HEC MONTRĒAL

La programmation dynamique et la simulation stochastique des marchés financiers : un avenir prometteur en recherche

Hatem Ben Ameur
Professeur titulaire
Département de sciences de la décision

30 septembre 2016

Hatem Ben Ameur

Hatem Ben Ameur est titulaire d’une maîtrise de mathématique, obtenue à la Faculté des sciences de Tunis, d’un diplôme de statisticien économiste et d’administrateur de l’INSEE, obtenu à l’ENSAE Paris, et d’un doctorat en administration, obtenu à HEC Montréal. Il a obtenu deux bourses d’excellence du Ministère de l’enseignement supérieur en Tunisie et un prix de meilleure thèse à HEC Montréal. Il a commencé sa carrière d’enseignant universitaire à l’ISG Tunis, au département des méthodes quantitatives de gestion. Il est présentement professeur titulaire au département des sciences de la décision à HEC Montréal. Il a aussi enseigné aux départements de finance de l’ESG à l’UQAM et « The Goodman School of Business » à « Brock University ». Ses intérêts de recherche portent sur l’ingénierie financière. Hatem publie ses recherches dans des journaux académiques de grande notoriété avec un support régulier du CRSNG.

Promus titulaires, les professeurs de HEC Montréal sont invités à donner un discours inaugural, appelé *leçon inaugurale*, à l’intention de la communauté universitaire. Dans le cadre de cette leçon, les professeurs font part de leurs réflexions sur leur carrière et sur la pratique de la gestion.

Programmation dynamique et simulation stochastique des marchés financiers : un avenir prometteur en recherche

Table des matières

Introduction

Ce cahier inaugural porte sur mon sujet préféré en recherche scientifique : construire des modèles dynamiques d'évaluation d'actifs et puis les résoudre numériquement. Mes chevaux de bataille sont la programmation dynamique et tout le spectre de méthodes de calcul intégral, qui va du calcul explicite jusqu'à la simulation Monte Carlo.

La formule de Feynman-Kac montre, depuis longtemps déjà, l'équivalence entre la représentation intégrale versus différentielle d'une fonction valeur d'un actif dans les modèles dynamiques continus. L'approche intégrale est cohérente avec l'approche actuarielle d'évaluation et reste opérationnelle même dans les espaces de dimension élevée. Est-ce le destin que ma formation mathématique pré-doctorale ait été dominée par la théorie d'intégration? Quoi qu'il en soit, la formule de Feynman-Kac fut ma porte d'entrée dans le monde de l'ingénierie financière.

L'*ingénierie financière* sous-tend la construction de modèles de marché, leur résolution numérique et leur ajustement empirique. Elle est à la croisée des chemins de 1- l'économie/finance, 2- des mathématiques pures/appliquées et de 3- l'informatique.

On considère un *modèle dynamique* où un « petit » investisseur averse au risque prend position sur un marché pur et parfait et transige sur plusieurs *actifs fondamentaux* dans l'objectif de maximiser la valeur de sa position à l'horizon d'investissement, en tenant compte de la dynamique aléatoire du marché. La *programmation dynamique* résout ce modèle sous la condition que le *processus d'état* des prix des actifs fondamentaux soit Markov. Ce dernier processus génère le flux d'information sur la base duquel l'investisseur prend ses décisions. Il arrive qu'on augmente/réduise le processus d'état selon le besoin en information, alors que la propriété de Markov reste valide. On parle d'un *processus de décision optimal de Markov*.

L'investisseur agit afin de maximise la valeur de sa position à l'horizon d'investissement en étant pleinement 1- informé de la position du marché à date et 2- conscient de tous les scénarios futurs sur l'évolution du marché et de leurs vraisemblances. À ce titre, cet investisseur est *visionnaire* et *rationnel*.

Mon exemple d'illustration concerne une position longue sur une *option américaine*. Cette dernière procure à son détenteur un privilège lié à l'achat ou la vente des actifs fondamentaux (*sous-jacents*). Par exemple, l'*option d'achat européenne* procure à son détenteur le privilège d'acheter un panier d'actifs sous-jacents à un prix et une maturité connus d'avance. Sa contrepartie américaine donne au détenteur le privilège additionnel de l'exercice prématuré.

Plus généralement, si les flux futurs promis par un actif sont fonction des prix des sous-jacents, on parle d'un *produit dérivé*. Les actifs fondamentaux eux-mêmes, les options, les futures, les swaps, les obligations gouvernementales, les obligations corporatives sont des exemples (Hull 2012). La famille de contrats dérivés, mon champ d'investigation préféré, est extrêmement large. Par exemple, mes recherches récentes portent sur l'évaluation d'actifs corporatifs intangibles, interprétés comme des dérivés sur la valeur d'une firme. Les économies de taxe, les coûts de réorganisation et les coûts de faillite sont des exemples (Ayadi, Ben-Ameur et Fakhfakh 2016).

Dans ce contexte, on ne se préoccupe pas vraiment d'expliquer le mécanisme de formation de prix des actifs fondamentaux, mais plutôt d'évaluer les actifs dérivés en fonction des prix des sous-jacents. Par abus de langage, les termes « options », « actifs dérivés » ou simplement « actifs » sont utilisés dans ce qui suit d'une manière interchangeable.

Sans perte de généralité, on considère un modèle de type inputs-output, où les inputs aléatoires sont transformés en un output par une fonction de production plus ou moins complexe. On s'intéresse alors à calculer des *paramètres de performance* comme l'output moyen, sa dispersion, ses quantiles et/ou la probabilité d'un événement particulier dans ce système. Dans tous les cas, ceci revient à calculer une moyenne dans une population (une valeur espérée). La *dimension apparente* d'un modèle inputs-output est le nombre de ses inputs.

Par exemple, le seul input aléatoire du modèle statique de Black et Scholes (1973) est le prix du sous-jacent à la maturité de l'option, lequel est transformé par une fonction linéaire par morceaux pour produire le flux futur promis par une option européenne.

On peut classer les modèles dynamiques selon la nature du temps d'observation et de l'espace état, ce qui donne les quatre familles suivantes :

Temps/Espace état	Continu	Discret
Continu	Diffusions	Peu étudié
Discret	GARCH	Arbres

Les processus stochastiques de Markov à temps/état continus sont appelés les *diffusions*. Ils sont bien identifiés et définis comme les solutions d'équations différentielles stochastiques; merci Feller. Ils se présentent sous forme d'intégrales stochastiques qui généralisent les intégrales de Riemann. La famille des diffusions est riche dans le sens où on peut toujours trouver une diffusion qui s'ajuste globalement au comportement d'un actif fondamental. Par exemple, le prix moyen d'une action va typiquement évoluer d'une manière monotone, alors qu'un taux de change moyen va typiquement osciller autour d'une moyenne de long terme.

On peut classer les diffusions en deux groupes selon leur degré de « maniabilité ». Je me concentre dans ce qui suit sur les diffusions pour lesquels on détient un minimum d'information sur leurs distributions conditionnelles. Les autres ne sont pas maniables, sauf par discrétisation de l'axe temporel et approximations numériques spécifiques aux processus stochastiques. Les approximations d'Euler et de Milstein sont des exemples. Ce dernier groupe de diffusions est de loin le plus général, mais son usage ne pose pas vraiment de défi d'ordre méthodologique, du moins en ingénierie financière. Il est moins apprécié par les réviseurs.

Les modèles de première génération sont bien acceptés dans la littérature, advenant une cohérence minimale avec les observations de marché. Souvent, ce sont des modèles à une variable d'état où le paramètre de performance est calculé sous forme fermée. La littérature accueille très bien le calcul explicite pour plusieurs raisons :

a. le calcul est « exact » et instantané;
b. les analyses de sensibilité sont robustes;
c. l'implantation informatique est simple.

Sauf que les modèles de première génération n'arrivent pas à reproduire tous les faits stylisés observés sur le marché. Par exemple, la diffusion lognormale dans (Black et Scholes 1973) est incapable de reproduire les sauts d'une cote boursière et encore moins ses asymétries de direction et/ou d'amplitude. Les chercheurs partent alors à la construction d'une deuxième génération de modèles capable de capturer les dits faits stylisés et ainsi de suite.

Dans ce contexte, Merton (1976) généralise Black et Scholes (1973) à des sauts gaussiens symétriques, Kou (2002) propose des sauts asymétriques doublement exponentiels, alors que Madan et Chang (1998) proposent de reproduire artificiellement les sauts par changement de temps dans un modèle variance-gamma. Les deux premiers dérivent des formules fermées/quasi-fermées pour les options européennes, alors que le troisième utilise l'intégration numérique. Ben-Ameur, Chérif et Rémillard (2016a et 2016b) traitent leurs versions américaines par programmation dynamique et éléments finis, après avoir dérivé et calculé explicitement les transitions du processus d'état.

Les modèles récents, de dernière génération, sont plus réalistes, mais plus complexes. Ils font appel à des méthodes de calcul de moins en moins efficaces. L'*efficacité des calculs*, qui est un compromis entre la précision et le temps de calcul, revêt d'une importance capitale en ingénierie financière. Il faut calculer vite et bien, sinon le marché aura bougé entre temps, laissant l'analyste avec des résultats obsolètes.

Je consacre ce cahier inaugural à la résolution de modèles dynamiques continus. La Section 1 porte sur l'évaluation des actifs dans les marchés non-arbitrés. La Section 2 discute le couplage de la programmation dynamique avec un large spectre de méthodes de calcul intégral, qui va du calcul explicite à la simulation Monte Carlo, discute la « malédiction de la dimension » et revient sur les spécificités de la simulation Monte Carlo. La notion d'efficcité des calculs est mise en perspective avec la dimension du problème. La Section 3 discute mes perspectives de carrière à HEC Montréal et la Section 4 conclut.

I. Marchés non-arbitrés

L’une des théories populaires d’évaluation d’actifs est celle de la *prime de risque*. Elle préconise de calculer la valeur espérée des flux futurs promis par un actif, lesquels flux sont actualisés à un taux qui reflète le niveau de risque de cet actif. Le défi majeur de cette théorie est le calcul d’une prime de risque par actif, en excès par rapport au taux sans risque.

La théorie d’évaluation dans les marchés non-arbitrés opère autrement :

a. On s’assure que le marché soit non-arbitré, ce qui revient à vérifier l’existence d’une nouvelle probabilité dite *neutre au risque*, qui fait que l’investisseur perçoive le marché comme s’il était sans risque. Pourtant, le même investisseur percevait le marché comme risqué sous la *probabilité physique*.
b. Plus besoin d’une prime de risque sous la nouvelle probabilité, on calcule la valeur espérée des flux futurs promis par l’actif, actualisés au taux sans risque.

Harrison et Kreps (1979) et Harrison et Pliska (1981) discutent le lien entre la propriété d’*absence d’arbitrage*, l’existence d’une *probabilité neutre au risque* et la *propriété de martingale* des prix des actifs fondamentaux, actualisés au taux sans risque.

La théorie d’évaluation dans les marchés non-arbitrés est intuitive et générale, mais présente un point faible. La probabilité neutre au risque n’est pas toujours unique, sauf si le marché est *complet* et permet la réplication des options par des stratégies autofinancées sur les sous-jacents. La multiplicité des probabilités neutres au risque donne naissance à de multiples prix pour un seul actif, tous compatibles avec la propriété d’absence d’arbitrage. Personnellement, ce résultat m’a gêné jusqu’au jour où j’ai commencé mes travaux sur les diffusions avec sauts. La multiplicité des prix pour un seul actif peut traduire un risque « incontrôlable ».

Danthine et Donaldson (2005) discutent les théories d’évaluation « actuarielles » et montrent leur équivalence sous certaines conditions. En ingénierie financière, l’évaluation des actifs dans les marchés non-arbitrés prend de l’ampleur. Elle est aussi le point de départ à des travaux dans les marchés imparfaits avec des barrières à l’entrée, des asymétries d’information, des limites sur les ventes à découvert, un manque de liquidité, parmi d’autres frictions.

Avec une dynamique de marché de Markov et un théorème fondamental d’évaluation des actifs dans les marchés non-arbitrés, la programmation dynamique devient une méthodologie de choix pour résoudre les processus de décision optimaux de Markov.

II. Programmation dynamique en ingénierie financière

A. Programmation dynamique et approximations locales

La programmation dynamique tire sa force de la possibilité de décomposer un processus de décision optimal de Markov en étapes qu'on résout à rebours dans le temps en partant de l'horizon d'investissement jusqu'à l'origine; merci à Bellman et ses disciples (Bertsekas 2005 et 2012). Le choix de la maturité comme étape de départ est motivé par le fait que la fonction valeur de l'actif à évaluer soit connue explicitement en fonction des prix des actifs fondamentaux. Sinon, toute autre date, où la fonction valeur est approximée/estimée avec suffisamment de précision, convient.

Un programme dynamique se présente donc comme une boucle temporelle (inversée) suivie d'une (multiple) boucle d'état au cœur desquelles on calcule la valeur de l'actif à analyser. Puis, on sort de la (multiple) boucle d'état et on extrapole la fonction valeur à partir des nœuds d'évaluation à l'espace état en entier. On remonte alors le temps à rebours et on achève une autre étape, jusqu'à atteindre l'origine. Cette interprétation d'un programme dynamique comme une succession de boucles imbriquées suppose des dates de décision et des nœuds d'évaluation en nombre fini, ce qui peut nécessiter une discrétisation de l'axe temps et/ou des axes d'état, selon le cas.

Au cœur du programme, une option américaine, par exemple, sous-tend le calcul de sa valeur d'exercice, sa valeur de détention et sa valeur globale et, au passage, l'identification de la décision optimale du détenteur : arrêter et collecter le flux monétaire promis ou détenir encore jusqu'à la prochaine date de décision. Alors que la valeur d'exercice est transcrite au contrat, la valeur de détention pose un défi majeur de calcul efficace. Elle se calcule comme une moyenne conditionnelle des potentialités futures du contrat, actualisées au taux sans risque. Il s'agit d'une intégrale de dimension élevée, incalculable sous forme fermée. Il faut donc coupler le programme dynamique avec une méthode de calcul intégral (Judd 1998 et Gerald et Wheatley 1999). Par ordre décroissant d'efficacité, on recense :

a. le calcul explicite;
b. le calcul quasi-explicite;
c. l'intégration numérique;
d. la simulation quasi-Monte Carlo;
e. les approximations numériques locales;
f. les approximations numériques globales + leurs versions neuronales;
g. la simulation Monte Carlo.

On comprend alors le sens de mots clés en vogue comme « approximate-dynamic programming » ou « neuro-dynamic programming ».

Pour résumer et conclure, on peut voir un programme dynamique comme une boucle temporelle (inversée) suivie d'une (multiple) boucle d'état au cœur desquelles on calcule des intégrales de la manière la plus efficace possible. À la sorte des boucles d'état, une extrapolation de la fonction valeur est nécessaire. On peut fixer une précision acceptable et minimiser le temps de calcul ou, mieux encore, fixer un temps de calcul acceptable et maximiser la précision.

B. Malédiction de la dimension

Au fur et à mesure qu'on aborde des modèles de marché plus réalistes et donc plus complexes, le compromis entre précision et temps de calcul est altéré. La recherche d'un maximum d'efficacité au cœur d'un programme dynamique se fait à différents niveaux d'une construction académique :

a. Le design du programme dynamique;
b. Le choix et l'usage des méthodes de calcul intégral;
c. L'implantation informatique.

Trois approches dominantes de résolution des modèles dynamiques (continus) se livrent bataille sur le terrain de l'efficacité des calculs : 1- l'*approche différentielle*, 2- les *arbres* et 3- l'*approche intégrale*. La première repose sur les différences finies, la seconde sur le calcul discret et la troisième sur la programmation dynamique couplée aux méthodes de calcul intégral. Elles sont dites des approches « backward » car elles opèrent toutes à rebours dans le temps.

La croyance que l'approche différentielle et les arbres sont plus efficaces que la programmation dynamique vient de l'idée que le calcul d'une dérivée ou d'une somme discrète (à deux/trois composantes) est plus rapide que le calcul d'une somme continue (une intégrale). Cette croyance est fausse pour les raisons suivantes :

a. L'approche différentielle et les arbres nécessitent une discrétisation de l'axe temps et un passage limite, ce qui n'est pas toujours le cas pour l'approche intégrale;
b. L'approche différentielle et les arbres sont sensibles aux changements abrupts des fonctions valeur, ce qui n'est pas le cas pour l'approche intégrale;
c. L'approche différentielle et les arbres cessent de fonctionner dans les espaces de dimension élevée, ce qui n'est pas le cas pour l'approche intégrale.

Pour résumer et conclure, l'efficacité relative des calculs entre les trois approches se négocie au cas par cas si la dimension est faible/intermédiaire. Au mieux de mes connaissances, la programmation dynamique, couplée à la simulation Monte Carlo, est notre unique porte de sortie dans les espaces de dimension élevée.

Des combinaisons entre les trois approches sont possibles. Par exemple, si l'approche différentielle s'avérait plus efficace pour évaluer un actif, on peut l'utiliser quand la prise de décision est continue et basculer sur l'approche intégrale quand la prise de décision est discrète. Une obligation rachetable dotée d'une période de protection est un exemple. Cet actif donne à l'émetteur l'option de racheter sa dette avant son échéance à un prix fixé d'avance. La période de protection protège l'investisseur du rachat pendant les premières années de l'obligation. Je cherche coauteur spécialiste des différences finies pour concrétiser cette idée!

La bataille de l'efficacité relative se joue aussi au niveau d'une seule approche. Je reporte une situation particulière en guise d'illustration. Duan et Simonato (2001) ont proposé une méthode d'évaluation d'options américaines sous GARCH, appelée « Markov Chain ». Une analyse approfondie a montré que cette méthode n'est autre qu'un programme dynamique particulier couplé avec des approximations constantes par morceaux dans un espace à deux dimensions (apparentes). La réponse est venue via un programme dynamique couplé aux interpolations bilinéaires par morceaux. Le gain d'efficacité était fulgurant. De plus, par augmentation de l'espace état, le programme dynamique fut généralisé à une large famille de processus GARCH. Le tout s'est soldé par une publication dans la prestigieuse revue *Management Science* (Ben-Ameur, Breton et Martinez 2009).

Pour des problèmes à une dimension, possiblement à deux dimensions apparentes, on est maintenant capable à HEC Montréal d'évaluer des options américaines par programmation dynamique et éléments finis avec quatre chiffres de précision en une fraction de seconde sur nos laptops habituels. Cette performance extrême a été bien acceptée par la littérature et s'est traduite par de multiples publications dans des journaux de grande notoriété.

Le bilan était tellement prometteur qu'on était tenté de généraliser la même démarche pour des options à deux dimensions effectives (Ben-Abdellatif, Ben-Ameur et Rémillard 2016). Les premiers résultats étaient sans équivoque : les calculs prennent plus de 24 heures pour atteindre un niveau de précision acceptable. On était profondément hors-jeu!

Pourquoi est-on passé d'une seconde à 24 heures de calcul? Le couplage de la programmation dynamique aux éléments finis nécessite le calcul de paramètres de transition qu'on dérive et calcule sous forme fermée. La probabilité de transition que le processus d'état parte d'une position donnée à une date d'évaluation et visite un intervalle/rectangle donné à la prochaine date d'évaluation est un exemple.

Si chaque axe d'état est divisé en 1000 nœuds d'évaluation, on dénombre 1000^2, soit un million de nombres en double précision à calculer et à stocker en mémoire si le modèle est à une dimension. Par ailleurs, on dénombre $(1000^2)^2$, soit mille milliards de nombres en double précision à calculer si le modèle est à deux dimensions. On voit vite la différence.

Plus encore, nos ordinateurs actuels sont capables de stocker quelques millions de nombres en double précision, mais certainement pas des milliers de milliards. Il faut donc recalculer les mêmes paramètres d'une étape à l'autre au cœur du programme, ce qui pénalise d'avantage le programme dynamique. Le problème est plus grave encore quand la dimension augmente. On comprend maintenant la raison principale à l'explosion du temps de calcul. Les chercheurs opérationnels parlent de « curse of dimensionality », qu'on traduit littéralement par « malédiction de la dimension élevée ».

Notre nouvelle stratégie est comme suit :

a. On adopte un calcul parallèle des paramètres de transition, au lieu d'un calcul séquentiel;
b. On implante des interpolations quadratiques par morceaux, au lieu des interpolations bilinéaires par morceaux, déjà implantées.

Primo, le parallélisme de l'algorithme est possible dans ce contexte car on peut calculer les paramètres de transition indépendamment les uns des autres. On peut donc utiliser des centaines de cœurs (CPUs) différents d'un même serveur informatique pour les calculer simultanément. Dépendamment des ressources mises à notre disposition, le temps de calcul peut passer de 24 heures à quelques secondes; merci Compute Canada et Calcul Québec. Pas pour autant qu'on puisse parler de gain d'efficacité car la réduction du temps de calcul est accompagnée d'un changement de machine. Cependant, on est des pionniers en ingénierie financière à paralléliser des algorithmes. On travaille la main dans la main avec le compilateur GCC, la librairie de mathématique appliquée GSL et la librairie de calcul parallèle MPI, du domaine public. Le processus de publication nous dira à quel degré on est perçu comme novateurs.

Secundo, comme la fonction valeur d'une large famille d'options se présente sous la forme d'un bol *convexe*, on s'attend à ce que les interpolations quadratiques par morceaux s'y ajustent beaucoup mieux que les interpolations bilinéaires par morceaux et que le temps de calcul additionnel soit largement compensé par le gain en précision inhérent à l'approximation quadratique. On s'attend à une amélioration significative de l'efficacité.

Les approximations polynomiales de haut degré, dites *spectrales*, peuvent aider à réduire le nombre de nœuds d'évaluation sur chaque axe d'état (Breton et de Frutos 2012), tout en gardant le même niveau de précision. Au-delà de ses défis spécifiques, cette méthode peut engendrer des gains substantiels d'efficacité dans les espaces de dimension intermédiaire.

Pour conclure, dans le contexte d'évaluation des actifs, l'approche différentielle, les arbres et la programmation dynamique couplée aux approximations locales ne sont plus opérationnels dans les espaces de dimension élevée. Autrement, dans les espaces de dimension faible/intermédiaire, il y a des possibilités d'intégration entre les trois approches, ce qui est bien perçu par la littérature.

C. Casser la malédiction : programmation dynamique et simulation Monte Carlo

La raison principale à la « malédiction de la dimension élevée » est qu'une visite systématique de l'espace état devient très onéreuse quand la dimension augmente. On est mieux de se laisser guider par le hasard. Oui, se faire guider par un aveugle non-initié comporte des avantages indéniables : ses choix sont sans biais et permettent des estimations convergentes. La simulation Monte Carlo, qui propose d'estimer une moyenne dans la population par une moyenne dans un échantillon aléatoire, assure une estimation convergente à la vitesse $1/2$. En bref, pour doubler la précision, il faut quadrupler la taille de l'échantillon (le nombre de visites au hasard) (Glasserman 2004).

La vitesse de convergence de la simulation Monte Carlo est certes modeste, mais elle est indépendante de la dimension de l'espace état. Du coup, elle permet de casser partiellement la « malédiction de la dimension élevée » (Powell 2007).

Parce que la simulation Monte Carlo est une méthode « forward », elle a été longtemps négligée pour analyser les options américaines dont l'évaluation nécessite des approches « backward ». C'est là une erreur d'appréciation qui s'est corrigée avec le temps car la simulation Monte Carlo, comme méthode d'estimation de valeurs espérées, se combine naturellement avec la programmation dynamique comme tout-autre méthode de calcul intégral.

Toutefois, son usage présente un défi majeur dans les modèles continus. Les trajectoires simulées du processus d'état ne se rencontrent presque jamais dans le futur, ce qui compromet l'estimation de valeurs moyennes au cœur d'un programme dynamique. Plusieurs stratégies sont adoptées dans la littérature, parmi lesquelles on reporte :

a. les estimations Monte Carlo de taille unitaire, corrigées par des approximations globales (Longstaff et Schwartz 2001);
b. des estimations Monte Carlo de taille acceptable, obtenues par regroupement de trajectoires (Tilley 1993);
c. des estimations Monte Carlo « forward » basées sur des stratégies d'exercice sous-optimales (Ibànez et Zapatero 2004).

Il est vrai que l’estimateur Monte Carlo converge lentement vers sa cible, mais on peut souvent accélérer sa vitesse par réduction de variance. On recense plusieurs techniques de réduction de variance (Boyle, Broadie, and Glasserman 1997) dont :

a. L’induction de corrélation;
b. Le conditionnement;
c. L’échantillonnage par importance.

L’*induction de corrélation* tire profit de la corrélation possible entre estimateurs. Dans un sur-modèle, on peut toujours trouver un sous-modèle où le paramètre de performance à calculer est connu sous forme fermée. On peut alors centrer l’output du sous-modèle et puis l’utiliser pour contrôler l’output dans le sur-modèle et, ainsi, réduire sa variance. Le gain en précision est d’autant meilleur que la corrélation entre les deux outputs est élevée dans les deux sens. Ben-Ameur, L'Écuyer et Lemieux (2004) donnent la manière optimale de combiner toutes les techniques de réduction de variance basées sur l’induction de corrélation dans la prestigieuse revue *Mathematics of Operations Research*.

La loi des espérances itérées stipule qu’en calculant la moyenne d’une moyenne conditionnelle d’un output, on retombe sur nos pas et on retrouve la moyenne inconditionnelle du même output. Donc, un output et sa moyenne conditionnelle sont deux estimateurs sans biais d’une même cible. On a une bonne vision de ce résultat dans les espaces Euclidiens par double projection orthogonale d’un vecteur sur un sous-espace vectoriel. Le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle illustre bien la réduction de variance.

L’application de ce résultat est immédiate : dès qu’on arrive à exprimer explicitement une moyenne conditionnelle, on gagne. On obtient un *estimateur Monte Carlo conditionnel* qui vise la même cible que l’estimateur Monte Carlo brut, mais en plus précis. La réduction de variance est inversement reliée à la quantité d’information révélée à l’investisseur via le conditionnement. Donc, le plus tôt on conditionne et le plus on réduit la variance.

L’*échantillonnage par importance* oriente la visite aléatoire de l’espace état vers les zones d’importance. Cette méthode peut s’avérer très utile quad la cible est la probabilité d’un événement rare, qui est une moyenne d’un output particulier de Bernoulli. Observer la valeur 0 sur presque tous les scénarios simulés est clairement contreproductif. Les zones d’importance sont alors les régions peu vraisemblables, où l’indicatrice produit 1.

Échantillonner par importance se fait par changement de mesure et ajustement de l’output par un ratio de vraisemblance, ce qui revient à modifier le comportement des inputs afin d’orienter l’output vers les zones importantes. Si le changement de mesure est judicieux, on récupère une réduction de variance de l’output modifié, sinon, la méthode peut produire une inflation de variance.

La littérature reporte une méthodologie de calcul intégral similaire à la simulation Monte Carlo, dite *simulation quasi-Monte Carlo*. Elle recherche la faible discrépance (la haute régularité) des échantillons plutôt que leur choix au hasard. Dans ce contexte, la loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale ne fonctionnent plus. À la place, sous des conditions de régularité de la fonction à intégrer, le théorème de Koksma-Hlawka justifie la convergence des approximations quasi-Monte Carlo vers leurs cibles à la vitesse $\log(d)^n/n$, où d est la dimension du problème et n la taille de l'échantillon. Le simulation quasi-Monte Carlo est populaire en physique (Morokoff et Caflisch 1995), mais pas encore en ingénierie financière.

La vitesse de convergence de l'approximation quasi-Monte Carlo comporte un avantage et un inconvénient. Cette vitesse finit forcément par dépasser $1/2$, mais elle dépend de la dimension du problème. À voir de près, quasi-Monte Carlo bat Monte Carlo dans les espaces de dimension intermédiaire. Si la dimension continue d'augmenter, la simulation Monte Carlo prend le dessus.

La simulation Monte Carlo, la simulation quasi-Monte Carlo et les méthodes d'intégration numérique (quadratures) sont comparables dans le sens où elles diffèrent seulement par la manière de choisir les nœuds d'évaluation d'une intégrale. L'intuition dit de mettre plus de points là où le processus se trouve le plus souvent et là où la fonction montre des changements abrupts. Seule la simulation Monte Carlo respecte la première intuition, mais pas le deuxième. Il reste du travail à faire.

Les méthodes de réduction de la dimension effective peuvent aider à résoudre les modèles dynamiques de dimension élevée, jusqu'à une certaine limite (Jin et al. 2013). Si la dimension est de l'ordre de centaines de milliers, comme c'est le cas d'un portefeuille de crédit par exemple, notre seule issue est de combiner la programmation dynamique, la simulation Monte Carlo et les techniques de réduction de variance.

III. Perspectives de carrière

J'affirme avec grande fierté mon appartenance à l'équipe « ingénierie financière » de HEC Montréal. Je contribue actuellement par :

a. un cours de simulation Monte Carlo et ses applications en finance;
b. des directions/codirections de mémoires.

Je collabore actuellement en recherche avec Bruno Remillard (HEC Montréal, sciences de décision) sur l'évaluation d'actifs, Julien Le-Maux (HEC Montréal, comptabilité) sur la prévision de faillite corporative, Mohamed Ayadi (Brock University, finance) sur la gestion de portefeuille et Abdelwahed Trabelsi (ISG Tunis, MQG) sur les réseaux de neurones et leurs applications en finance. Le croisement des connaissances est vraiment enrichissant. J'en profite pleinement.

De plus, j'ai déjà pris pied dans notre BAA à spécialisation intégrée EFM, conjoint avec les départements d'économie et de finance. Je prépare un cours de mathématiques appliquées sur les modèles dynamiques déterministes. C'est une chance qu'on m'ait invité à démarrer ce cours.

Depuis plusieurs années déjà, je contribue à la maîtrise en intelligence d'affaires par un cours régulier sur les analyses factorielles multiples et un autre intermittent sur la programmation R et SAS. Je suis sensible au développement de cette maîtrise dont les interactions avec l'ingénierie financière vont en croissant.

Pendant ma sabbatique, qui s'est terminée en juin 2016, j'ai investi une partie de mon temps sur les modèles de prévision des ventes, planification des commandes et gestion de stocks. Dans cette veine, j'ai produit un logiciel R pour Caterpillar Tunisie dans le cadre d'une étude d'envergure qui a eu le plus grand succès. L'étude a touché tant les machines à ventes régulières que les machines à rotation lente. Les modèles de prévision des ventes de ces dernières sont spécifiques à cause de l'excès de la valeur 0 dans les séries.

Si mes collègues Jean-François Cordeau et Yossiri Adulyasak, responsables des programmes de maîtrise en logistique/gestion des opérations, sont intéressés par un cours de modélisation sur la prévision des ventes, planification des commandes et gestion des stocks, je serais ravi d'apporter ma modeste contribution.

Au-delà des cours, la démocratisation/vulgarisation de nos bases de données sous licence à HEC Montréal constituent un projet pédagogique qui me tient à cœur. De toute évidence, le sujet intéresse aussi mon collègue Bernard Bizimana, Directeur de notre bibliothèque, avec qui j'ai eu un échange très positif sur le sujet. On constate que nos bases de données, payées au prix fort, sont peu représentatives de nos départements et peu utilisées par la communauté HEC Montréal. On concorde à dire que la solution passe par un usage prononcé de nos bases de données dans nos cours de premier cycle.

On est encore loin de cet objectif, mais il reste accessible à moyen terme si l'école décidait d'en faire une priorité. Personnellement, je pense que l'usage systématique des bases de données dans nos cours de premier cycle nous fera franchir une nouvelle étape dans l'excellence.

Conclusion

Il est temps pour moi de réfléchir à renouveler mon CRSNG qui vient à maturité en 2018. Le thème d'évaluation des actifs dérivés par programmation dynamique est suffisamment général pour justifier de nouvelles demandes de subvention. Je travaille actuellement sur la dette corporative et la structure de capital de la firme. La classification des problèmes par dimension est d'actualité avec une emphase sur les dimensions intermédiaires/élevées plus prononcée que les dimensions faibles. Casser la « malédiction de la dimension » est un mot clé dans la littérature.

Coupler les constructions numériques d'évaluation des obligations risquées avec les constructions empiriques de prévision de faillite corporative donne naissance à des modèles dits *hybrides*. Il y a lieu de penser que l'information économique rationnelle (non-observable) se combine bien à l'information comptable/financière (observable) pour mieux prévoir la faillite corporative. Pour clore le tout, il importe de mettre en évidence les gains pour l'industrie de la finance :

a. Mieux évaluer des actifs peu liquides, comme les obligations corporatives, est utile pour les investisseurs;
b. Mieux prévoir le stress financier réduit les coûts économiques et sociaux de la faillite.

Pour terminer et conclure, HEC Montréal offre un environnement favorable à la recherche et l'enseignement. Pour preuve, on publie sur une base régulière avec nos étudiants de maîtrise et de doctorat dans les meilleures revues au monde. Les ressources mises à la disposition des chercheurs sont plus qu'importantes. Notre centre de calcul, le LACED, et notre centre de recherche, le GERAD, sont des atouts majeurs. De plus, le corps enseignant est entouré par un staff administratif extrêmement compétent. Même nos bâtiments et nos classes me semblent maintenant optimisés pour l'apprentissage, combien même j'étais réticent à leur égard à mon arrivée.

Bref, il y a tout à HEC Montréal pour réaliser une brillante carrière.

Bibliographie

[1] Ayadi, M., Ben-Ameur, H., and Fakhfakh, T. (2016). A dynamic program for valuing corporate securities. *European Journal of Operational Research*, 249:751-770.

[2] Ben-Abdellatif, M., Ben-Ameur, H., and Rémillard, B. (2016), Dynamic programming and parallel computing for valuing two-dimensional American-style options. GERAD report, G-2016-48.

[3] Ben-Ameur, H., Breton, M., and Martinez, J.-M. (2009). A dynamic programming approach for pricing derivatives in the GARCH model. *Management Science*, 55:252–266.

[4] Ben-Ameur, H., Chérif, R., and Rémillard, B. (2016). American options under variance-gamma processes. GERAD report no G-2016-74.

[5] Ben-Ameur, H., Chérif, R., and Rémillard, B. (2016). American-style options in jump-diffusion models: estimation and evaluation. *Quantitative Finance*, 16:1313-1324.

[6] Ben-Ameur, H., L'Écuyer, P., and Lemieux, C. (2004). Combination of general antithetic transformations and control variables. *Mathematics of Operations Research*, 29:946-960.

[7] Bertsekas, D.P. (2005). *Dynamic Programming and Optimal Control*. Third edition. Volume 1, Athena Scientific, Belmont, MA.

[8] Bertsekas, D.P. (2012). *Dynamic Programming and Optimal Control*, Fourth edition, Volume 2, Athena Scientific, Belmont, MA.

[9] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637-654.

[10] Boyle, P.P., Broadie, M., and Glasserman, P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1267-1321.

[11] Breton, M. and de Frutos, J. (2012). *Approximation of dynamic programs*. In Handbook of Computational Finance, edited by Duan, J.C., Härdle, W., and Gentle, J.E., 633-649, Springer, Berlin.

[12] Danthine, J.P. and Donaldson, J.B. (2005). *Intermediate Financial Theory*. Academic Press, CA:

[13] Duan, J.-C. and Simonato, J.-G. (2001). American option pricing under GARCH by a Markov chain approximation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25:1689-1718.

[14] Gerald, C.F. and Wheatley, P.O. (1999). *Applied numerical analysis*, Sixth edition. Addison-Wesley, MA.

[15] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer, Berlin.

[16] Harrison, J.M. and Kreps, D.M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20:381-408.

[17] Harrison, J.M. and Pliska, S.R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11:215-260.

[18] Hull, J. (2012). Options, futures, and other derivative securities, Eighth edition. Prentice-Hall, NJ.

[19] Ibànez, A. and Zapatero, F. (2004), Monte Carlo valuation of American options through computation of the optimal exercise frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 39:253-275.

[20] Jin, X., Li, X., Tan, H.H., and Wu, Z. (2013). A computationally efficient state-space partitioning approach to pricing high-dimensional American options via dimension reduction. *European Journal of Operational Research*, 231:362-370.

[21] Judd, K.L. (1998). *Numerical methods in economics*. MIT Press, MA.

[22] Kou, S.G. (2002). A jump-difusion model for option pricing. *Management Science*. 48:1086-1101.

[23] Longstaff, F.A. and Schwartz, E.S. (2001). Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14:113-147.

[24] Madan, D.B., Carr, P.P., and Chang, E.C. (1998). The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*. 2:79-105.

[25] Merton, R.C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*. 3:125-144.

[26] Morokoff, W.J. and Caflisch, R.E. (1995). Quasi-Monte Carlo integration, *Journal of Computational Physics*. 122:218-230.

[27] Powell, W.B. (2007). *Approximate dynamic programming: solving the curses of dimensionality*. Wiley, NY.

[28] Tilley, J.A. (1993). Valuing American options in a path simulation model. *Transactions of the Society of Actuaries*, 45:83-104.

HEC Montréal
3000, chemin de la Côte-Sainte-Catherine
Montréal (Québec) H3T 2A7

www.hec.ca

HEC MONTRÉAL
Campus durable

HEC Montréal – Campus durable est un mouvement qui mobilise l'ensemble de la communauté universitaire autour de trois axes principaux : enseignement, recherche et milieu de vie.

100%
EcoLogo
BIO GAZ

Soucieuse de l'environnement, HEC Montréal privilégie l'utilisation de papier recyclé fabriqué au Québec dans le respect de normes environnementales reconnues.

14.11/**21**.13.1