

HEC MONTRÉAL

Optimisation dynamique de portefeuille et erreur de réplication

par

Mouhamed El Moctar DIOP

Sciences de la gestion
(Ingénierie Financière)

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences
(M.Sc.)

Décembre 2011

©Mouhamed El Moctar DIOP, 2011

Au nom de Dieu, le tout Clément, le tout Miséricordieux

*À ma femme Béty et mon fils Souleymane,
à ma mère et mon père,
et à ma soeur Alimatou.*

*En les remerciant tous pour le soutien
moral qu'ils m'ont apporté durant toute
la durée de ce mémoire.*

Table des matières

SOMMAIRE	i
REMERCIEMENTS	ii
TABLE DES MATIÈRES	ii
1 INTRODUCTION	1
2 Revue de littérature	4
2.1 Modèles	5
2.1.1 Modèles statiques	5
2.1.2 Modèles multipériodiques	6
2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange	8
2.3 Théorie moderne de portefeuille	9
2.3.1 Mesure de Rendement et du risque	9
2.3.2 Portefeuille à variance minimale	10
2.3.3 Le modèle de Markowitz	11
2.4 Fonds de couverture	14
2.4.1 Description	14
2.4.2 Stratégies des fonds de couverture	15
2.4.3 Mesure de performance : Omega	16
2.5 Conclusion	18

3	Modèles de Markov cachés	19
3.1	Algorithme de Baum	20
3.2	Propriétés des modèles de marche aléatoire avec changement de régimes	23
3.2.1	Moments	23
3.2.2	Les distributions conditionnelles	24
3.2.3	Propriété de prévision des rendements	24
3.3	Test d'adéquation	25
3.3.1	Description	25
3.3.2	Description du bootstrap paramétrique	27
3.4	Conclusion	27
4	Modélisation et résolution du problème	28
4.1	Description et formulation du modèle	29
4.2	Résolution du problème	32
4.3	Rendements indépendants et identiquement distribués	36
4.4	Cas non i.i.d : rendements HMM gaussiens	38
4.4.1	Description	38
4.4.2	Application au modèle	39
4.5	Conclusion	41
5	Application numérique	42
5.1	Phase de sélection	43
5.2	Réplication par des fonds de couverture	44
5.2.1	Rendements i.i.d	46
5.2.1.1	Description	46
5.2.1.2	Résultats numériques	47
5.2.2	Rendements HMM gaussiens	47
5.2.2.1	Estimation des paramètres	47
5.2.2.2	Méthodes	50

5.2.3	Simulation de Monte Carlo	50
5.2.4	Résultats numériques	52
5.3	Réplication par des actifs liquides	58
5.4	Conclusion	61
6	Conclusion	63
A	Annexe	66
A.1	Preuve du théorème 4.2.1	66
A.2	Preuve de la proposition 4.3.1	68
A.2.1	Preuve des expressions de A_k et b_k ,	68
A.2.2	Preuve des expressions de a_k et $E[Z_n \mathcal{F}_{n-1}]$ et de la proposition 4.3.1	70
A.3	Preuve du théorème 4.4.1	72
A.4	Preuve du théorème 4.4.2	73
A.5	Preuve des distributions conditionnelles des régimes	74

SOMMAIRE

On se propose dans le cadre de ce mémoire, de développer un outil adapté capable de fournir une solution analytique optimale du problème de réplication de portefeuille. Le problème consiste, étant donné un horizon de temps, des périodes d'observation des rendements et une erreur de réplication espérée cible, à déterminer les pondérations périodiques des titres qui permettraient de minimiser la variance de la déviation du portefeuille géré par rapport à la référence pour un niveau de rendement espéré ciblé par l'investisseur. Nous présentons une procédure backward permettant de trouver une solution analytique explicite du modèle pour un horizon de temps multipériodique. Les cas particuliers d'un modèle avec des rendements indépendants et identiquement distribués et d'un modèle avec des rendements qui suivent un processus de Markov caché gaussiens avec changement de régimes (Hidden Markov Model, HMM) est traité et une formulation analytique de la solution est proposée. Une application numérique à la réplication de l'indice de fonds de couverture "HFRI Fund Weighted Composite Index" par des fonds est présentée. Les excellents résultats obtenus confirment la pertinence de la méthode utilisée.

Mots clé : Réplication, tracking error, modèle de Markov caché, fonds de couverture.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mes directeurs, M. Bruno Rémillard et Pierre Laroche, d'abord pour la confiance qu'ils ont manifestée à mon égard, pour leur appui, leurs conseils, leurs commentaires et leurs encouragements durant la rédaction de ce mémoire.

Mes remerciements à toute ma famille et tous mes amis pour leur patience, leurs encouragements et leurs prières.

Je remercie aussi mon ancien collègue et ami Philippe Bibas pour son soutien et ses encouragements.

Merci aussi aux étudiants d'ingénierie financière avec qui j'ai eu à partager des travaux d'équipe pour votre complicité de toujours. Plus particulièrement, Bouha, Amine, Jrad, Lize, Redda et Sofiane qui ont eux aussi passé au travers de cette M.Sc.. Je vous souhaite bons succès dans vos recherches d'emplois respectifs.

Je remercie aussi Innocap qui m'a fourni les données, sur autorisation de Moningstar, pour mes tests numériques.

Je ne saurais terminer sans remercier l'Institut de Finance Mathématique de Montréal (IFM2) pour leur soutien financier indispensable au cours des deux dernières années. Votre support m'a permis de me concentrer sur mes études. Merci d'un tel engagement auprès des étudiants. Finalement, j'aimerais remercier les professeurs Chantal Labbé et Nicolas Papageorgiou pour une lecture attentive de ce mémoire ainsi que pour leurs suggestions.

Liste des tableaux

5.1	Statistiques descriptives des fonds de couverture	45
5.2	Estimation par intervalle de confiance : cas i.i.d.	47
5.3	Estimation par intervalle de confiance	52
5.4	Quantiles	53
5.5	Variance	53
5.6	Erreur de réplication périodique	54
5.7	Quantiles	59
5.8	Erreur de réplication périodique	60

Table des figures

5.1	Graphe des erreurs de répliation trimestrielles	55
5.2	Graphe des erreurs de répliation	56
5.3	Pondérations des actifs du portefeuille	57
5.4	Poids des actifs dans le portefeuille du problème pour $G=1\%$	61
5.5	Rendements du portefeuille de répliation avec $G=1\%$	62

Chapitre 1

INTRODUCTION

Dans les années 60, la communauté des investisseurs avaient commencé à parler de risque sans pour autant pouvoir exprimer la notion de risque en des termes spécifiques. Mais, pour construire leur portefeuille, les investisseurs ont besoin de quantifier le risque qui est défini comme l'incertitude quant aux résultats futurs. Harry Markowitz, dans [12] et [13], a construit le modèle de base d'un portefeuille avec la mesure du taux de rendement espéré et du risque espéré. Il montre que la variance (ou l'écart type) du taux de rendement constitue une bonne mesure du risque d'un portefeuille sous certaines hypothèses et donne une formulation de la variance d'un portefeuille. Ainsi, il ouvre la voie à l'optimisation de portefeuilles. Un portefeuille est dit efficient s'il admet un taux de rendement maximal pour un risque donné ou un risque minimal pour un niveau de rendement donné. L'ensemble des portefeuilles efficientes définit la frontière efficiente.

La performance d'un gestionnaire de portefeuille est mesurée par comparaison avec un objectif standard spécifique appelé portefeuille de référence (ou benchmark) qui est composé souvent d'un indice formé d'actifs diversifiés. La déviation du portefeuille géré par rapport au portefeuille de référence représente l'erreur de réplification. Lorsqu'un investisseur observe la surperformance du portefeuille actif, il devient alors important d'expliquer com-

ment l'origine de cette performance est reliée aux risques pris par le gestionnaire. La question se pose particulièrement lorsque la performance engendre des commissions. Ces commissions sur le rendement vont pousser les gestionnaires à prendre davantage de risques et à se focaliser uniquement sur la volatilité des écarts du portefeuille géré par rapport au portefeuille de référence. Cette volatilité est appelée volatilité de l'erreur de répliation (Tracking-Error Volatility, TEV). Minimiser la volatilité de l'erreur de répliation devient alors un critère important de mesure de la performance du gestionnaire de portefeuille. Pour contrôler le niveau des risques, les investisseurs institutionnels imposent des limites sur la volatilité de l'erreur de répliation. Les rendements espérés sont déterminés sur des périodes prédéfinies durant lesquelles des modifications sur les pondérations du portefeuille pourraient être effectués. La gestion de portefeuille consiste en des mouvements fréquents dans le portefeuille géré sur un horizon de temps prédéfini. Notre étude va porter sur un univers mutipériodique, c'est-à-dire dynamique, pour tenir compte de cette réalité. Ceci aura pour conséquence la prise en compte de l'information disponible à chaque pas de temps du modèle, rendant complexe la résolution du problème.

On se propose, dans le cadre de ce mémoire, de développer un outil adapté, capable de fournir une solution analytique optimale du problème de répliation de portefeuille. Le problème consiste, étant donné un horizon de temps, des périodes d'observation des rendements et une erreur de répliation espérée cible, à déterminer les pondérations périodiques des titres qui permettraient de minimiser la variance de la déviation du portefeuille géré par rapport à la référence.

Un modèle d'optimisation mathématique consistant à minimiser la variance de l'erreur de répliation sous une contrainte d'erreur espérée cible est développé. Une procédure itérative permet d'obtenir une solution analytique du problème et son optimalité est prouvée.

Deux cas particuliers sont traités. D'abord un modèle où les rendements des actifs sont supposés indépendants et identiquement distribués est étudié. Le cas particulier d'un modèle composé de rendements qui suivent un processus de Markov caché gaussien

avec changements de régimes est aussi développé. Ces types de modèles ont beaucoup de caractéristiques qui font qu'ils soient adaptés aux séries temporelles financières. Ils sont faciles à interpréter, permettent une dépendance temporelle des paramètres et les rendements conservent leurs propriétés de non normalité.

Pour justifier la pertinence de notre méthode une application à la réplication d'un indice de fonds de couverture sera présentée. La popularité et la performance de ce genre d'actif justifient leur utilisation. La sélection des fonds devant composer le portefeuille actif est effectuée en choisissant un fond dans chaque catégorie de fonds de couverture. Le choix est porté sur le fond qui a la meilleure performance en terme de omega.

La suite du document est organisée de la manière suivante :

Dans le chapitre 2 nous commençons par passer en revue les principaux travaux sur l'optimisation de portefeuille et l'erreur de réplication. Ensuite nous présentons quelques notions de la théorie moderne de la gestion de portefeuilles.

Le chapitre 3 porte sur la description des modèles de Markov cachés et la présentation de l'algorithme de Baum utilisé pour estimer certains paramètres du modèle et calculer le nombre de régimes.

Le chapitre 4 présente d'abord une formulation mathématique du problème de minimisation de la variance de l'erreur de réplication espérée sous contrainte d'une erreur de réplication fixée et une expression explicite de la solution optimale. Une preuve de l'optimalité de la solution est présentée.

Dans le chapitre 5, nous présentons les résultats numériques obtenus dans la réplication de l'indice 'HFRI Fund Weighted Composite Index', en considérant que les rendements suivent un processus de Markov caché gaussien, par uniquement des fonds de couverture d'une part et par d'autres actifs sans fonds de couverture d'autre part.

Enfin le chapitre 6 porte sur une conclusion générale de ce mémoire.

Chapitre 2

Revue de littérature

Le problème de réduction de la volatilité de l'erreur de répliation consiste à minimiser la différence entre les rendements du portefeuille géré et celui du portefeuille de référence. C'est une analyse de la relation moyenne-variance mais au lieu de minimiser la variance pour un rendement espéré donné, comme le portefeuille efficient de Markowitz, le gestionnaire doit trouver le portefeuille dont la variance de l'erreur de répliation est minimale étant donné une performance espérée relativement au portefeuille de référence. Le problème se modélise aussi en maximisant le rendement excédentaire espéré étant donnée une volatilité de l'erreur de répliation cible. Il existe une multitude de variantes dans la littérature ce qui rend le problème parfois complexe.

Dans ce chapitre nous allons d'abord passer en revue deux grandes approches de l'optimisation de portefeuille avant de présenter la théorie moderne de gestion de portefeuilles.

2.1 Modèles

Deux approches sont utilisées pour traiter le problème d'optimisation de portefeuilles. L'approche statique qui consiste à définir une fonction d'utilité à maximiser étant donnée une contrainte sur le rendement. L'horizon est considéré sur une période de temps. Les poids optimaux à associer à chaque titre peuvent être déterminés en utilisant le modèle de moyenne variance de Markowitz. Un modèle de sélection de portefeuille dynamique doit aussi pouvoir faire des recommandations à chaque période de temps afin de combiner les actifs pour optimiser la fonction objectif en tenant compte des contraintes. Ce qui a fait que l'approche dynamique ou multi-périodes est devenue le centre d'intérêt de beaucoup de recherches en optimisation de portefeuilles. Cette tendance est aussi renforcée par deux constats. Il a été démontré, d'une part, que le niveau de richesse dans le temps influe sur le choix des titres risqués (Mossin [16]), et d'autre part, que l'évolution des opportunités d'investissement peut avoir des effets importants sur les portefeuilles optimaux d'investisseurs avec différents horizons de placements (Campbell & Viceira [2]). Sur ce dernier point, plusieurs recherches empiriques (Fama & French [8], Campbell & al [4]) ont démontré que l'espérance de rendements des titres semble varier avec le temps, ce qui implique donc que les opportunités d'investissement ne sont pas constantes.

2.1.1 Modèles statiques

Plusieurs modèles d'allocation d'actifs ont été étudiés pour l'optimisation de portefeuilles. Markowitz a initié les premiers développements avec ses travaux sur la quantification du risque et la diversification du risque. Il introduit aussi la notion de frontière efficiente déduite à partir du portefeuille à variance minimale pour une espérance de rendement donnée, qui représente la combinaison optimale de rendement et de risque. L'optimisation se fait en définissant une fonction d'utilité représentant les préférences des investisseurs en tenant compte de leur aversion au risque et en maximisant celle-ci étant donnée la contrainte représentée par la frontière efficiente.

Ensuite, pour palier le problème de dimension, principal inconvénient du modèle de Markowitz, Sharpe a développé un modèle de marché à indice unique pour expliquer le rendement des titres. Le modèle est défini sous la forme d'une régression linéaire avec comme variable indépendante le rendement excédentaire du portefeuille de marché.

Le problème d'optimisation de la volatilité de l'erreur de répliation, étant donnée une performance espérée relative au portefeuille de référence, a été originellement étudié par Richard Roll [26] en 1992. Il a observé que le portefeuille optimal comportait plusieurs propriétés indésirables. Le principal problème avec cette approche est qu'il ignore le risque absolu du portefeuille : le portefeuille solution admet systématiquement un risque plus élevé que celui du portefeuille de référence et est sous optimal. Pour surmonter cet inconvénient, Roll suggère d'introduire une contrainte additionnelle sur le bêta du portefeuille.

Récemment, Philippe Jorion, dans [19], souligne que la contrainte de volatilité de l'erreur de répliation est décrite par une ellipse dans l'espace moyenne-variance. Il démontre que la forme plate de l'ellipse qui décrit l'espace de risque-rendement fait que l'ajout d'une contrainte qui limite la volatilité du portefeuille actif à celle du portefeuille de référence améliore substantiellement la performance du portefeuille actif. Philippe Bertrand [17] a étendu cette étude en permettant une variation du tracking error mais en fixant l'aversion au risque à la variance.

2.1.2 Modèles multipériodiques

L'extension du problème d'optimisation de portefeuilles dans le cas multipériodique est aussi traitée dans la littérature. L'horizon de temps T est divisé en $T - 1$ intervalles de temps. Une réallocation du capital est effectuée sur ces titres au début de chacun des $(T - 1)$ intervalles de temps en tenant compte des taux de rendement entre des dates consécutives et de la nouvelle valeur du capital. Étant données une richesse initiale et une date terminale T , le problème consiste à maximiser la richesse espérée à l'horizon T sous contrainte que la

variance de cette richesse ne dépasse pas une valeur seuil ou à minimiser la variance de la richesse finale totale à la date T avec une richesse espérée plus grande qu'une certaine valeur limite.

Dans [7], les auteurs étudient le problème de moyenne-variance de Markowitz dans le cas multipériode sans contrainte d'erreur de réplication. Ils supposent dans leur modèle des vecteurs de rendement aléatoires statistiquement indépendants d'une période de temps à une autre. Ils fournissent une expression analytique de la solution du problème. Une variante du problème avec l'ajout d'un actif sans risque, dans un ensemble d'actifs considéré, est aussi traitée et une expression analytique de la solution trouvée. De cette solution ils dérivent une expression analytique de la frontière efficiente du portefeuille multipériodique. Les auteurs ont aussi étudié le problème en optimisant la fonction d'utilité. L'objectif consiste, dans ce cas, à maximiser la fonction d'utilité d'un investisseur qui dépend à la fois de la richesse terminale espérée et de la variance de cette richesse.

Dans [14], Vaillancourt et Watier traitent du problème de moyenne-variance sans contraintes en contexte multipériodique lorsque le portefeuille de l'investisseur est constitué de plusieurs titres risqués et d'un titre sans risque lorsque des conditions plutôt générales sont imposées. Ils fournissent une solution explicite du problème en termes d'une suite d'espérances conditionnelles. L'optimalité de la solution est démontrée. Les auteurs déduisent aussi une extension possible au modèle d'évaluation des actifs financiers (MÉDAF) en contexte dynamique.

La majeure partie des études sur l'optimisation dynamique de portefeuilles traite du cas des rendements indépendants et identiquement distribués (i.i.d.). Dans le cadre de notre travail on proposera une solution explicite dans le cas i.i.d. mais la spécificité de notre étude porte sur le cas de rendements qui suivent un processus de Markov caché gaussien (Hidden Markov Model) avec changement de régimes. Ces modèles reflètent mieux le comportement

des séries chronologiques financières.

2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

L'ensemble des contraintes d'un problème d'optimisation est en général spécifié en termes de contraintes d'égalité ou d'inégalité. Si on considère cette structure, on obtient une collection sophistiquée de conditions d'optimalité, pouvant impliquer des variables auxiliaires appelées **multiplicateurs de Lagrange**. Ces variables facilitent la caractérisation des solutions optimales, mais aussi fournissent un moyen d'analyser la sensibilité, c'est-à-dire quantifier la variation du coût optimal causée par les variations dans les données du problème. La théorie des multiplicateurs de Lagrange peut être développée sous plusieurs angles.

- pénalité : où l'on fait abstraction des contraintes, tout en ajoutant au coût une pénalité élevée si elles sont violées.
- direction réalisable : relié au fait que, en un minimum local, il ne peut y avoir de coût d'amélioration sur un petit déplacement le long d'une direction qui conduit à un point réalisable (qui satisfait la contrainte).

Supposons qu'on veuille résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathbf{PL}) \begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.c. :} & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Le lagrangien associé au problème (PL) est la fonction définie par :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x)$$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est appelé vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 2.2.1 *Supposons que le lagrangien $L(x, \lambda)$ possède un minimum global x^* lorsque le vecteur des multiplicateurs $\lambda = \lambda^*$. Si $h_i(x^*) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, alors x^* est une solution optimale du problème (PL) .*

Ce théorème montre que résoudre le problème (PL) revient à minimiser la fonction $L(x, \lambda)$.

Dans la prochaine section nous présentons quelques notions et méthodes de la théorie moderne de portefeuille.

2.3 Théorie moderne de portefeuille

2.3.1 Mesure de Rendement et du risque

Il existe plusieurs façons de calculer le rendement.

- Le rendement réalisé au cours d'une période t , noté r_t , est donné en fonction du prix du titre P_t au temps t et du dividende D_t versé entre les temps t et $t - 1$ par :

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + D_t}{P_{t-1}}$$

- Le rendement arithmétique moyen :

$$\bar{R}_t = \frac{\sum_{t=1}^n r_t}{n}$$

où n représente le nombre de rendements périodiques.

- Le rendement géométrique

$$\bar{R}_t = \left[\prod_{t=1}^n (1 + r_t) \right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

Il constitue une meilleure mesure du rendement périodique moyen historique.

- Le rendement espéré R_p d'un portefeuille p composé de N titres est égal à :

$$R_p = E(r_p) = \sum_{i=1}^N q_i R_i$$

Où q_i est la proportion du titre i dans le portefeuille et R_i le rendement espéré de l'actif i .

- Dans le cas discret le rendement espéré R_i d'un titre i est égal à :

$$R_i = E(r_i) = \sum_{j=1}^s p_j r_{ij}$$

Où p_j est la probabilité de l'état j de la nature et r_{ij} est le rendement du titre i à l'état j .

- La variance des rendements σ_i^2 d'un titre i dans le cas discret est égale à :

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^s p_j (r_{ij} - R_i)^2$$

L'écart type $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

- la variance d'un portefeuille composé de N titres est égale à :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N q_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \text{cov}(r_i, r_j), \quad \text{avec } i \neq j$$

$\text{cov}(r_i, r_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$, ρ_{ij} étant la corrélation entre les rendements des titres i et ceux du titre j .

Plusieurs mesures de risque peuvent être considérées par les modèles d'optimisation de portefeuille. Le cadre classique de Markowitz considère en particulier la variance qui cependant n'est valable que si les rendements sont distribués suivant une loi normale ou si l'investisseur ne se préoccupe que des deux premiers moments de la distribution des rendements de son portefeuille. Mais la variance comme mesure de risque pénalise autant les déviations négatives que positives. Un investisseur rationnel voudra éliminer les pénalités attribuées aux déviations positives, celles-ci apportant un gain supplémentaire. Il serait donc plus approprié de choisir une mesure de risque ne tenant compte seulement que du risque baissier ou risque asymétrique.

2.3.2 Portefeuille à variance minimale

Le portefeuille qui comporte moins de risque possible dans l'ensemble des opportunités de placement est désigné par le portefeuille de variance minimale. Il est déterminé

en calculant les pondérations qui minimisent la variance. La formulation du problème est la suivante :

$$(\mathbf{P}_{\text{VM}}) \begin{cases} \min & q^T V q \\ \text{s.c. :} & \\ & q^T e = 1; \end{cases}$$

Avec q le vecteur des pondérations représentant le portefeuille dont la i^{ieme} composante est la proportion du portefeuille investie dans l'actif i et $e = (1, 1, \dots, 1)$ le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. V est la matrice de variance-covariance des actifs.

Le lagrangien est donné par :

$$L(q, \lambda) = 0.5q^T V q + \lambda(1 - q^T e)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre entraînent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q, \lambda)}{\partial q} &= Vq - \lambda e = 0 \\ \implies q &= \lambda V^{-1} e \end{aligned}$$

En utilisant l'équation $q^T e = 1$ donc on trouve $\lambda = \frac{1}{e^T V^{-1} e}$ et $q = \frac{V^{-1} e}{e^T V^{-1} e}$

2.3.3 Le modèle de Markowitz

La combinaison de plusieurs actifs permet de réduire, voire d'éliminer, le risque systématique du portefeuille. Le modèle de Markowitz permet d'identifier la frontière efficiente.

Considérons les notations suivantes :

N est le nombre d'actifs individuels dans l'univers du gestionnaire

q_i , la proportion investie dans le titre i , $i = 1, \dots, N$

R , le vecteur ($N \times 1$) du rendement espéré de tous les actifs de l'univers considéré.

R_k , le rendement espéré du titre ou du portefeuille k .

σ_k , l'écart type du rendement du titre ou du portefeuille k .

Le problème consiste à choisir les pondérations q_i qui permettent d'avoir un portefeuille ayant la plus faible variance pour chaque niveau de rendement donné. De manière équivalente, le problème peut être formulé comme consistant à choisir les pondérations qui permettent d'avoir le rendement le plus élevé pour chaque niveau de risque donné. La formulation mathématique du modèle est la suivante :

$$(\mathbf{P}_M) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \sigma_{ij} \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{i=1}^N q_i = 1; \\ \sum_{i=1}^N q_i R_i = R_p^*; \end{array} \right.$$

La deuxième contrainte signifie que le rendement espéré du portefeuille doit être égal au rendement cible $G = R_p^*$.

La forme matricielle du problème (P_M) est formulée comme suit :

$$(\mathbf{P}_M) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad q^T V q \\ \text{s.c. :} \\ q^T e = 1; \\ q^T R = G; \end{array} \right.$$

La solution de ce problème a été obtenue grâce à Roll, [26] en utilisant les conditions nécessaires d'optimalité. Le lagrangien du problème est défini par :

$$L(q, \lambda_1, \lambda_2) = q^T V q + \lambda_1 (G - q^T R) + \lambda_2 (1 - q^T \mathbf{1})$$

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre entraînent :

$$\frac{\partial L(q, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial q} = Vq - \lambda_1 R - \lambda_2 \mathbf{1} = 0$$

$$q = \lambda_1 V^{-1} R + \lambda_2 V^{-1} \mathbf{1}$$

Les deux contraintes nous permettent de déterminer λ_1 et λ_2 .

$$q^T e = 1 = \lambda_1 e^T V^{-1} R + \lambda_2 e^T V^{-1} e$$

$$q^T R = G = \lambda_1 R^T V^{-1} R + \lambda_2 R^T V^{-1} e$$

Posons : $a = R^T V^{-1} R$, $b = R^T V^{-1} e$ et $c = e^T V^{-1} e$

Le système devient :

$$1 = \lambda_1 b + \lambda_2 c$$

$$G = \lambda_1 a + \lambda_2 b$$

En résolvant ce système d'équations à deux inconnues on trouve :

$$\lambda_1 = \frac{Gc - b}{ac - b^2}, \quad \lambda_2 = \frac{a - Gb}{ac - b^2}$$

En substituant (λ_1 et λ_2), on trouve l'expression de q .

$$q = \frac{Gc - b}{ac - b^2} V^{-1} R + \frac{a - Gb}{ac - b^2} V^{-1} e$$

Tout portefeuille appartenant à la frontière efficiente s'écrit comme une combinaison linéaire du portefeuille de variance minimale (VM) et du portefeuille tangent (TG) qui maximise le rendement espéré. En notant q_{MV} et q_{TG} respectivement les vecteurs des poids du portefeuille de variance minimale et du portefeuille tangent alors on démontre que : $q_{MV} = V^{-1} \frac{1}{c}$ et $q_{TG} = V^{-1} \frac{R}{b}$

$$q = \left(\frac{Gb - b^2/c}{d} \right) q_{TG} + \left(\frac{a - Gb}{d} \right) q_{MV}$$

Où $d = a - b^2/c$.

Le portefeuille de variance minimale se calcule en minimisant la variance avec la seule contrainte $q^T e = 1$. Le portefeuille tangent se calcule en maximisant le rendement avec une contrainte de variance cible.

2.4 Fonds de couverture

2.4.1 Description

Les fonds de couverture sont des véhicules d'investissement pouvant opérer dans plusieurs marchés en utilisant divers instruments financiers pour générer des rendements positifs absolus et stables tout en contrôlant l'exposition au risque. Depuis la création du premier fond de couverture par Mr. Alfred W. Jones en 1949, les fonds de couverture ont connu un développement important surtout vers les années 1980. Plusieurs nouveaux fonds ont été créés durant les années 1990. L'actif sous gestion total de ces fonds est passé de 39 milliards (\$ US) en 1990 pour atteindre 456 milliards (\$ US) en 1999. La croissance de l'actif sous gestion est en progression constante depuis plus de 15 ans. Comportant de faibles corrélations avec les marchés, ils sont de plus en plus utilisés pour la diversification d'un portefeuille.

Au cours des années, les consultants en fonds de couverture ont développé leurs propres indices : HFR, CSFB Tremont, HedgeFund.net. Des fournisseurs principaux, comme Morgan Stanley Capital International (MSCI) and Standard & Poor's, ont créé des indices spécialisés qui sont de plus en plus utilisés par les investisseurs. Ces indices servent à mesurer la performance des fonds de couverture.

Contrairement à la gestion traditionnelle, la gestion des fonds de couverture adopte une stratégie visant des rendements absolus positifs tout en minimisant le risque. Les différentes stratégies de l'univers des fonds de couverture offrent une possibilité pour la diversification et l'optimisation de portefeuille. La combinaison de fonds (Fonds de fonds) procure souvent des rendements supérieurs aux indices, diminue la volatilité et augmente la diversification.

Cependant, les fonds de couverture souffrent de quelques inconvénients. Parmi lesquels on peut noter le manque de transparence dans certains cas. En effet, les gestionnaires

ne sont pas tenus de divulguer les informations concernant leur politique de placement. Il revient ainsi aux investisseurs de gérer ce manque d'information par différents moyens qui souvent sont très coûteux. L'autre inconvénient qu'on peut noter aussi est l'absence de liquidité. Dans certains cas les fonds des investisseurs sont gelés pendant des périodes variant entre 6 mois et 5 ans. Certains fonds de couverture peuvent aussi exiger des frais (jusqu'à 5% de la valeur) lors du retrait des sommes. Les frais de gestion considérables incarnent aussi un désavantage majeur à ce type d'investissement.

2.4.2 Stratégies des fonds de couverture

- **Arbitrage de titres convertibles** : opérations simultanées d'achats d'obligations convertibles et de ventes d'actions d'une même compagnie dans le but de profiter des anomalies de marché tout en éliminant l'exposition au risque d'équité.
- **Arbitrage de titres à revenu fixe** : cette stratégie consiste à profiter des anomalies et des inefficacités des marchés à revenu fixe : arbitrage de la courbe des taux d'intérêt, arbitrage des différents types d'obligations (fédérales vs provinciales vs corporatives vs « mortgage-backed securities » vs autres), etc.
- **Investissements neutres au marché** : achats et ventes à découvert de titres boursiers dans le but est de profiter des anomalies de marché. Les portefeuilles neutres au marché peuvent être neutres-bêta et/ou neutres-dollar ; l'exposition aux secteurs, aux capitalisations et aux autres facteurs est souvent limitée.
- **Stratégies événementielles** : les gestionnaires de ce type de stratégie investissent lors d'événements spécifiques : fusion et acquisition (« merger arbitrage »), obligations à haut rendement (« high yield »), titres de compagnies en restructuration (« distressed securities »).
- **Transaction mondiale** : investissements à travers le monde dans le but de profiter des variations des marchés boursiers, obligataires, des devises et des commodities.
- **Marchés émergents** : investissements en actions et en titres à revenu fixe dans

- les économies en voie de développement à travers le monde.
- **Acheteur-vendeur actions** : les gestionnaires « long/short » achètent et vendent à découvert des actions dans le but de générer des rendements indépendamment de la direction des marchés. Ces portefeuilles sont habituellement plus concentrés que les portefeuilles neutres au marché, et le style des gestionnaires peut évoluer selon le style, la capitalisation boursière, la région géographique, etc.
 - **Contrats à gérés** : les gestionnaires de contrats à terme investissent généralement dans quatre types de contrats à terme : taux d'intérêt, indices boursiers, devises et commodités. Les stratégies sont habituellement systématiques (analyse technique) et/ou discrétionnaires. Le terme CTA (« commodity trading advisor ») est souvent utilisé pour décrire ce type de gestionnaire.

2.4.3 Mesure de performance : Omega

En général, l'allocation des actifs est effectuée par l'approche moyenne-variance et l'évaluation de la performance est formalisée par le ratio de Sharpe. L'approche moyenne-variance requiert des hypothèses sur la fonction d'utilité de l'investisseur ou sur la normalité des rendements. Mais, on sait que la fonction quadratique de la fonction d'utilité est inconsistante avec le comportement d'un être humain. Aussi, les rendements des fonds de couverture sont loin d'être normalement distribués. Donc l'approche moyenne variance n'est pas adéquate pour capturer les propriétés de risque-rendement des fonds de couverture. De nouvelles méthodes permettant de capturer l'asymétrie et les queues épaisses sont introduites. Cependant, malgré l'amélioration qu'elles ajoutent dans l'analyse, ces méthodes réduisent toujours la dimensionnalité à peu de caractéristiques et ne prennent pas en compte les moments d'ordre plus élevé que les coefficients d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis).

On montre que les investisseurs tiennent en compte tous les moments de la distribution, ce qui est d'une grande importance lorsque les rendements sont normalement

distribués. Omega est une nouvelle mesure proposée par Keating et Shadwick, dans [5], qui reflète toutes les propriétés statistiques de la distribution des rendements. Elle ne requiert aucune hypothèse sur la distribution des rendements ou sur la fonction d'utilité des investisseurs. Précisément, elle considère les rendements en dessous et au dessus d'un certain seuil et fournit un ratio de la probabilité totale pondérée des pertes et gains qui décrit complètement les propriétés de la distribution risque-rendement. Elle peut alors être utilisée comme une mesure de performance. La définition mathématique exacte de la fonction est :

$$\Omega(r) = \frac{\int_r^b x(1 - F(x)) \, dx}{\int_a^r F(x) \, dx}$$

F est la fonction de répartition des rendements définie dans l'intervalle $[a, b]$ et r est un niveau de rendement considéré comme un seuil.

D'un point de vue mathématique, omega est une fonction monotone décroissante de la fonction de répartition des rendements. Dans son domaine de définition, la fonction omega d'une distribution risquée est plus aplatie que celle d'une distribution moins risquée. La moyenne de la distribution est le seul point où le omega prend la valeur 1. En ce point la probabilité totale des gains est égale à celle des pertes. Lorsque les rendements sont normalement distribués ou lorsque les moments sont insignifiants, omega tend à s'accorder avec les mesures traditionnelles comme le ratio de Sharpe. Cependant elle pourrait se différencier et apporter des informations additionnelles pour un certain niveau de rendements. Chaque gestionnaire de fonds de couverture tend à utiliser sa propre politique d'investissement. Ce qui fait que les styles de gestion des fonds sont très hétérogènes. Un rendement en dessous du seuil est considéré comme une perte tandis qu'un rendement au dessus comme un gain. Une grande valeur de omega est préférable à une petite valeur.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait une revue de la littérature se rapportant à la gestion de portefeuilles. La description de deux grandes approches est présentée. Une approche statique qui optimise une fonction d'utilité sur une période de temps donnée et une approche dynamique qui permet de faire des recommandations sur plusieurs périodes de temps. Nous avons aussi donné la définition des fonds de couverture et présenté les stratégies utilisées pour gérer ce type d'actifs financiers. La mesure de performance omega, qui reflète toutes les caractéristiques statistiques des rendements et qui est l'un des critères principaux de sélection des actifs devant composer notre portefeuille, est aussi décrite.

Le prochain chapitre porte sur l'étude des modèles de Markov cachés. L'algorithme de Baum permettant d'estimer certains paramètres du modèle est aussi présenté.

Chapitre 3

Modèles de Markov cachés

Les Modèles de Markov cachés (Hidden Markov Model, HMM) furent introduits pour la première fois par Baum et al. (1970) [1]. L'une des premières applications de ce genre de modèle fut effectuée dans le domaine de la reconnaissance vocale, par Poritz (1982)[21], Juang et Rabiner (1985), [15] et Rabiner (1989), [22].

Certaines séries temporelles admettent un comportement souvent varié au cours de la période étudiée. Leur dynamique dépend souvent de l'état (ou régime) dans lequel elles se trouvent au moment où l'observation est effectuée. Le passage d'un état à un autre est aléatoire. Les modèles nécessaires pour capter ce genre de dynamique sont considérés comme étant non-linéaires, même si la relation est linéaire à l'intérieur de chacun des régimes. Les modèles de Markov cachés (HMM) sont justement un cas particulier de ce genre de modèles. Ils attribuent un processus Markovien au comportement de la variable étudiée, dans le sens où la probabilité de changement de régime à l'instant t ne dépend que de l'information à $t - 1$. Tel que le nom du modèle l'indique, les régimes ne sont pas observables. Ils sont par contre induits grâce à des variables d'observation.

Le modèle log-normal souvent utilisé pour modéliser des séries n'arrive pas à capter convenablement les séquences de la variation de l'ampleur de la volatilité. Ces séquences sont justement à la base du concept de changement de régimes et justifient leur supériorité par

rapport au modèle log-normal.

Dans les modèles de Markov cachés, à tout instant, la probabilité de changement de régime à la période suivante dépend de l'état inhérent à l'instant présent. Les paramètres du modèle HMM englobent les deux premiers moments de la distribution des rendements pour chaque régime, ainsi que la matrice de transition qui indique la probabilité de passer d'un état à l'autre, en l'espace d'une période. Ceux-ci sont estimés par une maximisation de la fonction de vraisemblance des rendements observés, construite à partir des probabilités de transition ainsi que des fonctions de densité conditionnelles élaborées de manière récursive.

Les modèles HMM ont beaucoup de caractéristiques qui font qu'ils soient adaptés aux séries temporelles financières. Ils sont faciles à interpréter, permettent une dépendance temporelle des paramètres et les rendements conservent leurs propriétés de non normalité.

Dans ce qui suit, nous allons d'abord décrire les différentes étapes de l'algorithme de Baum, ensuite nous allons donner les propriétés des modèles de marche aléatoire avec changement de régime avant de présenter le fonctionnement du test d'adéquation qui permet de valider l'adéquation de notre modèle.

3.1 Algorithme de Baum

Les modèles HMM nécessitent l'estimation de paramètres tels que le vecteur de la moyenne et les matrices de covariance et de transition de la chaîne de Markov, qui doivent être utilisés comme données en entrée. L'algorithme «Espérance-Maximisation» (EM) fournit une procédure efficace d'estimation de ces paramètres.

Considérons un processus observé R_1, R_2, \dots, R_n à valeurs dans R^d et un processus caché $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ à valeurs dans $\{1, \dots, l\}$ tels que :

- les τ_i forment une chaîne de Markov homogène et irréductible de matrice de transition $Q = \{Q_{jk} = P\{\tau_{i+1} = k | \tau_i = j\}\}$ et de distribution stationnaire $(\nu_k, k = 1, \dots, l)$

– les R_i sont indépendants conditionnellement aux τ_i . Plus précisément

$$P(R_1 \leq x_1, \dots, R_n \leq x_n | \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \prod_{t=1}^n P(R_t \leq x_t | \tau_t),$$

pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$.

– si $\tau_i = l$, alors la densité conditionnelle de R_i sachant $|\tau_i = l$ appartenant à une famille paramétrée dénotée $f_l(\cdot | \theta_l)$. Dans notre cas, on suppose que $f_l(\cdot | \theta_l)$ est la densité d'une loi normale et $\theta_l = (\mu, \sigma)$, μ étant la moyenne et σ sa matrice de covariance.

Ainsi, le modèle des chaînes de Markov cachées est un modèle de mélange pour lequel la traditionnelle hypothèse d'indépendance des données observées a été remplacée par une hypothèse de dépendance markovienne.

Le problème consiste à estimer les paramètres $\theta_k, k = 1, \dots, l$, la matrice de transition de la chaîne de Markov cachée Q et sa probabilité stationnaire $(\nu_k, k = 1, \dots, l)$. En posant $\bar{R}_i^j, i \leq j$, une séquence d'observations $\{R_i, \dots, R_j\}$, il est nécessaire donc de déterminer, sous un critère d'erreur de probabilité minimale, soit les lois jointes $P(\tau_t = j, \bar{R}_1^n)$ ou les probabilités à postériori $P(\tau_t = j | \bar{R}_1^n)$.

L'algorithme de Baum est basé sur la décomposition simple suivante :

$$\begin{aligned} P(\tau_t = j, \bar{R}_1^n) &= P(\tau_t = j, \bar{R}_1^t, \bar{R}_{t+1}^n) \\ &= \underbrace{P(\tau_t = j, \bar{R}_1^t)}_{\text{probabilité forward } q_t(j)} \underbrace{P(\bar{R}_{t+1}^n | \tau_t = j)}_{\text{probabilité backward } \bar{q}_t(j)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

En posant $q_t(j) = P(\tau_t = j, \bar{R}_1^t)$ et $\bar{q}_t(j) = P(\bar{R}_{t+1}^n | \tau_t = j)$ et en fixant une distribution à priori, q_0 , pour chaque régime, alors on démontre par induction, voir annexe A.5, que pour

tout $i = 1, \dots, l$:

$$\begin{aligned}
q_1(i) &= P(\tau_1 = i) f_i(r_1) \\
q_t(i) &= \sum_{j=1}^l q_{t-1}(j) Q_{ji} f_i(r_t), \forall t = 2, \dots, n. \\
\bar{q}_n(i) &= 1 \\
\bar{q}_t(i) &= \sum_{j=1}^l \bar{q}_{t+1}(j) Q_{ij} f_j(r_t), \forall t = n-1, \dots, 1.
\end{aligned}$$

L'algorithme se décompose en deux étapes : une étape de calcul des probabilités conditionnelles appelée E-Étape et une étape d'estimation des paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance, M-Étape.

Ces étapes sont définies de la manière suivante :

E-Étape

On pose $\lambda_t(i) = P(\tau_t = i | R_1, \dots, R_n)$ et $\Lambda_t(i, j) = P(\tau_t = i, \tau_{t+1} = j | R_1, \dots, R_n)$, pour tout $t = 1, \dots, n$ et $i, j \in \{1, \dots, l\}$. On montre que (voir annexe A.5) pour tout $i, j \in \{1, \dots, l\}$:

$$\begin{aligned}
\lambda_t(i) &= \frac{q_t(i) \bar{q}_t(i)}{\sum_{j=1}^l q_t(j) \bar{q}_t(j)}, \forall t = 1, \dots, n. \\
\Lambda_t(i, j) &= \frac{Q_{ij} q_t(i) \bar{q}_{t+1}(i) f_{t+1}(j)}{\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l Q_{kj} q_t(k) \bar{q}_{t+1}(j) f_{t+1}(j)}, \forall t = 1, \dots, n-1. \\
\Lambda_n(i, j) &= \lambda_n(ij) Q_{ij}
\end{aligned}$$

M-Étape

Lorsque les densités f_1, \dots, f_l sont celles de distributions gaussiennes de moyennes $(\mu_i)_{i=1}^l$ et de matrices de covariance $(A_i)_{i=1}^l$ alors le modèle est appelé modèle de markov caché gaussien (Gaussian Hidden Markov Model, HMM). Dans ce cas, l'étape M consiste à mettre à jour les paramètres μ_i^m , A_i^m , ν_i^m et Q^m respectivement la moyenne, la matrice de covariance, la distribution stationnaire et la matrice de transition, à chaque itération m . La mise à jour se

fait de la manière suivante :

$$w_t^m(i) = \lambda_t(i) / \sum_{t=1}^n \lambda_t(i), \forall t = 1, \dots, n-1.$$

$$\nu_i^m = \sum_{t=1}^n \lambda_t(i) / n$$

$$\mu_i^m = \sum_{t=1}^n R_t w_t^m(i)$$

$$A_i^m = \sum_{t=1}^n (R_t - \mu_i^m)(R_t - \mu_i^m)^\top w_t^m(i)$$

$$Q_{ij}^m = \sum_{t=1}^n \Lambda_t(i, j) / \sum_{t=1}^n \lambda_t(i)$$

3.2 Propriétés des modèles de marche aléatoire avec changement de régimes

3.2.1 Moments

Il est démontré que si la moyenne μ_i et la matrice de covariance A_i de chaque densité sont connues, pour $i = 1, \dots, l$, alors on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E(R_t) &= \mu = \sum_{i=1}^l \nu_i \mu_i \\ Cov(R_t R_t) &= A = \sum_{i=1}^l \nu_i A_i + \sum_{i=1}^l \nu_i \mu_i \mu_i^\top - \mu_i \mu_i^\top \\ Cov(R_t R_{t+k}) &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \nu_i (Q^k)_{ij} \mu_i \mu_j^\top - \mu_i \mu_i^\top \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \nu_i \mu_i \mu_j^\top \{(Q^k)_{ij} - \mu_j\} \end{aligned}$$

On remarque que si Q est ergodique alors il existe deux constantes positives C et $a \in \{0, 1\}$ telles que pour tout $k \geq 1$, $\max_{1 \leq i, j \leq l} |(Q^k)_{ij} - \mu_j| \leq Ca^k$. Ainsi il s'en suit que $Cov(R_t R_{t+k})$

converge exponentiellement vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

3.2.2 Les distributions conditionnelles

La densité jointe $f_{t:1}$, pour tout $t \geq 2$ peut s'exprimer comme une mixture :

$$\begin{aligned} f_{t:1}(R_t | R_1, \dots, R_{t-1}) &= f_{t:1}(R_1, \dots, R_{t-1}, R_t) / f_{t-1:1}(R_1, \dots, R_{t-1}) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l q_{t-1}(i) Q_{ij} f_t(j)}{\sum_{i=1}^l q_{t-1}(i)} = \sum_{j=1}^l W_{j,k-1} f_t(j) \end{aligned}$$

$$\text{Avec } W_{j,k-1} = \frac{\sum_{i=1}^l q_{t-1}(i) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l q_{t-1}(i)}, \quad \forall j = 1, \dots, l.$$

Comme $q_0(j) = \nu_j$, alors $W_{j,0} = \nu_j, \forall j = 1, \dots, l$.

3.2.3 Propriété de prévision des rendements

On peut d'abord vérifier que, pour une fonction g ,

$$\begin{aligned} E\{g(R_{t+1}) | \mathcal{F}_t\} &= \sum_{i=1}^l E\{g(R_{t+1}) | \mathcal{F}_t, \tau_t = i\} \eta_t(i) \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \eta_t(i) Q_{ij} \int g(x) f_j(x) dx \end{aligned} \tag{3.2}$$

La loi conditionnelle de R_{t+1} étant donnés R_1, \dots, R_t a une densité :

$$f_{t+1:1}(x) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \eta_t(i) Q_{ij} f_j(x)$$

De manière similaire, en utilisant la propriété de Markov, on peut voir que

$$E\{g(R_{t+l}) | \mathcal{F}_t\} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \eta_t(i) (Q^l)_{ij} \int g(x) f_j(x) dx$$

Et que la loi conditionnelle de R_{t+l} étant donnés R_1, \dots, R_t a une densité

$$f_{t+1:l}(x) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \eta_t(i)(Q^l)_{ij} f_j(x)$$

qui est une mixture avec la même densité $(f_j)_{j=1}^l$ et de poids $\sum_{i=1}^l \eta_t(i)(Q^l)_{ij}$ pour le régime $j = 1, \dots, r$. En particulier la prédiction de R_{t+l} est

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \eta_t(i)(Q^l)_{ij} \mu_j$$

3.3 Test d'adéquation

3.3.1 Description

Après avoir sélectionné un modèle et estimé ses paramètres, on doit tester leur adéquation et sélectionner le nombre de régimes de la chaîne de Markov. Le test proposé, basé sur le travail de Diebold et al. (1998), [6], Genest et Rémillard (2008), [10], et Genest et al. (2009) [11], utilise une transformation de Rosenblatt.

Théorème 3.3.1 Rosenblatt. *Supposons que Y_1, \dots, Y_n sont des variables aléatoires et que :*

$$F_t(y_1, \dots, y_t) = P(Y_t \leq y_t | Y_1 = y_1, \dots, Y_{t-1} = y_{t-1})$$

Si on pose $U_1 = F_1(Y_1), U_2 = F_2(Y_1, Y_2), \dots, U_n = F_n(Y_1, \dots, Y_n)$ alors U_1, \dots, U_n sont indépendantes et de loi uniforme sur $(0,1)$. La fonction F qui à $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ associe $U = (U_1, \dots, U_n)$, i.e. $U = F(Y)$ est une transformation inversible dite transformation de Rosenblatt.

Supposons que R_1, R_2, \dots, R_n est un échantillon de n vecteurs de dimension d avec une distribution jointe P . Les hypothèses à tester sont :

$$\mathcal{H}_0 : P \in \mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\} \quad \text{vs} \quad \mathcal{H}_1 : P \notin \mathcal{P}$$

Par exemple, la famille paramétrée \mathcal{P} pourrait être la famille de modèles gaussiens avec changement de régimes avec r régimes. Supposons aussi que $\Psi_1(\cdot, \theta), \dots, \Psi_n(\cdot, \theta)$ soient les transformées de Rosenblatt associées, c'est-à-dire, les vecteurs de dimension d , $U_1 = \Psi_1(R_1, \theta), U_2 = \Psi_2(R_1, R_2, \theta), \dots, U_n = \Psi_n(R_1, \dots, R_n, \theta)$ sont uniformément distribués dans $[0, 1]^d$ et indépendants.

Comme θ n'est pas connu, il pourrait être estimé par $\theta_n = T_n(R_1, \dots, R_n)$. Ainsi les pseudo-observations $\hat{U}_1 = \Psi_1(R_1, \theta_n), \hat{U}_2 = \Psi_2(R_1, R_2, \theta_n), \dots, \hat{U}_n = \Psi_n(R_1, \dots, R_n, \theta_n)$ deviennent approximativement uniformément distribuées dans $[0, 1]^d$ et approximativement indépendantes. Cependant, il est bien connu, contrairement à ce qui a été établi dans [6] par exemple, qu'il n'y a pas de problème si on remplace θ par θ_n .

Le test statistique proposé est basé sur le processus empirique :

$$D_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(U_i \leq u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{t=1}^d I(U_i \leq u_t), \quad u = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$$

Pour tester l'hypothèse \mathcal{H}_0 contre \mathcal{H}_1 , on propose d'utiliser la statistique de Cramér-Von Mises

$$\begin{aligned} S_n &= B_n(\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n) \\ &= n \int_{[0,1]^d} \left\{ D_n(u) - \prod_{t=1}^d u_t \right\}^2 du \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \prod_{t=1}^d \left\{ 1 - \max(\hat{U}_{ik}, \hat{U}_{jk}) \right\} - \sum_{i=1}^n \prod_{t=1}^d (1 - \hat{U}_{ik}^2) + \frac{n}{3^d} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Comme les \hat{U}_i^2 sont presque uniformément distribués dans $[0, 1]^d$ sous l'hypothèse nulle, de larges valeurs de S_n induisent le rejet de l'hypothèse nulle. En général la distribution limitée de S_n dépend du paramètre inconnu θ . Pour estimer la P-value de S_n , on peut utiliser l'approche bootstrap paramétrique décrite dans le paragraphe suivant. La validité de cette approche a été démontrée dans plusieurs contextes par Genest et Rémillard (2008), [10]. Sa validité pour des modèles dynamiques est prouvée dans Rémillard, [23].

3.3.2 Description du bootstrap paramétrique

- a) Calculer $\theta_n = T_n[R_1, \dots, R_n]$ et $S_n = B_n(\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n)$
- b) Pour un grand nombre N (disons 1000), répéter l'étape suivante pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$:
 - (i) Générer un échantillon aléatoire $R_1^{(k)}, \dots, R_n^{(k)}$ de la distribution P_{θ_n}
 - (ii) Calculer

$$\theta_n^{(k)} = T_n(R_1^{(k)}, \dots, R_n^{(k)}) \quad (3.4)$$

$$\hat{U}_i^{(k)} = \Psi_i(R_1^{(k)}, \dots, R_n^{(k)}, \theta_n^{(k)}), i = 1, \dots, n$$

$$S_n^{(k)} = B_n(\hat{U}_1^{(k)}, \dots, \hat{U}_n^{(k)})$$

La P-Value approximative pour le test basé sur la statistique de Cramér-von Mises S_n est donnée par $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I(S_n^{(k)} \geq S_n)$

Pour la sélection du nombre de régimes, il est sensé de choisir l_0 pour lequel la P-value du test d'adéquation est plus grande que 5%.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une description des modèles de Markov cachés(HMM) et présenté l'algorithme de Baum. Une procédure permettant l'estimation de certains paramètres a été présentée. Un test d'adéquation, pour valider le nombre de régimes considéré, a été aussi brièvement décrit.

Le prochain chapitre porte, d'abord sur une formulation mathématique du modèle d'optimisation de portefeuille avec des contraintes d'erreur de réplication. Ensuite une procédure permettant de trouver la solution optimale est proposée. L'optimalité de cette solution est aussi démontrée. Deux cas particuliers sont étudiés : un modèle avec des rendements indépendants et identiquement distribués (i.i.d) et un modèle avec rendements non i.i.d mais suivant un processus HMM gaussien.

Chapitre 4

Modélisation et résolution du problème

La gestion de portefeuille consiste, alors, en des mouvements fréquents dans le portefeuille géré sur un horizon de temps prédéfini qui peut être sur une période ou multipériodique. Si l'objectif du gestionnaire de portefeuilles est de battre un portefeuille de référence, il sera amené à réduire autant que possible l'écart entre le rendement du portefeuille et celui de la référence. Donc l'investisseur va jouer sur les pondérations du portefeuille pour réduire la variance. Les périodes où il sera possible de faire des modifications sur les poids des actifs sont prédéfinies. Ces rebalancements pourraient être effectués pour changer la composition du portefeuille sans un financement additionnel. C'est la condition d'autofinancement. Notre étude porte sur un univers mutipériodique, c'est-à-dire dynamique, pour tenir compte de ces mouvements fréquents. Ceci aura pour conséquence la prise en compte de l'information disponible, à chaque pas de temps du modèle, rendant complexe la résolution du problème.

Nous travaillons dans le contexte d'un portefeuille composé de d actifs dans un marché sans friction, c'est-à-dire que les coûts de transaction ne seront pas intégrés dans la formulation du modèle. L'objectif est de minimiser, à la date d'échéance, la variance de l'écart de rendement entre le portefeuille géré et un portefeuille de référence. Notre objectif consiste, étant donné un portefeuille de référence à repliquer, un horizon de temps n , des périodes de rebalancement et un seuil de rendement, à déterminer une stratégie d'investissement,

c'est-à-dire les parts de chaque actif dans le portefeuille, à chaque date de rebalancement, permettant de minimiser la volatilité (variance) de l'erreur de répliation totale à la date d'échéance.

La première section de ce chapitre porte sur la description et la formulation mathématique du problème d'optimisation de portefeuille avec une contrainte d'erreur de répliation (tracking error). Dans la deuxième section, nous présentons une procédure permettant une résolution du modèle. L'expression explicite de la solution optimale du problème dans le cas général est ainsi fournie. Une preuve de l'optimalité de la solution trouvée est aussi donnée. Dans les troisième et quatrième sections nous traitons respectivement les cas particuliers du modèle dans le cas où les rendements sont supposés indépendants et identiquement distribués (i.i.d) et dans le cas non i.i.d avec des rendements suivant un processus de Markov caché gaussien. Certaines preuves de théorèmes et de propositions de ce chapitre sont présentées dans les annexes à la fin du document.

4.1 Description et formulation du modèle

Notre étude se fait dans un contexte où on pose comme hypothèse d'abord que le marché est sans frictions, c'est-à-dire que les coûts de transactions ne sont pas intégrés au modèle.

Nous travaillons dans un cadre où l'investisseur possède un portefeuille constitué de d actifs dans un marché répondant à l'hypothèse précédente. La variable t indique la période de temps que nous considérons pour $t = 1, \dots, n$, où n est la date d'échéance. On note r_t^b, r_t^i et r_t^0 les rendements respectifs à la période t de l'indice de référence, de l'actif risqué i et de l'actif sans risque (taux Libor-1 mois). La pondération de l'actif i dans le portefeuille juste avant la période de temps t est notée φ_t^i , avec $i = 0, 1, \dots, d$. On suppose que $\varphi_t^0 = 1 - \sum_{i=1}^d \varphi_t^i$ est le poids de l'actif sans risque dans le portefeuille à la date t . Le vecteur $\varphi_t^\top = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)$ représente la stratégie d'investissement juste avant t . Nous considérons aussi \mathcal{F}_t l'ensemble

des informations disponibles à la période t et $\mathcal{S} = \{\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) : \varphi_k \in \mathbb{R}^d, \varphi_k \in \mathcal{F}_{k-1}\}$, l'ensemble des stratégies d'investissement.

En considérant $r_t^\top = (r_t^0, r_t^1, \dots, r_t^d)$, alors, à chaque période t l'erreur de réplication est définie par $\varphi_t^\top r_t - r_t^b$. L'objectif est de minimiser la somme des erreurs de réplication suivant les différentes périodes jusqu'à l'échéance. Elle peut être formulée en termes mathématiques de la manière suivante :

$$Var \left(\sum_{t=1}^n (\varphi_t^\top r_t - r_t^b) \right) = E \left\{ \left(\sum_{t=1}^n [\varphi_t^\top r_t - r_t^b] \right)^2 \right\} - E^2 \left\{ \sum_{t=1}^n (\varphi_t^\top r_t - r_t^b) \right\}$$

Dans le cas d'un investisseur qui se fixe une erreur totale de réplication moyenne G à l'échéance alors $E \left\{ \sum_{t=1}^n (\varphi_t^\top r_t - r_t^b) \right\} = G$. L'expression de la variance devient alors :

$$Var \left\{ \sum_{t=1}^n (\varphi_t^\top r_t - r_t^b) \right\} = E \left\{ \left(\sum_{t=1}^n [\varphi_t^\top r_t - r_t^b] \right)^2 \right\} - G^2$$

L'objectif principal consiste, étant donnée une erreur de réplication ciblée par l'investisseur, à minimiser la variance de l'erreur totale de réplication. La formulation mathématique du problème s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min & \frac{1}{2} E \left\{ \left(\sum_{t=1}^n [\varphi_t^\top r_t - r_t^b] \right)^2 \right\} \\ \text{s.c. :} & \\ & E \left\{ \sum_{t=1}^n [\varphi_t^\top r_t - r_t^b] \right\} = G. \end{cases}$$

L'expression de l'erreur de réplication peut être transformée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} [\varphi_t^\top r_t - r_t^b] &= \sum_{i=1}^d \varphi_t^i r_t^i + \left(1 - \sum_{i=1}^d \varphi_t^i \right) r_t^0 - r_t^b \\ &= \sum_{i=1}^d \varphi_t^i (r_t^i - r_t^0) - (r_t^b - r_t^0) \end{aligned}$$

Notons $R_t^i = r_t^i - r_t^0$ et $R_t^b = r_t^b - r_t^0$ respectivement les rendements excédentaires discrets de l'actif i et de l'actif ou indice de référence par rapport au taux sans risque de

$t - 1$ à t et $R_t^\top = (R_t^1, R_t^2, \dots, R_t^d)$ le vecteur des rendements excédentaires du portefeuille entre $t - 1$ et t .

Avec cette nouvelle notation le problème consiste maintenant à déterminer les pondérations des rendements excédentaires des actifs risqués qui permettraient de minimiser la variance de l'erreur de réplication du rendement excédentaire de l'actif de référence par les rendements excédentaires du portefeuille. Ainsi le fait que la somme des pondérations doive être égale à 1 n'est plus une contrainte de notre modèle. Il n'y a pas aussi de restriction sur le signe des pondérations. Elles peuvent prendre des valeurs négatives.

Le problème d'optimisation de la variance de l'erreur de réplication s'exprime alors comme suit :

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \min & \frac{1}{2} E \left(\left[\sum_{t=1}^n \varphi_t^\top R_t - \sum_{t=1}^n R_t^b \right]^2 \right) \\ \text{s.c. :} & E \left[\sum_{t=1}^n \varphi_t^\top R_t - \sum_{t=1}^n R_t^b \right] = G. \end{cases}$$

où la constante $\frac{1}{2}$ dans la fonction objectif est utilisée pour des besoins de calcul et ne change en rien les résultats obtenus. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée pour trouver une solution optimale de ce problème.

En posant λ comme le multiplicateur de Lagrange, la fonction lagrangienne s'écrit alors de la manière suivante :

$$\min L(\varphi, \lambda) = \left\{ \frac{1}{2} E \left(\left[\sum_{t=1}^n \varphi_t^\top R_t - \sum_{t=1}^n R_t^b \right]^2 \right) + \lambda \left(G - E \left[\sum_{t=1}^n \varphi_t^\top R_t - \sum_{t=1}^n R_t^b \right] \right) \right\}$$

Le problème consiste alors à déterminer $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ et λ de telle sorte que $L(\varphi, \lambda)$ soit minimale.

La prochaine section porte sur une procédure d'induction backward qui permet d'obtenir une solution du problème (P), par la suite on démontre que cette solution est optimale.

4.2 Résolution du problème

Pour caractériser la stratégie optimale, nous posons, pour tout ξ qui est \mathcal{F}_{k-1} -mesurable et borné, et φ^* une solution optimale du problème (P),

$$\varphi_\varepsilon = \varphi^* + \varepsilon \xi e_k, \text{ avec } (e_k)_j = 0, j \neq k, \text{ et } (e_k)_k = 1.$$

Il s'en suit que pour tout ε , $\Phi(\varepsilon, \lambda^*)$ défini par l'expression suivante, a un gradient nul au point $(0, \lambda^*)$.

$$\Phi(\varepsilon, \lambda^*) = \frac{1}{2} E \left\{ \left(\sum_{t=1}^n \varphi_{\varepsilon t}^\top R_t - \sum_{t=1}^n R_t^b \right)^2 \right\} + \lambda^* \left\{ G - E \left(\sum_{t=1}^n \varphi_{\varepsilon t}^\top R_t - \sum_{t=1}^n R_t^b \right) \right\}$$

Lorsque ε tend vers 0 alors φ_ε va tendre vers notre solution optimale φ^* et la fonction $\Phi(\varepsilon, \lambda^*)$ coïncide avec $L(\varphi^*, \lambda^*)$. Comme φ^* est une solution optimale du problème (P) donc forcément $\Phi(\varepsilon, \lambda^*)$ admet un gradient nul au point $(0, \lambda^*)$. On va donc appliquer les conditions d'optimalité du premier ordre à $\Phi(\varepsilon, \lambda^*)$ pour déterminer l'expression explicite de la solution optimale de notre modèle.

Ces conditions d'optimalité du premier ordre s'écrivent :

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} \Big|_{(\varepsilon=0)} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon, \lambda^*)}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\varepsilon=0)} = 0. \quad (4.2)$$

En notant $H_k^* = \sum_{t=1}^k \varphi_t^{*\top} R_t - \sum_{t=1}^k R_t^b$, $k \in \{0, \dots, n\}$ alors ces équations s'écrivent de la manière suivante :

$$(4.1) \iff G - E \{H_n\} = 0$$

$$(4.2) \iff E \{H_n R_k^\top \xi - \lambda^* R_k^\top \xi\} = 0, \xi \text{ } \mathcal{F}_{k-1} \text{-mesurable}$$

$$\iff E \{(H_n - \lambda^*) R_k^\top \xi\} = 0, \xi \text{ } \mathcal{F}_{k-1} \text{-mesurable}$$

En utilisant la définition de l'espérance conditionnelle, l'équation (4.2) devient alors équivalente à la condition à satisfaire pour qu'une solution devienne optimale :

$$E \{R_k(\lambda^* - H_n) \mid \mathcal{F}_{k-1}\} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Nous allons nous servir de cette condition d'optimalité pour déterminer la forme explicite de la solution optimale du problème.

Les notations suivantes seront considérées tout au long de ce chapitre pour $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= 1 \\ \mu_k &= E[R_k P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}], \\ A_k &= E[R_k R_k^\top P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}], \\ b_k &= A_k^{-1} \mu_k, \\ P_k &= \prod_{i=k}^n (1 - b_i^\top R_i), \end{aligned}$$

Le théorème 4.2.1 qui suit donne l'expression explicite d'une solution optimale du problème (P). Les φ_k^* représentent les pondérations qui minimisent la variance.

Théorème 4.2.1 *La solution de l'équation (4.3) est donnée, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, par :*

$$\varphi_k^* = (\lambda^* - H_{k-1})b_k + a_k, \quad (4.4)$$

$$\lambda^* = \frac{G + E(Z_1)}{1 - E(P_1)}. \quad (4.5)$$

Avec

$$a_k = A_k^{-1} \{E(R_k Z_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}) + E(R_k R_k^b P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1})\}, \quad (4.6)$$

$$Z_k = (R_k^b - a_k^\top R_k) P_{k+1} + Z_{k+1}, \quad (4.7)$$

$$Z_{n+1} = 0. \quad (4.8)$$

De plus, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lambda^* - H_n = (\lambda^* - H_{k-1})P_k + Z_k. \quad (4.9)$$

Preuve : On commence par prouver (4.4)–(4.9) pour $k = n$. Ensuite, on procède par induction en supposant (4.4)–(4.9) vraies pour k , et en montrant qu'elles sont aussi vraies pour $k - 1$.

Pour $k = n$ on a, d'après (4.3), $E \{R_n(\lambda^* - H_n)|\mathcal{F}_{n-1}\} = 0$. Or $H_n = H_{n-1} + \varphi_n^\top R_n - R_n^b$, et donc, comme $P_{n+1} = 1$,

$$\begin{aligned}
0 &= E \{R_n(\lambda^* - H_n)|\mathcal{F}_{n-1}\} \\
&= E \{R_n(\lambda^* - H_{n-1} - \varphi_n^\top R_n + R_n^b) P_{n+1}| \mathcal{F}_{n-1}\} \\
&= (\lambda^* - H_{n-1})E(R_n P_{n+1}| \mathcal{F}_{n-1}) - E(R_n R_n^\top P_{n+1}| \mathcal{F}_{n-1}) \varphi_n \\
&\quad + E(R_n R_n^b P_{n+1}| \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= (\lambda^* - H_{n-1})\mu_n - A_n \varphi_n + E \{R_n R_n^b P_{n+1}| \mathcal{F}_{n-1}\} \\
&= (\lambda^* - H_{n-1})\mu_n - A_n \varphi_n + A_n a_n,
\end{aligned}$$

$$a_n = A_n^{-1} \{E(R_n R_n^b P_{n+1}| \mathcal{F}_{n-1})\}$$

De la dernière égalité on tire $\varphi_n = (\lambda^* - H_{n-1})b_n + a_n$, prouvant du coup (4.4)–(4.6) pour $k = n$.

En considérant que $\lambda^* - H_n = (\lambda^* - H_{n-1})P_n + Z_n$ (voir annexe A.1), supposons maintenant que (4.4)–(4.9) soient vraies pour k , on a alors :

$$\begin{aligned}
0 &= E \{R_{k-1}(\lambda^* - H_n)|\mathcal{F}_{k-2}\} \text{ par (4.3)} \\
&= E [R_{k-1} \{(\lambda^* - H_{k-1})P_k + Z_k\} | \mathcal{F}_{k-2}] \\
&= E [R_{k-1} \{(\lambda^* - H_{k-2} - \varphi_{k-1}^\top R_{k-1} + R_{k-1}^b) P_k + Z_k\} | \mathcal{F}_{k-2}] \\
&= (\lambda^* - H_{k-2})\mu_{k-1} - A_{k-1} \varphi_{k-1} + A_{k-1} a_{k-1}.
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{k-1} = (\lambda^* - H_{k-2})b_{k-1} + a_{k-1}$, prouvant (4.4)–(4.6) pour tout $k = 1, \dots, n-1$.

On démontre aussi, voir annexe A.1, que

$$E(Z_k) = E(Z_{k+1}(1 - R_k^\top b_k)) + E(R_k^b P_k), \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (4.10)$$

Utilisant (4.9) pour $k = 1$, on trouve que

$$\lambda^* - H_n = (\lambda^* - H_0)P_1 + Z_1 = \lambda^* P_1 + Z_1$$

et par conséquent

$$\lambda^* - G = E(\lambda^* - H_n) = \lambda^* E(P_1) + E(Z_1),$$

$$\text{d'où } \lambda^* = \frac{G + E(Z_1)}{1 - E(P_1)}.$$

La démonstration complète de ce théorème est faite dans l'annexe A.1.

Notre objectif de répliation de portefeuille consiste à minimiser la variance de l'erreur de répliation avec un niveau d'erreur ciblée G . Donc une stratégie d'investissement va être considérée comme optimale si elle fournit une variance plus petite que n'importe quelle autre stratégie ayant une erreur espérée totale égale à G . Dans ce qui suit, on démontre que la solution φ^* , fournie par le théorème 4.2.1, admet une variance plus petite que n'importe quelle autre stratégie réalisable $\bar{\varphi}$, donc qu'elle est optimale.

Proposition 4.2.2 *Soit $\bar{\varphi}$ une stratégie d'investissement quelconque telle que*

$$E \left(\sum_{t=1}^n \bar{\varphi}_t^\top R_t - \sum_{t=1}^n R_t^b \right) = G \text{ alors}$$

$$Var_{\bar{\varphi}} \geq Var_{\varphi^*}, \quad \forall \bar{\varphi}$$

Avec Var_{φ} la variance du portefeuille φ

Preuve : Considérons une stratégie d'investissement quelconque $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_n)$. Nous allons montrer que, étant donnée l'espérance de l'erreur totale de répliation G , la variance du portefeuille $\bar{\varphi}$ est supérieure ou égale à celle du portefeuille optimal Var_{φ^*} .

Posons $H_n^* = \sum_{t=1}^n \varphi_{t-1}^{*\top} R_t - \sum_{t=1}^n R_t^b$ et $\bar{H}_n = \sum_{t=1}^n \bar{\varphi}_t^\top R_t - \sum_{t=1}^n R_t^b$.

Nous savons que

$$Var_{\bar{\varphi}} = Var(H_n^*) + Var \left(\sum_{t=1}^n (\bar{\varphi} - \varphi^*)^\top R_t \right) + 2Cov \left(H_n^*; \sum_{t=1}^n (\bar{\varphi} - \varphi^*)^\top R_t \right) \quad (4.11)$$

Or on a $E \{ (H_n^* - \lambda^*) R_k | \mathcal{F}_{k-1} \} = 0$ et $\bar{\varphi}$ ainsi que φ^* sont \mathcal{F}_{k-1} mesurables, donc :

$$\begin{aligned} 0 &= E \{ E \{ (H_n^* - \lambda^*) (\bar{\varphi} - \varphi^*)^\top R_k | \mathcal{F}_{k-1} \} \} \\ &= E \{ (H_n^* - \lambda^*) (\bar{\varphi} - \varphi^*)^\top R_k \}, \forall k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Donc $E \left\{ (H_n^* - \lambda^*) \sum_{t=1}^n (\bar{\varphi} - \varphi^*)_t^\top R_t \right\} = 0$ et on en déduit alors que

$$E \left\{ H_n^* \sum_{t=1}^n (\bar{\varphi} - \varphi^*)_t^\top R_t \right\} = \lambda^* E \left\{ \sum_{t=1}^n (\bar{\varphi} - \varphi^*)_t^\top R_t \right\} = \lambda^* \left(\underbrace{E[\bar{H}_n]}_{=G} - \underbrace{E[H_n^*]}_{=G} \right) = 0$$

En utilisant la formule de calcul de la covariance de deux variables $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$, alors on obtient :

$$Cov \left(H_n^*; \sum_{t=1}^n (\bar{\varphi} - \varphi^*)_t^\top R_t \right) = \underbrace{E \left\{ H_n^* \sum_{t=1}^n (\bar{\varphi} - \varphi^*)_t^\top R_t \right\}}_{=0} - G \underbrace{E \left\{ \sum_{t=1}^n (\bar{\varphi} - \varphi^*)_t^\top R_t \right\}}_{=0} = 0$$

Ainsi l'équation (4.11) s'écrit

$$Var_{\bar{\varphi}} = Var_{\varphi^*} + \underbrace{Var_{(\bar{\varphi} - \varphi^*)}}_{\geq 0} \implies Var_{\bar{\varphi}} \geq Var_{\varphi^*}, \quad \forall \bar{\varphi}$$

On vient de démontrer que toute stratégie $\bar{\varphi}$ admet donc une variance plus grande que celle de φ^* . On en conclut alors que la stratégie $\varphi^* = (\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*)$ est une solution optimale du problème (P).

Dans la prochaine section, nous traitons le cas particulier du modèle qui suppose que les rendements des actifs sont indépendants et identiquement distribués. L'expression explicite de la solution optimale dans ce cas va être présentée.

4.3 Rendements indépendants et identiquement distribués

Tout au long de cette section nous supposons que les rendements des actifs sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d). On pose $\mu = E[R_n], \forall n \geq 0$. Les notations

suivantes vont être considérées

$$\begin{aligned}
A_n &= E[R_n R_n^\top P_{n+1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= E[R_n R_n^\top \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= A \\
b_n &= A_n^{-1} E[R_n P_{n+1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= A^{-1} E[R_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = A^{-1} \mu \\
&= b
\end{aligned}$$

Avec $P_n = 1 - b_n^\top R_n = 1 - \mu^\top A^{-1} R_n$.

La proposition 4.3.1 qui suit, donne une expression explicite simplifiée de A_k et $b_k, \forall k = 1, \dots, n$ et de la solution optimale dans la cas du modèle avec rendements i.i.d.

Proposition 4.3.1 *En considérant l'hypothèse des rendements indépendants et identiquement distribués, alors pour tout $k = 1, \dots, n$ on a :*

$$\begin{aligned}
A_k &= A(1 - \gamma)^{n-k} \\
b_k &= A^{-1} \mu = b
\end{aligned}$$

$$a_k = A^{-1} c + (n - k) (\mu^b - c^\top b) \frac{b}{1 - \gamma} \quad (4.12)$$

$$E(Z_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = (n + 1 - k)(1 - \gamma)^{n-k} (\mu^b - c^\top b). \quad (4.13)$$

avec $c = E(R_k^b R_k)$, $\mu^b = E(R_k^b)$, $\gamma_k = b_k^\top A b_k$ et $\gamma = \mu^\top A^{-1} \mu$.

La démonstration complète est faite à l'annexe A.2.1 et A.2.2.

Le théorème suivant nous donne l'expression de la solution du problème dans le cas de rendement i.i.d.

Théorème 4.3.2 *Supposons que les rendements sont indépendants et identiquement distribués. Alors pour tout $k = 1, \dots, n$ on a :*

$$\begin{cases} \lambda^* &= \frac{G+n(1-\gamma)^{n-1}(\mu^b - c^\top b)}{1-(1-\gamma)^n} \\ \varphi_k^* &= (\lambda^* - H_{k-1})b + A^{-1}c + (n-k)(\mu^b - c^\top b) \frac{b}{(1-\gamma)} \end{cases}$$

Voir l'annexe A.2.2 pour la démonstration complète de ce théorème.

Mais, on constate que, dans la réalité, les rendements des actifs ne sont pas indépendants et identiquement distribués. En général, les rendements des actifs à une date t sont fortement dépendants de l'information disponible en $t-1$, d'où leur caractère markovien. De ce fait, on se propose, dans ce qui suit, d'étudier le cas particulier d'un modèle avec changement de régimes, avec des rendements non i.i.d, communément appelé Hidden Markov Model (HMM) ou chaînes de Markov cachées. Ces modèles sont réputés être adaptés aux séries temporelles financières. Nous présentons l'expression de la solution optimale de notre modèle dans ce cas particulier.

4.4 Cas non i.i.d : rendements HMM gaussiens

4.4.1 Description

Les modèles HMM (Hidden Markov Model ou chaînes de Markov cachées), aussi appelés modèles avec changement de régimes, ont beaucoup de caractéristiques qui font qu'ils soient adaptés aux séries temporelles financières. Ils sont faciles à interpréter, permettent une dépendance temporelle des paramètres et les rendements conservent leurs propriétés de non normalité.

Soient un processus observé R_1, R_2, \dots, R_n à valeurs dans \mathbb{R}^d et un processus caché $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ à valeurs dans $\{1, \dots, l\}$ tels que :

- les τ_i forment une chaîne de Markov homogène et irréductible de matrice de transition $Q = \{Q_{jk} = P\{\tau_{i+1} = k | \tau_i = j\}\}$ et de distribution stationnaire $(\nu_k, k = 1, \dots, l)$
- les R_i sont indépendants conditionnellement aux τ_i .
- si $\tau_i = j$, R_i suit une loi normale, avec $\mu(j) = E[R_i | \tau_i = j]$ et $B(j) = E[R_i R_i^\top | \tau_i = j]$.

Ainsi le modèle des chaînes de Markov cachées est un modèle de mélange pour lequel la traditionnelle hypothèse d'indépendance des données observées a été remplacée par une hypothèse de dépendance markovienne.

Les notations suivantes sont utilisées tout au long de cette section. Pour tout régime $i = 1, \dots, l$:

$$\begin{aligned}\mu(i) &= E[R_j | \tau_j = i] \\ \mu_b(i) &= E[R_j^b | \tau_j = i] \\ B(i) &= E[R_j R_j^\top | \tau_j = i] \\ B_b(i) &= E[R_j R_j^{b\top} | \tau_j = i]\end{aligned}$$

Dans la prochaine sous-section, nous allons utiliser les notations précédentes pour formuler l'expression explicite de la solution optimale du problème (P) dans le cas où les rendements des actifs suivent un processus markov caché gaussiens.

4.4.2 Application au modèle

Nous allons d'abord, étant donné un régime i , donner une formulation des expressions de A_k , b_k , P_k et c_k avant d'en déduire l'expression explicite d'une stratégie optimale représentant une solution du problème (P) .

La proposition suivante donne les nouvelles expressions de A_k , b_k , P_k et γ_k dans le cas HMM gaussien.

Théorème 4.4.1 *Étant donné le régime i , $\tau_{k-1} = i$, alors pour tout $k = 1, \dots, n$ on montre que*

$$A_k(i) = \left\{ \sum_{j=1}^l Q_{ij} c_{k+1}(j) B(j) \right\}$$

$$b_k(i) = \rho_{k+1}(i)$$

$$P_k = P_{k+1} (1 - \rho_{k+1}(i)^\top R_k)$$

$$\gamma_k = c_k(\tau_{k-1})$$

où $c_{n+1} \equiv 1$, et $\forall k = 1, \dots, n+1$, $i = 1, \dots, l$:

$$c_k(i) = \sum_{j=1}^l Q_{ij} c_{k+1}(j) \{1 - \rho_{k+1}(i)^\top \mu(j)\}$$

$$\rho_k(i) = \rho_k^i = \left\{ \sum_{j=1}^l Q_{ij} c_k(j) B(j) \right\}^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^l Q_{ij} c_k(j) \mu(j) \right\}$$

Voir l'annexe A.3 pour la démonstration complète de ce théorème.

Nous utilisons les résultats du théorème 4.4.1 pour formuler l'expression de notre stratégie optimale dans le cas HMM gaussien. Une procédure sera développée dans le prochain chapitre pour l'estimation des paramètres B, Q, ρ, μ .

Théorème 4.4.2 *Étant donné le régime i , $\tau_{k-1} = i$, alors pour tout $k = 1, \dots, n$ on montre que*

$$a_k(i) = a_k(\tau_{k-1} = i) = A_k(i)^{-1} \sum_{j=1}^l Q_{ij} \{z_{k+1}(j) \mu(j) + c_{k+1}(j) B_b(j)\} \quad (4.14)$$

$$z_k(i) = E(Z_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{j=1}^l Q_{ij} z_{k+1}(j) \{1 - \rho_{k+1}(i)^\top \mu(j)\} \\ + \sum_{j=1}^l Q_{ij} c_{k+1}(j) \{\mu_b(j) - \rho_{k+1}(i)^\top B_b(j)\}. \quad (4.15)$$

Une solution optimale du problème (P) s'exprime alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} \lambda^{HMM} = \lambda^{HMM}(\tau_0) = \frac{G+z_1(\tau_0)}{1-c_1(\tau_0)} \\ \varphi_k^{HMM}(i) = (\lambda^{HMM} - H_{k-1})\rho_{k+1}(i) + a_k(i), \quad \forall k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Voir annexe A.4 pour la démonstration complète de ce théorème.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une formulation mathématique rigoureuse du problème d'optimisation de portefeuille de réplication dans un contexte dynamique. Il consiste à déterminer les pondérations des actifs du portefeuille qui permettent de minimiser la variance totale de l'erreur de réplication par rapport à un portefeuille de référence, sous une contrainte d'erreur espérée fixée par l'investisseur. Nous avons développé, à partir d'une méthode de relaxation lagrangienne, une procédure backward nous permettant d'obtenir une expression explicite d'une solution optimale du problème. L'optimalité de la solution trouvée a été démontrée. Deux cas particuliers ont été traités. Un premier cas où les rendements sont supposés indépendants et identiquement distribués et un autre cas où les rendements suivent un processus de Markov caché gaussien avec changement de régimes. Les expressions explicites de leur solution optimale ont été présentées.

Dans le prochain chapitre, nous présentons les résultats numériques obtenus par l'application de notre méthode à la réplication de l'indice de fonds de couverture 'HFRI Fund Weighted Composite Index'.

Chapitre 5

Application numérique

Dans ce chapitre, nous nous proposons de justifier les résultats théoriques trouvés dans le chapitre précédent par une application numérique qui porte sur la réplcation de l'indice de fonds de couverture 'HFRI Fund Weighted Composite Index', d'abord par un portefeuille composé uniquement de fonds de couverture et ensuite par un portefeuille composé d'actifs liquides. Une stratégie de réplcation de portefeuilles (indice) est composée de deux phases : une phase de sélection des actifs et une phase de détermination du nombre de parts de chaque actif dans le portefeuille. Notre base de données, sur les choix des actifs à sélectionner, composée d'un nombre important (1284 fonds) de fonds de couverture, nous a été fournie par Morningstar. Nous avons ainsi développé une procédure permettant de sélectionner les fonds les plus performants sur un horizon de temps compris entre 1997 et 2011, avec des observations mensuelles.

Dans la première section de ce chapitre, nous allons décrire la méthode utilisée pour sélectionner les actifs qui composent notre portefeuille devant réplquer l'indice. La deuxième section présente la description des procédures implantées pour l'application numérique dans le cas où les rendements sont supposés indépendants et identiquement distribués et dans le cas où ils suivent un processus de Markov caché gaussien. Nous présenterons les résultats

obtenus dans ces deux cas particuliers.

5.1 Phase de sélection

Dans la phase de sélection, les 1284 fonds de couverture (HF) disponibles dans notre base de données a été réparti selon la catégorie des fonds. Ainsi on a pu distinguer 6 catégories (classes) de fonds de couverture : Equity, Diversified, Currencies, Commodities, Fixed Income et Convertibles. Les marchés considérés sont 'Global Market', 'Emerging Market' et 'Developed Market'. La sélection est effectuée en tenant compte de la performance des fonds dans chaque catégorie. Cette performance est mesurée par la détermination du paramètre omega de chaque fond de couverture. Le choix de ce type de mesure de performance est motivé par le fait que les rendements des fonds de couverture sont loin d'être normalement distribués. Donc l'approche moyenne variance n'est pas adéquate pour capturer les propriétés de risque-rendement des fonds de couverture. Omega est une nouvelle mesure de performance qui reflète toutes les propriétés statistiques de la distribution des rendements et qui ne requiert aucune hypothèse sur la distribution des rendements ou sur la fonction d'utilité des investisseurs.

Si on considère R_1^i, \dots, R_n^i les observations indépendantes des rendements du fond i , alors, pour un seuil de rendement r fixé tel que $r > \min_{1 \leq j \leq n} R_j^i$, on évalue les quantités suivantes : $Y_j^i = \max(R_j^i - r, 0)$ et $Z_j^i = \max(r - R_j^i, 0)$, pour $j = 1, \dots, n$. Dans nos tests numériques on a fixé $r = 0.04269$, le taux Libor un mois en décembre 2006. Un estimateur du paramètre omega, $\Omega(r)$, du fond i est donné par :

$$\hat{\Omega}^i(r) = \overline{Y^i} / \overline{Z^i}$$

$$\text{Où } \overline{Y^i} = (1/n) \sum_{j=1}^n Y_j^i \text{ et } \overline{Z^i} = (1/n) \sum_{j=1}^n Z_j^i.$$

On procède ensuite au classement des différents fonds qui composent chaque catégo-

rie. Le fond ayant obtenu le omega le plus élevé de chaque catégorie va être sélectionné dans la composition du portefeuille actif qui doit répliquer l'indice 'HFRI Fund Weighted Composite Index'. Ainsi, six (6) fonds de couverture ont été sélectionnés pour composer notre portefeuille actif. Il reste maintenant à déterminer les différentes pondérations de ces fonds, à chaque période de temps jusqu'à l'échéance, qui permettraient la réplication de l'indice 'HFRI Fund Weighted Composite Index'. Cette réplication s'effectue par une minimisation de la variance de l'écart entre les rendements mensuels du portefeuille et ceux de l'indice, étant donnée une erreur espérée fixée par l'investisseur.

La phase de détermination des pondérations se compose, d'abord, d'une étape d'estimation des paramètres, suivie d'une étape de calcul des poids optimaux de chaque actif à chaque période jusqu'à l'échéance dans l'objectif de minimiser la variance de l'erreur de réplication.

Dans ce qui suit, nous présentons la description des méthodes numériques développées et les résultats obtenus dans les cas particuliers de rendements i.i.d et HMM gaussiens.

5.2 Réplication par des fonds de couverture

Dans le cadre des tests numériques, notre échantillon de rendements mensuels s'étale sur une période de janvier 1997 à février 2011. La période en échantillon (in sample) correspond aux données de la série de rendements mensuels entre 1997 et 2008 (11 ans). L'actif sans risque est représenté par les rendements du taux Libor-1 mois. Les données de cette période sont utilisées pour estimer les paramètres de notre modèle qui serviront de données d'entrée pour la réplication de l'indice. La période hors échantillon (out of sample) correspond à celle comprise entre janvier 2009 et février 2011. Les rendements des fonds de couverture de cette période seront utilisés pour déterminer les pondérations mensuelles qui permettront de répliquer l'indice.

Les coefficients d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis) des rendements mensuels de l'indice pour la période de janvier 2009 à février 2011 sont respectivement -0.0125 et 3.0702 . Les statistiques descriptives des séries des rendements du fonds de couverture sélectionné dans chaque catégorie, entre 1997 et 2008 pour des périodes mensuelles, sont présentées dans le tableau 5.1. Les fonds sélectionnés sont numérotés selon la classe. La première ligne de ce tableau représente le fonds de couverture sélectionné dans la catégorie correspondante. F1 représente, par exemple, le fonds sélectionné dans la catégorie 1.

Fonds de couverture		F1	F2	F3	F4	F5	F6
1997-2008	moyenne	0.0096	0.0086	0.0158	0.0139	0.0211	0.0223
	écart-type	0.0767	0.0502	0.0728	0.0461	0.1169	0.1178
	asymétrie	0.2674	0.7849	0.5634	0.1555	2.0532	-0.4817
	aplatissement	3.6081	5.4951	3.559	3.7493	12.8491	4.1423
2009-2011	moyenne	0.0098	0.0099	0.0021	0.0191	0.0127	0.0144
	écart-type	0.0472	0.0366	0.0621	0.0924	0.0808	0.0819
	asymétrie	-0.5733	1.2445	-0.3760	0.1660	0.147	0.8452
	aplatissement	3.0473	5.2174	2.2533	2.9152	3.0230	4.2933

TABLE 5.1 – Statistiques descriptives des fonds de couverture

Dans la suite, nous considérons les notations suivantes. Pour la période en échantillon :

- m représente le nombre d'observations des rendements en échantillon,
- \bar{r}_t^i est le rendement de l'actif i à la période t ,
- \bar{r}_t^0 le taux Libor à la période t ,
- \bar{r}_t^b est le rendement de l'indice de référence à la période t ,
- $\bar{R}_t = (\bar{r}_t^1 - \bar{r}_t^0, \dots, \bar{r}_t^d - \bar{r}_t^0, \bar{r}_t^b - \bar{r}_t^0)$, pour $t = 1, \dots, m$,
- $\bar{R}_t^p = (\bar{r}_t^1 - \bar{r}_t^0, \dots, \bar{r}_t^d - \bar{r}_t^0)$,
- $\bar{R}_t^b = \bar{r}_t^b - \bar{r}_t^0$,

$$- \bar{R} = (\bar{R}_p, \bar{R}_b) \text{ où } \bar{R}_p = (\bar{R}_1^p, \dots, \bar{R}_m^p), \text{ et } \bar{R}_b = (\bar{R}_1^b, \dots, \bar{R}_m^b).$$

Les mêmes notations sans la barre en haut seront adoptées pour décrire les données de la période hors échantillon.

Deux cas particuliers ont été étudiés, le cas de rendements indépendants et identiquement distribués et celui de rendements HMM gaussiens. Dans ce qui suit nous présentons les résultats obtenus dans le cas de rendements i.i.d.

5.2.1 Rendements i.i.d

5.2.1.1 Description

Dans le cas où les rendements sont i.i.d, nous notons $\mu = E[\bar{R}_p]$, le vecteur des rendements moyens des actifs du portefeuille et $\mu^b = E[\bar{R}_b]$ le rendement moyen de l'indice à répliquer. On note aussi V_{iid}^p la matrice de variance-covariance du portefeuille et V^b le vecteur de covariance des rendements de l'indice par rapport aux rendements du portefeuille. V^p et V^b sont déterminés à partir du calcul de la matrice de covariance du vecteur des rendements (\bar{R}, \bar{R}_b) . Ces paramètres sont estimés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \bar{R}_t^i \\ \mu^b &= \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \bar{R}_t^b \\ c &= V^b + \mu^b \mu \\ A &= V + \mu * \mu^\top \end{aligned}$$

Le théorème 4.3.2 fournit l'expression de la solution optimale. Les pondérations pour chaque période et la valeur de λ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^* = \frac{G+n(1-\gamma)^{n-1}(\mu^b - c^\top b)}{1-(1-\gamma)^n} \\ \varphi_k^* = (\lambda^* - H_{k-1})b + (A)^{-1}c + (n-k)(\mu^b - c^\top b) \frac{b}{(1-\gamma)}, \end{array} \right.$$

où : $H_k^* = \sum_{t=1}^k \varphi_t^{*\top} R_t - \sum_{t=1}^k R_t^b$, $c = E[R_k^b R_k] =$ et $\gamma = \mu^\top * (A)^{-1} * \mu$.

5.2.1.2 Résultats numériques

La simulation de Monte Carlo appliquée à ce cas démontre qu'en moyenne 95 fois sur 100 l'intervalle de confiance contient la valeur moyenne de l'erreur de réplication G . Le tableau 5.2 suivant présente le nombre de fois que l'erreur est dans l'intervalle de confiance sur une simulation de taille 10000.

Simulation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
%	92	97	96	98	93	96	96	94	96	96

TABLE 5.2 – Estimation par intervalle de confiance : cas i.i.d.

Dans la prochaine section, nous présentons d'abord brièvement la méthode utilisée pour estimer les paramètres du modèle HMM et leurs valeurs. Ensuite, nous décrivons les deux méthodes utilisées pour calculer les pondérations et la simulation de Monte Carlo. Enfin, nous présentons les résultats numériques obtenus.

5.2.2 Rendements HMM gaussiens

5.2.2.1 Estimation des paramètres

L'utilisation de la méthode nécessite l'estimation de certains paramètres comme la matrice de variance-covariance A , la matrice de transition d'un régime à un autre Q , le vecteur de la moyenne μ , la distribution stationnaire de chaque régime ν_k et la probabilité conditionnelle d'être à l'état k à la période t étant donnés les rendements observés $\eta_t(i) = P(\tau_t = i | R_1, \dots, R_t) = \frac{q_t(i)}{Z_t}$ avec $Z_t = \sum_{j=1}^l q_t(j)$. Ces paramètres sont nécessaires pour le calcul de la solution de notre modèle. L'algorithme de Baum décrit à la section 3.1 du

chapitre 3 est utilisé pour estimer les paramètres du modèle. Pour ce faire on utilise les données de la période en échantillon pour estimer ces paramètres. L'algorithme comporte deux étapes : une étape \underline{E} dite "Espérance" et une autre \underline{M} de "Maximisation". Un critère d'arrêt de 1000 itérations est utilisé pour terminer le calcul. L'algorithme permet d'estimer les paramètres de la loi jointe des rendements du portefeuille et de ceux de l'indice à répliquer sur la période en échantillon.

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes pour chaque itération m :

- \underline{E} : calculer $\lambda_t(i) = P(\tau_t = i | R_1, \dots, R_n)$ et $\Lambda_t(i, j) = P(\tau_t = i, \tau_{t+1} = j | R_1, \dots, R_n)$, pour tout $t = 1, \dots, m$ et $i, j \in \{1, \dots, l\}$.
- \underline{M} : mettre à jour les paramètres μ_i^m , A_i^m , ν_i^m et Q^m respectivement la moyenne, la matrice de covariance, la distribution stationnaire et la matrice de transition.

Les valeurs estimées des paramètres μ_p , μ_b , A_b , A_p et Q dans le cas où le nombre de régimes est 2 sont les suivantes :

$$\mu_p = \begin{bmatrix} -0.0418 & -0.0210 \\ -0.0382 & -0.0257 \\ -0.0365 & -0.0140 \\ -0.0724 & 0.0062 \\ -0.0288 & -0.0106 \\ -0.0505 & -0.0160 \end{bmatrix}$$

$$\mu_b^\top = \begin{bmatrix} -0.0398 \\ -0.0268 \end{bmatrix}$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 0.0019 & 0.0012 \\ 0.0023 & 0.0012 \\ 0.0013 & 0.0008 \\ 0.0031 & 0.0006 \\ 0.0010 & 0.0006 \\ 0.0027 & 0.0019 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_p(:, :, 1) &= \begin{bmatrix} 0.0087 & 0.0022 & 0.0052 & -0.0011 & 0.0086 & 0.0044 \\ 0.0022 & 0.0061 & 0.0010 & 0.0045 & 0.0016 & 0.0046 \\ 0.0052 & 0.0010 & 0.0064 & 0.0004 & 0.0061 & 0.0020 \\ -0.0011 & 0.0045 & 0.0004 & 0.0223 & 0.0007 & 0.0018 \\ 0.0086 & 0.0016 & 0.0061 & 0.0007 & 0.0209 & 0.0028 \\ 0.0044 & 0.0046 & 0.0020 & 0.0018 & 0.0028 & 0.0111 \end{bmatrix} \\
A_p(:, :, 2) &= \begin{bmatrix} 0.0057 & 0.0014 & 0.0042 & 0.0009 & 0.0030 & 0.0026 \\ 0.0014 & 0.0017 & 0.0010 & 0.0009 & 0.0012 & 0.0019 \\ 0.0042 & 0.0010 & 0.0059 & 0.0009 & 0.0037 & 0.0013 \\ 0.0009 & 0.0009 & 0.0009 & 0.0086 & 0.0026 & 0.0043 \\ 0.0030 & 0.0012 & 0.0037 & 0.0026 & 0.0088 & 0.0048 \\ 0.0026 & 0.0019 & 0.0013 & 0.0043 & 0.0048 & 0.0216 \end{bmatrix} \\
Q &= \begin{bmatrix} 0.9844 & 0.0156 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Les paramètres dans le cas de rendements HMM gaussiens sont les suivants, étant donné le régime i .

$$B_b(i) = E \left[R_j^p R_j^{b\top} \mid \tau_j = i \right] = A_b(i) + \mu_b(i) \mu_p(i)$$

$$B_p(i) = E[R_j^p R_j^{p\top} \mid \tau_j = i] = A_p(i) + \mu_p(i) \mu_p^\top(i).$$

L'adéquation de l'estimation par rapport à notre modèle est mesurée par un test d'adéquation. Il s'agira de choisir le plus petit nombre de régimes dont la p-value est plus grande que 5%. Le test appliqué à notre modèle nous a fourni un nombre de régimes égal à 2 sur les séries de rendements comprises entre 1994 et 2008. Ces paramètres servent à évaluer les valeurs de ρ et de c dont dépendent le multiplicateur de Lagrange λ et les pondérations optimales de chaque fond φ_t .

5.2.2.2 Méthodes

Les pondérations de chaque période, fournies par la proposition 4.4.2, calculées à l'étape 2 de l'algorithme dépendent du régime de la période qui est aléatoire. Nous proposons deux méthodes pour la détermination des pondérations des fonds de couverture dans le portefeuille actif en tenant compte des probabilités de chaque régime conditionnellement à l'état de la période précédente.

1. **Méthode 1** : La première méthode consiste à choisir comme étant le régime de la période t , le régime i le plus probable, c'est-à-dire le plus élevé des $\eta_t^i, i = 1, \dots, l$, où η_t^i représente la probabilité que le régime soit i à la période t ($\tau_t = i$), étant donnés les rendements des périodes de 1 à $t - 1$. Ainsi le vecteur des pondérations de cette période va être $(\varphi_i^{HMM})_t$ qui représente le vecteur des poids à la période t étant donné que le régime soit $\tau_t = i$.
2. **Méthode 2** : Pour la deuxième méthode, les poids de chaque période sont calculés en prenant la somme pondérée par les η_t^i des poids de chaque régime :

$$\varphi_t^j = \sum_{i=1}^l \eta_t^i * (\varphi_i^{HMM})_t^j$$

où $(\varphi_i^{HMM})_t^j$ est le poids de l'actif j , à la période t et étant donnés le régime $\tau_t = i$ et l le nombre de régimes considérés.

Dans la prochaine sous-section, une procédure utilisant une simulation de Monte Carlo est utilisée pour valider la solution explicite de notre modèle. Un intervalle de confiance sera ensuite construit autour de la moyenne pour vérifier s'il capture l'erreur de réplication espérée déterminée avec notre méthode de résolution.

5.2.3 Simulation de Monte Carlo

Nous proposons une simulation de Monte Carlo pour valider nos résultats théoriques. Cette méthode se justifie par le caractère aléatoire des régimes à chaque période.

Une procédure génère par simulation le régime de chaque période par une chaîne de Markov de matrice de transition la matrice Q estimée. Ensuite on génère les rendements à partir des paramètres estimés. On va considérer que les rendements (hors échantillon) suivent une loi normale de paramètres μ et A dépendant des régimes. Ainsi les rendements de chaque période sont simulés avec la formule suivante :

$$R_{sim} = a^\top Z + \mu$$

où Z est une normale $(0, 1)$ et a est la décomposition de Cholesky de la matrice A , représentant la matrice de covariance du vecteur des rendements joints du portefeuille et de l'indice. On en déduit R le vecteur des rendements des actifs du portefeuille et R_b le vecteur des rendements de l'indice de référence. Une trajectoire va être constituée en générant les états de chaque période jusqu'à l'échéance. On utilise ensuite le théorème 4.4.2 pour calculer H_n^i pour chaque trajectoire i . Après l'estimation des paramètres μ_p , μ_b , A_b , A_p et Q et la validation du nombre de régimes la procédure de simulation se présente de la manière suivante :

1. Simuler le régime de chaque période de 01-2009 à 02-2011 en utilisant une chaîne de Markov avec comme matrice de transition la matrice Q estimée en considérant l'état initial comme l'état le plus probable au 31 décembre de 2008.
2. Simuler les rendements du portefeuille et de l'indice à chaque période pour chaque trajectoire $i = 1, \dots, 10000$
3. Déterminer H_T^i à l'échéance de chaque trajectoire
4. Calculer la moyenne $\overline{H^k}$ et la variance σ_k
5. Déterminer les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de confiance de 95%

Cette procédure est répétée 100 fois pour voir le nombre de fois que l'erreur de réplcation G , ciblée par l'investisseur, appartient aux intervalles de confiance. Nous obtenons les résultats suivants :

Simulation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
%	93	95	92	94	96	95	95	96	97	96

TABLE 5.3 – Estimation par intervalle de confiance

La première ligne du tableau 5.3 correspond au numéro de la simulation et la deuxième ligne indique le nombre de fois sur 100 que les intervalles de confiance ont contenu la valeur de G . Un test avec une simulation de 100000 a été traité et on a trouvé que 98 fois sur 100 les intervalles de confiance contiennent la valeur de G .

Dans le cadre des tests numériques, deux procédures ont été initiées pour justifier la pertinence de notre méthode. Une première consiste à optimiser sur une échéance de n périodes. L'objectif étant de réduire la variance de l'erreur de réplication sur toute la durée, étant donnée une erreur espérée fixée à l'échéance. La deuxième procédure porte sur l'optimisation successive sur des périodes plus courtes, 3 mois, qui représentent les échéances de modification des portefeuilles de fonds de couverture dans la pratique. Dans ce cas l'erreur espérée est divisée par le nombre de trimestres.

5.2.4 Résultats numériques

Dans la pratique, la modification des portefeuilles de fonds de couverture s'effectue à chaque trimestre. Une procédure qui tient compte de cet aspect a été développée. Elle consiste, d'abord, à effectuer une nouvelle sélection des fonds qui forment notre portefeuille actif à chaque trimestre. Le critère de sélection est toujours basé sur le fond ayant le omega le plus élevé de chaque classe sur la série des rendements des cinq (5) dernières années. L'optimisation s'effectue alors à courtes échéances de trois (3) mois. Le rendement espéré cible sur deux ans est ainsi divisé au prorata trimestriel. C'est-à-dire 0.25% par trimestre pour un objectif de 2% sur 2 ans et 0.5% par trimestre pour un objectif de 4% sur 2 ans, etc.. Tous les tests numériques sont effectués en considérant deux régimes fournis par le test d'adéquation

(goodness-of-fit).

La simulation de Monte Carlo effectuée pour une échéance trimestrielle a permis de construire un intervalle de confiance à l'aide des quantiles. Les quantiles calculés sur le vecteur des 10000 valeurs de H_n simulées notée H_{sim} , à 0.025 et 0.975 sont :

$$quantile(H_{sim}, 0.975); \quad quantile(H_{sim}, 0.025)$$

Le tableau 5.4 présente les quantiles d'ordre 97.5% et 2.5% des données simulées par Monte Carlo pour des erreurs espérées différentes sur une période de trois (3) mois :

$G_{trim}(\%)$	0.37	0.25	0.19	0.13
quantile 2.5%	-0.0635	-0.0649	-0.0656	-0.0664
quantile 97.5%	0.0713	0.0727	0.0717	0.0720

TABLE 5.4 – Quantiles

Le tableau 5.5 présente la variance pour le premier trimestre avec différentes valeurs de l'erreur espérée. La variance est calculée par : $var_{trim} = H_n^2 - G^2$.

$G_{trim}(\%)$	0.37	0.25	0.19	0.13
variance (10^{-4})	9.0393	9.3396	9.4865	9.6150

TABLE 5.5 – Variance

On présente dans le tableau 5.6 qui suit les résultats obtenus par notre méthode pour différentes valeurs de G , rendement à long terme sur 24 mois, subdivisés au prorata mensuellement $G/8$. La première colonne donne la valeur de G et la deuxième la période (le mois). Les autres colonnes présentent les valeurs des erreurs de réplication H_n (en %) des périodes de chaque trimestre.

		Trimestres							
G(%) – Périodes		1	2	3	4	5	6	7	8
0.13	1	-3.94	2.39	2.14	-3.83	-0.04	-0.85	-2.15	1.47
	2	-4.47	15.32	0.14	-4.57	-1.10	-4.70	-0.80	-3.84
	3	-3.10	16.74	-0.16	-5.14	-1.60	-3.73	4.38	-5.22
0.19	1	-3.92	2.36	2.12	-3.80	-0.04	-0.85	-2.14	1.45
	2	-4.44	15.16	0.11	-4.53	-1.09	-4.66	-0.81	-3.81
	3	-3.08	16.56	-0.20	-5.11	-1.61	-3.69	4.29	-5.19
0.25	1	-3.88	2.34	2.10	-3.75	-0.04	-0.85	-2.13	1.44
	2	-4.40	15.00	0.09	-4.49	-1.08	-4.60	-0.81	-3.78
	3	-3.06	16.37	-0.23	-5.07	-1.61	-3.63	4.21	-5.16
0.37	1	-3.84	2.28	2.06	-3.67	-0.05	-0.85	-2.10	1.40
	2	-4.35	14.69	0.05	-4.41	-1.07	-4.48	-0.82	-3.71
	3	-3.03	16.00	-0.30	-5.00	-1.62	-3.51	4.03	-5.09

TABLE 5.6 – Erreur de réplication périodique

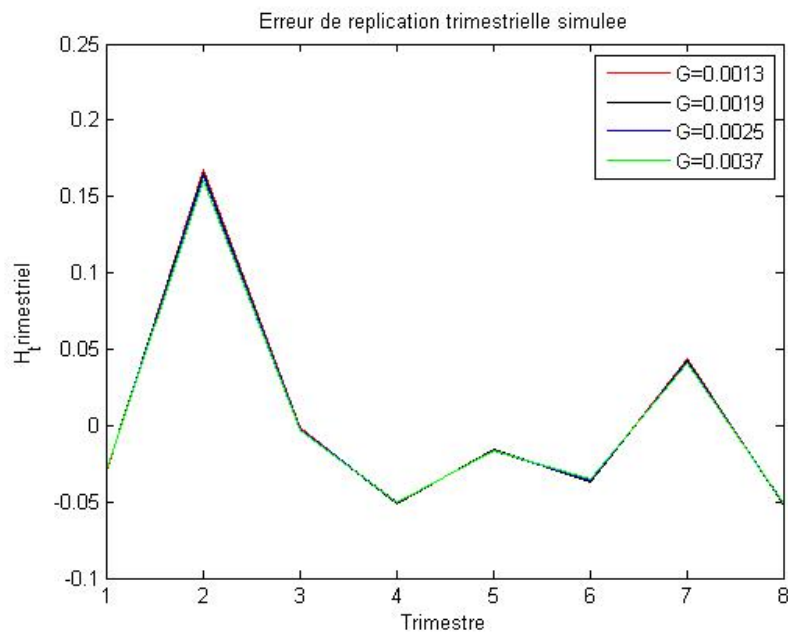


FIGURE 5.1 – Graphe des erreurs de réplcation trimestrielles

La figure 5.1 présente un graphique des erreurs de réplcation obtenues par la méthode de simulation de Monte Carlo pour différentes valeurs de G sur 8 trimestres. Les résultats obtenus indiquent que les intervalles de confiance construits autour de l'erreur espérée, par la simulation de Monte Carlo, contiennent à chaque fois la valeur de H_n à échéance sur des périodes de 3 mois. Les résultats du trimestre 2 marquent notre attention pour des valeurs élevées comparées aux autres résultats.

La figure 5.2 compare l'évolution des carrés des erreurs de réplcation H_n de la méthode avec rendements indépendants à celle avec rendements HMM gaussiens au cours des périodes. Le graphique montre bien que l'hypothèse de rendements HMM gaussiens avec changement de régime diminue de manière considérable l'erreur de réplcation.

Le tableau 5.5, qui indique des valeurs faibles de la variance de l'erreur de réplcation, confirme la pertinence de la méthode développée dans le cadre de cette étude.

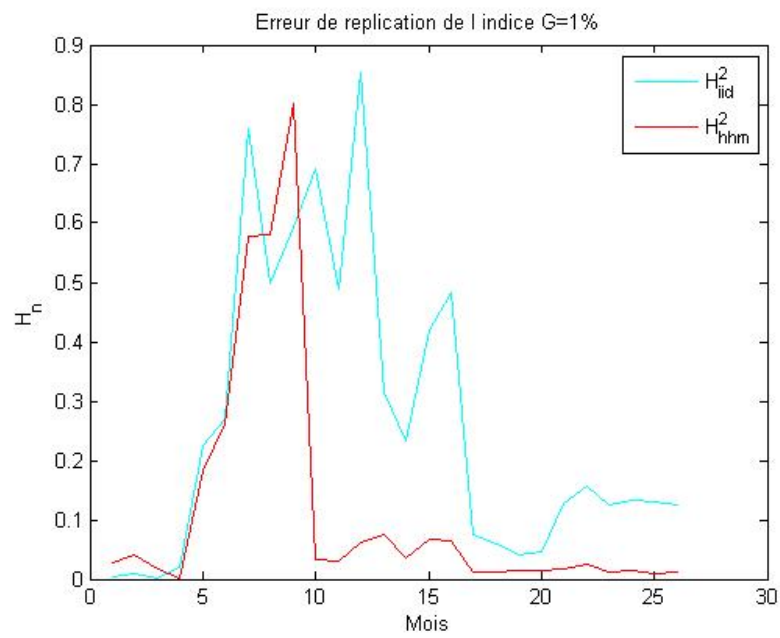
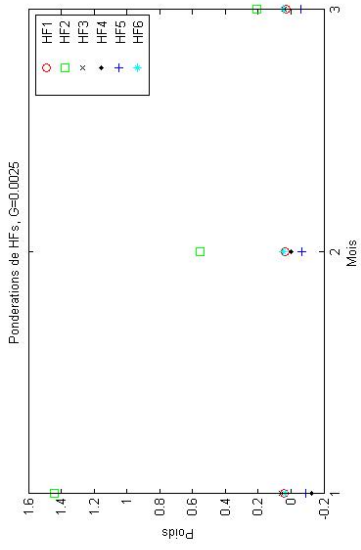
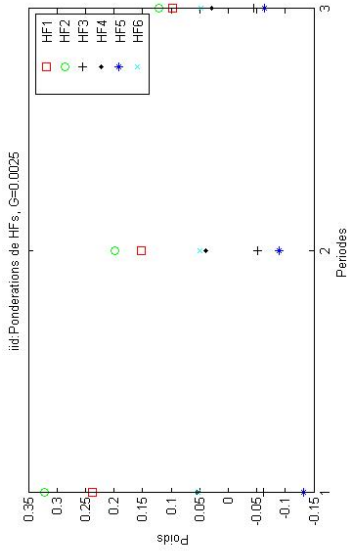


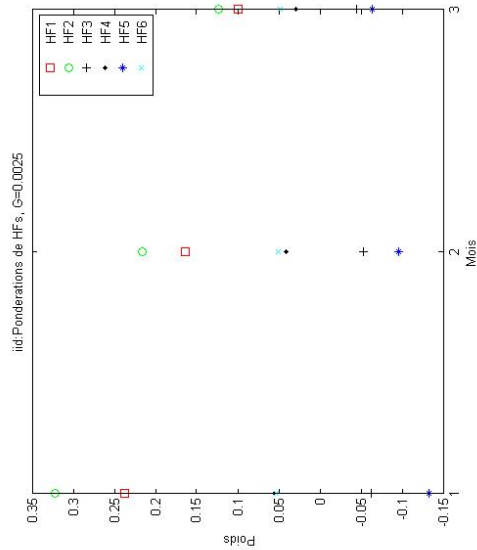
FIGURE 5.2 – Graphe des erreurs de répliation



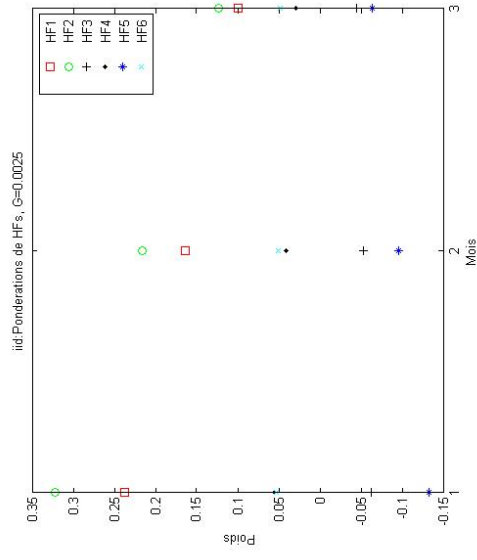
(a) HMM :G=0.0025, trimestre 1



(b) HMM :G=0.0025, trimestre 8



(c) iid :G=0.0025, trimestre 1



(d) iid :G=0.0025, trimestre 8

FIGURE 5.3 – Ponderations des actifs du portefeuille

La figure 5.3 présente deux graphiques sur les pondérations des actifs du portefeuille pour les périodes du premier et du dernier trimestre avec $G = 0.0025$ dans le cas i.i.d., figures (c) et (d), et dans le cas HMM gaussiens avec changement de régimes, figures (a) et (b).

Le modèle développé sans contrainte de positivité sur les pondérations, dans le cadre de ce travail, fournit une solution optimale avec des poids négatifs. Une pondération négative est considérée comme une vente à découvert. Or un fond de couverture ne peut être vendu à découvert. Nous avons testé dans les applications numériques une procédure qui consiste à enlever du portefeuille les actifs ayant des pondérations négatives et refaire une résolution avec les actifs restants. Notre objectif était de vérifier si nous pouvions répliquer l'indice avec moins d'actifs mais avec des poids positifs. Nous avons pu le faire sur le premier trimestre mais sur les autres même avec deux actifs, l'un avait un poids positif et l'autre un poids négatif. Donc il serait difficile d'adapter notre procédure dans la vraie vie si les ventes à découvert ne sont pas permises comme dans le cas de fonds de couverture. Mais on pourrait toujours dans ce cas là utiliser des répliqueurs de fonds de couverture afin de pouvoir permettre des pondérations négatives. La réplification pourrait par contre être effectuée en utilisant des futures qui ne requièrent pas des pondérations positives. C'est dans ce cadre que nous avons aussi appliqué notre méthode pour répliquer l'indice avec d'autres facteurs.

5.3 Réplication par des actifs liquides

Dans ce qui suit nous appliquons notre méthode à la réplification de l'indice HFRI Fund Weighted Composite Index, par un portefeuille formé des facteurs suivants : S&P500 Index TR, Russel 2000 Index TR, Russell 1000 Index TR, Eurostoxx Index, Topix, US 10-year Index, 1-month LIBOR. Roncalli et Teiletche ont tenté de répliquer cet indice avec les mêmes actifs dans [27]. Les données, fournies gracieusement par Innocap, vont du mois d'avril 1997 au mois d'octobre 2008. La période en échantillon pour estimer les paramètres est prise entre avril 1997 jusqu'en décembre 2005. La période hors échantillon concerne les

rendements de janvier 2006 à octobre 2008. Le test d'adéquation de ces données fournit une p-value supérieure à 5% pour un nombre de régimes égal à 1.

La figure 5.4 montre l'évolution des pondérations des actifs du portefeuille actif pour $G = 1\%$. On note une certaine stabilité des poids dans le temps.

Le tableau 5.7 présente les quantiles d'ordre 97.5% et 2.5% des valeurs de l'erreur à l'échéance. Les résultats obtenus par une simulation trimestrielle des valeurs de l'erreur de réplication

$G_{trim}(\%)$	0.37	0.25	0.19	0.13
quantile 2.5%	-0.2987	-0.2954	-0.2936	-0.2917
quantile 97.5%	0.2315	0.2284	0.2265	0.2251

TABLE 5.7 – Quantiles

sont présentés au tableau 5.8. On voit encore une fois que notre intervalle de confiance construit avec les quantiles contient bien l'erreur H_n à l'échéance trimestrielle.

		Trimestres										
G(%) – Périodes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.13	1	-1.17	-2.99	-0.74	-0.26	-0.80	-1.24	-2.55	-1.84	-1.00	0.39	2.99
	2	-1.11	-1.05	1.03	-0.98	-0.18	-0.65	1.35	-0.31	-2.69	-0.60	4.91
	3	0.07	0.94	1.09	-0.38	-0.35	-0.82	-1.16	-0.57	0.42	-2.33	-0.32
0.19	1	-1.12	-2.93	0.70	-0.21	-0.74	-1.19	-2.50	-1.80	-0.95	0.43	3.00
	2	-1.05	-0.99	1.08	-0.92	-0.12	-0.59	1.40	-0.26	-2.63	-0.54	4.93
	3	0.13	1.00	1.15	-0.31	-0.29	-0.76	-1.10	-0.51	0.48	-2.27	-0.25
0.25	1	-1.08	-2.87	-0.66	-0.16	-0.68	-1.15	-2.44	-1.75	-0.89	0.47	3.02
	2	-0.99	-0.93	1.14	-0.85	-0.06	-0.52	1.46	-0.21	-2.57	-0.48	4.96
	3	0.20	1.06	1.21	-0.25	-0.22	-0.69	-1.03	-0.44	0.54	-2.20	-0.18
0.37	1	-0.98	-2.74	-0.57	-0.05	-0.55	-1.05	-2.34	-1.66	-0.78	0.55	3.05
	2	-0.87	-0.80	1.25	-0.73	0.07	-0.39	1.58	-0.10	-2.45	-0.37	5.01
	3	0.32	1.19	1.33	-0.13	-0.10	-0.57	-0.91	-0.32	0.66	-2.08	-0.04

TABLE 5.8 – Erreur de réplication périodique

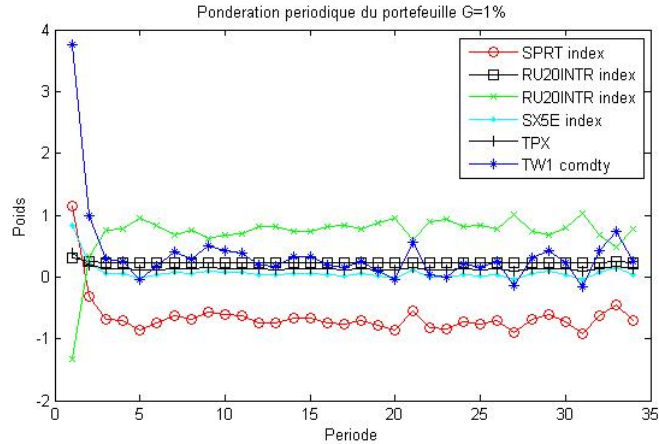


FIGURE 5.4 – Poids des actifs dans le portefeuille du problème pour $G=1\%$

Le figure 5.5 fait une comparaison des rendements des portefeuilles de répliation fournis par les solutions dans le cas de rendements indépendants et identiquement distribués et celui du cas avec rendements HMM gaussiens. Elle confirme que la deuxième méthode fournit une meilleure répliation de l'indice. Encore une fois le gain en termes de réduction de l'erreur de répliation est considérable. La courbe des rendements du portefeuille de répliation est bien comprise entre le portefeuille i.i.d et celui de référence.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux applications numériques de la méthode décrite au chapitre 4 pour la répliation de l'indice 'HFRI Fund Weighted Composite Index', d'abord, par des fonds de couverture ensuite par un portefeuille composé d'autres actifs. Une optimisation sur une échéance trimestrielle est développée ce qui est conforme aux procédures de modification des portefeuilles de fonds couverture. Les deux cas particuliers de rendements indépendants et identiquement distribués et de rendements suivant un processus de Markov caché gaussien ont été traités. Étant donnée que notre contrainte est exprimée par une espérance mathématique, une simulation de Monte Carlo a été développée pour construire

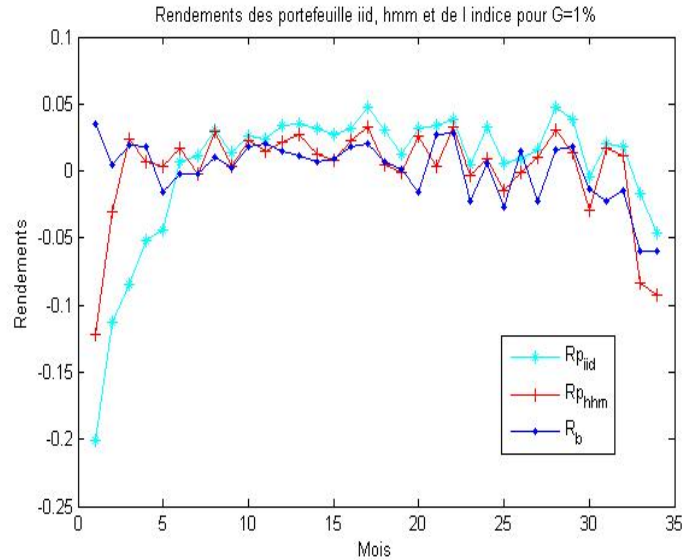


FIGURE 5.5 – Rendements du portefeuille de réplication avec $G=1\%$

un intervalle de confiance autour de l'erreur de réplication. Les tests numériques effectués ont montré que les erreurs de réplication fournies par notre méthode sont bien à l'intérieur de l'intervalle de confiance. Ils ont aussi démontré le gain considérable dans la réduction de l'erreur de réplication par la méthode HMM avec changements de régime comparé à celle avec rendements indépendants et identiquement distribués. Ce résultat confirme la pertinence de la méthode développée dans le cadre de cette étude. La variance de l'erreur de réplication faible obtenue démontre aussi l'efficacité de notre procédure de résolution.

Le prochain chapitre porte sur une conclusion générale du travail accompli dans le cadre de ce mémoire.

Chapitre 6

Conclusion

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons présenté une contribution importante au problème d'optimisation dynamique de portefeuille de réplication. Nous avons formulé, de manière rigoureuse, une modélisation mathématique, en terme d'espérance conditionnelle, qui consiste à minimiser la variance de l'erreur de réplication sous une contrainte d'erreur espérée ciblée par l'investisseur. Il consiste à déterminer les pondérations optimales des actifs qui composent le portefeuille de réplication, à chaque période, afin de minimiser la variance totale de l'erreur de réplication. Une résolution basée sur une approche de relaxation lagrangienne appliquée au modèle nous a permis de déterminer l'expression explicite d'une solution optimale. Elle combine une procédure d'induction et des techniques de résolution tirées du calcul stochastique. L'obtention d'une solution explicite est très rare dans la littérature. La majeure partie des travaux fournissent des solutions approchées et des solutions explicites ne sont pas toujours disponibles. L'optimalité de la solution, représentant la stratégie d'investissement optimale, a été démontrée. Les cas particuliers d'un modèle avec des rendements indépendants et identiquement distribués et de rendements suivant un processus de Markov caché gaussien ont été traités. Le type de modèle avec rendements HMM gaussiens est facile à interpréter et est adapté aux séries temporelles financières. Il conserve aussi la propriété de non normalité des rendements. La méthode développée fournit une expression

explicite des pondérations qui dépendent du régime qui est survenu. L'algorithme de Baum d'"Espérance-Maximisation" est utilisé pour l'estimation des paramètres du modèle.

Pour justifier des excellents résultats théoriques obtenus, nous avons appliqué le modèle à la réplication de l'indice de fonds de couverture 'HFRI Fund Weighted Composite Index' par des fonds de couverture et par d'autres actifs. Dans la première application, les fonds de couverture qui composent notre portefeuille actif sont sélectionnés en tenant compte de leur performance mesurée par le paramètre ω . Deux procédures de calcul des pondérations d'une période ont été utilisées. Une première qui sélectionne le régime le plus probable et une autre qui utilise une pondération par la probabilité du régime conditionnellement aux rendements déjà observés. Les deux approches fournissent des résultats similaires. Le rebalancement des portefeuilles de fonds de couverture se fait en général aux trois mois. Une application numérique qui tient compte du rebalancement trimestriel de notre portefeuille actif a été développée. Au lieu de procéder à une optimisation sur une longue échéance, on applique la méthode sur des échéances courtes de 3 mois. L'erreur moyenne est ainsi divisée au prorata du nombre de trimestres. Nous avons construit un intervalle de confiance autour de l'erreur moyenne de réplication à l'aide d'une simulation de Monte Carlo avec les paramètres estimés par l'algorithme de Baum pour vérifier s'il capture bien l'erreur fournie par la méthode développée.

Les tests numériques effectués démontrent de la pertinence de notre approche de résolution du modèle d'optimisation de portefeuille avec erreur de réplication appliquée à la réplication d'indices. Nous avons pu bien répliquer l'indice avec une très faible variance d'erreur de réplication. Les résultats numériques obtenus par notre méthode de résolution, pour différentes valeurs de l'erreur de réplication ciblée, démontrent que l'erreur espérée est bien à l'intérieur de l'intervalle de confiance. Les tests démontrent aussi que le cas avec rendements HMM gaussiens avec changement de régime apporte un gain considérable en terme de réduction de l'erreur de réplication comparé au cas à rendements indépendants et identiquement distribués.

Le modèle traité dans le cadre de ce travail ne contraint pas les variables à être positives ce qui exclut son application à des problèmes d'optimisation de portefeuilles n'offrant pas la possibilité de ventes à découvert. Une piste de recherche consisterait donc à étudier un modèle avec une contrainte de non-négativité sur les variables de pondération. Une autre approche consisterait aussi à utiliser des répliqueurs de fonds de couverture pour composer le portefeuille actif de réplication pour surmonter cette contrainte de non-négativité.

Une autre piste de recherche consisterait à formuler le problème d'optimisation dynamique de portefeuilles comme une minimisation de l'erreur totale espérée sous la contrainte d'une variance de l'erreur totale ciblée par l'investisseur.

Les résultats obtenus démontrent aussi un rebalancement régulier, à chaque période d'observations, de notre portefeuille actif. Ce qui pourrait être coûteux en termes de coûts de transaction lorsque l'échéance est longue. Un modèle limitant le nombre de rebalancements pourrait aussi être étudié.

Même si un travail supplémentaire reste à faire, nous avons pu montrer cependant qu'il était possible de, non seulement, trouver une solution explicite efficace pour le problème de réplication de portefeuilles avec erreur de réplication mais aussi de montrer que le modèle avec rendements HMM gaussiens apportait un gain important par rapport au modèle à rendements i.i.d dans la résolution de ce type de problème.

Annexe A

Annexe

A.1 Preuve du théorème 4.2.1

Preuve : On commence par prouver (4.4)–(4.9) pour $k = n$. Ensuite, on procède par induction en supposant (4.4)–(4.9) vraies pour k , et en montrant qu’elles sont aussi vraies pour $k - 1$.

Pour $k = n$ on a, d’après (4.3), $E \{R_n(\lambda - H_n)|\mathcal{F}_{n-1}\} = 0$. Or $H_n = H_{n-1} + \varphi_n^\top R_n - R_n^b$, et donc, comme $P_{n+1} = 1$,

$$\begin{aligned} 0 &= E \{R_n(\lambda - H_n)|\mathcal{F}_{n-1}\} \\ &= E \{R_n (\lambda - H_{n-1} - \varphi_n^\top R_n + R_n^b) P_{n+1}|\mathcal{F}_{n-1}\} \\ &= (\lambda - H_{n-1})E (R_n P_{n+1}|\mathcal{F}_{n-1}) - E (R_n R_n^\top P_{n+1}|\mathcal{F}_{n-1}) \varphi_n \\ &\quad + E (R_n R_n^b P_{n+1}|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= (\lambda - H_{n-1})\mu_n - A_n \varphi_n + E \{R_n R_n^b P_{n+1}|\mathcal{F}_{n-1}\} \\ &= (\lambda - H_{n-1})\mu_n - A_n \varphi_n + A_n a_n, \end{aligned}$$

d’après (4.6).

Donc on a bien $\varphi_n = (\lambda - H_{n-1})b_n + a_n$, prouvant du coup (4.4)–(4.6) pour $k = n$.

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\lambda - H_n &= \lambda - H_{n-1} - \varphi_n^\top R_n + R_n^b \\
&= \lambda - H_{n-1} - (\lambda - H_{n-1})b_n^\top R_n - a_n^\top R_n + R_n^b \\
&= (\lambda - H_{n-1})P_n + Z_n,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (4.7)–(4.9).

Supposons maintenant que (4.4)–(4.9) vraies pour k . On a alors, utilisant (4.9),

$$\begin{aligned}
0 &= E \{R_{k-1}(\lambda - H_n) | \mathcal{F}_{k-2}\} \\
&= E [R_{k-1} \{(\lambda - H_{k-1})P_k + Z_k\} | \mathcal{F}_{k-2}] \\
&= E [R_{k-1} \{(\lambda - H_{k-2} - \varphi_{k-1}^\top R_{k-1} + R_{k-1}^b) P_k + Z_k\} | \mathcal{F}_{k-2}] \\
&= (\lambda - H_{k-2})\mu_{k-1} - A_{k-1}\varphi_{k-1} + A_{k-1}a_{k-1}.
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{k-1} = (\lambda - H_{k-2})b_{k-1} + a_{k-1}$, prouvant (4.4)–(4.6).

Finalement, par hypothèse,

$$\begin{aligned}
\lambda - H_n &= (\lambda - H_{k-1})P_k + Z_k \\
&= (\lambda - H_{k-2} - \varphi_{k-1}^\top R_{k-1} + R_{k-1}^b) P_k + Z_k \\
&= (\lambda - H_{k-2}) P_k - a_{k-1}^\top R_{k-1} P_k - (\lambda - H_{k-2}) b_{k-1}^\top R_{k-1} P_k \\
&\quad + R_{k-1}^b P_k + Z_k \\
&= (\lambda - H_{k-2}) P_{k-1} + Z_{k-1},
\end{aligned}$$

ce qui prouve (4.7)–(4.9), et complète la preuve.

Notons que d'après (4.6) et (4.7), on a

$$\begin{aligned}
E(Z_k) &= E \left\{ \left(R_k^b - \{E(R_k Z_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}) + E(R_k R_k^b P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1})\}^\top A_k^{-1} R_k \right) P_{k+1} + Z_{k+1} \right\} \\
&= E \left\{ R_k^b P_{k+1} - Z_{k+1} R_k^\top A_k^{-1} R_k P_{k+1} + R_k^b P_{k+1} R_k^\top A_k^{-1} R_k P_{k+1} + Z_{k+1} \right\} \\
&= E \left\{ R_k^b P_{k+1} - Z_{k+1} R_k^\top A_k^{-1} E(R_k P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}) + R_k^b P_{k+1} R_k^\top A_k^{-1} E(R_k P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}) + Z_{k+1} \right\} \\
&= E \left\{ R_k^b P_{k+1} - Z_{k+1} R_k^\top b_k + R_k^b P_{k+1} R_k^\top b_k + Z_{k+1} \right\} \\
&= E \left\{ (R_k^b P_{k+1} + Z_{k+1})(1 - R_k^\top b_k) \right\}
\end{aligned}$$

Donc on a

$$E(Z_k) = E(Z_{k+1} (1 - R_k^\top b_k)) + E(R_k^b P_k), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{A.1})$$

Utilisant (4.9) pour $k = 1$, on trouve que $\lambda - H_n = (\lambda - H_0)P_1 + Z_1 = \lambda P_1 + Z_1$, et par conséquent

$$\lambda - G + \sum_{t=1}^n E(R_t^b) = E(\lambda - H_n) = \lambda E(P_1) + E(Z_1),$$

d'où

$$\lambda = \frac{G + E(Z_1)}{1 - E(P_1)}. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Preuve de la proposition 4.3.1

A.2.1 Preuve des expressions de A_k et b_k ,

On a $A_n = E[R_n R_n^\top P_{n+1} | \mathcal{F}_{n-1}] = E[R_n R_n^\top | \mathcal{F}_{n-1}] = A$. Ensuite,

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= E[R_{n-1} R_{n-1}^\top P_n | \mathcal{F}_{n-2}] \\ &= E[R_{n-1} R_{n-1}^\top (1 - \mu^\top A^{-1} R_n) | \mathcal{F}_{n-2}] \\ &= E[R_{n-1} R_{n-1}^\top | \mathcal{F}_{n-2}] - E[R_{n-1} R_{n-1}^\top \mu^\top A^{-1} R_n | \mathcal{F}_{n-2}] \\ &= E[R_{n-1} R_{n-1}^\top | \mathcal{F}_{n-2}] - E[R_{n-1} R_{n-1}^\top | \mathcal{F}_{n-2}] E[\mu^\top A^{-1} R_n | \mathcal{F}_{n-2}] \\ &= A - A \mu^\top A^{-1} \mu \\ &= A(1 - \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= A_{n-1}^{-1} E[R_{n-1} P_n | \mathcal{F}_{n-2}] \\ &= A_{n-1}^{-1} E[R_{n-1} (1 - \mu^\top A^{-1} R_n) | \mathcal{F}_{n-2}] \\ &= A_{n-1}^{-1} (E[R_{n-1} | \mathcal{F}_{n-2}] - E[R_{n-1} \mu^\top A^{-1} R_n | \mathcal{F}_{n-2}]) \\ &= A_{n-1}^{-1} (\mu - \mu \mu^\top A^{-1} \mu) = A^{-1} \mu (1 - \gamma) / (1 - \gamma) \\ &= A^{-1} \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{n-2} &= E[R_{n-2}R_{n-2}^\top P_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-3}] \\
&= E \left\{ R_{n-2}R_{n-2}^\top (1 - \mu^\top A^{-1}R_n)(1 - \mu^\top A^{-1}R_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-3} \right\} \\
&= E \left\{ R_{n-2}R_{n-2}^\top (1 - \mu^\top A^{-1}R_n - \mu^\top A^{-1}R_{n-1} + \mu^\top A^{-1}R_n \mu^\top A^{-1}R_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-3} \right\} \\
&= A(1 - 2\mu^\top A^{-1}\mu + (\mu^\top A^{-1}\mu)^2) \\
&= A(1 - \gamma)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{n-2} &= A_{n-2}^{-1}E[R_{n-2}P_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-3}] \\
&= A_{n-2}^{-1}E \left\{ R_{n-2}(1 - \mu^\top A^{-1}R_n)(1 - \mu^\top A^{-1}R_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-3} \right\} \\
&= A_{n-2}^{-1}E \left\{ R_{n-2}(1 - \mu^\top A^{-1}R_n - \mu^\top A^{-1}R_{n-1} + \mu^\top A^{-1}R_n \mu^\top A^{-1}R_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-3} \right\} \\
&= A_{n-2}^{-1}\mu(1 - 2\mu^\top A^{-1}\mu + (\mu^\top A^{-1}\mu)^2) \\
&= A_{n-2}^{-1}\mu(1 - \gamma)^2 \\
&= A^{-1}\mu
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que les relations suivantes soient vraies au rang $k+1$ $A_{k+1} = A(1 - \gamma)^{n-k-1}$, et $b_{k+1} = A^{-1}\mu$, et montrons qu'elles sont également satisfaites au rang k .

$$\begin{aligned}
A_k &= E[R_k R_k^\top P_{k+1} \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= E \left\{ R_k R_k^\top \prod_{j=k+1}^n (1 - \mu^\top A^{-1}R_j) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right\} \\
&= E[R_k R_k^\top \mid \mathcal{F}_{k-1}] E \left\{ \prod_{j=k+1}^n (1 - \mu^\top A^{-1}R_j) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right\} \\
&= A \prod_{j=k+1}^n E \left\{ (1 - \mu^\top A^{-1}R_j) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right\} \\
&= A \prod_{j=k+1}^n (1 - \mu^\top A^{-1}\mu) \\
&= A(1 - \gamma)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= A_k^{-1} E[R_k P_{k+1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= A_k^{-1} E \left\{ R_k \prod_{j=k+1}^n (1 - \mu^\top A^{-1} R_j) \mid \mathcal{F}_{n-1} \right\} \\
&= A_k^{-1} \mu \prod_{j=k+1}^n E \{ (1 - \mu^\top A^{-1} R_j) \mid \mathcal{F}_{n-1} \} \\
&= A_k^{-1} \mu (1 - \mu^\top A^{-1} \mu)^{n-k} \\
&= A^{-1} (1 - \gamma)^{-n+k} \mu (1 - \gamma)^{n-k} \\
&= A^{-1} \mu
\end{aligned}$$

A.2.2 Preuve des expressions de a_k et $E[Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$ et de la proposition 4.3.1

Pour $k = n$, on a

$$\begin{aligned}
a_n &= A^{-1} \{ E(R_n R_n^b P_{n+1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \} \\
&= A^{-1} \{ E(R_n R_n^b \mid \mathcal{F}_{n-1}) \} \\
&= A^{-1} c,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E[Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= E[R_n^b - a_n^\top R_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= E(R_n^b \mid \mathcal{F}_{n-1}) - a_n^\top E(R_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= (\mu^b - c^\top b),
\end{aligned}$$

prouvant (4.12)–(4.13).

Supposons maintenant que (4.12)–(4.13) sont vraies pour k et prouvons qu'elles sont aussi vraies pour $k - 1$.

On a

$$\begin{aligned}
a_{k-1} &= \frac{A^{-1}}{(1-\gamma)^{n-k+1}} \{E(R_{k-1}Z_k|\mathcal{F}_{k-2}) + E(R_{k-1}R_{k-1}^b P_k|\mathcal{F}_{k-2})\} \\
&= \frac{A^{-1}}{(1-\gamma)^{n-k+1}} [\mu E\{E(Z_k|\mathcal{F}_{k-1})|\mathcal{F}_{k-2}\} + E\{R_{k-1}^b R_{k-1} E(P_k|\mathcal{F}_{k-1})|\mathcal{F}_{k-2}\}] \\
&= \frac{A^{-1}}{(1-\gamma)^{n-k+1}} [\mu \{(n-k+1)(1-\gamma)^{n-k}(\mu^b - c^\top b)\} + c(1-\gamma)^{n-k+1}] \\
&= A^{-1}c + \frac{b}{(1-\gamma)}(n-k+1)(\mu^b - c^\top b),
\end{aligned}$$

ce qui prouve (4.12). Finalement,

$$\begin{aligned}
E[Z_{k-1}|\mathcal{F}_{k-2}] &= E(Z_k + R_{k-1}^b P_k - a_{k-1}^\top R_{k-1} P_k|\mathcal{F}_{k-2}) \\
&= E\{E(Z_k|\mathcal{F}_{k-1})|\mathcal{F}_{k-2}\} + E(R_{k-1}^b P_k|\mathcal{F}_{k-2}) - a_{k-1}^\top E(R_{k-1} P_k|\mathcal{F}_{k-2}) \\
&= (n-k+1)(1-\gamma)^{n-k}(\mu^b - c^\top b) + \mu^b(1-\gamma)^{n-k+1} \\
&\quad - a_{k-1}^\top \mu(1-\gamma)^{n-k+1} \\
&= (n-k+1)(1-\gamma)^{n-k}(\mu^b - c^\top b) + \mu^b(1-\gamma)^{n-k+1} \\
&\quad - \left\{ A^{-1}c + (n-k+1)(\mu^b - c^\top b) \frac{b}{1-\gamma} \right\}^\top \mu(1-\gamma)^{n-k+1} \\
&= (n-k+1)(1-\gamma)^{(n-k)}(\mu^b - c^\top b) + (\mu^b - c^\top b)(1-\gamma)^{n-k+1} \\
&\quad - (n-k+1) \frac{\gamma}{1-\gamma} (\mu^b - c^\top b)(1-\gamma)^{n-k+1} \\
&= (n-k+2)(1-\gamma)^{n-k+1}(\mu^b - c^\top b),
\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve.

En particulier, d'après (4.13), on a $E(Z_1) = n(1-\gamma)^{n-1}(\mu^b - c^\top b)$.

$$\begin{cases} \lambda^* &= \frac{G+n(1-\gamma)^{n-1}(\mu^b - c^\top b) - n\mu^b}{1-(1-\gamma)^n} \\ \varphi_k^* &= (\lambda^* - H_{k-1})b + A^{-1}c + (n-k)(\mu^b - c^\top b) \frac{b}{(1-\gamma)}, \quad \forall k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

A.3 Preuve du théorème 4.4.1

$$\begin{aligned}
A_k(\tau_{k-1}) &= E[R_k R_k^\top P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}] \\
A_k(i) &= \left\{ \sum_{j=1}^l E [R_k R_k^\top P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}, \tau_k = j] P [\tau_k = j | \mathcal{F}_{k-1}] \right\} \\
&= \left\{ \sum_{j=1}^l E [R_k R_k^\top | \tau_k = j] E [P_{k+1} | \tau_k = j, \mathcal{F}_{k-1}] P [\tau_k = j | \mathcal{F}_{k-1}] \right\} \\
&= \left\{ \sum_{j=1}^l Q_{ij} c_{k+1}(j) B(j) \right\}
\end{aligned}$$

L'avant dernière égalité se justifie par le fait que P_{k+1} et R_k sont indépendants étant donné τ_k . On a aussi que $P [\tau_k = j | \mathcal{F}_{k-1}] = P [\tau_k = j | \tau_{k-1} = i] = Q_{ij}$

$$\begin{aligned}
b_k(\tau_{k-1}) &= A_k^{-1} E [R_k P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}] \\
b_k(i) &= A_k^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^l E [R_k P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}, \tau_k = j] P [\tau_k = j | \mathcal{F}_{k-1}] \right\} \\
&= A_k^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^l E [R_k | \tau_k = j] E [P_{k+1} | \tau_k = j, \mathcal{F}_{k-1}] P [\tau_k = j | \mathcal{F}_{k-1}] \right\} \\
&= A_k^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^l Q_{ij} c_{k+1}(j) \mu(j) \right\} \\
&= \rho_{k+1}(i)
\end{aligned}$$

$$\text{On a } P_k = \prod_{t=k}^n (1 - b_t^\top R_t) = \prod_{t=k}^n (1 - \rho_{t+1}(i)^\top R_t) = P_{k+1} (1 - \rho_{k+1}(i)^\top R_k)$$

$$\begin{aligned}
c_k(i) &= E [P_k | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= E [P_{k+1} (1 - \rho_{k+1}(i)^\top R_k) | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{j=1}^l E [P_{k+1} (1 - \rho_{k+1}(i)^\top R_k) | \mathcal{F}_{k-1}, \tau_k = j] P [\tau_k = j | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{j=1}^l E [P_{k+1} | \mathcal{F}_{k-1}, \tau_k = j] E [(1 - \rho_{k+1}(i)^\top R_k) | \mathcal{F}_{k-1}, \tau_k = j] P [\tau_k = j | \mathcal{F}_{k-1}]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^l Q_{ij} c_{k+1}(j) \{1 - \rho_{k+1}(i)^\top \mu(j)\}$$

A.4 Preuve du théorème 4.4.2

Ceci est vrai pour $k = n$ car

$$a_n(i) = A_n(i)^{-1} \sum_{j=1}^l Q_{ij} B_b(j)$$

$$z_n(i) = \sum_{j=1}^l Q_{ij} \mu_b(j) - \rho_{n+1}(i)^\top \left\{ \sum_{j=1}^l Q_{ij} B_b(j) \right\}$$

Supposons que c'est vrai pour k et montrons que c'est aussi vrai pour $k - 1$.

On a, d'après (4.6) et l'hypothèse d'induction que

$$\begin{aligned} a_{k-1}(i) &= A_{k-1}(i)^{-1} E \{ R_{k-1} E(Z_k | \mathcal{F}_{k-1}) | \mathcal{F}_{k-2} \} \\ &\quad + A_{k-1}(i)^{-1} E \{ R_{k-1}^b c_k(\tau_{k-1}) | \mathcal{F}_{k-2} \} \\ &= A_{k-1}(i)^{-1} \sum_{j=1}^l Q_{ij} \{ z_k(j) \mu(j) + c_k(j) B_b(j) \}, \end{aligned}$$

montrant que (4.14) est vérifiée.

L'équation (A.1)

$$\begin{aligned} E(Z_k | \mathcal{F}_{k-1}) &= E(E[Z_k] | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= E \{ (1 - b_k^\top R_k) (Z_{k+1} + R_k^b P_{k+1}) | \mathcal{F}_{k-1} \} \\ &= E \{ E \{ (1 - b_k^\top R_k) (Z_{k+1} + R_k^b P_{k+1}) | \mathcal{F}_k \} | \mathcal{F}_{k-1} \} \\ &= E \{ (1 - b_k^\top R_k) (E \{ Z_{k+1} | \mathcal{F}_k \} + R_k^b c_{k+1}(\tau_k)) | \mathcal{F}_{k-1} \} \end{aligned}$$

$$E(Z_k | \mathcal{F}_{k-1}) = E \{ (1 - b_k^\top R_k) (E \{ Z_{k+1} | \mathcal{F}_k \} + R_k^b c_{k+1}(\tau_k)) | \mathcal{F}_{k-1} \} \quad (\text{A.3})$$

Finalement, d'après (A.3) et l'hypothèse d'induction, on a aussi

$$\begin{aligned} E(Z_{k-1} | \mathcal{F}_{k-2}) &= E \left[(1 - b_{k-1}^\top R_{k-1}) \{ E(Z_k | \mathcal{F}_{k-1}) + R_{k-1}^b c_k(\tau_{k-1}) \} | \mathcal{F}_{k-2} \right] \\ &= \sum_{j=1}^l Q_{ij} z_k(j) \{1 - b_{k-1}(i)^\top \mu(j)\} + \sum_{j=1}^l Q_{ij} c_k(j) \{ \mu_b(j) - b_{k-1}(i)^\top B_b(j) \}, \end{aligned}$$

prouvant que (4.15) est vraie.

A.5 Preuve des distributions conditionnelles des régimes

– pour tout $t = 1, \dots, n$ et $i = 1, \dots, l$ on a

$$\begin{aligned}
 \lambda_t(i) &= P(\tau_t = i | R_1, R_2, \dots, R_n) \\
 &= \frac{P(\tau_t = i, \bar{R}_1^n)}{P(\bar{R}_1^n)} \\
 &= \frac{P(\tau_t = i, \bar{R}_1^t, \bar{R}_{t+1}^n)}{P(\bar{R}_1^n)} \\
 &= \frac{P(\tau_t = i, \bar{R}_1^t)P(\bar{R}_{t+1}^n | \tau_t = i)}{P(\bar{R}_1^n)} \\
 &= q_t(i)\bar{q}_t(i) / \sum_{j=1}^l P(\tau_t = j, \bar{R}_1^n) \\
 &= q_t(i)\bar{q}_t(i) / \sum_{j=1}^l q_t(j)\bar{q}_t(j)
 \end{aligned}$$

– on a aussi

$$\begin{aligned}
 P(\bar{R}_1^n) &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l P(\tau_t = i, \tau_{t+1} = j, \bar{R}_1^n) \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l P(\tau_{t+1} = j | \tau_t = i) P(\tau_t = i) P(\bar{R}_1^n | \tau_t = i, \tau_{t+1} = j) \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l P(\tau_{t+1} = j | \tau_t = i) P(\tau_t = i) P(\bar{R}_1^t, \bar{R}_{t+1}^n | \tau_t = i, \tau_{t+1} = j) \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l P(\tau_{t+1} = j | \tau_t = i) P(\tau_t = i) P(\bar{R}_1^t | \tau_t = i) P(\bar{R}_{t+1}^n | \tau_{t+1} = j) \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l P(\tau_{t+1} = j | \tau_t = i) P(\bar{R}_1^t, \tau_t = i) P(\bar{R}_{t+2}^n, R_{t+1} | \tau_{t+1} = j) \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l P(\tau_{t+1} = j | \tau_t = i) P(\bar{R}_1^t, \tau_t = i) P(\bar{R}_{t+2}^n | \tau_{t+1} = j) P(R_{t+1} | \tau_{t+1} = j) \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l Q_{ij} q_t(i) \bar{q}_{t+1}(j) f_{t+1}(j)
 \end{aligned}$$

– pour tout $t = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, l$ et $j = 1, \dots, l$ on a

$$\begin{aligned}
\Lambda_t(i, j) &= P(\tau_t = i, \tau_{t+1} = j | R_1, R_2, \dots, R_n) \\
&= \frac{P(\tau_t = i, \tau_{t+1} = j) P(\overline{R}_1^n | \tau_t = i, \tau_{t+1} = j)}{P(\overline{R}_1^n)} \\
&= \frac{P(\tau_{t+1} = j | \tau_t = i) P(\tau_t = i) P(\overline{R}_1^n | \tau_t = i, \tau_{t+1} = j)}{P(\overline{R}_1^n)} \\
&= \frac{P(\tau_{t+1} = j | \tau_t = i) P(\tau_t = i) P(\overline{R}_1^t, \overline{R}_{t+1}^n | \tau_t = i, \tau_{t+1} = j)}{P(\overline{R}_1^n)} \\
&= \frac{P(\tau_{t+1} = j | \tau_t = i) P(\tau_t = i) P(\overline{R}_1^t | \tau_t = i) P(\overline{R}_{t+1}^n | \tau_{t+1} = j)}{P(\overline{R}_1^n)} \\
&= \frac{P(\tau_{t+1} = j | \tau_t = i) P(\overline{R}_1^t, \tau_t = i) P(\overline{R}_{t+2}^n, R_{t+1} | \tau_{t+1} = j)}{P(\overline{R}_1^n)} \\
&= \frac{P(\tau_{t+1} = j | \tau_t = i) P(\overline{R}_1^t, \tau_t = i) P(\overline{R}_{t+2}^n | \tau_{t+1} = j) P(R_{t+1} | \tau_{t+1} = j)}{P(\overline{R}_1^n)} \\
&= \frac{Q_{ij} q_t(i) \bar{q}_{t+1}(j) f_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l Q_{ij} q_t(i) \bar{q}_{t+1}(j) f_{t+1}(j)}
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Baum, L., Petrie, T., Soules, G. et Weiss, N., (1970). *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains*, Ann. Math. Statist., 41 :164-171.
- [2] Campbell, John Y. and Luis M. Viceira, (1999). *Consumption and portfolio decisions when expected returns are time varying*, Quarterly Journal of Economics, 114(2), 433-495.
- [3] Campbell, J.Y., et al., (2003). *A multivariate model of strategic asset allocation*, Journal of Financial Economics, 67(1), 41-80.
- [4] Campbell, J.Y., et al., (1997). *The econometrics of financial markets*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [5] Con Keating and William F. Shadwick, (2002). *A universal performance measure*, Technical report, The Finance Development Centre, London.
- [6] Diebold, F. X., Gunther, T. A., and Tay, A. S., (1998). *Evaluating density forecasts with applications to financial risk management*, International Economic Review, 39(4) :863-883.
- [7] Duan Li and Wan-Lung Ng., (2000). *Optimal dynamic portfolio selection : multiperiod mean-variance formulation*, Mathematical Finance, vol.10, No.3 , 387-406.
- [8] Fama, E.-F. and K.R French, (1989). *Business conditions and expected returns on stocks and bonds*, Journal of Financial Economics, 25(1) :23-49.

- [9] Frank K. Reilly and Keith C. Brown (2008). *Investment analysis and portfolio management*, 9th edition.
- [10] Genest, C. and Rémillard, B., (2008). *Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models* Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B, 44 :1096-1127.
- [11] Genest, C., Rémillard, B., and Beaudoin, D., (2009). *Omnibus goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study* Insurance Math. Econom., 44 :199-213.
- [12] Harry Markowitz, (1952). *Portfolio selection*, Journal of finance 7, No.1, 77-91.
- [13] Harry Markowitz, (1959). *Portfolio selection : efficient diversification of investment*, New York, John Willey.
- [14] Jean Vaillancourt and Francois Watier, (2005). *On an optimal multivariate mean-variance portfolio*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can., vol.27, 92-96.
- [15] Juang, B. et Rabiner, L., (1985). *Mixture autoregressive hidden markov models for speech signals. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 30 :1404-1413.
- [16] Mossin, I., (1968). *Optimal multi-period portfolio policies*, Journal of business, 41(2) :215-229.
- [17] Philippe, Bertrand, (2010). *Another Look at Portfolio Optimization under Tracking-error Constraints*, Financial Analysis Journal, vol. 66, n :3, CFA Institute.
- [18] Philippe Jorion, (1992). *Portfolio optimisation in practice*, The Financial Analysts Journal, vol.48, No.1, 68-74.
- [19] Philippe Jorion, (2003). *Portfolio optimisation with tracking-error constraints*, The Financial Analysis Journal, vol.59, No.5 , 70-82.
- [20] Pierre A. Devijver, (1985). *Baum's forward-backward algorithm revisited*, Pattern Recognition Letters 3, vol.3 number 6, 369-373.
- [21] Poritz, A., (1982). *Linear predictive hidden markov models and the speech signal. Acoustics, Speech and Signal Processing*, IEEE Conference, 7 :1291-1294.

- [22] Rabiner, L., (1989). *A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition*, Proceedings of the IEEE, 77 :257-286.
- [23] Rémillard, B., (2011). *Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in dynamic models*, SSRN Working Paper Series No. 1966476.
- [24] Rémillard, B., Hocquard, A. and Papageorgiou, N., (2010). *Option Pricing and Dynamic Discrete Time Hedging for Regime-Switching Geometric Random Walks Models*.
- [25] Rémillard, B. and Rubenthaler, S., (2009). *Optimal hedging in discrete and continuous time* Technical Report G-2009-77, Gerad.
- [26] Richard Roll, (1992). *A mean/Variance analysis of tracking error*, The Journal of portfolio management, vol. 18, No.4, 13-22.
- [27] Roncalli T. et Teïletche J., (2009). *An alternative approach to alternative beta*, Technical Report, Société Générale Asset Management.
- [28] Rosenblatt, M., (1952). *Remarks on a multivariate transformation*, Ann. Math. Stat., 23 :470-472.