valeurs simulées pour l'ISS.

À l'aide des nouvelles FDC, l'ISSAR fin 2015, 2020, 2025 et 2030 se calcule, pour chaque sexe, par la formule suivante :

$$ISSAR_{2015}^f = 10000 - \int_0^{10000} F_{X_1}^f(x) dx$$

$$ISSAR_{2020}^f = 10000 - \int_0^{10000} F_{X_2}^f(x) dx$$

$$ISSAR_{2025}^f = 10000 - \int_0^{10000} F_{X_3}^f(x) dx$$

$$ISSAR_{2030}^f = 10000 - \int_0^{10000} F_{X_4}^f(x) dx$$

Les intégrales ont été calculées dans Matlab à l'aide d'une méthode trapézoïdale.

Table 9 ISSAR selon différents scénarios d'évaluation des FS				
Note : pour chaque année t1 et λ considéré, l'ISSAR est obtenu en appliquant la transformation de Wang avec ce λ à la fonction de distribution cumulative de l'ISS en t1 d'une cohorte de 10000 canadien(ne)s âgé(e)s de 65 ans en 2011. L'ISSAR correspond alors à l'espérance de la nouvelle distribution obtenue, soit le nombre de survivants simulé et ajusté pour le risque en t1 .				
Hommes				
	Fin 2015	Fin 2020	Fin 2025	Fin 2030
Cas 1 : $\lambda = 0$	9316	8377	7134	5433
Cas 2 : $\lambda = 0,025$	9316	8378	7135	5435
Cas 3 : $\lambda = 0,05$	9316	8378	7137	5437
Cas 4 : $\lambda = 0,10$	9317	8380	7140	5442
Cas 5 : $\lambda = 0,15$	9318	8382	7143	5446
Cas 6 : $\lambda = 0,20$	9318	8384	7146	5451
Cas 7 : $\lambda = 0,30$	9319	8387	7153	5459
Femmes				
	Fin 2015	Fin 2015	Fin 2015	Fin 2015
Cas 1 : $\lambda = 0$	9539	8890	7976	6578
Cas 2 : $\lambda = 0,025$	9539	8891	7976	6578
Cas 3 : $\lambda = 0,05$	9539	8891	7977	6579
Cas 4 : $\lambda = 0,10$	9540	8892	7978	6581
Cas 5 : $\lambda = 0,15$	9540	8892	7979	6582
Cas 6 : $\lambda = 0,20$	9540	8893	7980	6584
Cas 7 : $\lambda = 0,30$	9541	8894	7982	6587

La Table 9 présente les résultats obtenus pour l'ISSAR. Dans le cas 1, $\lambda = 0$ et l'ISSAR est égal à l'ISS moyen. Par ailleurs, à mesure que la valeur de la prime de risque augmente, l'ISSAR atteint des niveaux plus élevés. Considérons plus en détail les cas 2 et 7, soient les scénarios les plus extrêmes, avec λ respectivement égale à 2,5% et 30%. Nous remarquons que la différence entre l'ISSAR du cas 7 et du cas 2 s'élargit à mesure que la maturité du FS augmente. Pour les hommes, elle est de 7 individus pour l'ISSAR 2015, tandis qu'elle est de 24 pour l'ISSAR 2030. Pour les femmes, les différences sont respectivement de 2 et 9 personnes. Cet élargissement de l'écart avec le temps peut découler du fait que les distributions de l'ISS sont moins concentrées pour des dates d'évaluation de l'indice plus lointaines.

Les primes de risque des FS se calculent alors tel que ci-dessous, et sont présentées dans la Table 10 :

$$\pi^{f5} = \frac{ISSAR_{2015}^f}{ISA_{2015}} - 1$$

$$\pi^{f10} = \frac{ISSAR_{2020}^f}{ISA_{2020}} - 1$$

$$\pi^{f15} = \frac{ISSAR_{2025}^f}{ISA_{2025}} - 1$$

$$\pi^{f20} = \frac{ISSAR_{2030}^f}{ISA_{2030}} - 1$$

Les primes d'évaluation des FS 5 et 10 ans, dont le sous-jacent est la population masculine, sont presque toutes négatives. Ce résultat s'explique du fait que pour la plupart des cas envisagés pour λ , l'ISSAR est inférieur à l'ISA. Rappelons que ce dernier est de 9326 en 2015 et 8386 en 2020. Toutefois, lorsque la prime de risque λ est de 30%, la prime π du FS 10 ans est petite, environ 1 point de base, mais positive. Cela signifie que la transformation de Wang permet de faire passer l'ISSAR₂₀₂₀^f au-dessus de l'ISA₂₀₂₀.

Pour les FS 15 et 20 ans, la prime d'évaluation est systématiquement positive. De plus, à mesure que la maturité du FS augmente, la prime π croît considérablement. Prenons l'exemple du cas où $\lambda = 10\%$. Pour un FS 15 ans, $\pi = 1,93\%$, tandis que pour un FS 20 ans, $\pi = 8,42\%$. Cette différence considérable s'explique par l'élargissement de l'écart entre l'ISA et l'ISS moyen à mesure que les années s'écoulent, ce qui apparaissait clairement sur la Figure 9.

Par ailleurs, il existe une relation linéaire entre les λ et les π^f . Pour le FS 5 ans, la π^{f5} croît de 0,65 PB lorsque λ augmente de 500 PB. En outre, plus l'échéance du contrat est lointaine, plus une variation de λ a un impact important sur π^f . En effet, dans le cas des FS 10, 15 et 20 ans, π^f augmente respectivement d'environ 2, 4,5 et 8,8 PB pour un accroissement de 500 PB de λ .

Table 10 Primes d'évaluation π des FS pour différents λ

Note : la prime λ permet d'ajuster l'ISS pour le risque ; nous obtenons alors l'ISSAR. Les primes des FS de différentes maturités sont calculées à l'aide des formules suivantes : $\pi^{f5} = \frac{ISSAR_{2015}^f}{ISA_{2015}} - 1$;

$$1 ; \pi^{f10} = \frac{ISSAR_{2020}^f}{ISA_{2020}} - 1 ; \pi^{f15} = \frac{ISSAR_{2025}^f}{ISA_{2025}} - 1 ;$$

$$\pi^{f20} = \frac{ISSAR_{2030}^f}{ISA_{2030}} - 1. \text{ Pour une maturité donnée, seul l'ISSAR varie d'un cas à un autre.}$$

	Hommes			
	Fin 2015	Fin 2020	Fin 2025	Fin 2030
Cas 1 : $\lambda = 0$	-0,00108	-0,00112	0,01842	0,08246
Cas 2 : $\lambda = 0,025$	-0,00105	-0,00101	0,01865	0,08290
Cas 3 : $\lambda = 0,05$	-0,00102	-0,00091	0,01888	0,08335
Cas 4 : $\lambda = 0,10$	-0,00095	-0,00071	0,01933	0,08423
Cas 5 : $\lambda = 0,15$	-0,00089	-0,00050	0,01978	0,08512
Cas 6 : $\lambda = 0,20$	-0,00082	-0,00030	0,02023	0,08600
Cas 7 : $\lambda = 0,30$	-0,00070	0,00011	0,02114	0,08777
	Femmes			
	Fin 2015	Fin 2020	Fin 2025	Fin 2030
Cas 1 : $\lambda = 0$	0,01244	0,03645	0,07761	0,12923
Cas 2 : $\lambda = 0,025$	0,01245	0,03649	0,07769	0,12936
Cas 3 : $\lambda = 0,05$	0,01247	0,03653	0,07776	0,12948
Cas 4 : $\lambda = 0,10$	0,01250	0,03661	0,07791	0,12974
Cas 5 : $\lambda = 0,15$	0,01253	0,03669	0,07806	0,13000
Cas 6 : $\lambda = 0,20$	0,01256	0,03677	0,07821	0,13025
Cas 7 : $\lambda = 0,30$	0,01263	0,03693	0,07851	0,13077

Les primes d'évaluation des FS sur la population féminine sont systématiquement positives, puisque l'ISS moyen se trouvait au-dessus de l'ISA pour toutes les dates de paiement. Tout comme dans le cas masculin, l'échéance du contrat a un impact important sur π^f . Reprenons le cas où $\lambda = 10\%$. Les FS 5 et 20 ans ont respectivement des primes égales à 1,25% et 12,97%. La relation linéaire entre λ et π^f est également observée. Pour une augmentation de 500 PB de λ , π^f augmente respectivement de 0,3, 0,8, 1,5 et 2,6 PB pour les FS 5, 10, 15 et 20 ans.

Enfin, les primes π^f sont systématiquement supérieures pour les FS sur la population féminine que sur la masculine. Tel que nous l'avions mentionné précédemment, l'écart entre l'ISS moyen et l'ISA était significativement plus important pour les femmes que pour les hommes.

Nous aimerions à présent discuter de l'interprétation économique des primes d'évaluation. Rappelons que l'ISS moyen est le résultat de simulations du futur

niveau de l'ISR. Toutefois, il existe une probabilité non nulle que l'ISR soit finalement différent de l'ISS moyen fin 2015, 2020, 2025 et 2030. Une contrepartie offrant une couverture contre le risque de longévité s'expose alors à l'éventualité négative –pour elle- que l'ISS moyen soit inférieur à l'ISR. Or, l'ISR n'étant pas un actif négocié, ce risque ne peut pas être couvert en transigeant l'indice. C'est pourquoi, la contrepartie exige d'être rémunérée pour ce risque qu'elle supporte, et ce, par une augmentation de la valeur actuelle des flux monétaires qu'elle recevra dans le cadre du contrat.

Prenons l'exemple du FS 15 ans de notionnel \$1, sur la population masculine. En 2025, cette contrepartie paiera ISR_{2025} et recevra $(1 + \pi^{f15}) \times ISA_{2025}$. Or, les financiers n'ont aucun contrôle ni sur l'ISA, ni sur l'ISR. Ainsi, l'unique manière de dédommager la contrepartie est d'augmenter la prime d'évaluation π^{f15} . La transformation de Wang permet d'effectuer cet ajustement à l'aide de la prime de risque λ : plus le risque est jugé important, plus λ est élevée. Imaginons deux situations. Dans la première, le risque est considéré comme nul ou peut être couvert. Ceci équivaut à dire soit que ISR_{2025} sera égal à ISS_{2015} avec une probabilité de 1, soit qu'il est finalement possible de transiger l'ISR. Dans ce cas, $\lambda = 0$, et l' $ISSAR_{2025}^f$ peut être actualisé au taux sans risque. Dans la deuxième situation, le risque que l' ISR_{2025} soit supérieur à ISS_{2025} est jugé important, et il est impossible de se couvrir contre celui-ci. Les marchés fixent alors λ à 20%. Calculons les primes d'évaluation π induites par ces deux scénarios à l'aide des $ISSAR_{2025}^f$ spécifiques aux cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 20\%$.

$$\textit{Situation 1: } \pi^{f15}(1) = \frac{ISSAR_{2025}^f(\lambda = 0)}{ISA_{2025}} - 1 = 1,842\%$$

$$\textit{Situation 2: } \pi^{f15}(2) = \frac{ISSAR_{2025}^f(\lambda = 20\%)}{ISA_{2025}} - 1 = 2,023\%$$

Par conséquent, la prime d'évaluation du FS 15 ans, soit π^{f15} , est composée de deux tranches servant à rémunérer la contrepartie offrant la couverture contre le risque de longévité. La première portion de la prime sert à la compenser pour la possibilité que l'ISR soit supérieur à l'ISA. Elle est égale à 1,84% dans notre

exemple. La deuxième portion dédommage l'agent pour le risque que l'ISR ne soit pas égal à l'ISS moyen, ce risque ne pouvant pas être couvert. Elle est égale à la différence entre les primes $\pi^{f15}(2)$ et $\pi^{f15}(1)$, soit 0,181%.

Le même calcul a été effectué pour tous les scénarios envisagés. Les deuxièmes tranches de la prime sont présentées en points de base dans la Table 11. Nécessairement, elles sont une fonction croissante des λ . Par ailleurs, elles augmentent avec l'échéance du contrat. Toutefois, elles demeurent relativement faibles proportionnellement à la taille de la prime totale. Par conséquent, il semblerait que l'évaluation des FS soit davantage sensible à la capacité de l'ISS à prévoir fidèlement l'ISR, plutôt qu'à la juste détermination de la prime λ .

Table 11 Deuxième tranche de la prime (en PB) pour les FS				
Note : la deuxième tranche de la prime s'obtient en faisant la différence entre la prime d'évaluation π du cas considéré, et celle du cas où $\lambda = 0$. Elle s'interprète comme la prime supplémentaire que le vendeur de la couverture veut recevoir pour supporter le risque entourant la prévision de l'ISR.				
Hommes				
	Fin 2015	Fin 2020	Fin 2025	Fin 2030
Cas 2 : $\lambda = 0,025$	0,30	1,10	2,30	4,40
Cas 3 : $\lambda = 0,05$	0,60	2,10	4,60	8,90
Cas 4 : $\lambda = 0,10$	1,30	4,10	9,10	17,70
Cas 5 : $\lambda = 0,15$	1,90	6,20	13,60	26,60
Cas 6 : $\lambda = 0,20$	2,60	8,20	18,10	35,40
Cas 7 : $\lambda = 0,30$	3,80	12,30	27,20	53,10
Femmes				
	Fin 2015	Fin 2020	Fin 2025	Fin 2030
Cas 2 : $\lambda = 0,025$	0,10	0,40	0,80	1,30
Cas 3 : $\lambda = 0,05$	0,30	0,80	1,50	2,50
Cas 4 : $\lambda = 0,10$	0,60	1,60	3,00	5,10
Cas 5 : $\lambda = 0,15$	0,90	2,40	4,50	7,70
Cas 6 : $\lambda = 0,20$	1,20	3,20	6,00	10,20
Cas 7 : $\lambda = 0,30$	1,90	4,80	9,00	15,40

2) Évaluation des swaps de survie

Dans le cas des SVS, plusieurs échanges de flux monétaires non indépendants ont lieu ; nous utilisons par conséquent la deuxième méthode proposée par Wang (2007). La fonction de distribution cumulative ajustée pour le risque $F_{X_i}^*(x)$ se déduit alors de la manière suivante :

$$F_{X_i}^*(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_i}(x) \right) - \beta_i \right], \text{ où } \beta_i = \sum_{j=1}^k \rho_{X_i, X_j} \lambda_j$$

avec $F_{X_1}(x)$, $F_{X_2}(x)$, $F_{X_3}(x)$, et $F_{X_4}(x)$, les fonctions de distribution cumulatives respectives de l'ISS fin 2015, 2020, 2025 et 2030.

Par conséquent, nous avons dans le cas du SVS 10 ans les fonctions suivantes :

$$F_{X_1}^{s10}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x) \right) - \beta_1^{s10} \right], \text{ où } \beta_1^{s10} = \lambda_1 + \rho_{X_1, X_2} \lambda_2 + \rho_{X_1, X_3} \lambda_3$$

$$F_{X_2}^{s10}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_2}(x) \right) - \beta_2^{s10} \right], \text{ où } \beta_2^{s10} = \lambda_2 + \rho_{X_2, X_1} \lambda_1 + \rho_{X_2, X_3} \lambda_3$$

Pour le SVS 15 ans, la transformation de Wang s'écrit de cette manière :

$$F_{X_1}^{s15}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x) \right) - \beta_1^{s15} \right], \text{ où } \beta_1^{s15} = \lambda_1 + \rho_{X_1, X_2} \lambda_2 + \rho_{X_1, X_3} \lambda_3$$

$$F_{X_2}^{s15}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_2}(x) \right) - \beta_2^{s15} \right], \text{ où } \beta_2^{s15} = \lambda_2 + \rho_{X_2, X_1} \lambda_1 + \rho_{X_2, X_3} \lambda_3$$

$$F_{X_3}^{s15}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_3}(x) \right) - \beta_3^{s15} \right], \text{ où } \beta_3^{s15} = \lambda_3 + \rho_{X_3, X_1} \lambda_1 + \rho_{X_3, X_2} \lambda_2$$

Enfin, dans le cas du SVS 20 ans, nous avons :

$$F_{X_1}^{s20}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_1}(x) \right) - \beta_1^{s20} \right],$$

$$\text{où } \beta_1^{s20} = \lambda_1 + \rho_{X_1, X_2} \lambda_2 + \rho_{X_1, X_3} \lambda_3 + \rho_{X_2, X_4} \lambda_4$$

$$F_{X_2}^{s20}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_2}(x) \right) - \beta_2^{s20} \right],$$

$$\text{où } \beta_2^{s20} = \lambda_2 + \rho_{X_2, X_1} \lambda_1 + \rho_{X_2, X_3} \lambda_3 + \rho_{X_3, X_4} \lambda_4$$

$$F_{X_3}^{s20}(x) = \Phi \left[\Phi^{-1} \left(F_{X_3}(x) \right) - \beta_3^{s20} \right],$$

$$\text{où } \beta_3^{s20} = \lambda_3 + \rho_{X_3, X_1} \lambda_1 + \rho_{X_3, X_2} \lambda_2 + \rho_{X_4, X_3} \lambda_3$$

Il est tout d'abord nécessaire de calculer les corrélations entre les distributions des différents ISS. Celles-ci sont présentées dans la Table 12.

Table 12 Corrélations entre l'ISS fin 2015, 2020, 2025, et 2030				
Note : les corrélations entre le niveau de l'ISS à différentes dates ont été estimées à l'aide des 200000 trajectoires de l'ISS.				
Hommes				
	<i>ISS</i> ₂₀₁₅	<i>ISS</i> ₂₀₂₀	<i>ISS</i> ₂₀₂₅	<i>ISS</i> ₂₀₃₀
<i>ISS</i> ₂₀₁₅	1			
<i>ISS</i> ₂₀₂₀	0,8709	1		
<i>ISS</i> ₂₀₂₅	0,7366	0,9373	1	
<i>ISS</i> ₂₀₃₀	0,6379	0,8463	0,9618	1
Femmes				
	<i>ISS</i> ₂₀₁₅	<i>ISS</i> ₂₀₂₀	<i>ISS</i> ₂₀₂₅	<i>ISS</i> ₂₀₃₀
<i>ISS</i> ₂₀₁₅	1			
<i>ISS</i> ₂₀₂₀	0,7300	1		
<i>ISS</i> ₂₀₂₅	0,4681	0,7865	1	
<i>ISS</i> ₂₀₃₀	0,3021	0,5373	0,8166	1

Les corrélations sont plus élevées lorsqu'une courte période de temps sépare les deux ISS. Par exemple, la dépendance linéaire est plus grande entre les ISS 2015 et 2020 qu'elle ne l'est entre les ISS 2015 et 2030. Elles sont respectivement de 0,87 versus 0,64 pour les hommes, et 0,73 versus 0,30 pour les femmes. Ainsi, plus l'intervalle de temps est important entre les deux dates d'évaluation de l'ISS, plus les deux niveaux de l'ISS pourront différer. Par ailleurs, plus les ISS sont éloignés dans le temps, plus ils sont corrélés entre eux : la corrélation entre les ISS 2025 et 2030 est plus forte que celle existante entre les ISS 2015 et 2020, soient respectivement 0,96 versus 0,87 pour les hommes, et 0,82 versus 0,73 pour les femmes. Enfin, il apparaît clairement que les corrélations sont plus élevées dans le cas de la population masculine qu'elles ne le sont dans celui de la population féminine. Par exemple, celle de l'ISS 2015 et 2030 est plus que deux fois inférieure pour les femmes. Cette différence s'explique par le fait que le coefficient d'autocorrélation dans la modélisation des $\{k_t\}$ était bien supérieur pour la série des hommes que pour celle des femmes : 0,9967 versus 0,7539. Par conséquent, un choc dans les niveaux de mortalité impacte plus fortement les k des années suivantes dans le cas de la population masculine que dans celui de la

population féminine, ce qui donne lieu à une plus grande corrélation entre les k des différentes années. Les ISS étant déduits directement de ceux-ci, il est logique que nous retrouvions cette forte dépendance.

Dix scénarios sont envisagés pour les λ ; ils sont répertoriés dans la Table 13. Dans les sept premiers cas, les λ sont égaux pour les FDC des variables X_1, X_2, X_3 et X_4 , et compris entre 0 et 30%. Dans les trois derniers cas, les λ diffèrent pour les quatre variables aléatoires : plus la distribution est associée à un ISS lointain, plus λ augmente. En effet, le risque que l'ISS moyen diffère de l'ISR peut être jugé plus élevé lorsque l'échéance est à long terme plutôt qu'à court terme.

Table 13 Valeurs envisagées pour la prime de risque λ	
Note : il s'agit de la prime qui sera utilisée pour appliquer la transformation de Wang.	
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$	Cas 1 $\lambda = 0$
	Cas 2 $\lambda = 0,025$
	Cas 3 $\lambda = 0,05$
	Cas 4 $\lambda = 0,10$
	Cas 5 $\lambda = 0,15$
	Cas 6 $\lambda = 0,20$
	Cas 7 $\lambda = 0,30$
$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$	Cas 8 $\lambda_1 = 0,025 ; \lambda_2 = 0,05$ $\lambda_3 = 0,075 ; \lambda_4 = 0,10$
	Cas 9 $\lambda_1 = 0,10 ; \lambda_2 = 0,12$ $\lambda_3 = 0,14 ; \lambda_4 = 0,16$
	Cas 10 $\lambda_1 = 0,05 ; \lambda_2 = 0,10$ $\lambda_3 = 0,15 ; \lambda_4 = 0,20$

Les β peuvent alors être calculés. Ils sont présentés dans les Tables 14, 15 et 16. Les β calculés pour l'évaluation des SVS sur la population masculine sont systématiquement supérieurs à ceux calculés pour les SVS sur la population féminine, puisque les ISS sont plus corrélés dans le cas des hommes que dans celui des femmes. De plus, l'écart entre les betas des deux sexes se creuse à mesure que λ augmente. Par exemple, pour le SVS 20 ans, la différence entre les β_1 des hommes et des femmes est de 0,019 et 0,224 respectivement lorsque $\lambda = 0,05$ et $\lambda = 0,30$.

Quelle que soit la maturité du SVS, les β sont une fonction croissante des λ , en raison des corrélations strictement positives calculées. Pour les swaps de toute

maturité, le cas 7 est celui donnant lieu aux β les plus élevés. Le maximum est atteint avec $\beta_2^{s20} = 1,0963$ pour les hommes, et $\beta_3^{s20} = 0,9213$ pour les femmes.

Pour le SVS 10 ans, $\beta_1 = \beta_2$ lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, et ce, en raison de la construction de la formule permettant de calculer les betas. Pour le SVS 15 ans, β_2 est supérieur à β_1 et β_3 , tant pour les hommes que pour les femmes : pour les deux sexes, l'ISS 2020 est celui possédant les corrélations les plus élevés avec les ISS 2015 et 2025. Pour le SVS 20 ans, les β_2 sont les plus élevés pour les hommes, tandis que ce sont les β_3 pour les femmes.

Table 14 β utilisés dans l'évaluation du SVS 10 ans				
Note : les β sont calculés à partir des λ et des corrélations existants entre le niveau de l'ISS évalué à différentes dates.				
SVS 10 ans	Hommes		Femmes	
	β_1	β_2	β_1	β_2
Cas 1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Cas 2	0,0468	0,0468	0,0432	0,0432
Cas 3	0,0935	0,0935	0,0865	0,0865
Cas 4	0,1871	0,1871	0,1730	0,1730
Cas 5	0,2806	0,2806	0,2595	0,2595
Cas 6	0,3742	0,3742	0,3460	0,3460
Cas 7	0,5613	0,5613	0,5190	0,5190
Cas 8	0,0685	0,0718	0,0615	0,0682
Cas 9	0,2045	0,2071	0,1876	0,1930
Cas 10	0,1371	0,1435	0,1230	0,1365

Table 15 β utilisés dans l'évaluation du SVS 15 ans						
Note : les β sont calculés à partir des λ et des corrélations existants entre le niveau de l'ISS évalué à différentes dates.						
SVS 15 ans	Hommes			Femmes		
	β_1	β_2	β_3	β_1	β_2	β_3
Cas 1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Cas 2	0,0652	0,0702	0,0668	0,0550	0,0629	0,0564
Cas 3	0,1304	0,1404	0,1337	0,1099	0,1258	0,1127
Cas 4	0,2607	0,2808	0,2674	0,2198	0,2516	0,2255
Cas 5	0,3911	0,4212	0,4011	0,3297	0,3775	0,3382
Cas 6	0,5215	0,5616	0,5348	0,4396	0,5033	0,4509
Cas 7	0,7822	0,8425	0,8022	0,6594	0,7549	0,6764
Cas 8	0,1238	0,1421	0,1403	0,0966	0,1272	0,1260
Cas 9	0,3076	0,3383	0,3261	0,2531	0,3031	0,2812
Cas 10	0,2476	0,2841	0,2806	0,1932	0,2545	0,2521

Table 16 β utilisés dans l'évaluation du SVS 20 ans

Note : les β sont calculés à partir des λ et des corrélations existants entre le niveau de l'ISS évalué à différentes dates.

	Hommes				Femmes			
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_1	β_2	β_3	β_4
Cas 1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Cas 2	0,0811	0,0914	0,0909	0,0861	0,0625	0,0763	0,0768	0,0664
Cas 3	0,1623	0,1827	0,1818	0,1723	0,1250	0,1527	0,1536	0,1328
Cas 4	0,3245	0,3654	0,3636	0,3446	0,2500	0,3054	0,3071	0,2656
Cas 5	0,4868	0,5482	0,5453	0,5169	0,3750	0,4581	0,4607	0,3984
Cas 6	0,6491	0,7309	0,7271	0,6892	0,5000	0,6108	0,6142	0,5312
Cas 7	0,9736	1,0963	1,0907	1,0338	0,7500	0,9161	0,9213	0,7968
Cas 8	0,1876	0,2267	0,2365	0,2304	0,1268	0,1810	0,2077	0,1957
Cas 9	0,4097	0,4737	0,4800	0,4600	0,3015	0,3891	0,4118	0,3690
Cas 10	0,3752	0,4534	0,4729	0,4608	0,2536	0,3619	0,4154	0,3913

À présent, nous pouvons calculer l'ISSA fin 2015, 2020, 2025 et 2030 pour chacun des SVS. Les résultats sont détaillés dans les Tables 17, 18 et 19.

Table 17 ISSAR selon différents scénarios d'évaluation du SVS 10 ans

Note : pour chaque année $t1$ et cas λ considéré, l'ISSAR est obtenu en appliquant la transformation de Wang avec le β (induit par les λ) à la fonction de distribution cumulative de l'ISS en $t1$ d'une cohorte de 10000 canadien(ne)s âgé(e)s de 65 ans en 2011. L'ISSAR correspond alors à l'espérance de la nouvelle distribution obtenue, soit le nombre de survivants simulé et ajusté pour le risque en $t1$.

	Hommes		Femmes	
	Fin 2015	Fin 2020	Fin 2015	Fin 2020
Cas 1	9316	8377	9539	8890
Cas 2	9316	8378	9539	8891
Cas 3	9317	8380	9540	8891
Cas 4	9318	8383	9540	8893
Cas 5	9319	8386	9541	8894
Cas 6	9320	8390	9541	8895
Cas 7	9323	8396	9542	8897
Cas 8	9317	8379	9539	8891
Cas 9	9318	8384	9540	8893
Cas 10	9317	8382	9540	8892

Les conclusions sont semblables à celles tirées pour les FS. Tout d'abord, plus λ est élevé, plus l'ISSA l'est aussi, tout comme c'était le cas pour les FS. L'impact de la transformation demeure relativement modéré. Toutefois, il est plus important dans le cas des SVS sur la population masculine que dans celui des SVS sur la population féminine, et ce, en raison des β plus élevés des hommes. En outre, plus la maturité du SVS est élevée, plus la sensibilité de l'évaluation aux λ l'est aussi.

Enfin, dans un même SVS, plus l'ISSA est éloigné dans le temps, plus il est sensible à une variation de λ .

Table 18 ISSAR selon différents scénarios d'évaluation du SVS 15 ans

Note : pour chaque année $t1$ et cas λ considéré, l'ISSAR est obtenu en appliquant la transformation de Wang avec le β (induit par les λ) à la fonction de distribution cumulative de l'ISS en $t1$ d'une cohorte de 10000 canadien(ne)s âgé(e)s de 65 ans en 2011. L'ISSAR correspond alors à l'espérance de la nouvelle distribution obtenue, soit le nombre de survivants simulé et ajusté pour le risque en $t1$.

	Hommes			Femmes		
	Fin 2015	Fin 2020	Fin 2025	Fin 2015	Fin 2020	Fin 2025
Cas 1	9316	8377	7134	9539	8890	7976
Cas 2	9317	8379	7138	9539	8891	7977
Cas 3	9317	8382	7142	9540	8892	7978
Cas 4	9319	8386	7151	9540	8894	7981
Cas 5	9321	8391	7159	9541	8895	7983
Cas 6	9322	8396	7167	9542	8897	7986
Cas 7	9325	8405	7184	9543	8901	7991
Cas 8	9317	8382	7143	9540	8892	7979
Cas 9	9320	8388	7154	9541	8894	7982
Cas 10	9319	8386	7151	9540	8894	7981

Table 19 ISSAR selon différents scénarios d'évaluation du SVS 20 ans

Note : pour chaque année $t1$ et cas λ considéré, l'ISSAR est obtenu en appliquant la transformation de Wang avec le β (induit par les λ) à la fonction de distribution cumulative de l'ISS en $t1$ d'une cohorte de 10000 canadien(ne)s âgé(e)s de 65 ans en 2011. L'ISSAR correspond alors à l'espérance de la nouvelle distribution obtenue, soit le nombre de survivants simulé et ajusté pour le risque en $t1$.

	Hommes				Femmes			
	Fin 2015	Fin 2020	Fin 2025	Fin 2030	Fin 2015	Fin 2020	Fin 2025	Fin 2030
Cas 1	9316	8377	7134	5433	9539	8890	7976	6578
Cas 2	9317	8380	7139	5440	9539	8891	7977	6580
Cas 3	9318	8383	7145	5448	9540	8892	7979	6582
Cas 4	9320	8389	7157	5463	9541	8894	7983	6586
Cas 5	9322	8395	7168	5479	9541	8897	7986	6590
Cas 6	9324	8402	7180	5494	9542	8899	7989	6594
Cas 7	9327	8414	7202	5524	9544	8903	7996	6602
Cas 8	9318	8385	7149	5453	9540	8893	7980	6584
Cas 9	9321	8393	7164	5474	9541	8896	7985	6589
Cas 10	9320	8392	7164	5474	9541	8895	7985	6589

Une fois les nouvelles FDC estimées, les primes π^s sont calculées. Elles sont présentées dans les Tables 20 et 21.

Pour les contrats sur la population masculine, les primes des SVS 10 ans sont négatives. Celles des SVS 15 et 20 ans sont positives, et en moyenne respectivement égales à 0,5% et 1,5%. Remarquons ici que les π^s sont bien plus faibles que les π^f . En effet, les primes des FS 15 et 20 ans se situaient environ à 1,9% et 8,4%. Cette différence s'explique du fait que les ISSAR 2015 et 2020, qui étaient inférieurs à leurs ISA respectifs, sont inclus dans le calcul des SVS 15 et 20 ans. Par ailleurs, la prime d'évaluation π reste davantage sensible à la maturité du swap qu'elle ne l'est à λ . Concrètement, elle varie bien plus en fonction de l'écart entre l'ISA et l'ISS moyen, qu'elle ne varie en fonction de la différence entre l'ISSAR et l'ISS moyen. Enfin, une augmentation du taux d'intérêt vient diminuer significativement la prime d'évaluation.

Table 20 Primes d'évaluation π pour les SVS sur la population masculine				
Note : la prime λ permet d'ajuster l'ISS pour le risque ; nous obtenons alors l'ISSAR.				
		Swap 10 ans	Swap 15 ans	Swap 20 ans
Cas 1	r=3%	-0,00110	-0,00358	0,01374
	r=5%	-0,00110	-0,00306	0,01154
Cas 2	r=3%	-0,00098	0,00385	0,01426
	r=5%	-0,00098	0,00332	0,01201
Cas 3	r=3%	-0,00086	0,00413	0,01477
	r=5%	-0,00087	0,00358	0,01248
Cas 4	r=3%	-0,00063	0,00468	0,01580
	r=5%	-0,00064	0,00410	0,01342
Cas 5	r=3%	-0,00039	0,00523	0,01683
	r=5%	-0,00041	0,00462	0,01435
Cas 6	r=3%	-0,00016	0,00578	0,01785
	r=5%	-0,00018	0,00514	0,01529
Cas 7	r=3%	0,00031	0,00687	0,01988
	r=5%	0,00027	0,00617	0,01714
Cas 8	r=3%	-0,00092	0,00414	0,01507
	r=5%	-0,00092	0,00359	0,01275
Cas 9	r=3%	-0,00058	0,00491	0,01645
	r=5%	-0,00059	0,00432	0,01401
Cas 10	r=3%	-0,00074	0,00471	0,01640
	r=5%	-0,00075	0,00412	0,01395

Les primes des SVS sur la population féminine sont toutes positives. Elles sont en moyenne respectivement égales à 2,3%, 3,6% et 5% pour les SVS 10, 15 et 20 ans. L'analyse de sensibilité se veut la même entre les SVS sur les populations féminine et masculine.

Table 21 Primes d'évaluation π pour les SVS sur la population féminine				
Note : la prime λ permet d'ajuster l'ISS pour le risque ; nous obtenons alors l'ISSAR.				
		Swap 10 ans	Swap 15 ans	Swap 20 ans
Cas 1	r=3%	0,02300	0,03647	0,04978
	r=5%	0,02244	0,03456	0,04585
Cas 2	r=3%	0,02305	0,03656	0,04993
	r=5%	0,02248	0,03464	0,04599
Cas 3	r=3%	0,02310	0,03665	0,05007
	r=5%	0,02253	0,03473	0,04613
Cas 4	r=3%	0,02319	0,03683	0,05037
	r=5%	0,02262	0,03490	0,04640
Cas 5	r=3%	0,02328	0,03701	0,05066
	r=5%	0,02271	0,03507	0,04667
Cas 6	r=3%	0,02337	0,03719	0,05095
	r=5%	0,02280	0,03524	0,04694
Cas 7	r=3%	0,02355	0,03755	0,05154
	r=5%	0,02297	0,03558	0,04748
Cas 8	r=3%	0,02307	0,03666	0,05017
	r=5%	0,02251	0,03474	0,04621
Cas 9	r=3%	0,02321	0,03691	0,05056
	r=5%	0,02264	0,03497	0,04657
Cas 10	r=3%	0,02314	0,03685	0,05055
	r=5%	0,02258	0,03491	0,04656

3) Construction d'un swap de survie à partir de forwards

Un agent voulant se couvrir contre le RLA peut entrer dans un contrat FS ou SVS. Toutefois, il peut également construire un SVS à l'aide de plusieurs FS. Prenons l'exemple d'un SVS 15 ans versant des paiements quinquennaux. L'agent recevra en 2015, 2020 et 2025 les mêmes flux monétaires, soient ISR_{2015} , ISR_{2020} et ISR_{2025} qu'il soit entré dans un SVS 15 ans ou dans trois FS : FS 5, 10 et 15 ans. La couverture offerte est donc totalement identique. Par conséquent, il est prêt à verser les mêmes montants dans les deux situations. Nous appellerons situation 1, le cas où l'agent achète directement le SVS et situation 2, celui où il construit sa couverture à partir de FS.

Pour chaque SVS évalué précédemment, nous cherchons à calculer la valeur actuelle des paiements que devra effectuer l'acheteur de la couverture dans les deux situations, soit la valeur actuelle de la patte fixe. Pour des fins de simplification, le notional est fixé à \$1, et le taux d'intérêt est de 3%.

Dans le cas du SVS 10 ans,

$$VA(\textit{situation 1}) = \frac{ISA_{2015} \times (1 + \pi^{s10})}{(1 + r)^5} + \frac{ISA_{2020} \times (1 + \pi^{s10})}{(1 + r)^{10}}$$

$$VA(\textit{situation 2}) = \frac{ISA_{2015} \times (1 + \pi^{f5})}{(1 + r)^5} + \frac{ISA_{2020} \times (1 + \pi^{f10})}{(1 + r)^{10}}$$

Pour le SVS 15 ans, les flux monétaires sont alors :

$$VA(\textit{situation 1}) = \frac{ISA_{2015} \times (1 + \pi^{s15})}{(1 + r)^5} + \frac{ISA_{2020} \times (1 + \pi^{s15})}{(1 + r)^{10}} + \frac{ISA_{2025} \times (1 + \pi^{s15})}{(1 + r)^{15}}$$

$$VA(\textit{situation 2}) = \frac{ISA_{2015} \times (1 + \pi^{f5})}{(1 + r)^5} + \frac{ISA_{2020} \times (1 + \pi^{f10})}{(1 + r)^{10}} + \frac{ISA_{2025} \times (1 + \pi^{f15})}{(1 + r)^{15}}$$

Enfin, dans le cas du SVS 20 ans,

$$VA(\textit{situation 1}) = \frac{ISA_{2015} \times (1 + \pi^{s20})}{(1 + r)^5} + \frac{ISA_{2020} \times (1 + \pi^{s20})}{(1 + r)^{10}} \\ + \frac{ISA_{2025} \times (1 + \pi^{s20})}{(1 + r)^{15}} + \frac{ISA_{2025} \times (1 + \pi^{s20})}{(1 + r)^{20}}$$

$$VA(\textit{situation 2}) = \frac{ISA_{2015} \times (1 + \pi^{f5})}{(1 + r)^5} + \frac{ISA_{2020} \times (1 + \pi^{f10})}{(1 + r)^{10}} \\ + \frac{ISA_{2025} \times (1 + \pi^{f15})}{(1 + r)^{15}} + \frac{ISA_{2030} \times (1 + \pi^{f20})}{(1 + r)^{20}}$$

La Table 22 présente la différence entre la valeur actuelle de la patte fixe dans la situation 1 et dans la situation 2. Dans tous les cas, sauf lorsque $\lambda = 0$, l'agent paiera plus cher en se couvrant avec un SVS qu'en le faisant en construisant un portefeuille de FS. L'écart croît avec la valeur de λ , ainsi qu'avec la maturité du contrat. Il est également plus important dans le cas des hommes que dans celui des femmes, ce qui est dû aux β plus élevés pour la population masculine.

Par conséquent, un arbitrageur pourrait réaliser des profits sans mettre son capital à risque. Pour ce faire, il lui faudrait entrer à la fois dans un contrat SVS où il recevrait la patte fixe, et dans plusieurs FS où il paierait la patte fixe. De cette manière, les flux monétaires associés aux pattes variables s'annuleraient : ceux qu'il recevrait des FS égaliseraient précisément ceux qui seraient dus dans le cadre

du SVS, puisque les pattes variables ne dépendent aucunement des primes d'évaluation. L'arbitrageur n'aurait donc aucune exposition au RLA. Toutefois, l'échange des deux pattes fixes lui générerait un profit certain.

Table 22 Différence entre VA(Patte fixe) dans la situation 1 et la situation 2

Note : pour chaque SVS possible, un portefeuille de FS a été construit de manière à imiter les flux monétaires générés par le SVS. La valeur actuelle de la patte fixe dans le cas du SVS et dans le cas du portefeuille de FS a été calculée ; ce tableau présente la différence entre ces deux résultats pour chaque scénario et chaque contrat.

	Hommes		
	SVS 10 ans	SVS 15 ans	SVS 20 ans
Cas 1	0,00	0,00	0,00
Cas 2	0,78	3,28	7,97
Cas 3	1,56	6,55	15,93
Cas 4	3,12	13,07	31,79
Cas 5	4,68	19,57	47,58
Cas 6	6,23	26,04	63,30
Cas 7	9,31	38,89	94,51
	Femmes		
	SVS 10 ans	SVS 15 ans	SVS 20 ans
Cas 1	0,00	0,00	0,00
Cas 2	0,28	0,99	2,15
Cas 3	0,56	1,98	4,29
Cas 4	1,12	3,96	8,57
Cas 5	1,68	5,93	12,85
Cas 6	2,23	7,89	17,11
Cas 7	3,34	11,82	25,62

Reprenons l'exemple d'une couverture concernant la population féminine et venant à échéance fin 2025, avec $\lambda = 0,15$. En 2015, 2020 et 2025, l'arbitrageur ne fait que transférer les flux monétaires de la patte variable de sa contrepartie des FS à sa contrepartie du SVS. Quel que soit le nombre de survivants réalisés ces années-là, la richesse de l'arbitrageur n'est pas affectée.

Il en est autrement pour les flux monétaires associés aux pattes fixes. En 2015, il paie dans le cadre du FS 5 ans : $9422 \times (1 + 1,2535\%) = \9540 , et reçoit $9422 \times (1 + 3,7012\%) = \9770 dans le cadre du SVS 15 ans. Il fait alors un gain d'environ \$230,62. En 2020, le profit s'élève à \$2,70, soit un montant quasi nul. En revanche, en 2030, il perd \$303,84. Actualisés au début de l'année 2011, au taux de 3%, ses profits futurs et certains s'élèvent à \$5,93. Ainsi, la méthodologie de Wang semble laisser la place à une possibilité d'arbitrage.

VI- Conclusion

Notre recherche avait pour principal objectif d'étudier la sensibilité du prix de forwards et swaps de longévité à des variations de la prime de risque inhérente à l'incomplétude du marché. La procédure d'évaluation utilisait deux grands résultats de la littérature : le modèle de Lee et Carter, et la transformation de Wang. Ce premier nous a servi à simuler les futurs niveaux d'un indice de survie de la population canadienne, tandis que ce deuxième nous a permis d'ajuster les résultats de la simulation en fonction de la prime de risque exigée par le marché.

Selon notre étude, les taux de mortalité anticipés par les actuaires canadiens se situent au-dessus de ceux prévus par le modèle de Lee et Carter ; le risque de longévité semble donc bien réel. De plus, l'évaluation des contrats de longévité est bien plus sensible aux anticipations des futurs niveaux de mortalité, qu'elle ne l'est à la valeur de la prime de risque. En outre, plus la maturité du produit augmente, plus une variation de la prime aura un impact important sur le prix de celui-ci. Enfin, la construction de swaps de survie à l'aide de plusieurs forwards nous permet de dire que la méthodologie proposée par Wang (2000 et 2007) semble laisser la place à une opportunité d'arbitrage. En effet, une couverture à partir de plusieurs forwards est moins coûteuse qu'une couverture mise en place à l'aide d'un unique swap de survie.

En termes d'applications concrètes, notre modèle d'évaluation est sujet à deux limites. D'une part, les données de mortalité sont actuellement publiées avec près de trois années de retard. Par conséquent, aux dates de paiements prévues, l'indice de survie réalisé sera toujours inconnu. D'autre part, le sous-jacent de nos produits de longévité est la mortalité de la population canadienne. Or, celle-ci n'est pas homogène pour toutes les provinces, et toutes les classes de travailleurs ; le risque de base peut donc être important.

Puisque les prévisions des futurs taux de mortalité expliquent une grande partie de l'évaluation de ces produits, il serait pertinent de refaire cette étude à l'aide d'une procédure utilisant un modèle autre que celui de Lee et Carter.

ANNEXES

Annexe 1 Évolution de l'espérance de vie à la naissance et à 65 ans des hommes canadiens de 1921 à 2007.

Années	Espérance de vie		Années	Espérance de vie	
	À la naissance	À 65 ans		À la naissance	À 65 ans
1921	55,95	13,31	1965	68,75	13,56
1922	55,89	12,97	1966	68,78	13,63
1923	55,85	12,74	1967	68,93	13,73
1924	57,71	13,15	1968	69,10	13,61
1925	58,07	13,10	1969	69,17	13,69
1926	56,77	12,56	1970	69,33	13,76
1927	57,39	12,91	1971	69,61	13,89
1928	57,30	12,55	1972	69,48	13,78
1929	56,72	12,50	1973	69,66	13,87
1930	57,62	12,93	1974	69,74	13,84
1931	59,00	13,34	1975	69,99	13,97
1932	60,25	12,91	1976	70,38	14,02
1933	61,22	13,11	1977	70,63	14,23
1934	61,43	13,27	1978	70,91	14,35
1935	61,21	13,16	1979	71,31	14,54
1936	61,62	13,06	1980	71,60	14,49
1937	59,92	12,98	1981	72,01	14,67
1938	61,80	13,17	1982	72,29	14,61
1939	62,23	12,93	1983	72,69	14,78
1940	62,44	12,82	1984	73,01	14,92
1941	61,98	12,84	1985	73,03	14,84
1942	62,97	13,04	1986	73,23	14,96
1943	62,90	12,74	1987	73,51	15,12
1944	63,75	13,03	1988	73,57	15,05
1945	64,65	13,19	1989	73,87	15,29
1946	64,79	13,33	1990	74,22	15,53
1947	64,82	13,32	1991	74,44	15,57
1948	65,38	13,29	1992	74,69	15,77
1949	65,63	13,26	1993	74,63	15,66
1950	66,16	13,30	1994	74,88	15,82
1951	66,42	13,36	1995	75,02	15,87
1952	66,34	13,52	1996	75,39	15,99
1953	66,69	13,52	1997	75,68	16,11
1954	67,54	13,70	1998	75,94	16,17
1955	67,51	13,48	1999	76,16	16,37
1956	67,52	13,50	2000	76,64	16,75
1957	67,29	13,41	2001	76,92	17,01
1958	67,90	13,60	2002	77,16	17,13
1959	67,98	13,43	2003	77,32	17,32
1960	68,23	13,57	2004	77,69	17,61
1961	68,40	13,59	2005	77,85	17,80
1962	68,45	13,64	2006	78,31	18,15
1963	68,41	13,54	2007	78,35	18,17
1964	68,63	13,68			

Annexe 2 Évolution de l'espérance de vie à la naissance et à 65 ans des femmes canadiennes de 1921 à 2007.

Années	Espérance de vie		Années	Espérance de vie	
	À la naissance	À 65 ans		À la naissance	À 65 ans
1921	58,16	13,87	1965	75,14	16,70
1922	58,14	13,63	1966	75,39	16,90
1923	58,05	13,27	1967	75,66	17,15
1924	59,85	13,95	1968	75,79	17,14
1925	60,44	13,83	1969	76,02	17,32
1926	59,12	13,30	1970	76,27	17,50
1927	59,95	13,84	1971	76,64	17,63
1928	59,87	13,48	1972	76,55	17,58
1929	59,25	13,29	1973	76,83	17,74
1930	60,31	13,86	1974	76,90	17,72
1931	61,65	14,16	1975	77,23	17,96
1932	62,53	13,72	1976	77,67	18,09
1933	63,37	13,91	1977	77,97	18,39
1934	64,01	14,28	1978	78,32	18,57
1935	63,72	14,07	1979	78,59	18,80
1936	63,80	14,01	1980	78,72	18,74
1937	62,83	14,01	1981	79,11	19,00
1938	64,91	14,34	1982	79,23	18,90
1939	65,33	14,08	1983	79,55	19,07
1940	65,70	14,08	1984	79,77	19,22
1941	65,68	14,16	1985	79,73	19,17
1942	66,54	14,46	1986	79,79	19,14
1943	66,42	14,09	1987	80,11	19,37
1944	67,03	14,41	1988	80,19	19,37
1945	68,13	14,76	1989	80,39	19,55
1946	68,38	14,84	1990	80,63	19,67
1947	68,90	14,88	1991	80,73	19,71
1948	69,44	14,86	1992	80,98	19,93
1949	69,85	14,89	1993	80,79	19,71
1950	70,59	14,99	1994	80,90	19,78
1951	70,86	14,99	1995	80,99	19,82
1952	71,40	15,47	1996	81,12	19,87
1953	71,80	15,41	1997	81,23	19,89
1954	72,69	15,82	1998	81,30	19,99
1955	72,87	15,78	1999	81,61	20,16
1956	72,83	15,78	2000	81,83	20,34
1957	72,97	15,85	2001	82,01	20,45
1958	73,68	16,08	2002	82,02	20,51
1959	73,64	15,88	2003	82,23	20,68
1960	74,16	16,18	2004	82,46	20,85
1961	74,46	16,31	2005	82,54	20,95
1962	74,44	16,41	2006	82,94	21,26
1963	74,51	16,33	2007	82,95	21,25
1964	75,08	16,72			

Annexe 3 (Suite 1/4) Taux de mortalité historiques par tranches d'âges de la population masculine canadienne													
Années Âges	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
0	0,030037	0,028078	0,025658	0,025100	0,023920	0,023048	0,022392	0,021996	0,020268	0,019002	0,017482	0,016784	0,016330
1-4	0,001219	0,001133	0,001059	0,001073	0,001093	0,000968	0,000972	0,000914	0,000897	0,000974	0,000807	0,000847	0,000851
5-9	0,000654	0,000632	0,000651	0,000570	0,000610	0,000579	0,000600	0,000577	0,000556	0,000534	0,000540	0,000493	0,000502
10-14	0,000337	0,000465	0,000488	0,000577	0,000552	0,000489	0,000507	0,000526	0,000496	0,000527	0,000482	0,000496	0,000460
15-19	0,001124	0,001178	0,001197	0,001303	0,001275	0,001275	0,001289	0,001332	0,001358	0,001593	0,001652	0,001684	0,001615
20-24	0,001762	0,001783	0,001747	0,001799	0,001915	0,001755	0,001853	0,001709	0,001735	0,001973	0,001963	0,001922	0,001851
25-29	0,001546	0,001451	0,001544	0,001574	0,001484	0,001457	0,001541	0,001408	0,001411	0,001456	0,001450	0,001484	0,001472
30-34	0,001619	0,001700	0,001645	0,001672	0,001570	0,001645	0,001621	0,001592	0,001593	0,001611	0,001530	0,001508	0,001552
35-39	0,002248	0,002179	0,002241	0,002241	0,002157	0,002248	0,002275	0,002153	0,002156	0,002173	0,002272	0,002244	0,002204
40-44	0,003400	0,003655	0,003530	0,003433	0,003637	0,003477	0,003389	0,003499	0,003535	0,003512	0,003494	0,003454	0,003353
45-49	0,005729	0,005739	0,005571	0,005715	0,005806	0,005784	0,005704	0,005567	0,005696	0,005621	0,005687	0,005694	0,005463
50-54	0,009428	0,009497	0,009745	0,009739	0,009577	0,009129	0,009371	0,009254	0,009142	0,009018	0,009035	0,009173	0,009045
55-59	0,015454	0,015053	0,015173	0,015313	0,015263	0,015098	0,014981	0,014767	0,014464	0,014516	0,014877	0,014430	0,014196
60-64	0,024058	0,024871	0,024131	0,023888	0,023944	0,023369	0,022971	0,023514	0,022660	0,022685	0,022634	0,022354	0,022137
65-69	0,035346	0,035175	0,035557	0,036092	0,035943	0,036708	0,036495	0,036018	0,034450	0,035435	0,034347	0,034526	0,033836
70-74	0,053786	0,053180	0,053555	0,053090	0,051981	0,052506	0,053184	0,052931	0,051162	0,052594	0,051347	0,052701	0,050870
75-79	0,083279	0,081175	0,083025	0,079681	0,080402	0,080449	0,078323	0,078179	0,078241	0,078202	0,078487	0,077484	0,076488
80-84	0,122491	0,119159	0,121172	0,119489	0,115375	0,120630	0,117265	0,116534	0,116637	0,117893	0,117727	0,117963	0,116581
85-89	0,193630	0,182137	0,186388	0,185637	0,179217	0,180198	0,178562	0,171489	0,176120	0,177618	0,178558	0,175936	0,177014

Annexe 3 (Suite 2/4) Taux de mortalité historiques par tranches d'âges de la population masculine canadienne

Années Âges	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
0	0,014788	0,013881	0,013473	0,012511	0,011915	0,010929	0,010636	0,009412	0,009125	0,008841	0,008767	0,008400	0,008104
1-4	0,000799	0,000657	0,000703	0,000607	0,000665	0,000578	0,000530	0,000498	0,000483	0,000478	0,000479	0,000469	0,000447
5-9	0,000455	0,000458	0,000444	0,000418	0,000399	0,000327	0,000294	0,000317	0,000292	0,000259	0,000267	0,000223	0,000261
10-14	0,000429	0,000411	0,000458	0,000426	0,000389	0,000398	0,000373	0,000323	0,000294	0,000309	0,000262	0,000328	0,000302
15-19	0,001417	0,001446	0,001356	0,001427	0,001317	0,001342	0,001152	0,001064	0,001049	0,000988	0,001010	0,001054	0,001015
20-24	0,001684	0,001792	0,001754	0,001791	0,001596	0,001539	0,001353	0,001428	0,001294	0,001318	0,001242	0,001226	0,001289
25-29	0,001429	0,001442	0,001388	0,001402	0,001355	0,001301	0,001334	0,001226	0,001171	0,001192	0,001146	0,001183	0,001184
30-34	0,001464	0,001470	0,001465	0,001412	0,001388	0,001359	0,001244	0,001327	0,001203	0,001320	0,001290	0,001291	0,001280
35-39	0,001948	0,002090	0,002011	0,001843	0,001839	0,001732	0,001555	0,001545	0,001526	0,001522	0,001578	0,001552	0,001514
40-44	0,003196	0,003215	0,003056	0,003051	0,002682	0,002731	0,002515	0,002508	0,002337	0,002367	0,002263	0,002206	0,002170
45-49	0,005550	0,005410	0,005028	0,004984	0,004809	0,004685	0,004278	0,003986	0,003921	0,003864	0,003761	0,003672	0,003496
50-54	0,008934	0,008814	0,008768	0,008331	0,008007	0,007575	0,007448	0,007169	0,006867	0,006801	0,006694	0,006197	0,005937
55-59	0,014133	0,013761	0,013747	0,013193	0,012745	0,012349	0,012247	0,011878	0,011262	0,011209	0,011053	0,010682	0,010147
60-64	0,021908	0,021842	0,021221	0,020548	0,019869	0,019357	0,019105	0,018367	0,018773	0,017965	0,017778	0,017258	0,017498
65-69	0,033028	0,032706	0,032146	0,031540	0,031268	0,030568	0,030579	0,029816	0,028755	0,028740	0,027961	0,027480	0,027221
70-74	0,051109	0,050141	0,048513	0,047407	0,047420	0,045490	0,047228	0,045674	0,044745	0,045246	0,043956	0,043204	0,043626
75-79	0,076856	0,074506	0,073071	0,071408	0,072660	0,071092	0,070655	0,070361	0,069288	0,068502	0,069158	0,067224	0,067091
80-84	0,116710	0,111560	0,111474	0,107979	0,109862	0,109015	0,107249	0,106101	0,106120	0,106915	0,106751	0,104012	0,106065
85-89	0,172255	0,165673	0,165607	0,158588	0,161132	0,160274	0,162514	0,158534	0,156583	0,161481	0,158376	0,155384	0,164344

Annexe 3 (Suite 3/4) Taux de mortalité historiques par tranches d'âges de la population masculine canadienne													
Années Âges	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
0	0,008143	0,007649	0,006909	0,006748	0,006830	0,006932	0,006653	0,006034	0,005838	0,005649	0,005663	0,005706	0,005843
1-4	0,000426	0,000409	0,000374	0,000331	0,000370	0,000352	0,000296	0,000317	0,000309	0,000278	0,000281	0,000228	0,000262
5-9	0,000215	0,000223	0,000197	0,000219	0,000170	0,000183	0,000177	0,000153	0,000170	0,000146	0,000161	0,000144	0,000128
10-14	0,000258	0,000273	0,000259	0,000239	0,000218	0,000242	0,000216	0,000200	0,000234	0,000201	0,000204	0,000180	0,000153
15-19	0,001038	0,000921	0,000921	0,000838	0,000845	0,000840	0,000800	0,000707	0,000788	0,000692	0,000681	0,000661	0,000670
20-24	0,001181	0,001138	0,001181	0,001087	0,001040	0,001035	0,001064	0,001015	0,000955	0,000980	0,000934	0,000904	0,000875
25-29	0,001170	0,001126	0,001182	0,001189	0,001161	0,001091	0,001109	0,001023	0,000894	0,000939	0,000900	0,000818	0,000841
30-34	0,001301	0,001353	0,001297	0,001351	0,001407	0,001313	0,001376	0,001266	0,001135	0,001092	0,001062	0,000980	0,000973
35-39	0,001614	0,001667	0,001575	0,001694	0,001803	0,001699	0,001728	0,001605	0,001421	0,001395	0,001339	0,001290	0,001234
40-44	0,002126	0,002165	0,002117	0,002204	0,002288	0,002310	0,002238	0,002169	0,002023	0,001946	0,001954	0,001869	0,001775
45-49	0,003424	0,003431	0,003420	0,003211	0,003355	0,003143	0,003221	0,003034	0,002920	0,002847	0,002932	0,002787	0,002838
50-54	0,005837	0,005745	0,005492	0,005330	0,005313	0,005126	0,005202	0,004978	0,004789	0,004521	0,004448	0,004408	0,004477
55-59	0,010107	0,009618	0,009361	0,009328	0,009044	0,008681	0,008378	0,008203	0,008086	0,007755	0,007590	0,007448	0,007124
60-64	0,016787	0,016174	0,015649	0,015318	0,014743	0,014927	0,014170	0,013768	0,013402	0,012738	0,012547	0,012364	0,011964
65-69	0,026427	0,025237	0,025234	0,023937	0,024440	0,023832	0,023484	0,022941	0,022269	0,021941	0,021044	0,020155	0,019308
70-74	0,041648	0,039945	0,038769	0,038243	0,038778	0,037810	0,037310	0,037399	0,035805	0,035492	0,034407	0,032847	0,031436
75-79	0,064629	0,063094	0,063086	0,061579	0,062134	0,060525	0,060373	0,058019	0,058161	0,057523	0,056426	0,053679	0,051682
80-84	0,105423	0,103362	0,101524	0,099350	0,101440	0,100151	0,099028	0,097257	0,097295	0,096925	0,093188	0,088203	0,085634
85-89	0,158468	0,153559	0,157478	0,156989	0,160497	0,155343	0,156966	0,154628	0,155041	0,155562	0,155497	0,144297	0,141504

Annexe 3 (Suite 4/4) Taux de mortalité historiques par tranches d'âges de la population masculine canadienne							
Années Âges	2002	2003	2004	2005	2006	2007	
	0	0,005797	0,005773	0,005512	0,005858	0,005460	0,005637
1-4	0,000234	0,000246	0,000219	0,000241	0,000229	0,000214	
5-9	0,000135	0,000128	0,000129	0,000126	0,000118	0,000110	
10-14	0,000179	0,000166	0,000143	0,000171	0,000150	0,000153	
15-19	0,000616	0,000637	0,000603	0,000600	0,000594	0,000584	
20-24	0,000810	0,000873	0,000832	0,000853	0,000848	0,000827	
25-29	0,000775	0,000779	0,000814	0,000848	0,000806	0,000805	
30-34	0,000932	0,000888	0,000910	0,000948	0,000873	0,000843	
35-39	0,001210	0,001268	0,001206	0,001187	0,001151	0,001180	
40-44	0,001765	0,001764	0,001718	0,001747	0,001657	0,001649	
45-49	0,002762	0,002817	0,002690	0,002687	0,002676	0,002560	
50-54	0,004355	0,004401	0,004265	0,004199	0,004152	0,004206	
55-59	0,007068	0,006854	0,006769	0,006693	0,006475	0,006557	
60-64	0,011658	0,011418	0,011208	0,010677	0,010324	0,010231	
65-69	0,019216	0,018115	0,017682	0,017245	0,016338	0,016502	
70-74	0,030572	0,030449	0,028883	0,028180	0,026588	0,026692	
75-79	0,050555	0,049604	0,047670	0,046079	0,044141	0,044161	
80-84	0,082838	0,081200	0,079081	0,076961	0,073722	0,072969	
85-89	0,141565	0,140006	0,131978	0,130657	0,123347	0,122308	

Annexe 4 Taux de mortalité historiques par tranches d'âges de la population féminine canadienne													
Années Âges	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962
0	0,037474	0,034868	0,035697	0,033945	0,031344	0,031020	0,032151	0,030272	0,028062	0,026114	0,024444	0,024240	0,024638
1-4	0,001774	0,001733	0,001751	0,001537	0,001326	0,001290	0,001344	0,001284	0,001143	0,001122	0,001056	0,000964	0,001021
5-9	0,000701	0,000679	0,000702	0,000521	0,000511	0,000508	0,000467	0,000473	0,000433	0,000473	0,000430	0,000399	0,000411
10-14	0,000597	0,000504	0,000506	0,000454	0,000348	0,000420	0,000371	0,000406	0,000347	0,000345	0,000335	0,000304	0,000271
15-19	0,000801	0,000865	0,000649	0,000580	0,000547	0,000555	0,000507	0,000549	0,000489	0,000472	0,000506	0,000453	0,000501
20-24	0,000976	0,000991	0,000904	0,000782	0,000683	0,000628	0,000600	0,000683	0,000564	0,000616	0,000570	0,000565	0,000583
25-29	0,001149	0,001141	0,001034	0,001013	0,000902	0,000813	0,000825	0,000862	0,000728	0,000803	0,000679	0,000700	0,000699
30-34	0,001343	0,001457	0,001412	0,001192	0,001159	0,001130	0,000963	0,001034	0,001008	0,000960	0,000871	0,000896	0,000914
35-39	0,002149	0,002040	0,001918	0,001777	0,001684	0,001526	0,001497	0,001413	0,001499	0,001446	0,001420	0,001372	0,001357
40-44	0,003146	0,002967	0,002828	0,002799	0,002686	0,002341	0,002356	0,002310	0,002253	0,002098	0,002107	0,001957	0,002133
45-49	0,004643	0,004455	0,004422	0,004092	0,003886	0,003701	0,003680	0,003836	0,003400	0,003402	0,003496	0,003228	0,003388
50-54	0,006597	0,006424	0,006429	0,006400	0,006012	0,005576	0,005674	0,005478	0,005338	0,005549	0,005270	0,005296	0,005040
55-59	0,010075	0,010078	0,009625	0,009485	0,008792	0,008997	0,008754	0,009265	0,008465	0,008628	0,008180	0,007933	0,008131
60-64	0,016091	0,016066	0,015381	0,015357	0,014457	0,014147	0,014662	0,014293	0,013568	0,013420	0,013312	0,012753	0,012773
65-69	0,026274	0,024954	0,023827	0,024172	0,022925	0,022518	0,022213	0,023156	0,021905	0,021917	0,021276	0,021358	0,020630
70-74	0,042462	0,041500	0,040365	0,039567	0,037274	0,036951	0,036868	0,036329	0,035008	0,036764	0,034932	0,034230	0,034122
75-59	0,069638	0,073568	0,066286	0,067901	0,064206	0,064987	0,066011	0,063888	0,061990	0,063354	0,060544	0,058831	0,057491
80-84	0,108405	0,111902	0,102844	0,103594	0,096444	0,098694	0,100361	0,098988	0,095870	0,099823	0,095461	0,093647	0,092469
85-89	0,177884	0,173567	0,161919	0,164922	0,159450	0,165787	0,160313	0,156878	0,158220	0,161199	0,157364	0,153817	0,155020

Annexe 4 (Suite 1/4) Taux de mortalité historiques par tranches d'âges de la population féminine canadienne

Années Âges	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
0	0,023182	0,021510	0,020400	0,019695	0,019392	0,018567	0,017507	0,016718	0,015156	0,014918	0,013612	0,013489	0,012753
1-4	0,000908	0,000913	0,000891	0,000885	0,000846	0,000788	0,000798	0,000737	0,000762	0,000748	0,000720	0,000658	0,000665
5-9	0,000445	0,000387	0,000413	0,000428	0,000422	0,000383	0,000388	0,000381	0,000385	0,000346	0,000340	0,000334	0,000345
10-14	0,000287	0,000296	0,000307	0,000310	0,000324	0,000301	0,000305	0,000333	0,000321	0,000287	0,000279	0,000294	0,000303
15-19	0,000557	0,000498	0,000490	0,000509	0,000501	0,000507	0,000488	0,000524	0,000545	0,000588	0,000596	0,000578	0,000538
20-24	0,000613	0,000580	0,000564	0,000544	0,000548	0,000580	0,000566	0,000562	0,000574	0,000532	0,000587	0,000582	0,000564
25-29	0,000680	0,000624	0,000646	0,000611	0,000644	0,000651	0,000625	0,000630	0,000600	0,000639	0,000615	0,000608	0,000592
30-34	0,000881	0,000899	0,000878	0,000920	0,000874	0,000843	0,000860	0,000928	0,000859	0,000853	0,000818	0,000812	0,000779
35-39	0,001320	0,001256	0,001317	0,001331	0,001295	0,001320	0,001328	0,001313	0,001307	0,001341	0,001284	0,001224	0,001211
40-44	0,002051	0,002025	0,002045	0,002040	0,002084	0,002021	0,002075	0,002070	0,002046	0,002033	0,001921	0,001859	0,001943
45-49	0,003316	0,003183	0,003281	0,003316	0,003160	0,003092	0,003389	0,003167	0,003031	0,003078	0,003099	0,003146	0,003193
50-54	0,005146	0,005101	0,005235	0,004956	0,004993	0,005053	0,004902	0,004892	0,004570	0,004781	0,004761	0,004682	0,004454
55-59	0,007868	0,007751	0,007693	0,007683	0,007733	0,007627	0,007563	0,007487	0,007170	0,007352	0,007451	0,007064	0,007008
60-64	0,013056	0,012691	0,012231	0,012140	0,011905	0,011596	0,011482	0,011137	0,010870	0,011124	0,010950	0,011037	0,010713
65-69	0,020537	0,019935	0,019365	0,019419	0,018788	0,018391	0,018319	0,018151	0,017175	0,017327	0,016707	0,017095	0,016952
70-74	0,034037	0,032301	0,032411	0,030940	0,030261	0,030579	0,029680	0,029207	0,028107	0,028903	0,027580	0,027787	0,027475
75-79	0,058544	0,056541	0,056097	0,053455	0,051113	0,050700	0,050055	0,048521	0,047574	0,047985	0,047675	0,046873	0,045527
80-84	0,095618	0,089324	0,089503	0,087654	0,085956	0,085564	0,083324	0,081448	0,080581	0,079873	0,079433	0,079898	0,075886
85-89	0,155092	0,146460	0,151232	0,146529	0,140909	0,142036	0,137539	0,133999	0,136264	0,136263	0,133438	0,132757	0,127196

Annexe 4 (Suite 2/4) Taux de mortalité historiques par tranches d'âges de la population féminine canadienne													
Années Âges	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
	0	0,011652	0,011471	0,010673	0,009725	0,009333	0,008487	0,007923	0,007792	0,007365	0,007208	0,007069	0,006190
1-4	0,000599	0,000568	0,000547	0,000542	0,000493	0,000457	0,000416	0,000417	0,000430	0,000377	0,000405	0,000392	0,000358
5-9	0,000309	0,000285	0,000298	0,000286	0,000249	0,000250	0,000215	0,000212	0,000205	0,000183	0,000182	0,000181	0,000160
10-14	0,000245	0,000263	0,000244	0,000224	0,000243	0,000218	0,000213	0,000182	0,000198	0,000199	0,000179	0,000169	0,000173
15-19	0,000511	0,000512	0,000464	0,000540	0,000480	0,000451	0,000413	0,000388	0,000346	0,000411	0,00041	0,000393	0,000353
20-24	0,000504	0,000502	0,000528	0,000522	0,000516	0,000441	0,000388	0,000401	0,000394	0,000391	0,000377	0,000378	0,000386
25-29	0,000524	0,000541	0,000526	0,000548	0,000527	0,000536	0,000508	0,000431	0,000433	0,000429	0,000422	0,000410	0,000419
30-34	0,000751	0,000705	0,000687	0,000691	0,000664	0,000630	0,000610	0,000598	0,000567	0,000599	0,000565	0,000531	0,000545
35-39	0,001180	0,001111	0,001072	0,001121	0,001044	0,000949	0,000955	0,000889	0,000840	0,000811	0,000847	0,000771	0,000807
40-44	0,001733	0,001817	0,001639	0,001684	0,001591	0,001601	0,001577	0,001477	0,001429	0,001393	0,001335	0,001374	0,001282
45-49	0,002959	0,002981	0,002693	0,002716	0,002672	0,002573	0,002391	0,002363	0,002238	0,002383	0,002353	0,002157	0,002169
50-54	0,004358	0,004445	0,004424	0,004427	0,004145	0,004116	0,003977	0,003826	0,003700	0,003756	0,003762	0,003715	0,003457
55-59	0,006643	0,006718	0,006464	0,006389	0,006381	0,006298	0,006266	0,005959	0,005920	0,005897	0,005553	0,005685	0,005522
60-64	0,010495	0,010151	0,010243	0,009902	0,009645	0,009655	0,009286	0,008950	0,009100	0,009079	0,008891	0,008964	0,008853
65-69	0,016482	0,016016	0,015695	0,015456	0,015323	0,015201	0,015189	0,014997	0,014438	0,014327	0,014074	0,013760	0,013469
70-74	0,026152	0,025994	0,025216	0,024067	0,024660	0,023737	0,024114	0,023749	0,022903	0,022912	0,023084	0,022161	0,022414
75-79	0,044889	0,042165	0,041524	0,040624	0,041101	0,038630	0,039168	0,038778	0,038514	0,038680	0,038262	0,037118	0,036612
80-84	0,075046	0,072129	0,070511	0,068709	0,069282	0,067486	0,068804	0,066063	0,064940	0,064896	0,066273	0,064403	0,064684
85-89	0,128111	0,120888	0,118768	0,114475	0,113949	0,110838	0,112887	0,110387	0,107872	0,110510	0,112190	0,108991	0,109600

Annexe 4 (Suite 3/4) Taux de mortalité historiques par tranches d'âges de la population féminine canadienne													
Années Âges	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
0	0,006333	0,006185	0,005779	0,005332	0,005579	0,005552	0,003475	0,004919	0,004897	0,004790	0,004751	0,004569	0,004574
1-4	0,000359	0,000320	0,000269	0,000277	0,000255	0,000285	0,000247	0,000265	0,000271	0,000230	0,000238	0,000183	0,000214
5-9	0,000175	0,000175	0,000163	0,000182	0,000153	0,000138	0,000141	0,000141	0,000142	0,000131	0,000115	0,000105	0,000115
10-14	0,000174	0,000182	0,000164	0,000151	0,000154	0,000168	0,000189	0,000156	0,000157	0,000137	0,000118	0,000139	0,000121
15-19	0,000350	0,000330	0,000367	0,000344	0,000367	0,000312	0,000332	0,000327	0,000338	0,000311	0,000335	0,000331	0,000297
20-24	0,000429	0,000366	0,000352	0,000389	0,000381	0,000347	0,000332	0,000323	0,000316	0,000314	0,000312	0,000356	0,000315
25-29	0,000436	0,000406	0,000449	0,000414	0,000403	0,000384	0,000411	0,000370	0,000374	0,000335	0,000368	0,000351	0,000344
30-34	0,000570	0,000590	0,000532	0,000491	0,000557	0,000504	0,000528	0,000536	0,000478	0,000478	0,000454	0,000468	0,000464
35-39	0,000817	0,000809	0,000799	0,000812	0,000831	0,000792	0,000766	0,000779	0,000732	0,000741	0,000749	0,000708	0,000752
40-44	0,001280	0,001211	0,001268	0,001153	0,001230	0,001198	0,001181	0,001294	0,001184	0,001188	0,001227	0,001118	0,001113
45-49	0,002199	0,002029	0,001986	0,002083	0,001931	0,001974	0,001982	0,001918	0,001875	0,001840	0,001706	0,001725	0,001776
50-54	0,003385	0,003347	0,003201	0,003275	0,003135	0,003190	0,003150	0,003031	0,002862	0,002950	0,002899	0,002922	0,002770
55-59	0,005378	0,005305	0,005290	0,005151	0,005046	0,005230	0,005104	0,005014	0,004829	0,004736	0,004593	0,004558	0,004348
60-64	0,008488	0,008203	0,008218	0,008226	0,008322	0,008075	0,007783	0,007748	0,007730	0,007314	0,007288	0,007172	0,006868
65-69	0,013298	0,013088	0,013245	0,012488	0,012954	0,012839	0,012763	0,012494	0,012253	0,012058	0,011777	0,011463	0,011552
70-74	0,021531	0,021034	0,020714	0,020051	0,020808	0,020737	0,020335	0,020191	0,019907	0,019866	0,018972	0,018919	0,018525
75-79	0,036193	0,035242	0,035319	0,034672	0,035489	0,034634	0,033989	0,034102	0,033812	0,033122	0,032710	0,031809	0,030859
80-84	0,063354	0,062823	0,060705	0,059788	0,061565	0,060810	0,060746	0,060170	0,060316	0,058673	0,057057	0,055271	0,054328
85-89	0,106158	0,104979	0,104686	0,103448	0,106080	0,105686	0,106145	0,104621	0,105791	0,105277	0,104063	0,101449	0,099367

Annexe 4 (Suite 4/4) Taux de mortalité historiques par tranches d'âges de la population féminine canadienne							
Années Âges	2002	2003	2004	2005	2006	2007	
0	0,004866	0,004839	0,005021	0,005016	0,004633	0,004779	
1-4	0,000221	0,000205	0,000198	0,000168	0,000180	0,000170	
5-9	0,000097	0,000080	0,000074	0,000086	0,000098	0,000123	
10-14	0,000134	0,000109	0,000098	0,000121	0,000112	0,000112	
15-19	0,000297	0,000276	0,000257	0,000297	0,000290	0,000263	
20-24	0,000336	0,000324	0,000324	0,000339	0,000309	0,000297	
25-29	0,000317	0,000355	0,000338	0,000323	0,000337	0,000325	
30-34	0,000468	0,00046	0,000442	0,000460	0,000420	0,000419	
35-39	0,000754	0,000658	0,000669	0,000656	0,000668	0,000601	
40-44	0,001075	0,001104	0,000977	0,001068	0,001041	0,001007	
45-49	0,001788	0,001737	0,001724	0,001760	0,001694	0,001762	
50-54	0,002710	0,002811	0,002729	0,002680	0,002709	0,002639	
55-59	0,004461	0,004216	0,004239	0,004143	0,004010	0,004060	
60-64	0,007118	0,007081	0,006790	0,006702	0,006315	0,006293	
65-69	0,011256	0,010986	0,010737	0,010371	0,010234	0,010205	
70-74	0,018148	0,017791	0,017456	0,017399	0,016621	0,016724	
75-79	0,031149	0,030354	0,029503	0,029378	0,028284	0,027498	
80-84	0,054083	0,052562	0,052022	0,051286	0,048790	0,048813	
85-89	0,098781	0,097444	0,094429	0,093113	0,087741	0,089569	

Annexe 5 Répartition historique par tranches d'âges de la population masculine canadienne													
Années Âges	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962
0	184054	188670	191946	194413	196959	199198	204785	215520	225819	232207	236163	237596	237349
1-4	657015	691022	720272	745641	770617	793236	815751	842783	868480	887113	902354	917632	930508
5-9	676645	717669	760562	801995	844370	885428	920906	952283	982427	1011261	1039081	1063567	1085460
10-14	569776	582757	606346	635137	666705	700488	739091	783443	827621	869655	910842	947809	976771
15-19	540918	537835	543645	553880	564969	576350	592951	618145	645612	672907	701812	734384	772393
20-24	548121	542992	546500	553356	558982	563450	570278	579770	585836	587388	587470	592243	607822
25-29	548751	557073	569900	582855	592854	600190	608531	617890	622775	622368	618799	612546	604577
30-34	510794	517708	531148	548299	567087	586035	604045	619734	631326	638872	642748	642964	639625
35-39	488744	504094	517329	528934	539488	548449	559725	575763	592140	606425	619566	630256	636643
40-44	432643	447853	464059	479969	495449	510038	522142	531120	538978	546747	553819	561334	570864
45-49	378400	389594	402458	415580	429009	442899	457017	470671	483772	496214	506926	515662	522351
50-54	337278	342314	349787	358457	367047	374996	383764	394348	406338	419373	432025	443580	454592
55-59	295240	295040	298961	304635	310554	316571	322853	329702	337343	346016	354697	363375	372706
60-64	262551	264014	264503	264631	264799	265212	266847	269945	274258	279939	286453	292887	299209
65-69	220954	227188	230363	232203	234034	235909	237125	236883	236345	236933	238300	240102	242410
70-74	155489	161339	167471	173366	178744	183529	187410	190001	191945	193750	195186	195678	195455
75-79	92401	95257	99244	103561	107363	110789	114372	118644	123119	127391	131149	134172	136180
80-84	46652	48444	50008	51874	54118	56514	58944	61450	63814	66083	68955	71736	74166
85-89	17427	17829	18515	19254	19879	20940	21992	22849	23760	24793	25960	27317	28605

Annexe 5 (Suite 1/4) Répartition historique par tranches d'âges de la population masculine canadienne													
Années Âges	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
0	235574	230397	219501	204659	192556	185964	183949	184348	183149	179559	176185	176182	179305
1-4	937838	939205	934069	919733	892730	855083	814041	778882	756659	745732	740969	736424	728953
5-9	1108828	1132291	1153897	1171253	1181614	1185264	1181106	1170571	1151857	1115759	1067281	1023441	994356
10-14	1000243	1022444	1046587	1073258	1100191	1125866	1148926	1170165	1188229	1200793	1209109	1210836	1198922
15-19	813930	853705	895020	931890	966147	996292	1023840	1058097	1096818	1128805	1154774	1176758	1196745
20-24	632402	661630	694358	734746	783480	832636	876229	927412	977672	1005016	1028276	1063317	1100931
25-29	598493	598190	606134	623794	650165	682699	720404	772845	833668	885013	928678	970324	1010248
30-34	634891	631288	629977	630871	632635	634770	639172	655762	684444	714503	747124	783822	820729
35-39	640072	642850	646116	649124	650034	648918	647346	650843	656268	655421	654975	661688	674174
40-44	582964	597231	611838	625040	635162	640833	642393	646105	653829	659542	661973	661780	659318
45-49	526825	530437	535775	544342	556312	571381	587971	605561	619054	624626	627917	631854	636280
50-54	463859	477638	488886	498292	504761	508392	510962	516755	529312	547683	567587	584080	594583
55-59	382413	392482	403214	414810	427452	440709	453519	466235	476223	479610	478864	479492	486605
60-64	303850	313495	321912	331046	340839	350885	361067	372971	386191	398730	411107	423854	434254
65-69	245007	247961	251430	255626	260916	267735	276174	286939	298142	306757	314232	322247	331869
70-74	193181	195805	197255	198606	199381	199786	200757	203529	208494	215178	223166	231133	238060
75-79	137405	138158	138670	139280	140232	140748	140904	140985	141269	141505	142176	144120	147748
80-84	76634	79356	81859	83682	85062	86205	87093	87185	87219	87376	87032	86604	86532
85-89	29629	30680	32137	33506	34801	36260	37847	39355	40410	41026	41634	42112	42206

Annexe 5 (Suite 2/4) Répartition historique par tranches d'âges de la population masculine canadienne													
Années Âges	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
0	181232	181761	182804	184719	186987	188312	189266	190069	190464	190130	189336	189162	190904
1-4	722999	721737	724258	728398	732333	737508	744954	752639	757182	757390	757602	761693	768026
5-9	977787	965126	952494	940372	930327	923235	919727	920631	925457	932006	939892	950430	963373
10-14	1171982	1135044	1090502	1046071	1013065	993463	981263	969532	955874	941927	932429	932156	939768
15-19	1214472	1226243	1233155	1236249	1229881	1208173	1171076	1123608	1076140	1040972	1020265	1007030	998807
20-24	1132060	1156488	1177463	1198769	1223367	1246062	1261050	1271357	1277074	1270186	1245569	1204378	1155585
25-29	1039027	1052714	1063492	1081393	1105080	1132107	1162372	1190361	1211760	1231101	1252644	1273709	1292546
30-34	862061	909031	950466	985463	1019001	1043488	1055459	1067112	1087164	1113267	1143792	1177982	1212841
35-39	692641	719286	751533	784380	817294	856890	904065	946985	982382	1014418	1038900	1055462	1076443
40-44	656117	652939	653511	662002	677498	697554	721373	748811	778253	809883	849929	898659	946287
45-49	641225	646250	649312	648279	644849	641852	640067	641919	649044	660008	677022	703465	737192
50-54	600058	603235	606731	611946	618981	626505	632397	634639	632574	628420	625217	624326	628819
55-59	501108	519733	538650	554534	565237	572127	577861	584022	590676	598097	605640	611957	616118
60-64	440068	442035	441884	443604	452060	467176	485480	504057	519567	529416	536605	544730	553730
65-69	343221	354400	364800	375554	385157	391975	395406	395965	398021	406582	421512	439985	459244
70-74	244597	251133	257931	265467	273937	283010	292117	301815	312077	320976	327597	332119	334779
75-79	152610	158202	164333	170667	176383	181723	187092	192592	198779	205601	212890	221112	230224
80-84	86916	87406	88191	89527	91970	95060	98891	103477	108170	112314	115774	119506	123594
85-89	42269	42566	42752	43137	43691	44199	44587	45151	46052	47510	49307	51505	53887

Annexe 5 (Suite 3/4) Répartition historique par tranches d'âges de la population masculine canadienne													
Années Âges	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
0	197091	204731	207685	205837	201889	198351	195994	191901	184492	177536	174282	172801	170619
1-4	774798	783155	795997	813089	826773	829192	821593	810612	798105	781974	762743	744381	729319
5-9	976365	985819	991924	997067	1002136	1009541	1020367	1032526	1044199	1051811	1051121	1043136	1031559
10-14	950835	962772	976135	990798	1004545	1015930	1024568	1031370	1036649	1040305	1045068	1053705	1066683
15-19	995600	993973	991715	990647	994930	1005617	1019127	1032012	1043461	1054698	1066143	1077263	1086815
20-24	1112677	1082013	1063406	1051829	1041194	1030694	1022637	1020038	1023004	1030280	1042887	1059651	1077261
25-29	1305532	1299284	1270440	1229074	1183037	1139332	1106361	1087331	1075733	1064833	1055932	1051982	1052970
30-34	1245103	1273527	1296650	1311654	1322155	1328414	1320983	1296816	1259254	1212972	1169832	1142305	1130985
35-39	1107670	1141816	1174073	1205976	1237034	1263808	1287949	1311003	1330171	1344753	1353397	1349193	1329045
40-44	990137	1031524	1061684	1077058	1092425	1117894	1149208	1182802	1217695	1249447	1275572	1301151	1327416
45-49	772676	808018	849134	897937	945122	987699	1027482	1057876	1076347	1094174	1119539	1149991	1183424
50-54	640042	655833	675837	700814	729898	760286	791566	831611	882795	932826	976685	1017031	1047499
55-59	617422	616997	615871	615125	618985	628870	642276	659740	682996	711148	741494	773852	815019
60-64	562531	571276	579766	586968	591749	593771	593658	592473	591989	595305	603354	615244	632737
65-69	476625	489194	497465	503743	509978	516702	524353	533286	541834	547553	549794	550037	549671
70-74	339297	349630	364829	381189	397005	410343	419595	426038	432873	440777	449267	458918	469137
75-79	239985	248818	255112	258613	260484	263362	270814	282908	297020	311336	324106	334342	342829
80-84	127790	132485	137947	143946	150168	156774	163086	168040	171231	173516	177341	185096	196465
85-89	56213	58525	60523	62507	64805	67290	70200	73292	76470	80058	84053	88269	92040

Annexe 5 (Suite 4/4) Répartition historique par tranches d'âges de la population masculine canadienne							
Années	2002	2003	2004	2005	2006	2007	
Âges							
0	169047	170269	172913	175826	180060	185033	
1-4	716644	707419	703634	705655	712517	722747	
5-9	1016343	996653	975296	955049	937871	926938	
10-14	1082030	1093158	1094171	1085075	1069754	1051545	
15-19	1092572	1096644	1105124	1119603	1135382	1147849	
20-24	1094093	1111053	1127377	1141217	1153120	1163818	
25-29	1056983	1063442	1072999	1083186	1101576	1124791	
30-34	1125816	1118501	1109115	1100298	1095812	1100188	
35-39	1296350	1255828	1216826	1189201	1174610	1168318	
40-44	1349894	1368860	1383285	1384356	1366604	1333804	
45-49	1219831	1254577	1283863	1310379	1335410	1358293	
50-54	1065559	1083932	1111893	1146044	1182069	1218793	
55-59	865893	914656	956891	995857	1025871	1044796	
60-64	657490	687705	720128	753463	793084	840588	
65-69	550115	554356	563366	576695	595886	621113	
70-74	478012	483893	486831	488284	489648	492001	
75-79	351103	359750	368400	377417	387375	396584	
80-84	209180	221920	233352	243071	251650	259449	
85-89	95031	97625	101490	107840	116484	125638	

Annexe 6 Répartition historique par tranches d'âges de la population féminine canadienne													
Années / Ages	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962
0	176174	180825	183883	186181	188392	190265	195203	205009	214564	220569	224557	226200	225790
1-4	629588	661914	688676	712235	736849	760756	783961	809372	832759	849452	862917	877187	889662
5-9	650064	687675	726961	765806	807449	849842	886515	916928	944765	970892	995258	1015971	1035408
10-14	552327	563224	585015	612073	641532	673135	709498	751576	793157	832538	871835	908156	937353
15-19	531815	529315	533277	541291	551783	564032	580241	602929	627702	652067	678189	709387	748166
20-24	556120	552912	552914	554661	556719	559258	564806	573936	581412	585948	590910	599853	615720
25-29	565465	577470	585907	590347	592266	592682	594966	599816	601513	599207	596824	594694	592430
30-34	520287	533461	549510	566424	583216	599343	613928	624668	630041	631324	629981	626397	620686
35-39	479209	495997	510816	524019	536781	548588	562502	580460	598388	614195	628200	638473	642445
40-44	410690	425328	441711	458418	474655	489882	503845	516551	528225	539495	550043	561106	574790
45-49	352593	359787	370646	383669	397600	411270	425255	440512	456124	471773	486796	500044	510699
50-54	317266	323160	329446	335771	341671	346843	353894	364707	377867	392340	407055	421103	434545
55-59	275831	279910	286034	292768	298805	303661	308418	314311	321340	329287	337056	345505	355819
60-64	238586	242379	246078	249919	253787	256945	260404	265313	271374	278161	285003	291699	298445
65-69	197722	204898	209926	213882	218101	222581	226403	229444	232873	237537	242616	247731	252882
70-74	147827	154818	161029	166880	172776	178347	183658	188749	193585	198237	202367	206047	208988
75-79	92076	95136	99267	103740	107841	111223	115041	119991	125422	130774	135769	140641	145623
80-84	53346	54762	56348	58652	61351	64300	67576	70776	73767	76646	80148	83996	87716
85-89	22762	23420	24395	25315	26109	27300	28413	29377	30995	32389	34017	35861	37750

Annexe 6 (Suite 1/4) Répartition historique par tranches d'âges de la population féminine canadienne													
Années	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Âges													
0	223711	218272	207398	193654	182958	176930	175364	176161	174518	169929	166538	167100	170240
1-4	896253	896176	888486	872356	846780	812689	775316	743208	723103	712564	705968	699600	691926
5-9	1057728	1081516	1105517	1124229	1132308	1132570	1126716	1117061	1100242	1065780	1019033	976564	947828
10-14	960169	979924	1000686	1024935	1051308	1077071	1099873	1120286	1136948	1148200	1155744	1156882	1144942
15-19	791911	835380	875119	910782	942396	969350	993570	1024706	1060930	1090949	1115167	1135366	1153120
20-24	638197	665583	698743	739099	784131	829150	872070	923603	970330	992351	1012092	1045374	1083558
25-29	592616	597521	608221	625639	649348	678505	712262	755122	807764	860857	906599	946334	983314
30-34	614918	611478	610565	611713	614140	617668	623459	636587	657369	683180	715173	750979	787986
35-39	641543	639169	637290	635035	630813	625765	621865	621527	623510	624008	626388	634802	648041
40-44	590825	607303	621596	632325	638663	639374	635033	630329	628898	629522	630355	630312	629574
45-49	519276	527449	536991	549103	564321	582113	600240	616338	626159	628588	628308	627733	627077
50-54	448335	463037	477527	490728	501884	510396	517543	527011	542227	563483	586617	606145	619236
55-59	367183	379029	391370	404930	420647	437806	454961	471334	484233	491432	495621	501158	512991
60-64	305605	313845	323519	334519	346066	357973	370391	384474	399549	414342	429956	446772	461879
65-69	258317	264007	270288	277247	284762	293374	303295	314863	327045	338203	348888	359293	370986
70-74	211913	216064	221897	228033	232708	236472	240765	246758	253672	260458	268382	277328	286112
75-79	150196	154259	158064	162510	168275	173904	178723	183097	187538	191851	196119	200928	206865
80-84	91500	95651	99572	103156	106694	110408	114505	117952	121107	124686	128108	131042	134807
85-89	39544	41363	43655	46046	48585	51135	54116	57090	59840	62166	64674	67454	69727

Annexe 6 (Suite 2/4) Répartition historique par tranches d'âges de la population féminine canadienne

Années Âges	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
0	172418	173046	173614	175117	177443	179219	179985	180302	180589	180641	180801	180923	182191
1-4	686549	686119	688967	692444	695659	700333	707331	714347	718307	718626	719384	724410	731406
5-9	930286	916198	903131	891601	881917	875511	873862	875942	879999	884878	890992	900024	912242
10-14	1119004	1083130	1039589	996194	963706	943807	930744	919492	908693	898070	890206	889328	894911
15-19	1168970	1180584	1187821	1189534	1180195	1155081	1115673	1068047	1021334	986666	966787	955019	948182
20-24	1116545	1141354	1160821	1179523	1201588	1221733	1231890	1234630	1232665	1220419	1192880	1152088	1108702
25-29	1011933	1030510	1047888	1070959	1097400	1125283	1155583	1181986	1199178	1211883	1225589	1241085	1258788
30-34	830030	877573	921149	960024	998411	1027526	1043174	1058508	1082792	1112450	1143266	1174249	1204964
35-39	666314	691895	722987	754554	783763	823160	874704	921383	960595	995596	1022744	1043615	1070070
40-44	628917	627957	629710	638261	652931	671922	695749	724392	754889	786692	827053	877033	926947
45-49	626860	627615	628244	626739	624236	622916	623176	626754	635081	647053	664222	689747	722380
50-54	625008	624776	622449	621179	621924	624150	626409	627055	625129	622254	620187	619446	623095
55-59	532621	556419	579671	598063	609122	614029	615886	617071	618053	619615	621877	623789	624225
60-64	472227	479274	484534	490789	503270	522714	545790	568818	587116	597336	602077	605338	607929
65-69	385147	399924	414218	429537	444418	455967	463284	467428	473263	486344	506174	528768	551108
70-74	295508	306450	318167	329919	341967	354504	367212	380651	395405	409170	419852	427545	432677
75-79	213327	219875	227315	235922	244859	254570	264861	274953	284703	294670	305576	317524	330464
80-84	139301	143188	147480	151770	156533	161308	166037	172124	179505	186945	194167	202042	209960
85-89	72219	75202	78051	80909	84327	88065	91295	94468	97653	101131	104457	107835	112117

Annexe 6 (Suite 3/4) Répartition historique par tranches d'âges de la population féminine canadienne													
Années Âges	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
0	187759	194838	197599	195610	191420	187874	186106	182371	174987	168880	166083	164385	162233
1-4	738155	746670	759484	775538	788026	789734	781773	771025	759124	744029	726912	710623	696504
5-9	925129	935540	943401	949400	954206	961158	971661	983544	994969	1002265	1001151	993496	982986
10-14	903837	914361	926504	939667	952742	964185	972197	977872	982626	986745	992775	1002719	1015827
15-19	945254	942127	938377	937706	942089	951169	963178	975283	986240	997365	1008433	1018290	1026527
20-24	1072928	1045403	1026537	1014847	1004482	994813	987871	984347	983997	987511	996637	1011156	1028715
25-29	1273347	1267260	1237360	1198063	1155314	1114430	1084013	1065966	1053333	1041476	1031272	1024256	1022733
30-34	1234495	1260645	1280492	1293570	1302345	1305505	1296323	1271680	1235258	1192336	1151214	1122916	1109863
35-39	1105997	1142427	1174856	1206661	1236475	1261307	1283838	1304463	1320323	1331335	1335918	1328210	1306149
40-44	974542	1020195	1054418	1074642	1094944	1123734	1156911	1191295	1225867	1256336	1280324	1302194	1323220
45-49	757220	792517	835212	887361	938827	985593	1028405	1060378	1080655	1101971	1131451	1164830	1199037
50-54	633307	648604	669064	695586	727039	760111	793844	835338	886593	936706	981700	1024202	1057584
55-59	622896	620766	619064	619628	625634	637651	653213	672279	696163	724250	753896	785055	825730
60-64	609578	610770	612302	614490	615948	615702	614671	613946	614597	619244	628533	641421	659608
65-69	569918	581392	586100	587140	587233	587110	587867	590191	592992	594454	593846	592513	591996
70-74	439465	452418	471028	491701	511386	526886	535773	539605	541458	542795	544026	546441	550066
75-79	344732	357614	366660	372495	376169	380839	391360	407685	426477	445149	460383	469869	475156
80-84	217903	226255	234990	244548	253048	266471	277221	285659	291549	295469	301453	312387	327675
85-89	117118	122387	127839	133556	139319	144939	150793	156633	162859	169885	178056	186093	192901

Annexe 6 (Suite 4/4) Répartition historique par tranches d'âges de la population féminine canadienne							
Années	2002	2003	2004	2005	2006	2007	
Âges							
0	160706	161598	163702	166071	170080	175363	
1-4	683874	673689	668177	667931	672787	682302	
5-9	968691	950291	930143	909282	890182	877875	
10-14	1030371	1041133	1043030	1036209	1022409	1003483	
15-19	1031651	1033170	1042929	1057313	1074095	1088571	
20-24	1046247	1062976	1078079	1089647	1098575	1106546	
25-29	1027645	1037419	1050849	1067003	1086243	1109257	
30-34	1102828	1094969	1087635	1082592	1082340	1091081	
35-39	1273544	1234255	1195261	1166377	1151479	1145967	
40-44	1340496	1354792	1364993	1362823	1343040	1310404	
45-49	1233591	1264536	1289171	1310960	1331786	1351023	
50-54	1079138	1101031	1131280	1166037	1201521	1236380	
55-59	878027	929710	975195	1016860	1048956	1070047	
60-64	684502	714446	746404	779525	819978	869536	
65-69	593373	598941	608934	622388	641031	665574	
70-74	533503	555517	555802	555721	556261	558251	
75-79	478770	481588	483677	486454	490261	494294	
80-84	344563	361251	375242	384823	390978	394937	
85-89	198207	202188	207595	216919	229813	243502	

**Annexe 3 Nombre total de décès des populations masculine et féminine
canadiennes, âgées entre 0 et 89 ans**

Années	Nombre de décès		Années	Nombre de décès	
	Hommes	Femmes		Hommes	Femmes
1950	69152	51209	1979	91761	63971
1951	69873	52043	1980	92521	65487
1952	71420	51155	1981	92083	65348
1953	72028	51729	1982	92941	67104
1954	70583	49928	1983	92578	67155
1955	72921	50930	1984	92649	67638
1956	74592	52573	1985	94686	69891
1957	77796	53757	1986	95610	71666
1958	77137	53051	1987	95777	71733
1959	79212	55242	1988	98462	73360
1960	79562	54658	1989	98459	74063
1961	80299	54926	1990	98243	74757
1962	81470	56272	1991	99412	76096
1963	83287	57684	1992	99758	76557
1964	83116	56508	1993	103009	80311
1965	84308	57686	1994	102972	81490
1966	84896	57672	1995	104403	82865
1967	85146	57760	1996	104144	84085
1968	86181	58817	1997	104472	85361
1969	86934	59427	1998	105225	86053
1970	87692	59940	1999	105516	86241
1971	88083	60045	2000	103547	86504
1972	90626	62061	2001	103519	86920
1973	91273	62389	2002	104368	88837
1974	92554	63753	2003	105697	88962
1975	92601	63710	2004	104898	88856
1976	92660	63601	2005	105880	90113
1977	92600	63498	2006	104617	88559
1978	92533	63696	2007	107750	90882

Annexe 4 Table RP-2000 pour les retraités masculins et féminins.		
Âges	Taux de mortalité de la Table RP-2000 pour les retraités	
	Hommes	Femmes
50	0,005347	0,002344
51	0,005528	0,002459
52	0,005644	0,002647
53	0,005722	0,002895
54	0,005797	0,003190
55	0,005905	0,003531
56	0,006124	0,003925
57	0,006444	0,004385
58	0,006895	0,004921
59	0,007485	0,005531
60	0,008196	0,006200
61	0,009001	0,006919
62	0,009915	0,007689
63	0,010951	0,008509
64	0,012117	0,009395
65	0,013419	0,010364
66	0,014868	0,011413
67	0,016460	0,012540
68	0,018200	0,013771
69	0,020105	0,015153
70	0,022206	0,016742
71	0,024570	0,018579
72	0,027281	0,020665
73	0,030387	0,022970
74	0,033900	0,025458
75	0,037834	0,028106
76	0,042169	0,030966
77	0,046906	0,034105
78	0,052123	0,037595
79	0,057927	0,041506
80	0,064368	0,045879
81	0,072041	0,050780
82	0,080486	0,056294
83	0,089718	0,062506
84	0,099779	0,069517
85	0,110757	0,077446
86	0,122797	0,086376
87	0,136043	0,096337
88	0,150590	0,107303
89	0,166420	0,119154

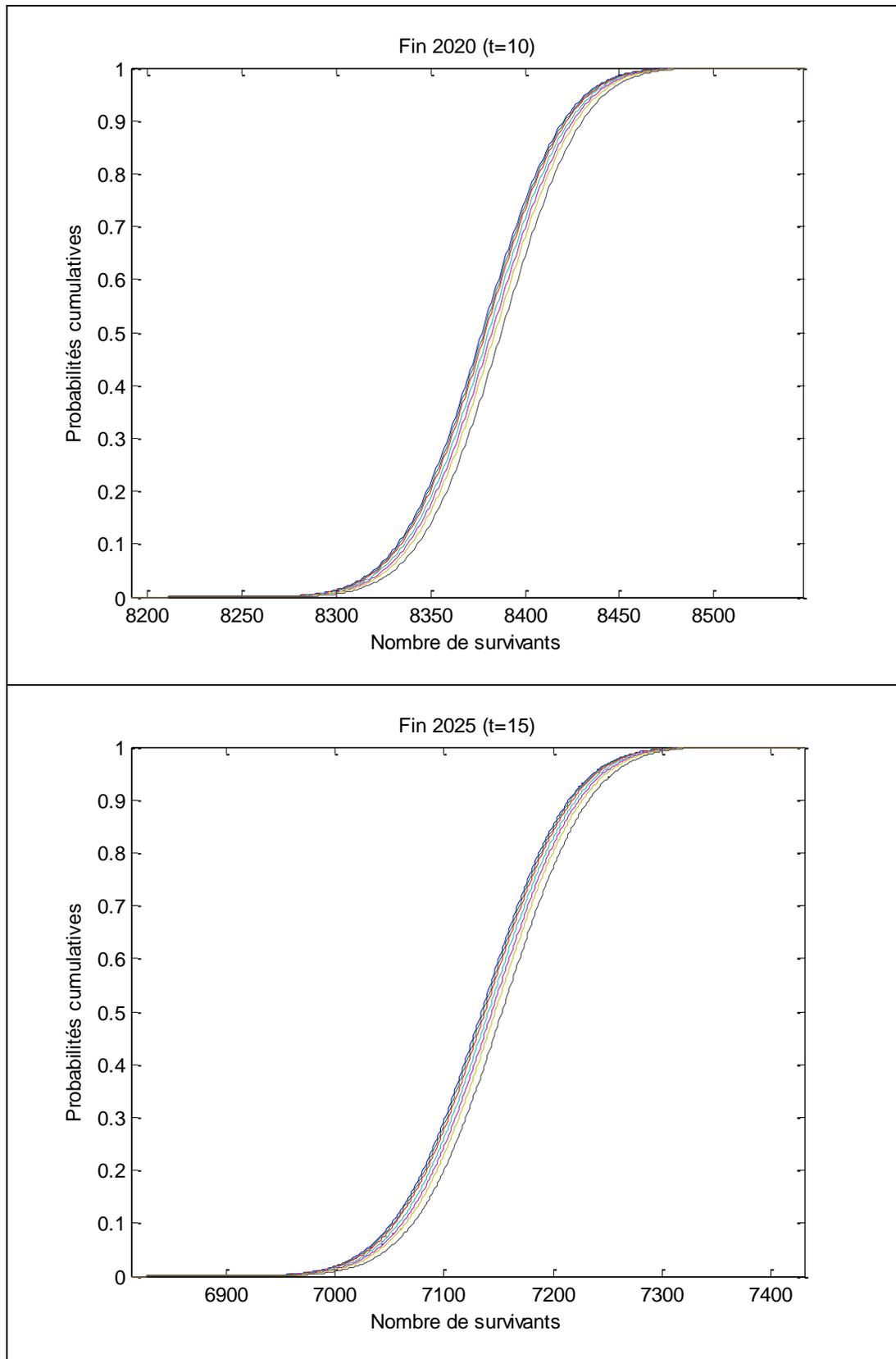
Annexe 5 Facteurs d'amélioration AA par âge et par sexe.						
Âges	Facteurs AA			Âges	Facteurs AA	
	Hommes	Femmes			Hommes	Femmes
1	0,020	0,020		46	0,014	0,017
2	0,020	0,020		47	0,015	0,018
3	0,020	0,020		48	0,016	0,018
4	0,020	0,020		49	0,017	0,018
5	0,020	0,020		50	0,018	0,017
6	0,020	0,020		51	0,019	0,016
7	0,020	0,020		52	0,020	0,014
8	0,020	0,020		53	0,020	0,012
9	0,020	0,020		54	0,020	0,010
10	0,020	0,020		55	0,019	0,008
11	0,020	0,020		56	0,018	0,006
12	0,020	0,020		57	0,017	0,005
13	0,020	0,020		58	0,016	0,005
14	0,019	0,018		59	0,016	0,005
15	0,019	0,016		60	0,016	0,005
16	0,019	0,015		61	0,015	0,005
17	0,019	0,014		62	0,015	0,005
18	0,019	0,014		63	0,014	0,005
19	0,019	0,015		64	0,014	0,005
20	0,019	0,016		65	0,014	0,005
21	0,018	0,017		66	0,013	0,005
22	0,017	0,017		67	0,013	0,005
23	0,015	0,016		68	0,014	0,005
24	0,013	0,015		69	0,014	0,005
25	0,010	0,014		70	0,015	0,005
26	0,006	0,012		71	0,015	0,006
27	0,005	0,012		72	0,015	0,006
28	0,005	0,012		73	0,015	0,007
29	0,005	0,012		74	0,015	0,007
30	0,005	0,010		75	0,014	0,008
31	0,005	0,008		76	0,014	0,008
32	0,005	0,008		77	0,013	0,007
33	0,005	0,009		78	0,012	0,007
34	0,005	0,010		79	0,011	0,007
35	0,005	0,011		80	0,010	0,007
36	0,005	0,012		81	0,009	0,007
37	0,005	0,013		82	0,008	0,007
38	0,006	0,014		83	0,008	0,007
39	0,007	0,015		84	0,007	0,007
40	0,008	0,015		85	0,007	0,006
41	0,009	0,015		86	0,007	0,005
42	0,010	0,015		87	0,006	0,004
43	0,011	0,015		88	0,005	0,004
44	0,012	0,015		89	0,005	0,003
45	0,013	0,016				

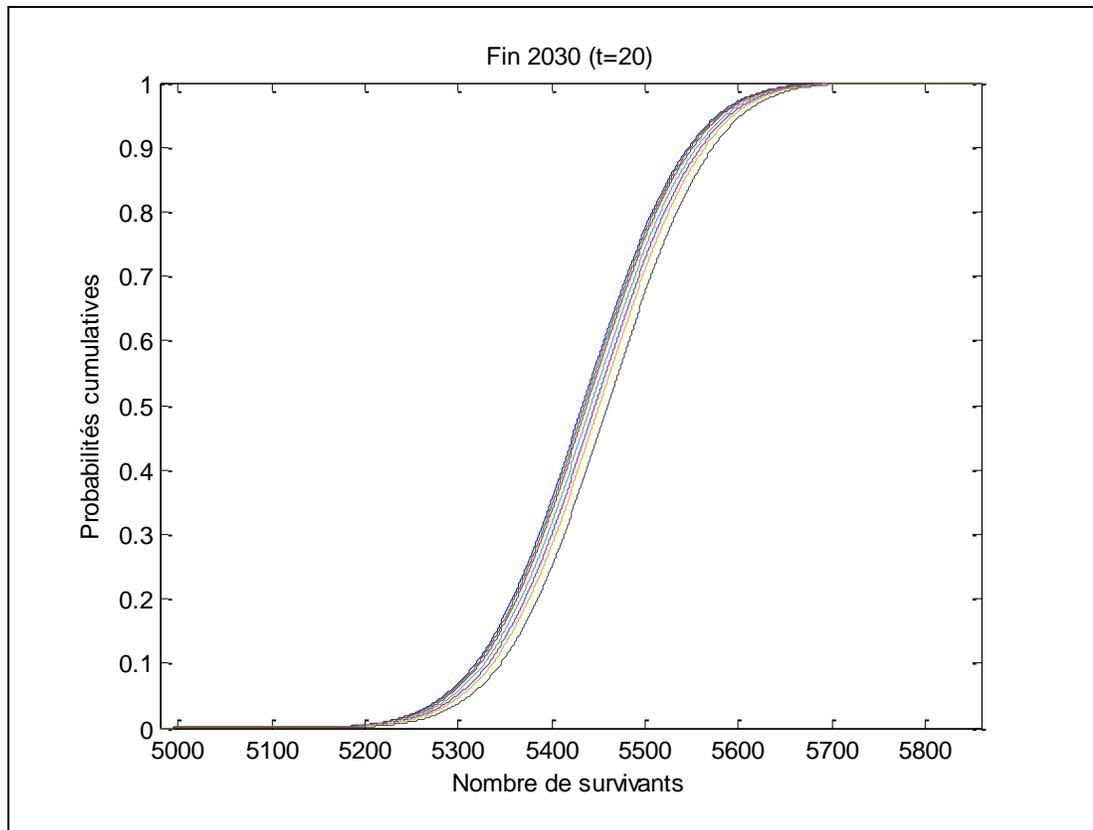
Annexe 6 Paramètres $\{k_t\}$ estimés pour les hommes et les femmes canadiens.

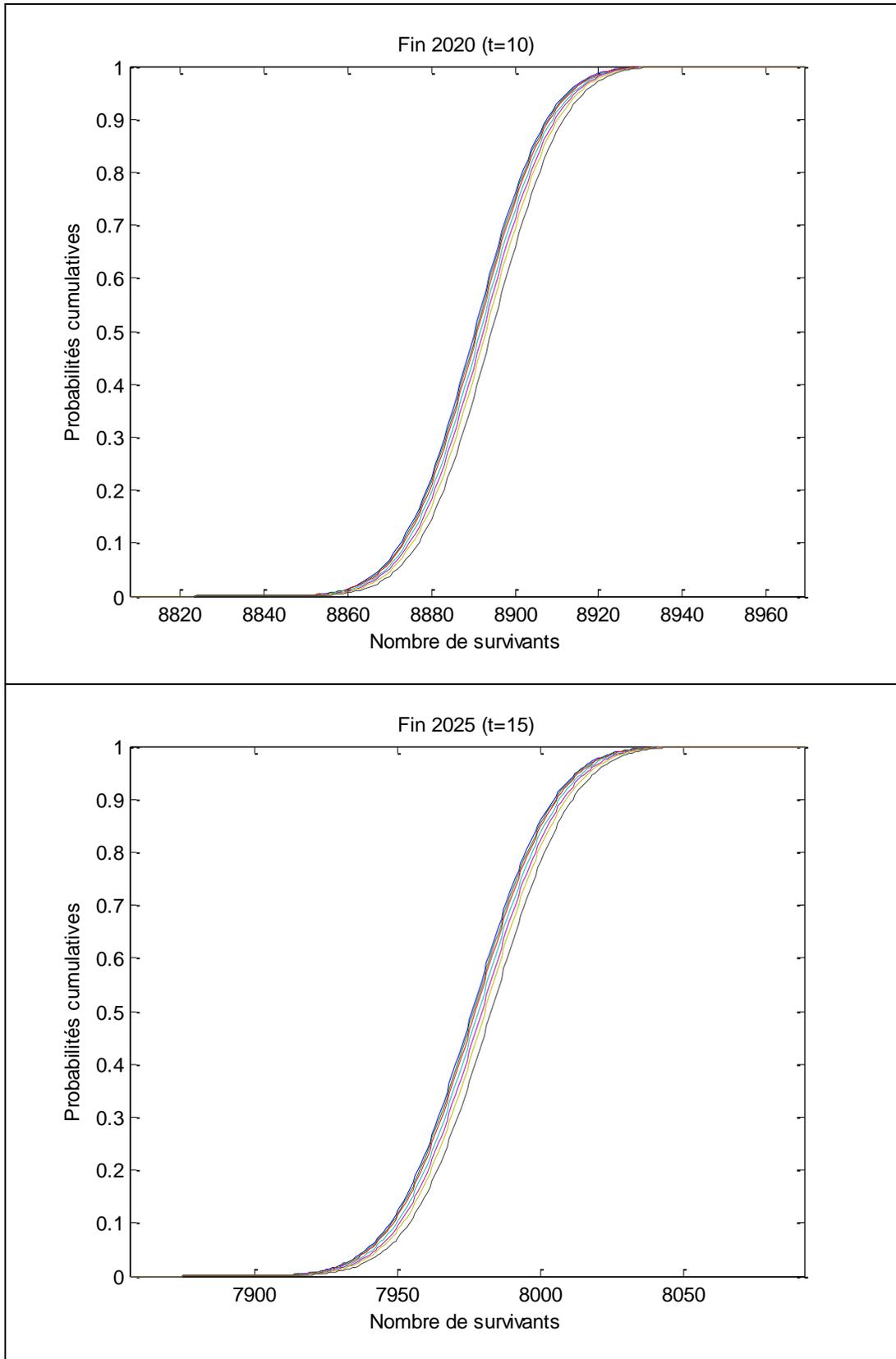
Années	k_t estimés		Années	k_t estimés	
	Hommes	Femmes		Hommes	Femmes
1950	8,5009	12,7270	1979	1,5576	0,2047
1951	8,3874	12,4048	1980	0,9835	-0,4032
1952	8,4731	11,4289	1981	0,2212	-1,2417
1953	8,0034	10,2535	1982	-0,6989	-1,9746
1954	6,6003	8,7835	1983	-1,2840	-2,7497
1955	6,5314	8,4179	1984	-2,0367	-3,1942
1956	6,4829	7,9954	1985	-2,1052	-3,2143
1957	6,8147	8,2354	1986	-2,4898	-3,4636
1958	5,9036	6,8953	1987	-2,7619	-4,1070
1959	6,0283	7,0600	1988	-2,8633	-4,4545
1960	5,6501	6,2409	1989	-3,5143	-4,3613
1961	5,2713	5,5650	1990	-3,8936	-4,9998
1962	5,2680	5,7384	1991	-4,4285	-5,4238
1963	5,3949	5,7555	1992	-4,7995	-5,7445
1964	5,0469	4,9465	1993	-4,8826	-5,6820
1965	5,0392	5,0072	1994	-5,1832	-6,0780
1966	5,1579	4,8144	1995	-5,5970	-6,1219
1967	5,0036	4,5581	1996	-6,5363	-6,6549
1968	4,6021	4,2501	1997	-6,9065	-6,8786
1969	4,6722	4,0946	1998	-7,7108	-7,5733
1970	4,3166	3,9688	1999	-7,9115	-7,9494
1971	4,0718	3,5091	2000	-9,0323	-8,3445
1972	4,4943	3,4764	2001	-9,4457	-8,6346
1973	4,1479	3,1164	2002	-9,8600	-8,6507
1974	4,0550	2,8803	2003	-9,9657	-9,4201
1975	3,7128	2,5435	2004	-10,6915	-10,0540
1976	2,8455	1,2956	2005	-10,4744	-9,7082
1977	2,5092	0,9807	2006	-11,3631	-10,1637
1978	2,2286	0,3576	2007	-11,5398	-10,2592

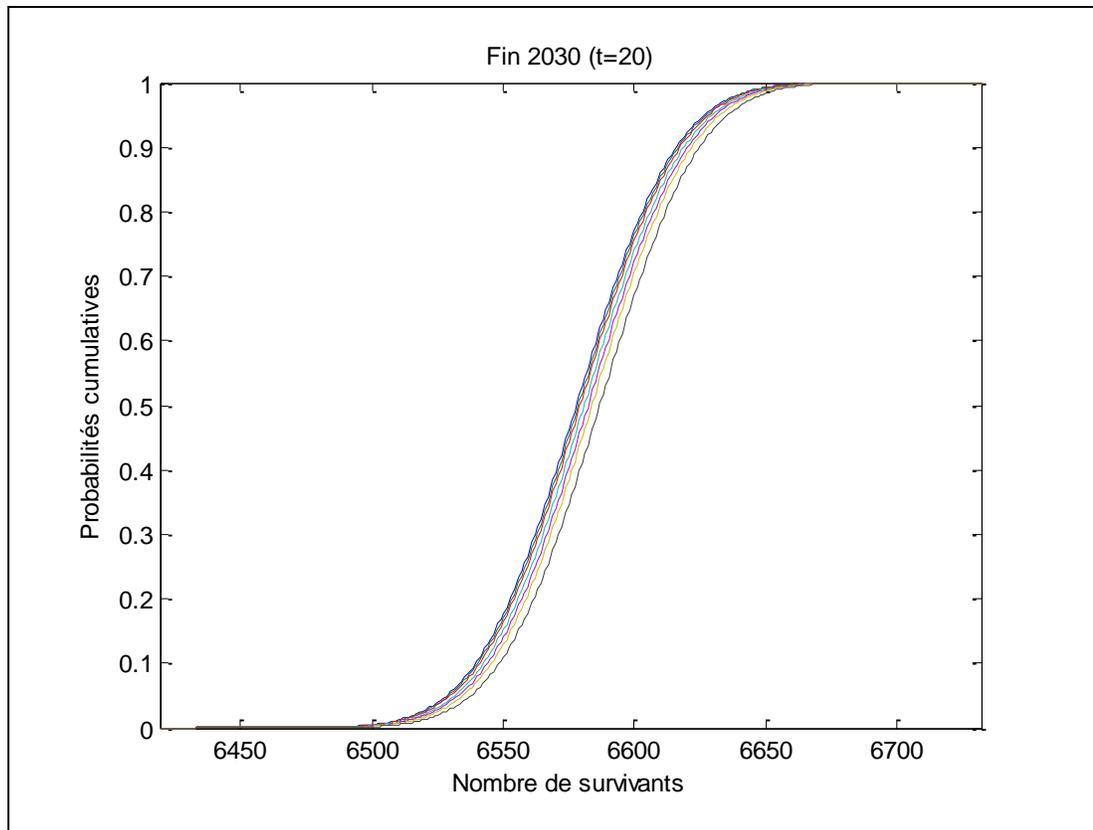
Annexe 7 Paramètres $\{k_t\}$ ré-estimés pour les hommes et les femmes canadiens.

Années	k_t ré-estimés		Années	k_t ré-estimés	
	Hommes	Femmes		Hommes	Femmes
1950	8,1487	11,9588	1979	1,6410	-1,0262
1951	7,8519	11,7005	1980	1,2870	-1,1887
1952	7,7831	10,7747	1981	0,5965	-1,9900
1953	7,4257	10,4117	1982	0,2739	-2,0298
1954	6,4562	9,1108	1983	-0,3916	-2,7076
1955	6,6577	8,9505	1984	-0,9598	-3,2392
1956	6,6235	8,9990	1985	-0,9987	-3,1311
1957	6,9903	8,7715	1986	-1,3635	-3,1986
1958	6,2580	7,8030	1987	-1,9921	-3,8836
1959	6,3347	8,0070	1988	-1,9592	-4,0474
1960	5,9353	7,1584	1989	-2,6886	-4,5744
1961	5,6986	6,6540	1990	-3,4939	-5,1028
1962	5,6450	6,6000	1991	-3,8780	-5,3696
1963	5,8030	6,5934	1992	-4,4288	-5,9069
1964	5,4135	5,6097	1993	-4,1699	-5,3467
1965	5,4015	5,5251	1994	-4,8072	-5,6251
1966	5,2596	4,9801	1995	-5,0936	-5,8574
1967	5,0094	4,4299	1996	-5,8551	-6,1244
1968	4,9459	4,2365	1997	-6,4544	-6,3513
1969	4,7700	3,8139	1998	-6,9371	-6,7413
1970	4,5236	3,3303	1999	-7,5717	-7,3171
1971	4,1523	2,7108	2000	-8,9023	-7,8983
1972	4,4518	2,9000	2001	-9,7622	-8,4432
1973	4,2647	2,4295	2002	-10,3782	-8,5165
1974	4,1990	2,3165	2003	-10,8390	-9,0818
1975	3,7679	1,6423	2004	-11,8957	-9,7016
1976	3,3181	0,9078	2005	-12,5039	-9,9596
1977	2,8374	0,1795	2006	-13,8299	-11,1182
1978	2,3584	-0,4332	2007	-13,9202	-11,1254









Bibliographie

Blake, D., Burrows, W. (2001). « Survivor Bonds: Helping to Hedge Mortality Risk », *The Journal of Risk and Insurance*, vol. 68, no 2, p. 339-348.

Booth, H., Tickle, L. (2008). *Mortality Modelling and Forecasting: A Review of Methods*, document de travail no 3, Australia, The Australian Demographic and Social Research Institute.

Brown, J. R., Orszag, P. R. (2006). « The Political Economy of Government-issued Longevity Bonds », *The Journal of Risk and Insurance*, vol. 24, no 4, p. 611-631.

Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K. (2008). « Modelling and Management of Mortality Risk: a Review », *Scandinavian Actuarial Journal*, n°2-3, p.79-113

Cox, S. H., Lin, Y. (2004). « Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risk », texte présenté dans le cadre du colloque *The 14th International AFIR Colloquium, Boston*, p. 483-507.

Cui, Jiajia. (2007). *Longevity Risk Pricing*, document de travail, Tilburg University and ABP Pension Fund, 34 p.

Dahl, M. (2004). « Stochastic Mortality in Life Insurance: Market Reserves and Mortality-linked Insurance contracts », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 35, no 1, p. 113-136.

Dowd, K., Blake, D., Cairns, A. J. G., Dawson, P. E. (2005). « Survivor Swaps », *The Journal of Risk and Insurance*, vol. 73, no 1, p. 1-17.

Friedberg, L., Webb, A. (2007). « Life is Cheap: Using Mortality Bonds to Hedge Aggregate Mortality Risk », *The B.E. Journal of Economic Analysis & Policy, Berkeley Economic Press*, vol. 7, no 1, article 31.

Human Mortality Database [base de données en ligne].
<<http://www.mortality.org/>>

Lee, R. D., Carter, L. R. (1992). « Modeling and Forecasting U.S. Mortality », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, no 419, p. 659-671.

Milevsky, M. A., Promislow, S. D., Young, V. R. (2006). «Killing the Law of Large Numbers: Mortality Risk Premiums and the Sharpe Ratio », *The Journal of Risk and Insurance*, vol. 73, no 4, p. 673-686.

Renshaw, A. E., Haberman, S. (2006). « A Cohort-based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 38, no 3, p. 556-570.

Tremblay, Jacques, Butterfield, Stephen. (2008). « Selection of Mortality Assumptions for Pension Plan Actuarial Valuations », note éducative du 12 mars 2008, Institut Canadien des Actuaires, 6 p.

Wang, S. (2000). « A Class of Distorsion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks », *The Journal of Risk and Insurance*, vol. 67, no 1, p. 15-36.

Wang, S. (2007). « Normalized Exponential Titling: Pricing and Measuring Multivariate Risks », *North American Actuarial Journal*, vol. 11, no 3, p. 89-99.

